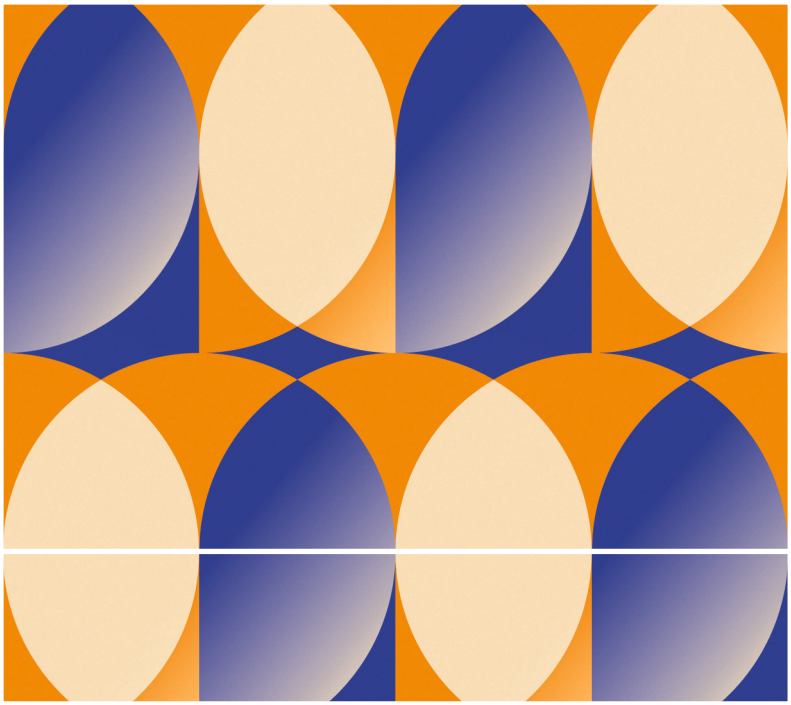
Nina Maderner

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Angewandte Mathematik

Lehrbuch für Höhere Technische Lehranstalten – Band 2



HANSER

Maderner

Angewandte Mathematik



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!
Auf *plus.hanser-fachbuch.de* gibt es kostenloses Zusatzmaterial zu diesem Buch. Den Zugangscode finden Sie am Ende des Werkes.



Bleiben Sie auf dem Laufenden!
Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter
www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Nina Maderner

Angewandte Mathematik

Lehrbuch für Höhere Technische Lehranstalten –
Band 2

HANSER

Über die Autorin:
Dr. Mag. Nina Maderner ist Mathematiklehrerin am tgm Wien.

Print-ISBN: 978-3-446-48592-1
E-Book-ISBN: 978-3-446-48702-4

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.
Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2027 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, *www.rebranding.de*, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © Max Kostopoulos
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Vorwort

Dieses Buch ist für Schülerinnen und Schüler Höherer Technischer Lehranstalten im zweiten Jahrgang geschrieben. Selbstverständlich ist es im herkömmlichen Regelunterricht so wie jedes andere Lehrbuch für Angewandte Mathematik verwendbar. Im Unterschied zu vielen anderen Lehrbüchern aber, eignet es sich durch den Aufbau, die Art der Erklärungen, die Auswahl der Beispiele und zahlreiche Hinweise auf die üblichen Fallen und Tücken bestens zum Selbststudium oder für alle Unterrichtsarten, die dieses unterstützen. Ich selbst habe beide Bände dieser Buchreihe im ersten und zweiten Jahrgang der Lernbüroklassen der Abteilung für Elektrotechnik am TGM erfolgreich eingesetzt.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich mich bei den Schülerinnen und Schülern der Lernbüroklassen bedanken. Sie waren meine besten Korrekturleser und haben mich nicht nur auf Fehler, die sich eingeschlichen haben, aufmerksam gemacht, sondern mir auch aufgezeigt, wo meine Formulierung zu knapp oder umständlich sind.

Die wesentliche Besonderheit dieses Buches liegt in der Nutzung der Lernsoftware LeTTo im Aufgabenteil. Am Ende jedes Kapitels findet sich ein Abschnitt mit zahlreichen Aufgaben, die online als LeTTo-Beispiele abrufbar sind.

Der Zugang zu LeTTo ist über *https://plus.hanser-fachbuch.de* möglich. Für das Hosting der LeTTo-Aufgaben bedanke ich mich herzlichst bei der LeTTo GmbH und für die damit einhergehende technische Unterstützung bei Thomas Mayer und Werner Damböck. Sind sie der geniale und kreative Kopf von LeTTo, so ist Daniel Asch-Goiser, in seiner unschlagbaren Begeisterungsfähigkeit und nie enden wollenden Energie, dessen Seele. Auch ihm gilt mein großer Dank.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Kollegen Christian Kral, der mich ermutigte, diese Buchreihe zu schreiben und mir immer – und ich meine immer – mit Rat und Tat zur Seite steht.

Meinen Lektoren Frank Katzenmayer und Christina Kubiak vom Carl Hanser Verlag danke ich für die Geduld und für die gute und stets konstruktive Zusammenarbeit.

Wien, im Juli 2026 Nina Maderner

Struktur des Buches

Das Buch ist in vier Teile gegliedert:

Teil 1: Tausend und eine Funktion ist der längste Teil des Buches. Er behandelt Funktionen und Methoden, die sich aus ihnen ableiten.

Teil 2: Eine Insel mit vielen Brücken besteht aus dem Kapitel über komplexe Zahlen.

Teil 3: Wir machen uns ein Bild behandelt Teile der Mathematik, die auf einer grafischen Darstellung beruhen, wie die Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks, Vektoren oder die Parameterdarstellung von Kurven.

Teil 4: Das Haus der Wahrscheinlichkeiten behandelt Grundlagen der Statistik.

Zeichenerklärung



Hier finden sich **Definitionen** von Eigenschaften und Begriffen.



Hier finden sich **Rechenregeln**, **Formeln** und **Zusammenhänge**, die aus den Definitionen abzuleiten sind.



Hier werden Eigenschaften nach einer **Checkliste** untersucht.



Hier wird eine **Anleitung zum Technologieeinsatz** gegeben.



Hier findet sich ein **Exkurs**.



Beispiel 0.1 (CD)

Alle **Beispiele** werden im Buch **vollständig gelöst und erklärt**. Sie dienen als Anleitung und Hilfe zum späteren selbstständigen Rechnen. Die Buchstaben A, B, C oder D in der Klammer beziehen sich auf die erforderlichen **Handlungskompetenzen:**

A: Modellieren und Transferieren

B: Operieren und Technologieeinsatz

C: Interpretieren und Dokumentieren

D: Argumentieren und Kommunizieren

Aufgabenteil



In jedem Kapitel gibt es zu Beginn des Aufgabenteils eine kurze Anleitung zu der Eingabe in LeTTo.

Hier werden zusätzliche Arbeitsanweisungen oder Tipps und Hilfestellung zum Umgang mit LeTTo gegeben.

Aufgabe 0.1 (B)

Am Ende jeden Kapitels befindet sich ein **Aufgabenteil**. Die Aufgaben sind online als **LeTTo-Beispiele** in einer Vielzahl von weiteren Datensätzen abrufbar. Die im Buch abgedruckte Aufgabe ist nur eine von vielen Varianten.

Die Richtigkeit der Lösung wird direkt nach der Eingabe angezeigt, sodass LeTTo nicht nur immer wieder neue Beispiele kreiert, sondern auch die Funktion eines Lösungsheftes übernimmt.

Auch hier beziehen sich die Buchstaben A, B, C oder D im Kästchen links neben der Beispielnummer auf die erforderlichen **Handlungskompetenzen**.

Inhalte bei Hanser Plus

Der Zugang zu Hanser Plus ist unter *plus.hanser-fachbuch.de* möglich. Dort gibt man den am Ende des Buches abgedruckten Code ein und gelangt zu:

LeTTo-Beispiele

Alle im Buch gestellten Aufgaben finden sich hier. Sie haben dieselben Aufgabennummern wie die entsprechenden Musteraufgaben im Buch und sind auch genau so gegliedert. Sie können wiederholt geübt werden, wobei jedes Mal auf einen anderen Datensatz zurückgegriffen werden kann. Dadurch ändern sich die Werte und Grafiken der Beispiele, sodass eine sehr umfangreiche Beispielsammlung entsteht. Ist die Eingabe der Lösung richtig, erscheint ein grünes Kästchen, was für die meisten sehr motivierend ist.

Inhalt

Teil 1 Tausend und eine Funktion 1

1 Charakterstudien – Eigenschaften von Funktionen 3

1.1 Was bisher geschah 5

1.2 Eigenschaften von Funktionen 12

1.2.1 Asymptoten und Pole 12

1.2.2 Monotonie 14

1.2.3 Spezielle Punkte einer Funktion 14

1.2.4 Symmetrie 18

1.3 Verschiebung von Funktionen 20

1.4 Kurvenuntersuchung 23

1.5 Umkehrfunktionen 26

1.6 Aufgaben 29

2 Steinwurf – Polynome 35

2.1 Quadratische Funktionen oder Parabeln 36

2.1.1 Parabeln mit Scheitel im Ursprung 36

2.1.2 Allgemeine quadratische Funktionen 40

2.1.3 Anwendungen 46

2.2 Quadratische Gleichungen und der Satz von Vieta 49

2.3 Anwendungen quadratischer Gleichungen 62

2.3.1 Der freie Fall und andere Fälle ... 62
2.3.2 Aufgaben aus der Geometrie ... 63
2.3.3 Leistungsaufgaben ... 65
2.3.4 Bewegungsaufgaben ... 66
2.4 Polynome ... 67
2.5 Aufgaben ... 70

3 Wurzelbehandlung ... 77
3.1 Wurzelfunktionen ... 78
3.2 Wurzelgleichungen ... 81
3.3 Rechnen mit Wurzeln ... 84
3.3.1 Teilweises Wurzelziehen ... 84
3.3.2 Nenner rational machen ... 85
3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten ... 87
3.5 Aufgaben ... 90

4 Vier Freunde – Potenzfunktion ... 95
4.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten ... 95
4.1.1 Potenzfunktion für gerade, positive Exponenten ... 96
4.1.2 Potenzfunktionen für ungerade, positive Exponenten ... 98
4.1.3 Potenzfunktionen für gerade, negative Exponenten ... 100
4.1.4 Potenzfunktionen für ungerade, negative Exponenten ... 102
4.1.5 Anwendungen von Potenzfunktionen ... 106
4.1.6 Verschiebung von Potenzfunktionen ... 108
4.2 Aufgaben ... 110

5 Hoch sollen sie leben – Exponenten ... 117
5.1 Exponentialfunktion und Logarithmus ... 118
5.1.1 Exponentialfunktion ... 118
5.1.2 Logarithmus ... 125
5.2 Rechnen mit Exponentialfunktion und Logarithmus ... 130
5.2.1 Rechenregeln ... 130
5.2.2 Logarithmische Gleichungen ... 132
5.2.3 Exponentialgleichungen ... 134
5.2.4 Formelumformungen ... 136

5.3 Anwendungen ... 137
5.3.1 Wachstums- und Zerfallsprozesse ... 137
5.3.2 Hyperbelfunktionen ... 144
5.3.3 Anwendung des Logarithmus ... 146
5.4 Logarithmische Skalen ... 148
5.4.1 Einfache logarithmische Skalen ... 148
5.4.2 Logarithmische Koordinatensysteme ... 150
5.5 Aufgaben ... 154

6 Auf und ab – Winkelfunktionen ... 169
6.1 Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis ... 170
6.1.1 Was bisher geschah ... 170
6.1.2 Sinus und Cosinus am Einheitskreis ... 173
6.1.3 Tangens ... 184
6.2 Polarkoordinaten ... 190
6.3 Trigonometrische Grundfunktionen ... 193
6.4 Allgemeine Winkelfunktionen ... 196
6.5 Trigonometrische Gleichungen ... 201
6.6 Aufgaben ... 204

Teil 2 Eine Insel mit vielen Brücken ... 213

7 Eine komplexe Angelegenheit – komplexe Zahlen ... 215
7.1 Komponentenform ... 216
7.1.1 Die Gaußsche Zahlenebene ... 216
7.1.2 Rechnen in Komponentenform ... 221
7.2 Polarkoordinaten ... 224
7.2.1 Darstellungen durch Radius und Argument ... 224
7.2.2 Rechnen in Polarkoordinaten ... 229
7.3 Gleichungen ... 234
7.3.1 Quadratische Gleichungen ... 234
7.3.2 Fundamentalsatz der Algebra ... 236
7.4 Aufgaben ... 240

Teil 3 Wir machen uns ein Bild ... 247

8 Eine vermessene Sache – das allgemeine Dreieck ... 249
8.1 Sinus- und Cosinussatz ... 250
8.2 Anwendungen der Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks ... 256
8.2.1 Vermessungsaufgaben ... 256
8.2.2 Kräfteparallelogramme ... 260
8.3 Aufgaben ... 264

9 Mit Pfeil und Bogen – Vektoren ... 271
9.1 Vektoren im zweidimensionalen Raum ... 272
9.1.1 Was bisher geschah ... 272
9.1.2 Das Skalarprodukt ... 274
9.1.3 Winkel zwischen zwei Vektoren ... 278
9.1.4 Geradendarstellungen ... 282
9.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum ... 288
9.2.1 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ als Erweiterung von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ... 288
9.2.2 Das vektorielle Produkt ... 290
9.2.3 Ebenen und Geraden im Raum ... 296
9.3 Aufgaben ... 304

10 Kurvenreich – Parameterdarstellung ... 313
10.1 Parameterdarstellung einer Kurve ... 314
10.2 Aufgaben ... 319

Teil 4 Das Haus der Wahrscheinlichkeiten ... 321

11 Statistisch gesehen – beschreibende Statistik ... 323
11.1 Daten ... 324
11.1.1 Ereignisse und Merkmale ... 324
11.1.2 Häufigkeiten und ihre Darstellungsformen ... 326
11.2 Mittelwerte und Streumaße ... 330
11.2.1 Das arithmetische Mittel ... 330
11.2.2 Varianz und Standardabweichung ... 332
11.2.3 Median oder Zentralwert – Boxplot ... 334
11.3 Aufgaben ... 336

Index ... 343

Teil 1

Tausend und eine Funktion

1
Charakterstudien – Eigenschaften von Funktionen

Wie in fast jedem Buch befindet sich auf den ersten Seiten der Inhalt. Dieser ist schön brav von oben nach unten aufgebaut und ist behilflich, die passende Seite zu finden. Im ersten Jahrgang entsprach dies auch der logischen Abfolge der Kapitel innerhalb der beiden Teile des Bandes. Es macht eben keinen Sinn, Gleichungssysteme zu erarbeiten, bevor man nicht gelernt hat, mit Variablen und Termen zu rechnen.

Im zweiten Jahr ist das anders. Betrachten wir ein beliebiges Thema, etwa quadratische Gleichungen. Sie sind eine natürliche Antwort auf quadratische Funktionen. Oder ist es doch eher umgekehrt? Diese sind eigentlich ein Sonderfall der Potenzfunktionen und sollten deswegen davor oder doch besser danach behandelt werden. Quadratische Funktionen sind aber zweifellos ein Spezialfall von Polynomen und gehören daher auch in dieses Kapitel. Eine unmittelbare Konsequenz aus quadratischen Funktionen, genauso wie aus quadratischen Gleichungen sind die komplexen Zahlen. Die sollten also gleich danach folgen. Oder? Auf jeden Fall braucht man für diese einen Einblick in die trigonometrischen Funktionen, weswegen diese zuvor durchgenommen werden sollten…

Ist alles verständlich? Es wäre ein Wunder, wenn dem so wäre. Die Themen des zweiten Jahrgangs lassen sich einfach nicht vernünftig linear abbilden, da sie alle miteinander verwoben sind, wie in einem großen Spinnennetz oder wie die Themenbereiche in einem Erlebnispark. Und wie bei jedem Park, gibt es viele Wege, diesen zu erkunden, sodass man schlussendlich alle Attraktionen gesehen und erlebt hat.

Es hängt vom Ausbildungsschwerpunkt und von den Vorlieben der Lehrperson ab, welcher Pfad gewählt wird und in welchen Teilen des Parks man sich am längsten aufhalten wird. In der Elektrotechnik etwa spielen die komplexen Zahlen eine bedeutende Rolle, während in der Maschinenbauabteilung die Vektoren wahrscheinlich mehr in den Fokus des Geschehens rücken werden.

Welcher Weg auch gewählt wird: Genau hier, im ersten Kapitel des zweiten Bandes, ist der Haupteingang! Es werden die grundlegenden Eigenschaften von Funktionen erläutert. Natürlich werden wir im Zuge dessen auch lineare Funktionen und Proportionalität wiederholten.

In den darauf folgenden Kapiteln werden wir die grundlegenden Funktionen, Polynome, Wurzelfunktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmus sowie Winkelfunktionen auf diese Eigenschaften prüfen. Diese Funktionengruppen bilden zusammen mit den schon bekannten linearen Funktionen die Grundbausteine von so ziemlich allem, was in den nächsten Jahren im Mathematikunterricht und in nahezu allen Anwendungen erlernt wird. Daran führt also auf der Reise zur Reifeprüfung kein Weg vorbei. In welcher Reihenfolge sie durchgearbeitet werden, ist dabei nicht so wichtig.

Aber nun ist es Zeit, durch den Haupteingang zu gehen und die wunderbare Welt der Funktionen kennenzulernen.



Bild 1.1 Hereinspaziert! cc:HatschiKa, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

1.1 Was bisher geschah

Definitionsmenge und Wertemenge

Wir erinnern uns an die Definitionen von Relationen und Funktionen, wie sie im ersten Jahrgang gelehrt wurden. Beides sind Zuordnungen von einer Menge in eine andere, wobei die Zuordnung bei einer Funktion eindeutig sein muss. Bei einer Relation gilt diese Einschränkung nicht.

Es gilt also:



Eine **Relation** r ist eine Zuordnung von einer Menge, der **Grundmenge** $\mathbb{G}$, in eine andere Menge, der **Wertemenge** $\mathbb{W}$.

Stehen $x \in \mathbb{G}$ und $y \in \mathbb{W}$ in Relation zueinander, so schreibt man:

$r : x \mapsto y$ und spricht: „y wird x zugeordnet.“ oder

$r(x) = y$ und spricht: „r an der Stelle x“ oder „r von x.“

Dabei ist x die **unabhängige Variable** und $y = r(x)$ die **abhängige Variable.**

Zum Unterschied dazu ist eine Funktion definiert durch.



Eine **Funktion** f ist eine eindeutige Relation in dem Sinn, dass jedem Element der **Definitionsmenge** $x \in \mathbb{D}$ **genau ein Element** der **Wertemenge** $y(x) \in \mathbb{W}$ zugeordnet wird.

Eine Funktion unterscheidet sich also von einer Relation durch die Eindeutigkeit der Zuordnung. Das bezieht sich auf die Anzahl der Elemente der Wertemenge, die einem Element aus der Definitionsmenge zugeordnet werden. Bei einer Funktion muss es immer genau eines sein. Im Gegensatz dazu ist es bei einer Relation durchaus möglich, dass einigen Elemente der Definitionsmenge kein und anderen mehrere Elemente der Wertemenge zugeordnet werden.

In beiden Fällen ist es aber durchaus legitim, dass ein Element der Wertemenge öfters das Ziel einer Zuordnung ist. So ist etwa die konstante Relation, $y(x) = 1$ eine Funktion, obwohl jedem Element der Definitionsmenge dasselbe Element der Wertemenge zugeordnet wird.

Um diese Definitionen und einige andere Eigenschaften von Funktionen nochmals in Erinnerung zu rufen, führe ich hier in einem kleinen Exkurs eine Gruppe von Relationen und Funktionen ein, die früher einen sehr wesentlichen Platz im Lehrplan eingenommen hatten. Es handelt sich um die **Kegelschnitte**.

Ein **Kegelschnitt** ist eine Kurve, die entsteht, wenn man einen Doppelkegel mit einer Ebene schneidet, so wie es in Bild 1.2 gezeigt wird.

Liegt die Ebene parallel oder leicht geneigt zur Grundfläche, entsteht ein **Kreis** oder eine **Ellipse**. Liegt sie so steil, dass sie beide Kegelhälften schneidet, entsteht eine **Hyperbel**. Hat sie denselben Neigungswinkel wie der Kegel, entsteht eine **Parabel**.

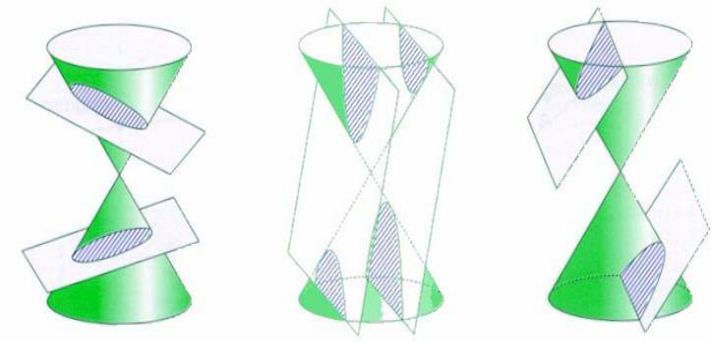


Bild 1.2 Kegelschnitte: Felipe-nico, CC BY-SA 3.0 *https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0*, via Wikimedia Commons

Welche dieser Kurven ist aber durch eine Funktion beschrieben? Gehen wir sie eine nach der anderen durch.

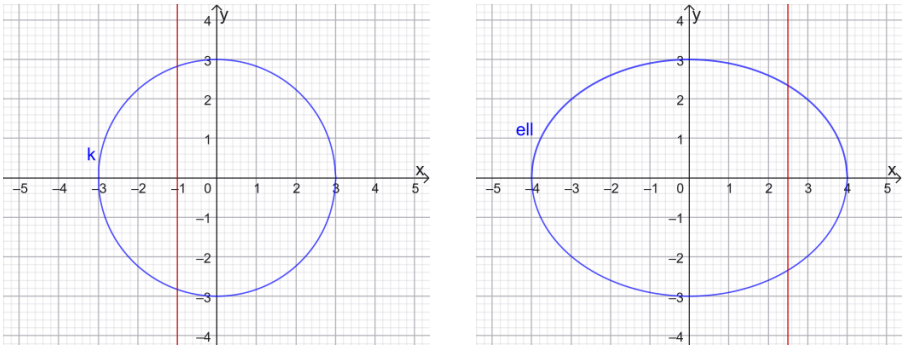


Bild 1.3 Kreis $x^2 + y^2 = 9$ und Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$

In Bild 1.3 ist auf der linken Seite ein Kreis und auf der rechten Seite eine Ellipse abgebildet. In beiden Fällen handelt es sich um eine Relation, aber um keine Funktion. Das ist daran zu erkennen, dass abgesehen von den Randpunkten jedem Punkt der Definitionsmenge zwei Werte zugeordnet werden. Zieht man etwa eine senkrechte

Linie $x = -1$, schneidet diese den Kreis zwei Mal. Ebenso schneidet $x = 2{,}5$ die Ellipse zwei Mal. Die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Die Definitionsmenge ist im Fall des Kreises das geschlossene Intervall $\mathbb{D} = [-3; 3]$ und im Fall der Ellipse das ebenfalls geschlossene Intervall $\mathbb{D} = [-4; 4]$. Geschlossen sind die Intervalle, da die Randpunkte enthalten sind.

Auch die Wertemenge können wir angeben. Diese beinhaltet alle möglichen Relationswerte, also alle Werte, die y annehmen kann. In beiden Fällen gilt $\mathbb{W} = [-3; 3]$.

Sehen wir uns auch die beiden anderen Kegelschnitte an. In Bild 1.4 ist links eine Parabel abgebildet. Hier handelt es sich nun tatsächlich um eine Funktion, denn jedem Element der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ wird genau ein Element der Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$ zugeordnet. Mit Funktionen dieser Art werden wir uns in Kapitel 2 eingehend beschäftigen.

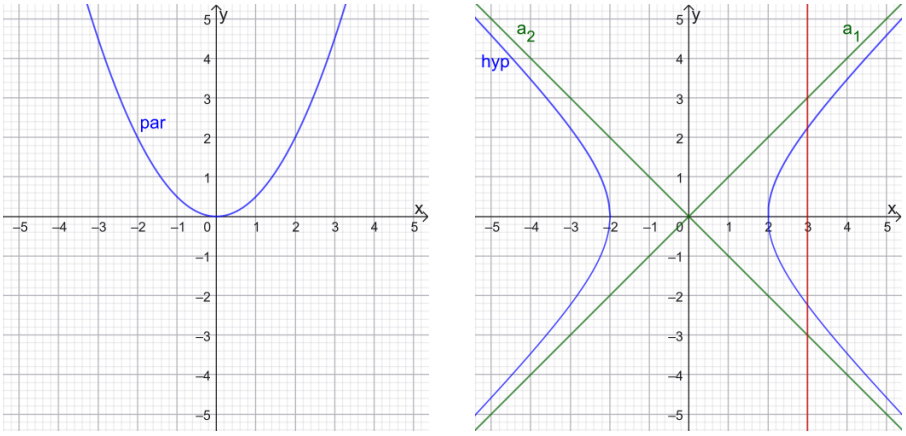


Bild 1.4 Parabel *par*: $y = 0{,}5x^2$ und Hyperbel *hyp*: $x^2 - y^2 = 4$

Es bleibt noch der letzte der Kegelschnitte, die Hyperbel, wie sie auf der rechten Seite von Bild 1.4 gezeigt wird. Es ist leicht zu erkennen, dass es sich hierbei, so wie zuvor beim Kreis und bei der Ellipse, um keine Funktion handelt. In der Abbildung wurde die senkrechte Linie $x = 3$ eingezeichnet, die die Kurve zwei Mal schneidet, wodurch die Bedingung, dass jedem Element der Definitionsmenge $\mathbb{D} =]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$ genau ein Element der Wertemenge zugeordnet wird, verletzt wird.

Die drei Relationen sind in **impliziter Darstellung** angegeben, wie wir es auch bei linearen Funktionen im letzten Schuljahr kennengelernt haben. Um die Relationsgleichung in **expliziter Darstellung** zu bestimmen, muss man auf y umformen. Die Hyperbelgleichung *hyp*: $x^2 - y^2 = 4$ etwa lautet in expliziter Form *hyp*: $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$. Mit Relationen diese Art werden wir uns in Kapitel 4 eingehend beschäftigen.

Punkte einer Funktion

Letztes Jahr haben wir gelernt, wie man einen Punkt einer Funktion berechnet, wenn lediglich eine der beiden Koordinaten gegeben ist. Im Speziellen haben wir die Nullstellen bestimmt, also all jene Punkte, deren Funktionswert Null ergibt und die folglich ein Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse sind.

Um die Erinnerung ein wenig aufzufrischen, werden wir dies alles nun an Hand der beiden Funktionstypen, die wir bereits im Vorjahr kennengelernt haben, wiederholen. Dies sind lineare Funktionen, das direkte und das indirekte Verhältnis. Stopp! Das sind doch drei?! Nein sind es nicht, behaupte ich, da das direkte Verhältnis in Wahrheit durch eine homogene lineare Funktion beschrieben wird. Aber Schritt für Schritt.

Wir erinnern uns:

Zwei veränderliche Größen x und y sind **direkt proportional**, wenn ihr Quotient $y : x$ einen fixen Wert $k > 0$ hat. Es gilt dann:

$$\frac{y}{x} = k \qquad \text{oder} \qquad f\colon y = k \cdot x$$

Dabei heißt $k > 0$ der **Proportionalitätsfaktor**.

Sind zwei veränderliche Größen x und y direkt proportional zueinander, so ist die beschreibende Funktion $f\colon x \mapsto k \cdot x$ eine **homogene lineare Funktion.**

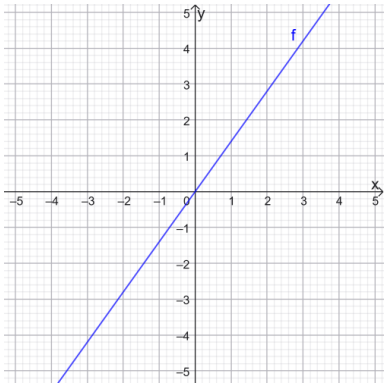


Bild 1.5 Graf zweier direkt proportionaler Größen $f\colon y = 1{,}4 \cdot x$

In Bild 1.5 ist die beschreibende Funktion zweier direkt proportionaler Größen x und y mit dem Proportionalitätsfaktor $k = 1{,}4$ abgebildet. Aus dem Verhältnis $y : x = 1{,}4 : 1$ folgt die homogene lineare Funktion $f\colon y = 1{,}4x = \frac{5}{2}x$. Dabei bezieht sich das Wörtchen homogen darauf, dass die Gerade durch den Ursprung verläuft. Die Nullstelle ist $N(0;0)$.

Zwei veränderliche Größen x und y sind **indirekt proportional**, wenn ihr Produkt $x \cdot y$ einen fixen Wert $k > 0$ hat. Es gilt dann:

$$x \cdot y = k \qquad \text{oder} \qquad f\colon y = \frac{k}{x}$$

Dabei heißt $k > 0$ der **Proportionalitätsfaktor**.

Die senkrechte Achse ist ein **Pol** und die waagrechte Achse eine **Asymptote** der beschreibenden Funktion $f\colon x \mapsto \frac{k}{x}$.

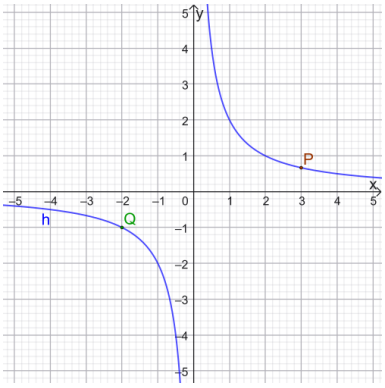


Bild 1.6 Graf zweier indirekt proportionaler Größen $h\colon y = \frac{2}{x}$

In Bild 1.6 ist die beschreibende Funktion zweier indirekt proportionaler Größen x und y mit dem Proportionalitätsfaktor 2 gezeigt. Es gilt also $x \cdot y = 2$, woraus die Funktion $h(x) = \frac{2}{x}$ folgt. Wir müssen $x = 0$ ausschließen, da die Division durch Null unmöglich ist. Es folgt für die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zur Erinnerung, der Backslash $\setminus$ bedeutet so viel wie „ohne“ oder „ausgenommen“. Die Definitionsmenge ist also gleich der Menge aller reellen Zahlen außer Null.

Auch die Wertemenge ist $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da ein Bruch nur dann Null werden kann, wenn der Zähler gleich Null ist und $2 \neq 0$ gilt. Folglich gibt es keine Nullstellen.

Beispiel 1.1 (BC)

Berechne die Punkte $P(3; y_P)$ und $Q(x_Q; -1)$ auf der in Bild 1.6 dargestellten Funktion $h\colon y = \frac{2}{x}$. Vergleiche das Resultat mit dem Grafen.

Lösung: Um den Punkt P zu bestimmen, setzt man $x = 3$ in die Funktionsgleichung ein. Es gilt, $h(3) = \frac{2}{3}$, woraus der Punkt $P(3; \frac{2}{3})$ folgt.

Bei Punkt Q ist der Funktionswert bekannt. Es muss die Gleichung $h(x) = \frac{2}{x} = -1$ gelöst werden. Es folgt der Punkt $Q(-2; -1)$.

Ein kurzer Blick auf den Grafen bestätigt, dass das Ergebnis sehr plausibel ist.

Viele Wochen haben wir uns letztes Schuljahr mit linearen Funktionen beschäftigt. Keine Sorge, auch das wiederholen wir.

Unter einer **linearen Funktion** versteht man eine Funktion der Form:

$$g: x \mapsto k \cdot x + d \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad d \in \mathbb{R}$$

Dabei bezeichnet man $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ als die **Steigung** oder den **Differenzenquotient** und d als den **Ordinatenabschnitt.**

Ist $d = 0$, so spricht man von einer **homogenen linearen Funktion**. Ist $d \neq 0$, spricht man von einer **inhomogenen linearen Funktion**.

Beispiel 1.2 (A)

Lies die lineare Funktion $f: y = k \cdot x + d$ aus dem Koordinatensystem aus Bild 1.7 aus und berechne die **Nullstelle**.

Lösung: Der Ordinatenabschnitt ist der Schnittpunkt mit der y-Achse. Es gilt $d = 1$.

In Bild 1.7 ist das Steigungsdreieck, also der Differenzenquotient eingezeichnet. Für zwei beliebige Punkte P und Q, die auf der Geraden liegen, gilt:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2}{3}$$

Im Zähler steht die Differenz zweier y-Werte und im Nenner die Differenz der x-Werte. Geht man vom Ordinatenabschnitt $\Delta x = 3$ Schritte nach rechts und $\Delta y = 2$ Schritte nach oben, landet man wieder auf der Geraden. Daraus ergibt sich die Steigung $k = \frac{2}{3}$. Die Funktionsgleichung lautet daher:

$$f: y = \frac{2}{3}x + 1$$

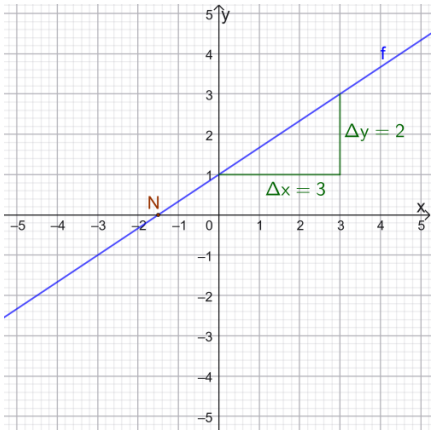


Bild 1.7 Lineare Funktion $f: y = \frac{2}{3}x + 1$

In Bild 1.7 wurde auch die Nullstelle der linearen Funktion eingezeichnet. Wir wollen diese nun auch berechnen.

Beispiel 1.3 (B)

Berechne die **Nullstelle** der linearen Funktion $f\colon\ y = \frac{2}{3}x + 1$.

Lösung: Eine Nullstelle ist jeder Punkt $N(x_N; f(x_N))$ der Funktion, dessen Funktionswert gleich Null ist:

$$f(x_N) = \frac{2}{3} \cdot x_N + 1 = 0 \quad | -1$$
$$\frac{2}{3} \cdot x_N = -1 \quad | \cdot \frac{3}{2}$$
$$x_N = -1 \cdot \frac{3}{2} = -1{,}5 \quad \Longrightarrow \quad N(-1{,}5; 0)$$

In der Definition der Nullstellen wurde der Plural, also die Mehrzahl, verwendet. Das hat seinen guten Grund, da viele Funktionen oder auch Relationen mehr als eine Nullstelle haben, wie im folgenden Beispiel zu erkennen ist.

Beispiel 1.4 (BD)

Berechne die Nullstellen der Hyperbel

$hyp\colon x^2 - y^2 = 4$ aus Bild 1.4. Erkläre, warum es zwei Nullstellen gibt.

Lösung: In den Nullstellen ist $y = 0$. Man muss also in die Relationsgleichung der Hyperbel für $y = 0$ einsetzen. Dazu ist es nicht notwendig, diese zunächst von der impliziten in die explizite Darstellung umzurechnen.

$x^2 + 0^2 = 4$

$x^2 = 4 \quad |\sqrt{}$ Jede Zahl, deren Quadrat 4 ergibt, ist eine Lösung der Gleichung.

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ Daher sind sowohl $+\sqrt{4}$ als auch $-\sqrt{4}$ Lösungen.

Daraus folgen die Nullstellen $N_1(-2; 0)$ und $N_2(2; 0)$.

Es ist Zeit, Neues zu lernen.

Die wesentlichen Inhalte des folgenden Abschnitts werden uns nächstes Jahr wieder begegnen. Dann werden wir im Zuge der Kurvendiskussion lernen, die Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung und anderer ausgeklügelter Methoden zu bestimmen. Heuer ist es in den meisten Fällen ausreichend, die Eigenschaften zu erkennen und zu benennen.

1.2 Eigenschaften von Funktionen

1.2.1 Asymptoten und Pole

Betrachten wir zunächst Funktionen, deren Definitionsmenge nicht nach oben oder unten beschränkt ist, sodass beliebig große oder kleine Zahlenwerte für $x \in \mathbb{D}$ zulässig sind. Was geschieht, wenn wir diesen Spielraum tatsächlich ausreizen, wenn wir bis an die Grenze der reellen Zahlen, also bis plus oder minus unendlich gehen? Oft, wie bei einer linearen Funktion oder wie bei der Parabel aus Bild 1.4, wird dann auch der Funktionswert unendlich. Manchmal aber nähert sich die Funktion beliebig nahe an einen Wert oder auch an eine andere einfachere Funktion an. Diese nennt man dann eine Asymptote.



Eine Funktion $a(x)$ heißt **Asymptote** der Funktion $f(x)$, falls diese sich für immer größer oder immer kleiner werdende Stellen x beliebig nahe an $a(x)$ annähert. Man spricht: $a(x)$ ist der **Grenzwert** oder **Limes** von $f(x)$ für x gegen $\pm\infty$ und schreibt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a(x) \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a(x)$$

Das klingt nicht nur etwas kompliziert, sondern ist es auch. Die genaue Definition eines Grenzwertes bleibt uns aber vorerst noch erspart. Im Moment geht es nur um das Erkennen und noch nicht um die exakte Bestimmung. Sehen wir uns das an den Beispielen aus dem letzten Abschnitt an.

Bei der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ aus Bild 1.4 wurden die Asymptoten $a_1(x) = x$ und $a_2(x) = -x$ schon eingezeichnet. Es ist gut zu erkennen, dass sich die Kurve mit immer größer werdenden Werten für x diesen beiden linearen Funktionen nähert.

Die Funktion $h\colon\ y = \frac{2}{x}$ aus Bild 1.6 nähert sich in beide Richtungen der x-Achse an. Es gilt also $a(x) = 0$. h scheint aber noch eine zweite, senkrechte Asymptote zu haben. Wir erinnern uns, dass wir bei der Definitionsmenge von $h(x)$ Null ausnehmen mussten, da es nicht möglich ist, durch Null zu dividieren. Was geschieht aber, wenn x immer näher an die verbotene Stelle heranrückt? Richtig, die Funktionswerte werden immer größer. Die Funktion scheint gegen unendlich zu gehen. Solch eine Stelle nennt man einen Pol.



Eine senkrechte Asymptote nennt man einen **Pol**. Man spricht: Die Funktion $f(x)$ hat einen Pol bei $x = p$, falls der **Grenzwert** für x gegen p gleich **plus oder minus unendlich** ist. Man schreibt:

$$\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$$

Ich muss zugeben, ich war hier, ein wenig ungenau. Im Grunde genommen müsste man unterscheiden, ob x sich von links oder rechts dem Pol nähert. Aber das heben wir uns, genauso wie die exakte Definition eines Grenzwertes, für nächstes Jahr auf.

Beispiel 1.5 (AC)

Betrachte die in Bild 1.8 abgebildeten Funktionen.

1. Gib die Definitionsmenge und die Asymptoten der in Bild 1.8 auf der linken Seite abgebildeten Funktion $f_1(x)$ an.
2. Gib die Definitionsmenge und die Asymptoten der in Bild 1.8 auf der rechten Seite abgebildeten Funktion $f_2(x)$ an.

Lösung:

1. Es ist gut zu erkennen, dass die Funktion f_1 auf der linken Seite in Bild 1.8 bei $x = -3$ nicht definiert ist. Dort hat sie einen Pol $p_1 : x = -3$ und die Definitionsmenge lautet $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Geht x gegen plus oder minus unendlich, nähert sich die Funktion dem Wert $y = -2$ an. Dies ist also unsere Asymptote und es gilt:

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = a_1(x) = -2$$

   Mit Funktionen dieser Art werden wir uns in Kapitel 4 ausführlich beschäftigen.

2. Der Pol und damit auch die Definitionsmenge der Funktion f_2 aus der rechten Seite des Bildes 1.8 ist wie zuvor offensichtlich. Es gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und die Funktion hat einen Pol bei $p_2 : x = 2$.

   Die Asymptote ist eine Gerade. Das gibt uns die Möglichkeit zu üben, eine Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ aus dem Grafen auszulesen. Der Ordinatenabschnitt ist $d = 1$. Um den Differenzenquotient k zu bestimmen, benötigen wir einen zweiten Punkt. Hier bietet sich (4; 2) an. Man muss von (0; 1) vier Schritte nach rechts und einen Schritt nach oben gehen, um dort zu landen. Daraus folgt $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$. Die Asymptote lautet:

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = a_2(x) = \frac{1}{4}x + 1$$

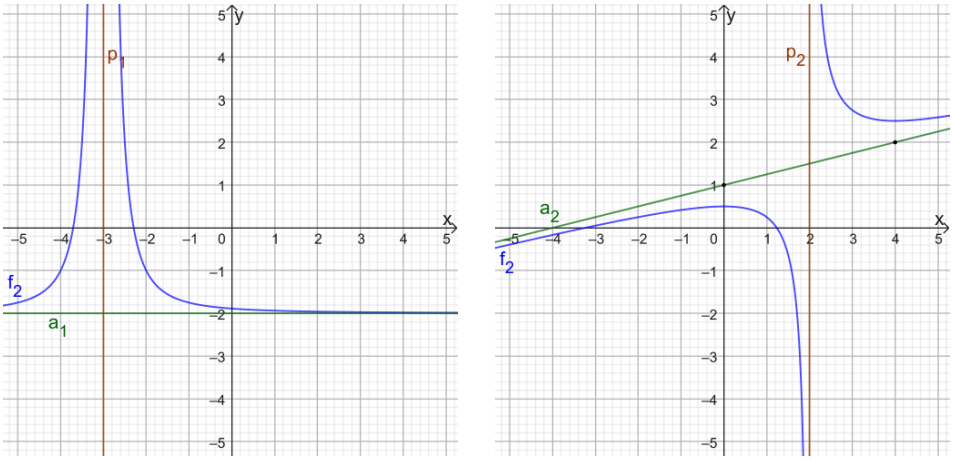


Bild 1.8 Funktion $f_1(x) = \frac{1}{(x+3)^2} - 2$ und $f_2(x) = \frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{x-2}$

1.2.2 Monotonie

Das Konzept der Monotonie ist einfach. Es geht darum festzustellen, ob eine Funktion in einem bestimmten Bereich steigt oder fällt. Auch hier verschieben wir die Bestimmung der Monotonie durch eine geeignete Rechnung auf das nächste Schuljahr, in dem die Differentialrechnung durchgenommen wird. Für den Moment begnügen wir uns damit, Monotonie an Hand eines Grafen zu erkennen und zu argumentieren.



Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Bereich $\mathbb{I} \subset \mathbb{D}$ **streng monoton steigend**, wenn für alle $x_1 < x_2$ aus diesem Bereich gilt: $f(x_1) < f(x_2)$.

Das bedeutet, wenn x_1 kleiner als x_2 ist, dann ist auch der Funktionswert an der Stelle x_1 kleiner als an der Stelle x_2. Mit anderen Worten wird die Funktion mit wachsenden x auch größer.

Bei einer fallenden Funktion ist es dann umgekehrt. Umso größer x wird, desto kleiner wird der Funktionswert:



Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Bereich $\mathbb{I} \subset \mathbb{D}$ **streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1 < x_2$ aus diesem Bereich gilt: $f(x_1) > f(x_2)$.



Man unterscheidet zwischen streng monoton steigend oder fallend und monoton steigend oder fallend. Im zweiten Fall ersetzt man $<$ oder $>$ durch $\leq$ oder $\geq$.

Bevor wir ein Beispiel dazu machen, sollten wir noch spezielle Punkte wie **lokale** und **globale Extrema** einführen.

1.2.3 Spezielle Punkte einer Funktion

Auch in diesem Abschnitt geht es in erster Linie ums Erkennen. Wir lernen, zwischen **lokalen** und **globalen Extrema** zu unterscheiden, und führen auch die Begriffe **Wende-** und **Sattelpunkt** ein. Die exakten Berechnungen verschieben wir wieder auf das nächste Schuljahr.

Ein globales Minimum beziehungsweise Maximum ist der Punkt mit dem kleinsten beziehungsweise größten Funktionswert im gesamten gültigen Bereich der Funktion. Diese Punkte müssen nicht unbedingt existieren. Betrachte zum Beispiel die Parabel $par\colon\ y = 0{,}5x^2$ aus Bild 1.4 auf der linken Seite. Sie hat im Ursprung ein globales Minimum. Es gibt keinen Funktionswert, der kleiner als $y(0) = 0$ ist. Auf der anderen Seite hat diese Funktion kein globales Maximum, da sie immer weiter wächst. Es ist nicht möglich, einen Punkt auf dem Grafen zu finden, der alle anderen überragt.

Eine Funktion hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ ein **globales Maximum**, falls gilt:

$f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$

Eine Funktion hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ ein **globales Minimum**, falls gilt:

$f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$

Wir unterscheiden globale und lokale Extremwerte. Ein lokales Maximum oder Minimum muss nur in einer kleinen Umgebung um diesen Punkt den größten beziehungsweise kleinsten Funktionswert haben. Der Gipfel des Mount Everest, Bild 1.9, ist das globale Maximum der Erde. Es gibt keinen höheren Punkt. Die Challangertiefe des Mariannengrabens ist mit über 11 km Tiefe unter dem Meeresspiegel das globale Minimum der Erde.

Auf der anderen Seite ist jeder noch so lächerliche Berggipfel und jede Talsohle ein lokales Maximum beziehungsweise Minimum. In einem kleinen Bereich um diesen herum gibt es keinen höheren oder tieferen Punkt.



Bild 1.9 Mount Everest, cc:shrimpo1967derivative work: Crisco 1492, CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons

Ein **lokales Maximum** oder **Hochpunkt** $H(x_H; y_H)$ ist jeder Punkt einer Funktion f, für den es eine Umgebung $x_H \in]x_1; x_2[$ gibt, sodass gilt:

$f(x_H) > f(x)$ für alle $x \in]x_1; x_2[$

Ein **lokales Minimum** oder **Tiefpunkt** $T(x_T; y_T)$ ist jeder Punkt einer Funktion f, für den es eine Umgebung $x_T \in]x_1; x_2[$ gibt, sodass gilt:

$f(x_T) < f(x)$ für alle $x \in]x_1; x_2[$

Beispiel 1.6 (CD)

Betrachte die Funktion f aus Bild 1.10.

1. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion. Argumentiere an Hand ausgesuchter Punktepaare im Grafen.
2. Lies aus dem Grafen der Funktion f das lokale Maximum H und das lokale Minimum T heraus. Erkläre, warum die Funktion keine globalen Extrema hat.

Lösung:

1. Die Funktion ist bis zur Stelle $x = -2$ steigend. Zwischen $x = -2$ und $x = 3$ ist sie fallend und danach wieder steigend. Wählt man zwei beliebige $x_1 < x_2 < -2$, wird man feststellen, dass $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Im Grafen wurde dies mit $-3{,}5 < -3 < -2$ durchgespielt. Tatsächlich gilt $f(-3{,}5) < f(-3)$

   Genauso ist zu erkennen, dass aus $-2 < x_1 < x_2 < 3$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$, da die Funktion dort fallend ist. Es ist etwa $f(1) > f(2)$, wie im Grafen zu erkennen ist. Zusammenfassend gilt:

   f ist steigend für: $x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$

   f ist fallend für: $x \in]-2; 3[$

2. Das lokale Maximum liegt bei $x_H = -2$. Dort nimmt die Funktion den Wert $f(-2) = 3$ an. Der Hochpunkt lautet daher $H(-2; 3)$. Das lokale Minimum liegt bei $x_T = 3$, wo die Funktion den Wert $f(3) = -1$ annimmt. Der Tiefpunkt lautet daher $T(3; -1)$.

   Da die Funktion nach dem Tiefpunkt immer steigend ist, also stets größer wird, gibt es kein globales Maximum. Genauso ist die Funktion links vom Hochpunkt steigend. Je kleiner die Stellen werden, desto kleiner werden auch die Funktionswerte. Es existiert daher kein globales Minimum.

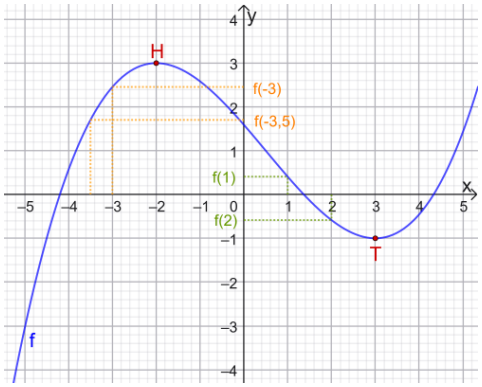


Bild 1.10 Polynom dritten Grades

Bald, nämlich in Kapitel 4, werden uns auch Wendepunkte und Sattelpunkte begegnen. Zunächst legen wir fest.

Ein **Wendepunkt** ist ein Punkt, in dem sich die Krümmung ändert.

Man könnte sich vorstellen, in einem kleinen roten Auto zu sitzen und die Kurve von links nach rechts, also in Schreibrichtung, entlang zu fahren, wie es in Bild 1.11 angedeutet ist. Im Punkt, in dem man die Ausrichtung des Lenkrades ändert, liegt der Wendepunkt. Dieser ist im Grafen als W eingezeichnet. Bis dahin muss die Fahrerin nach rechts lenken. Die Kurve ist also **rechtsgekrümmt**. Danach muss sie nach links lenken. Die Kurve ist **linksgekrümmt**.

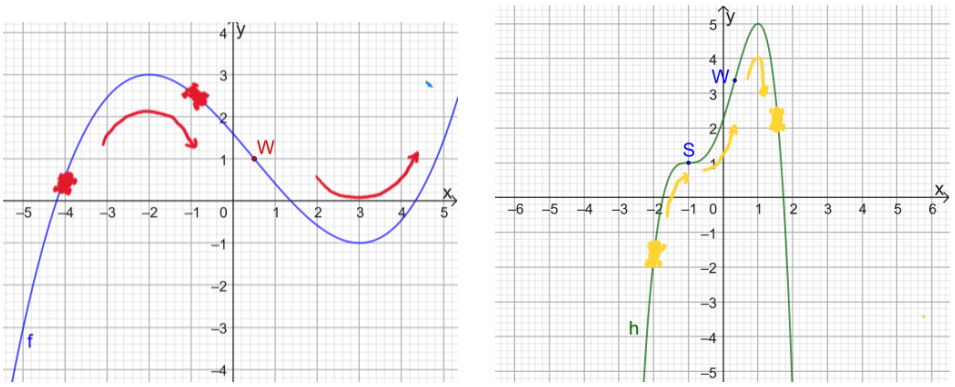


Bild 1.11 Funktion f mit Wendepunkt und h mit Sattelpunkt.

Sattelpunkte sind Stellen, in denen die Funktion genau im Punkt flach ist, obwohl sie in einer Umgebung des Punktes steigend oder fallend ist. An dieser Stelle ändert sich dann auch das Krümmungsverhalten von rechts- zu linksgekrümmt oder umgekehrt.

Ein **Sattelpunkt** ist ein **Wendepunkt**, in dem die Kurve flach ist.

Betrachte dazu die in Bild 1.11 auf der rechten Seite gezeigte Funktion h. Die Kurve ist bis zum Punkt $S(-1;1)$ rechtsgekrümmt. Um das zu erkennen, stellen wir uns zur Abwechslung vor, wir lenken ein kleines gelbes Auto entlang der Kurve von links nach rechts. Solange wir nach rechts lenken müssen, ist die Kurve auch rechtsgekrümmt. Im Punkt $S(-1;1)$ ändert sich die Krümmung. Das ist der Moment, in dem das Lenkrad für einen kurzen Moment gerade steht. Direkt nach dem Punkt S müssten wir nach links lenken. Die Kurve ist linksgekrümmt und bleibt es auch bis zum zweiten Wendepunkt W. Im Punkt S ist die Kurve außerdem noch flach. Es handelt sich also nicht nur um einen Wendepunkt, sondern auch um einen Sattelpunkt.

1.2.4 Symmetrie

Man unterscheidet **gerade** und **ungerade Funktionen**.

Gerade Funktionen sind **symmetrisch um die y-Achse**. Das bedeutet, man kann sie an der y-Achse spiegeln, ohne sie zu verändern.

Lange Zeit wurden Schlösser oder andere repräsentative Gebäude spiegelsymmetrisch gebaut, da man dies für besonders schön und angenehm zu betrachten erachtete. Als Beispiel dient hier eine Ansicht von Schloss Schönbrunn, wie in Bild 1.12 links zu sehen ist. Die Symmetrie erstreckt sich über den Schlosspark bis weit über das Schloss hinaus.





Bild 1.12 Schloss Schönbrunn und Herzdame, cc:Thomas Wolf, *www.foto-tw.de*, CC BY-SA 3.0 DE, via Wikimedia Commons cc: David Bellot, LGPL, via Wikimedia Commons

Ungerade Funktionen sind **punktsymmetrisch um den Ursprung**. Dreht man eine ungerade Funktion 180° um den Ursprung, bleibt sie unverändert.

Wer schon jemals klassische Spielkarten in der Hand gehabt hat, dem sollte das vertraut sein. Dreht man die Spielkarte um 180°, sieht sie genauso aus wie zuvor. Das ist sehr praktisch, denn andernfalls müsste man immer darauf achten, die Karten nicht verkehrt herum zu halten. In Bild 1.12 rechts ist die Herzdame gezeigt.

Symmetrie:

Eine **gerade Funktion** f ist spiegelsymmetrisch um die y-Achse. Das ist gleichbedeutend mit:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{D}$$

Eine **ungerade Funktion** f ist punktsymmetrisch um den Ursprung. Das ist gleichbedeutend mit:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{D}$$

Beispiel 1.7 (BD)

Zeige, dass

1. die Parabel $f\colon\ y = x^2 - 4$ aus Bild 1.13 auf der linken Seite eine gerade Funktion ist,
2. die Funktion $h\colon\ y = \frac{1}{x}$ aus Bild 1.13 auf der rechten Seite eine ungerade Funktion ist.

Lösung:

1. Ein Blick auf die Abbildung zeigt, dass die y-Achse die **Spiegelachse** ist. Um das auch durch eine passende Rechnung zu belegen, müssen wir zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$. Das ist schnell getan. Es gilt:

   $$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$$

   da das Minus beim Quadrieren wegfällt. Wir sind bei einer wahren Aussage gelandet und haben somit die Behauptung bewiesen.

2. Auch hier zeigt ein Blick auf die Abbildung, dass die Funktion **punktsymmetrisch um den Ursprung** ist. Dreht man sie um 180°, landet man wieder beim selben Grafen. Aber auch hier ist die Rechnung verlangt. Wir müssen zeigen, dass $h(-x) = -h(x)$ gilt:

   $$h(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -h(x)$$

   woraus folgt, dass es sich um eine ungerade Funktion handelt.

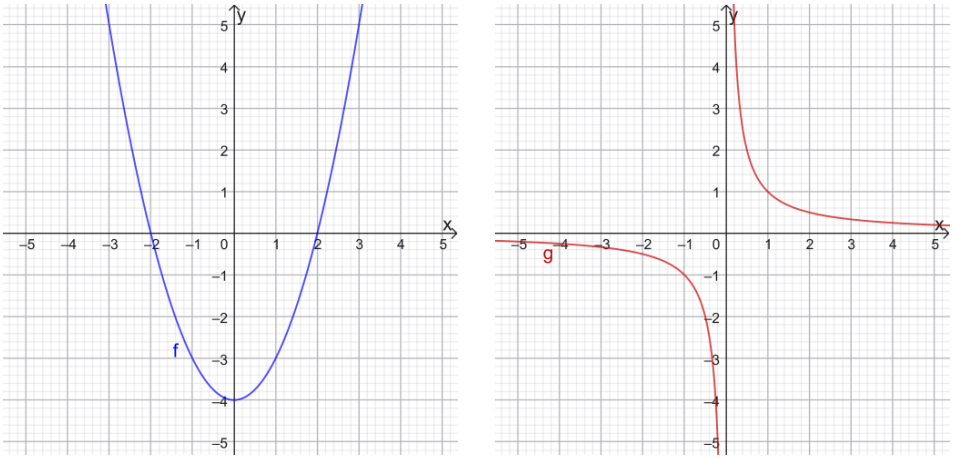


Bild 1.13 Die Funktionen $f(x) = x^2 - 4$ und $h(x) = \frac{1}{x}$

1.3 Verschiebung von Funktionen

Betrachte die Kurven aus Bild 1.14. Die Parabel $par\colon\ y = 0{,}5x^2$ ist vom Anfang des Kapitels in Bild 1.4 bekannt. Die zweite Kurve f hat offensichtlich dieselbe Form. Sie entstand durch Verschiebung der ersten Parabel, sodass der Scheitel nun nicht mehr im Ursprung, sondern im Punkt $S(3;-4)$ ist. Wir wollen nun direkt die Funktionsgleichung auslesen.

Man kann sich vorstellen, die komplette Kurve wurde in ein um 3 nach rechts und 4 nach unten verschobenes Koordinatensystem verlegt. Der Funktionswert von f an der Stelle $x = 4$ zum Beispiel müsste derselbe sein wie jener von par an der Stelle $x = 4 - 3 = 1$ minus 4. Es gilt also

$$f(4) = par(4-3) - 4 = par(1) - 4 = 0{,}5 \cdot 1^2 - 4 = -3{,}5$$

Ein Blick auf die Zeichnung bestätigt das. Wir können das Spiel natürlich mit jedem beliebigen Punkt treiben. Immer gilt:

$$f(x) = par(x-3) - 4 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 - 4 = 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5$$

Für den letzten Schritt wurde nur noch ausmultipliziert. Somit haben wir die Funktionsgleichung von f.

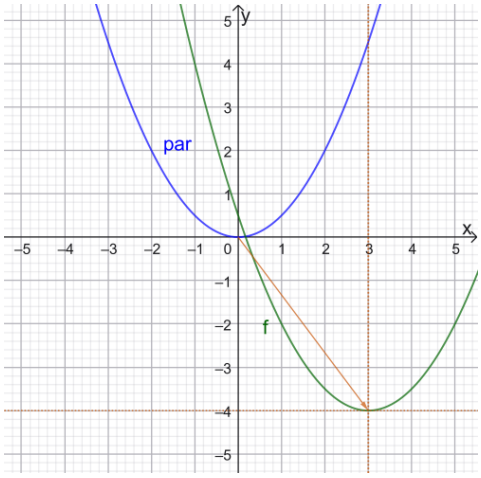


Bild 1.14 Parabel $par\colon\ y = 0{,}5x^2$ und $f\colon\ y = 0{,}5(x-3)^2 - 4$

Das Prinzip funktioniert natürlich nicht nur für diese Parabel. Es gilt immer:

Entsteht die Funktion $f(x)$ durch Verschiebung der Funktion $h(x)$ um $S(x_0; y_0)$, so gilt:

$$f(x) = h(x - x_0) + y_0$$

In impliziter Darstellung angegeben ersetzt man x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$.

Beispiel 1.8 (ABC)

Die Funktion $h\colon y = \frac{2}{x}$ soll, so wie in Bild 1.15 gezeigt, nach $S(-2;1)$ verschoben werden.

1. Bestimme die neue Funktionsgleichung $f(x)$.
2. Bestimme die Definitionsmenge von f an.
3. Lies den Pol und die Asymptote von f aus dem Grafen.

Lösung:

1. Die Funktion $h\colon y = \frac{2}{x}$ wurde in den Punkt $S(-2;1)$ verschoben. Im Bild wurde das durch einige entsprechende Pfeile angedeutet. Geht man von einem beliebigen Punkt auf der Kurve $h(x)$ um $\Delta x = 2$ Schritte nach links und um $\Delta y = 1$ Schritt nach oben, so landet man auf der Kurve $f(x)$. Es gilt also $x_0 = -2$ und $y_0 = 1$, woraus die Funktionsgleichung für f folgt:

$$f(x) = \frac{2}{x-(-2)} + 1 = \frac{2}{x+2} + 1 = \frac{x+4}{x+2}$$

   Im letzten Schritt wurde der Term auf den gemeinsamen Nenner $x + 2$ gebracht.

2. Da zu keinem Zeitpunkt durch Null dividiert werden darf, muss der Nenner $x + 2$ immer ungleich Null sein, was gleichbedeutend mit $x \neq -2$ ist. Es folgt, dass wir für die Definitionsmenge $x = -2$ ausschließen müssen.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

3. Der Pol ist dort, wo die Funktion nicht definiert ist, da dort der Wert nach plus oder minus unendlich strebt. Die Funktion hat also einen Pol bei $x = -2$.

   Mit größer oder kleiner werdenden Stellen nähert sich der Funktionswert 1 an. Daraus ergibt sich die Asymptote $a\colon y = 1$

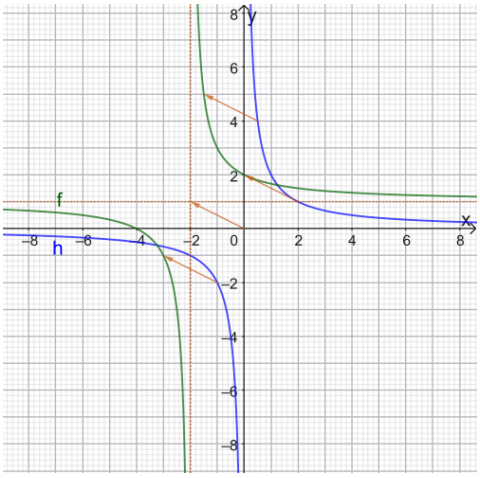


Bild 1.15 Die Funktionen $h\colon y = \frac{2}{x}$ und $f\colon y = \frac{2}{x+2} + 1$

Beispiel 1.9 (ABD)

Gib die Relationsgleichung eines Kreises mit Radius $r = 3$ und Mittelpunkt $M(5;7)$ an, so wie es in Bild 1.16 gezeigt ist.

Lösung: Ein Kreis mit Radius $r = 3$ und Mittelpunkt im Ursprung besteht aus allen Punkten, die einen Abstand von $r = 3$ zum Ursprung haben. Aus dem Pythagoräischen Lehrsatz folgt daher die Kreisgleichung $k_1 : x^2 + y^2 = 3^2$.

Diesen müssen wir nun um $x_M = 5$ und $y_M = 7$ verschieben. Das geschieht, indem x durch $x - 5$ und y durch $y - 7$ ersetzt wird, woraus folgt:

$$k_2 : (x-5)^2 + (y-7)^2 = 9$$

Manchmal ist es notwendig, diese Gleichung ausmultipliziert anzugeben. Dazu erinnern wir uns an die binomischen Formeln $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} k_2 &: (x-5)^2 + (y-7)^2 = 9 \\ k_2 &: x^2 - 10y + 25 + y^2 - 14y + 49 = 9 \quad | -9 \\ k_2 &: x^2 - 10x + y^2 - 14y + 65 = 0 \end{aligned}$$

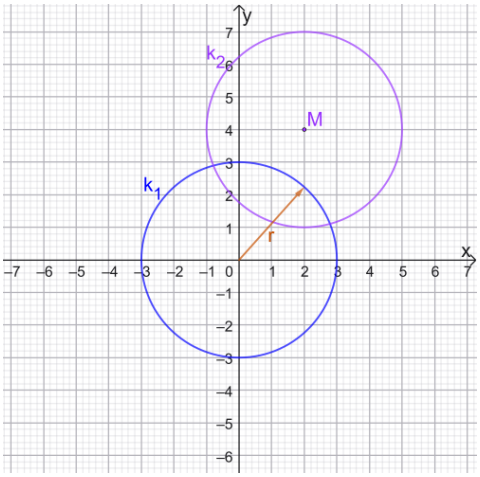


Bild 1.16 Zwei Kreise mit Radius 3 und Mittelpunkt im Ursprung beziehungweise im Punkt $M(2;4)$