Hans Jürgen Korsch

Mathematik und Physik auf und mit der Kugel

Ein spielerischer Einstieg in Geometrie, Mechanik, Quantenmechanik und Relativitätstheorie

HANSER

Korsch

Mathematik und Physik auf und mit der Kugel

Hans Jürgen Korsch

Mathematatik und Physik auf und mit der Kugel

Ein spielerischer Einstieg in Geometrie, Mechanik, Quantenmechanik und Relativitätstheorie

HANSER

Über den Autor:
Prof. Dr. Hans Jürgen Korsch, Technische Universität Kaiserslautern, Fachbereich Physik

MIX
Papier | Fördert gute Waldnutzung
FSC® C016368

Print-ISBN: 978-3-446-48593-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-48645-4

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, *www.rebranding.de*, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © Max Kostopoulos
Satz: Hans Jürgen Korsch
Druck: Elanders Waiblingen GmbH, Waiblingen
Printed in Germany

für Torge

Vorwort

Die **Idee zu diesem Buch** entstand bei einem Spaziergang durch unseren kleinen zoologischen Garten. Dabei kam die Frage auf: Wäre nicht auch ein Spaziergang durch interessante Gebiete der Physik denkbar – eine Wanderung, bei der man unerwartete und verblüffende Phänomene entdeckt? Und das Ganze so aufbereitet, dass sich die Inhalte ohne größere Anstrengung verstehen lassen und die Lektüre sogar echtes Vergnügen bereiten kann? Genau das soll in diesem Buch versucht werden. Doch bevor wir aufbrechen, gilt es zu klären, welche Gebiete wir durchwandern, wen wir auf diesen Spaziergang mitnehmen und welche Ausrüstung dafür erforderlich ist.

Da ich mich selbst der Theoretischen Physik zurechne, bleiben wir sicherheitshalber auf diesem Terrain. Dies setzt bei unseren Leserinnen und Lesern ein gewisses Interesse an **Mathematik** voraus, denn ohne Mathematik gibt es keine Physik. Um jedoch insbesondere jüngere Menschen für dieses Fach zu begeistern, beschränkt sich das erwartete mathematische **Vorwissen** weitgehend auf Oberstufen-Niveau – speziell auf die Differential- und Integralrechnung sowie die ebene Geometrie. Auf komplexe Strukturen wie Vektoren und Matrizen wird weitgehend verzichtet, um den Fokus nicht von der Physik auf die reine Mathematik zu verschieben. Daher vermeiden wir (schweren Herzens) auch strenge Definitionen und wasserdichte Beweise. Stattdessen werden wir unseren mathematischen Werkzeugkasten während des Spaziergangs behutsam erweitern. Ein **Anhang** mit einer kleinen **Formelsammlung** sowie einer Liste der verwendeten griechischen Buchstaben dient dabei als zusätzliche Unterstützung.

Ein paar Worte zu den **Formeln**: Sie wirken oft abschreckend und ihre abstrakten Symbole erscheinen vielen zunächst unverständlich. Das kann eine Barriere aufbauen, die den Zugang zum Verständnis versperrt. Dennoch können Formeln komplexe Sachverhalte prägnant und elegant darstellen und tiefe Einsichten in die Funktionsweise der Welt ermöglichen. Wir wollen daher versuchen, die Formeln so zu erklären, dass sie zugänglich werden und dabei helfen, unsere Welt besser zu begreifen. Mathematische

Herleitungen, die nicht für jeden gleichermaßen von Interesse sind, haben wir als **Exkurse** durch ein Symbol am Rand gekennzeichnet. Diese können ohne größeren Informationsverlust nur überflogen oder sogar übersprungen werden.

Unser Leitmotiv ist die **Kugel** in all ihren Spielarten. Als symmetrischstes Objekt der Natur taucht sie vom Kleinsten (der Quantenwelt) bis zum Größten (dem Universum) überall auf. Sie erlaubt es uns, Brücken zu schlagen zwischen den sehr unterschiedlichen Gebieten wie den dichtesten Kugelpackungen bis hin zur gekrümmten Raumzeit.

Wir beginnen unsere Reise in der Ebene (im zweidimensionalen Raum) und steigern uns allmählich über die dritte und vierte Dimension bis hin zu hochdimensionalen Räumen. Unterwegs lernen wir Grundlegendes über klassische Mechanik, Optik, Quantenmechanik, Relativitätstheorie und die Struktur unseres Universums. Da wir ein recht großes Spektrum anbieten, können wir nicht in jedes Detail gehen. Wir konzentrieren uns auf die wichtigsten Grundlagen und verweisen für weiterführende Informationen durch viele **Links** zu Webseiten wie **Wikipedia**.

Zahlreiche **Abbildungen** illustrieren die theoretischen Erklärungen. Um das Interesse wachzuhalten und das eigene Denken anzuregen, sind immer wieder kleinere Fragen und Aufgaben eingestreut, die nach Möglichkeit selbst beantwortet werden sollten – zur Überprüfung findet man Antworten am Ende des Buchs

Kaiserslautern, Februar 2026 Hans Jürgen Korsch

Einige nützliche **Tipps zum Navigieren im pdf-Reader** (hier für Adobe; je nach der eingesetzten Software können diese Befehle aber variieren).

- **Strg** + **F**: Standard-Suche.
- **Alt** + **Pfeil links**: Rücksprung zur vorherigen Ansicht.
- schnelles Zoomen: **Strg** + **0**: ganze Seite anzeigen; **Strg** + **1**: tatsächliche Größe; **Strg** + **2**: auf Fensterbreite.
- **Leertaste** gedrückt halten: ermöglicht es, mit dem Cursor den Text zu verschieben.
- **Pos 1** oder **Ende**: Sprung direkt zum Anfang oder Ende des Dokuments.
- über **Menü** → **Fenster** → **Teilung** (bzw. **Teilung entfernen**) lässt sich das Fenster horizontal teilen, sodass man zwei Textstellen gleichzeitig lesen kann.

Viel(!) mehr dazu findet man im Internet durch Suche nach dem Stichwort **Adobe Acrobat Tastaturbefehle**.

Inhalt

1

Im Flachland

1.1 Euklidische Geometrie: Geraden & Kreise

Wir beginnen unsere Reise in die Welt der Kugeln mit einem Ausflug in das Flachland. Darunter stellen wir uns eine ausgedehnte ebene Fläche vor, ein flaches Blatt Papier, das allerdings keinen Rand hat. Es erstreckt sich also nach allen Seiten bis ins Unendliche. Eigentlich eine ziemlich öde Gegend, und wir wollen sie ein wenig beleben. Erzeugen wir deshalb an irgendeiner Stelle unserer Ebene einen **Punkt**. Das ist noch immer nicht sehr aufregend.

Also nehmen wir noch einen zweiten Punkt an irgendeiner anderen Stelle der Ebene. Jetzt sieht es schon interessanter aus! Wir können zum Beispiel diese Punkte durch eine Linie verbinden, wir sagen auch durch eine **Kurve**. Eine solche Kurve hat eine Länge, die größer ist als null, denn die Punkte liegen ja nicht an der gleichen Stelle. Unter allen Verbindungskurven gibt es eine Kurve kleinster Länge. Eine solche Kurve nennen wir eine gerade Linie oder eine gerade Strecke oder auch, ganz feierlich, eine **Geodäte**. Wir werden noch mehr darüber hören. Aber ein Begriff fehlt jetzt noch: Eine **Gerade** ergibt sich, wenn man eine Strecke zwischen zwei Punkten in gerader Linie nach beiden Richtungen bis ins Unendliche verlängert.

Wenn wir nun eine Gerade betrachten und einen Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, dann gibt es viele Geraden durch diesen Punkt, aber nur eine, die unsere Ausgangsgerade nicht schneidet, eine **Parallele**. Eine solche Parallele hat zu unserer Geraden überall den gleichen Abstand.

Dreiecke

Jetzt nehmen wir noch einen dritten Punkt in der Ebene dazu und verbinden alle drei Punkte durch gerade Verbindungslinien. Dann erhalten wir ein **Dreieck**, ein Objekt, mit dem wir schon in der Schule in Geometrie gequält wurden oder noch werden. Im Bild 1.1 findet man die üblichen Bezeichnungen der Punkte A, B, C, der Seitenlängen a, b, c und der Winkel α, β, γ (gesprochen „alpha“, „beta“, „gamma“), jeweils nummeriert im mathematisch positiven Umlaufsinn (also gegen den Uhrzeigersinn).

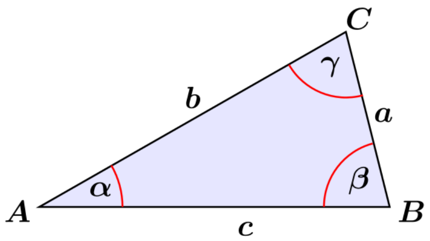

Bild 1.1 Den Eckpunkten A, B, C eines ebenes Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ liegen die Seiten a, b, c gegenüber.

Hier wollen wir uns nur an drei wichtige Ergebnisse der Dreieck-Geometrie erinnern:

- Die Summe der drei Winkel ist gleich 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
- Die drei Seitenhalbierenden sind die Verbindungsgeraden der Eckpunkte mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Ihr Schnittpunkt, der **Schwerpunkt**, teilt sie im Verhältnis 2:1, vom Eckpunkt aus gerechnet. Sein Abstand zu jeder Seite ist gleich einem Drittel der zugehörigen Höhe.
- Falls einer der Winkel, beispielsweise der Winkel γ, ein rechter Winkel ist, also gleich 90°, dann gilt nach dem griechischen Mathematiker **Pythagoras** $a^2 + b^2 = c^2$. Mehr darüber, auch viele schöne Beweise dieser Formel, findet man bei Wikipedia unter dem Stichwort **Satz des Pythagoras**.

Es gibt unendlich viele rechtwinklige Dreiecke, bei denen a, b und c ganze Zahlen sind. Bestimme solche Dreiecke für $a = 15$. (Antwort Seite 199)

Die **Dreiecksfläche** F können wir für ein rechtwinkliges Dreieck schnell ermitteln. Wenn c die längste Seite ist, die also dem rechten Winkel gegenüber liegt, dann ist $F = \frac{1}{2}ab$, was man aus dem Bild 1.2 erkennt. Auch für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a berechnen wir nach dem Satz des Pythagoras die Höhe als $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und die Fläche ist dann gleich $F = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Bei allgemeinen Dreiecken ist die Flächenberechnung etwas schwieriger, und wir werden das wieder aufgreifen, wenn wir mehr über trigonometrische Funktionen wissen. Allerdings gibt es noch die wenig bekannte **heronsche Dreiecksformel**

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit dem halben Umfang} \quad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\,,$$

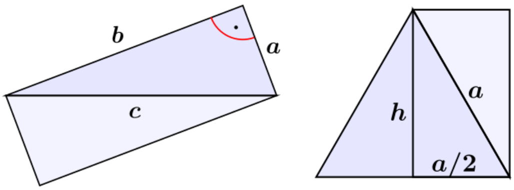

Bild 1.2 Links: Ein Rechteck wird durch eine Diagonale in rechtwinklige Dreiecke geteilt. Rechts: Ein gleichseitiges Dreieck kann zu einem flächengleichen Rechteck ergänzt werden.

benannt nach dem griechischen Gelehrten Heron von Alexandria (erstes Jahrhundert vor Christus), die ganz ohne trigonometrische Funktionen auskommt. Wir wollen sie hier nicht beweisen, aber wenigstens einmal testen:

Welche Fläche liefert die heronsche Formel für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a? (Antwort Seite 199)

Kartesische Koordinaten

Für konkrete Rechnungen benötigt man eine genaue Beschreibung eines jeden Punkts in der Ebene. Dies ermöglicht ein **Koordinatensystem**. Dazu definiert man zwei Achsen, die x-Achse und die y-Achse. Das sind zwei Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, sich also im **Nullpunkt** oder **Koordinatenursprung** in einem Winkel von 90° schneiden. Wenn wir in dieser Ebene dazu jeweils Parallelen in gleichen Abständen einzeichnen, dann erhalten wir ein anschauliches Bild des Koordinatensystems durch **Koordinatenlinien**. Auf einer solchen x-Koordinatenlinie hat y einen festen Wert, x ist beliebig. Umgekehrt ist es bei den y-Koordinatenlinien. Die x-Koordinaten und die y-Koordinaten sind senkrecht zueinander, sie sind **orthogonal**. Man nennt sie **kartesische Koordinaten**.

In unserer Ebene benötigen wir *zwei* solche Koordinaten, um einen Punkt festzulegen, beispielsweise durch (x_1, y_1). Man sagt auch, die Ebene ist *zweidimensional*. In dem Raum, in dem wir leben, benötigen wir *drei* Koordinaten, wir leben in einem *dreidimensionalen* Raum, das Thema des nächsten Kapitels. Ganz allgemein bezeichnet die

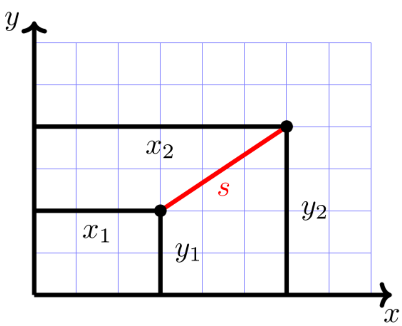

Bild 1.3 Koordinatensystem mit zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2), verbunden durch eine Gerade.

minimale Anzahl der Koordinaten die **Dimension** des Raums. Einen ersten Einblick in solche höherdimensionalen Räume gibt Kapitel 3.

Als kleine Belohnung für die Geduld bei unseren Überlegungen können wir jetzt eine einfache Formel für den **Abstand** zweier Punkte aufschreiben. Dieser **euklidische Abstand** s der beiden Punkte (x_1,y_1) und (x_2,y_2) ist nach dem Satz des Pythagoras gegeben durch

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Die Geraden

Die einfachste „Kurve“ in der Ebene ist eine **Gerade**, die man durch die Funktionsgleichung $y(x) = mx + n$ beschreiben kann. Dabei ist n der Wert, in dem die Gerade die y-Achse schneidet, also $n = y(0)$, und m ist die „Steigung“ der Geraden. Das heißt, zwei Punkte x_1 und x_2 mit dem Abstand $\Delta x = x_2 - x_1$ und den Funktionswerten $y_1 = mx_1 + n$ und $y_2 = mx_2 + n$ haben die Wertedifferenz $\Delta y = y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Also ist die Steigung gleich $\Delta y/\Delta x = m$. Wir können aber den Wert von n auch durch die Forderung festlegen, dass die Gerade durch einen Punkt (x_0,y_0) verläuft. Das ergibt dann $y_0 = mx_0 + n$, also $n = y_0 - mx_0$ oder

$$y = m(x - x_0) + y_0\,, \quad \text{die } \textbf{Punktsteigungsform} \text{ der Geraden.}$$

Kritische Mitdenker haben hier natürlich bemerkt, dass es Geraden in der Ebene gibt, die sich nicht so darstellen lassen. Das sind Geraden parallel zur y-Achse, die eine unendlich große Steigung hätten. Man kann diese Problematik elegant umgehen durch die Definition einer allgemeinen Geradengleichung als

$$ax + by = u$$

mit der Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{b} \quad \text{für} \quad b \neq 0\,.$$

Hier sind die drei Parameter a, b, u nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Man kann sie beispielsweise festlegen, indem man die Gerade durch einen Punkt (x_0,y_0) führt. Dann gilt $u = ax_0 + by_0$.

Schnitte zweier Geraden

Zur Bestimmung des **Schnittpunkts** (x,y) der Geraden $ax + by = u$ und $cx + dy = v$ müssen wir diese beiden gekoppelten linearen Gleichungen nach x und y auflösen mit dem Ergebnis

$$x = \frac{ud - bv}{ad - bc}\,, \quad y = \frac{av - uc}{ad - bc} \quad \text{für} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

In dem hier ausgeschlossenen Fall $ad - bc = 0$ sind die beiden Geraden parallel und haben daher keinen Schnittpunkt.

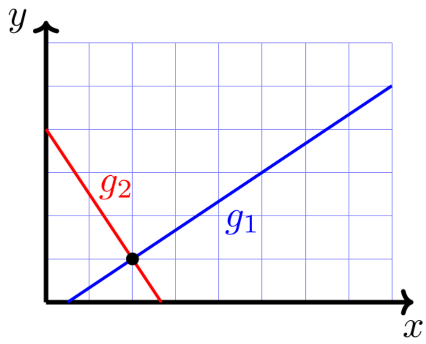

Bild 1.4 Zwei Geraden g_1 und g_2, die aufeinander senkrecht stehen und sich in einem Punkt schneiden.

Das Bild 1.4 zeigt die Gerade $2x - 3y = 1$ (g_1) und die Gerade $3x + 2y = 8$ (g_2), die sich im Punkt $x = 2$, $y = 1$ schneiden. Mit etwas mehr Rechenarbeit lässt sich auch der **Schnittwinkel** der Geraden bestimmen, allerdings benötigen wir dazu die erst später behandelten trigonometrischen Funktionen. Hier wollen wir deshalb nur zwei Geraden betrachten, die aufeinander senkrecht stehen. Wir können dazu unser Koordinatensystem so wählen, dass die Geraden sich im Nullpunkt schneiden, also $y = m_1 x$ und $y = m_2 x$. Wenn sie senkrecht zueinander sind, müssen ihre Steigungen negativ reziprok zueinander sein, das heißt $m_2 = -1/m_1$.

Die beiden Geraden aus dem Bild 1.4 auf Seite 5 stehen aufeinander senkrecht. Bitte nachprüfen und dann versuchen, die Orthogonalitätsrelation $m_1 = -1/m_2$ herzuleiten! (Antwort Seite 199)

Kreise

Bleiben wir noch ein wenig bei unserem kleinen Ausflug in die Flachland-Geometrie und betrachten alle Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand r haben. Als festen Punkt wählen wir den Nullpunkt. Wir sehen sofort, dass sich ein Kreis ergibt, aber jetzt können wir mit dem **Satz des Pythagoras** auch eine mathematische Formel für diesen Kreis angeben:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \,.$$

Man nennt r den **Radius** des Kreises und den Nullpunkt seinen **Mittelpunkt**. Etwas Vorsicht ist geboten, denn es ist nicht immer klar, ob mit einem „Kreis" die Kreislinie gemeint ist, oder die Menge aller Punkte innerhalb mit $\sqrt{x^2 + y^2} \le r$.

In unsrem Buch dreht sich (fast) alles um die **Kugel**, die Menge aller Punkte im dreidimensionalen Raum, deren Abstand von einem vorgegebene Punkt, dem Mittelpunkt, einen Wert r nicht übersteigt. Also können wir sagen, dass ein Kreis mit Radius r eine zweidimensionale Version einer Kugel darstellt. Deshalb sollten wir einiges über die geometrische Eigenschaften eines Kreises kennen. Aber über ein so einfaches geometrisches Objekt wie einen **Kreis** ist SEHR viel bekannt! Wichtig sind für uns zunächst der **Kreisumfang** und die **Kreisfläche**.

Um den **Kreisumfang** zu bestimmen, können wir zum Beispiel einen Kreis mit Radius r in einer ersten Näherung durch ein Quadrat ersetzen, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen, ein „eingeschriebenes regelmäßiges Viereck“.

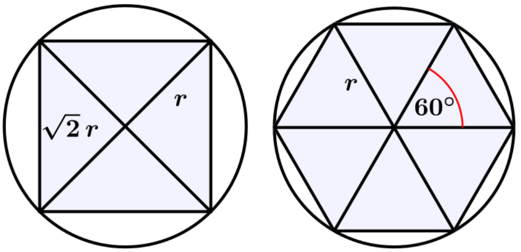

Bild 1.5 Kreis mit eingeschriebenem Quadrat (links) und regelmäßigem Sechseck, bestehend aus gleichseitigen Dreiecken mit Winkeln von 60 Grad (rechts).

Mit unserer Pythagoras-Formel können wir die Seitenlänge des Quadrats als $\sqrt{2}\,r$ berechnen und seinen Umfang als $u_4 = 4\sqrt{2}\,r \approx 5{,}66\,r$. Das ist natürlich kleiner als der gesuchte Kreisumfang, und wir müssen unsere Näherung verbessern. Versuchen wir es also mit einem eingeschriebenen regelmäßigen Sechseck. Das setzt sich zusammen aus sechs gleichen Dreiecken mit jeweils zwei Seiten der Länge r, also gleichschenkligen Dreiecken. Dann sind auch die beiden äußeren Dreieckswinkel gleich. Der Winkel in der Mitte ist gleich $60°$, ein Sechstel des vollen Kreiswinkels von $360°$. Also sind wegen der Winkelsumme von $180°$ im Dreieck auch die beiden anderen Winkel gleich $60°$. Die Dreiecke sind also sogar gleichseitig und daher ist jede Seitenlänge gleich r. Der Umfang des Sechsecks ist mit $u_6 = 6r$ wie erwartet größer als der Quadratumfang u_4. Das Verfahren können wir mit eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecken fortlaufend verbessern. Die Rechnung wirklich durchzuführen, ist nicht ganz einfach, liefert aber für n gegen Unendlich einen Grenzwert, den man als $u = \lim_{n\to\infty} u_n = 2\pi r$ bezeichnet, was die **Kreiszahl** π (gesprochen „pi“) definiert, eine irrationale reelle Zahl mit dem ungefähren Wert von 3,14 oder 22/7.

Für die Berechnung der **Kreisfläche** F können wir ganz genauso vorgehen und den Grenzwert der Flächen der eingeschriebenen n-Eck-Flächen berechnen. Wir erhalten dann $F = \pi r^2$. Es geht aber auch anders:

Wir erzeugen in Gedanken n Kreise um den Kreismittelpunkt mit den Radien $r_k = d\,k$ für $k = 1, \ldots, n$ im Abstand $d = r/n$. Dann ist für großes n die Fläche eines solchen sehr schmalen Kreisrings näherungsweise gleich dem Produkt aus seinem Umfang $u_k = 2\pi r_k$ und seiner Dicke $d = r/n$. Alle diese Ringflächen summieren sich zu

$$F = \sum_{k=1}^{n} u_k d = 2\pi d^2 \sum_{k=1}^{n} k = 2\pi \frac{r^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \pi r^2 \,,$$

wobei die altbekannte Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ der ersten n natürlichen Zahlen (siehe Seite 188 im Anhang A) benutzt wurde.

Solch eine einfache Bestimmung der Fläche innerhalb einer geschlossenen Kurve ist allerdings nur selten möglich. In den meisten Fällen erhält man als Resultat ein Integral, das dann numerisch ausgewertet werden muss, aber es gibt auch Ausnahmen:

Für eine Kreiskurve lässt sich das Flächenintegral in geschlossener Form berechnen. Wie wäre es mit einem Versuch? (Antwort Seite 200)

Man kann aber auch ganz ohne Differential- und Integralrechnung auskommen! Dazu schließen wir unsere Kurvenfläche in ein möglichst kleines Rechteck ein, unseren Kreis mit Radius r in ein Quadrat mit Seitenlänge $2r$, und erzeugen mit einem **Zufallszahlengenerator** N zufällige, gleichförmig verteilte Punkte (x, y) in dem Quadrat, also Punkte mit $-r < x, y < +r$. Dann prüfen wir nach, ob $x^2 + y^2 < r^2$ gilt, also ob der Punkt im Kreis liegt. Wir finden n solche Punkte, und für große Werte von N ergibt n/N eine gute Näherung für das Verhältnis unserer gesuchten Kreisfläche zu der Fläche $4r^2$ des Quadrats.

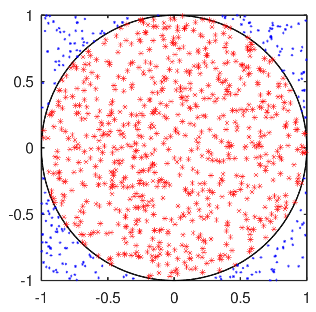

Bild 1.6 Monte-Carlo-Methode zur Flächenberechnung. Innerhalb des Quadrats sind 1000 zufällig verteilte Punkte markiert, wobei die Punkte in dem eingeschriebenen Kreis gezählt werden.

Man bezeichnet ein solches Verfahren aus ersichtlichen Gründen als eine **Monte-Carlo-Methode**. Das Bild 1.6 zeigt die verwendeten $N = 1000$ Punkte bei einer Berechnung der Fläche des Einheitskreises mit einem Resultat von $n = 780$, also $F = 4n/N = 3{,}12$. Das ist natürlich zu verbessern durch Vergrößerung von N, und mit $N = 2000$ Punkten erhält man $F = 3{,}14$, was die korrekte Fläche $F = \pi = 3{,}14159\ldots$ in den ersten beiden

Dezimalstellen reproduziert. Man könnte dies also auch als ein Verfahren zur Berechnung von π bezeichnen, allerdings gibt es dazu wesentlich effizientere Techniken. Aber zur Flächenberechnung, auch von Flächen innerhalb anderer Randkurven, ist diese Monte-Carlo-Methode gut geeignet.

Drei-Punkte-Kreiskonstruktion

Wie wir alle wissen, gibt es durch zwei (voneinander verschiedene) Punkte in der Ebene genau eine Gerade. Genauso wird durch drei solche Punkte ein Kreis festgelegt, wobei wir ausschließen wollen, dass sie auf einer Geraden liegen. Um den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises zu bestimmen, kann man sich überlegen, dass der Mittelpunkt M auf den Mittelsenkrechten der Verbindungslinien der Punkte liegt. Das erlaubt eine direkte grafische Konstruktion, wie im Bild 1.7. Zur Berechnung stellt man zwei Geradengleichungen der Mittelsenkrechten auf, bestimmt ihren Schnittpunkt (x, y) und ermittelt den Radius r, indem man die Koordinaten (x_j, y_j) eines der vorgegebenen Punkte in die Kreisgleichung $(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 = r^2$ einsetzt.

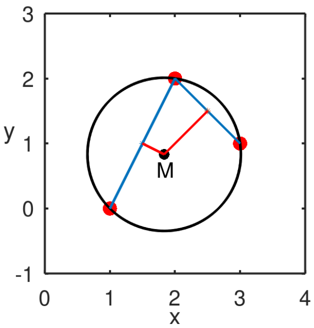

Bild 1.7 Drei Punkte bestimmen einen Kreis. Die Mittelsenkrechten der Verbindungslinien der Punkte schneiden sich im Mittelpunkt M des Kreises.

Einfacher erscheint es allerdings, die drei Kreisgleichungen $(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 = r^2$ mit $j = 1, 2, 3$ nach den drei Unbekannten x, y und r aufzulösen: Wir formen sie um in

$$2x_j x + 2y_j y + w = x_j^2 + y_j^2 =: s_j \,, \quad j = 1, 2, 3 \,, \quad \text{mit} \quad w = r^2 - x^2 - y^2 \,.$$

Das sind drei lineare Gleichungen mit den Unbekannten x, y und w. Subtrahieren wir von der ersten und zweiten Gleichung jeweils die dritte, so ergibt sich

$$2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)x = s_1 - s_3 \,, \quad 2(x_2 - x_3)x + 2(y_2 - y_3)y = s_2 - s_3 \,.$$

Das sind zwei lineare Gleichungen für die Unbekannten x und y der Form $ax + by = u$, $cx + dy = v$ mit den von Seite 4 bekannten Lösungen

$$x = \frac{ud - bv}{ad - bc} \,, \quad y = \frac{av - uc}{ad - bc}$$

für die Koordinaten des Mittelpunkts. Dann findet man mit $w = s_1 - 2x_1 x - 2y_1 y$ den Radius $r = \sqrt{w + x^2 + y^2}$.

Berechne mit der Drei-Punkte-Technik den Kreis durch die Punkte (1,0), (2,2) und (3,1) aus dem Bild 1.7 auf Seite 8. (Antwort Seite 200)

Polarkoordinaten

Kreise und ähnliche Kurven lassen sich zwar in kartesischen Koordinaten beschreiben, aber in vielen Fällen sind andere Koordinaten bequemer, wie beispielsweise diese: Wir verbinden den Punkt (x, y) durch eine gerade Linie mit dem Nullpunkt und betrachten das Dreieck, das von dieser Linie, der x-Achse und der y-Koordinatenlinie gebildet wird, wie links im Bild 1.8 zu sehen ist. Dies ist ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt deshalb nach der Pythagoras-Formel $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Den Dreieckswinkel am Nullpunkt wollen wir φ (gesprochen „phi“) nennen. Dann können wir unseren Punkt (x, y) auch durch die Angabe von r und φ festlegen. Alle Punkte mit einem festen Wert von r liegen auf einem Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt, der φ-Koordinatenlinie. Alle Punkte mit einem festen Winkel φ liegen auf einem Strahl, der vom Nullpunkt ausgeht, der r-Koordinatenlinie, die die φ-Koordinatenlinie in einem rechten Winkel schneidet. Also sind diese Koordinaten **orthogonal**. Man nennt sie **Polarkoordinaten**.

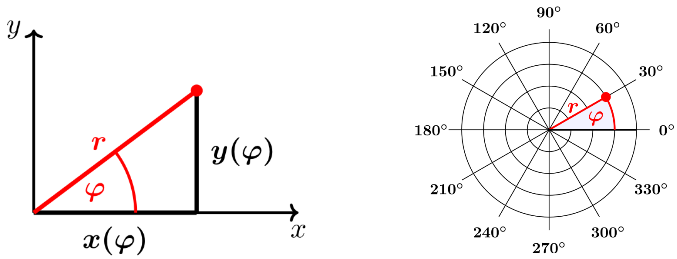

Bild 1.8 Polarkoordinaten: Ein Punkt wird beschrieben durch den radialen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ zwischen Radialstrahl und x-Achse.

Inzwischen habt ihr sicher bemerkt, dass uns hier noch etwas fehlt! Es sollte doch möglich sein, dass sich Menschen, die mit kartesischen Koordinaten rechnen, mit denen verständigen, die Polarkoordinaten verwenden. Wir würden also gern die Werte von x und y in die von r und φ umrechnen und umgekehrt. Nehmen wir einmal an, dass wir r und φ kennen. Wie erhalten wir daraus die Werte von x und y?

Hier hilft uns die Überlegung, dass alle Punkte auf dem Strahl mit konstantem Winkel φ das gleiche Verhältnis von x zu r haben. Das folgt aus dem **Strahlensatz** der Geometrie (siehe Seite 190). Also ist das Verhältnis x/r eine Funktion, die nur von φ abhängt. Leider ist dies keine so einfache Funktion wie eine Potenz oder eine Wurzel. Man bezeichnet sie als **Sinusfunktion**, geschrieben als $\sin \varphi = x/r$, und wer mit ihr und ihren Geschwistern Kosinus, Tangens und Kotangens nicht von der Schule her vertraut ist, findet mehr darüber im Anhang ab Seite 192. Entsprechend definieren wir den Kosinus $\cos\varphi = y/r$ mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Es gilt also

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Für die umgekehrte Richtung der Transformation benötigen wir noch die inverse Funktion der Sinusfunktion. Man nennt sie **Arkussinus** und schreibt arcsin. Damit können wir die Umkehrtransformation aufschreiben als

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arcsin\frac{y}{r}\,.$$

Jetzt können wir als Erweiterung der Dreiecksregeln von Seite 2 noch zwei wichtige Lehrsätze über allgemeine ebene Dreiecke anführen: Es gilt der **Sinussatz**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\,, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}\,, \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}\,,$$

und der **Kosinussatz**

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \quad \text{oder} \quad b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta \quad \text{oder} \quad a^2 = b^2+c^2-2ac\cos\alpha\,.$$

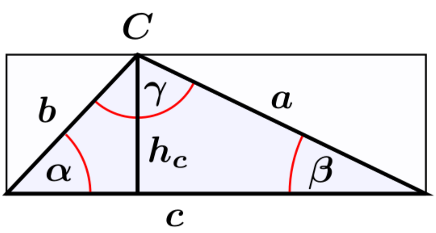

Bild 1.9 Die Fläche eines Dreiecks lässt sich ermitteln, indem man es zu einem Rechteck verdoppelt.

An dieser Stelle wollen wir noch die versprochene Formel für eine allgemeine Dreiecksfläche F nachtragen. Wir wählen dazu eine beliebige Dreiecksseite aus, sagen wir die Seite c. Dann ist die Höhe, der Abstand der Ecke C von der Seite c, gleich $h_c = b\sin\alpha$. Wenn wir jetzt unser Dreieck wie im Bild 1.9 zu einem Rechteck ergänzen, so verdoppelt sich die Fläche und wir erhalten mit der Rechteckfläche ch_c die Formel

$$F = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha \quad \text{und genauso} \quad F = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$

Diese drei Gleichungen lassen sich natürlich auch direkt ineinander überführen, denn es gilt z. B. $h_c = b\sin\alpha = a\sin\beta$.

Nachdem wir jetzt das grundlegende Werkzeug bereitgestellt haben, mit dem wir geometrische Objekte in der Ebene beschreiben und untersuchen können, wollen wir uns als Zwischenspiel mit anscheinend einfachen Fragestellungen zu Kreisen und Dreiecken beschäftigen.

1.2 Kreispackungen

Packungsprobleme sind sehr beliebt als mathematische Spielereien, als Knobelaufgaben oder auch als ernsthafte und manchmal sehr schwierige mathematische Probleme, die zum Teil noch immer nicht gelöst sind. Am einfachsten sind zweidimensionale Packungen in der Ebene. Dabei geht es meist um Kreispackungen. Hier gibt es eine riesige Menge unterschiedlicher Problemstellungen. Wir können hier nur einen ersten Eindruck vermitteln und damit zu weiteren Nachforschungen anregen.

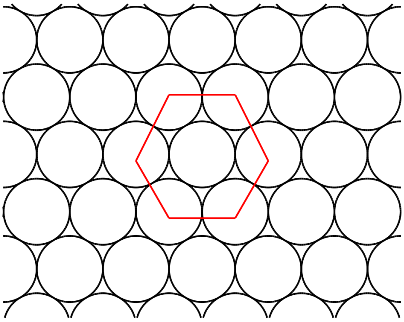

Bild 1.10 Dichte Packung von Kreisen, deren Mittelpunkte ein hexagonales Gitter bilden.

Das wohl bekannteste Problem ist die dichteste Packung gleicher Kreise in der gesamten Ebene, wobei die Kreise nicht überlappen dürfen. Die Lösung ist im Bild 1.10 dargestellt. Hier bilden die Mittelpunkte der Kreise ein regelmäßiges Sechseckgitter, ein hexagonales Gitter. Betrachten wir eine hexagonale Gitterzelle, markiert in der Bildmitte. Sie wird durch eine Kreisfläche im Zentrum belegt und von sechs Kreisen um die Eckpunkte, von denen jeweils ein Drittel ihrer Fläche innerhalb der Gitterzelle liegt. Sie wird also insgesamt belegt durch drei Kreisflächen mit Radius r mit jeweils einer Fläche $F_{\text{Kreis}} = \pi r^2$. Das Sechseck hat die Fläche von sechs gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge $2r$, deren Fläche wir oben schon einmal als $F_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(2r)^2 = \sqrt{3}\,r^2$ bestimmt hatten. Also ist das Verhältnis von Kreisbedeckung zur Sechseckfläche gleich

$$p = \frac{3\,F_{\text{Kreis}}}{6\,F_{\text{Dreieck}}} = \frac{3\pi r^2}{6\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}907\ldots\,.$$

Diese Berechnung erscheint recht einfach, aber der *Beweis*, dass es sich dabei wirklich um die *dichteste* **Kreispackung** in der Ebene handelt verlangt weit mehr Aufwand. Ein Beweis erfolgte 1890 durch Axel Thue für Kreispackungen auf Gittern und erst 1942 durch László Fejes Tóth für den allgemeinen Fall.

Einfacher ist ist eine Quadratfüllung, oft formuliert als die Aufgabe, das kleinste Quadrat zu finden, das n gleiche Kreise enthält. Bis zu $n = 5$ sind die Lösungen sehr einfach, aber dann wird es schwieriger, was man durch Probieren schnell merkt. Die Webseite **https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu** zeigt viele solche Lösungen.