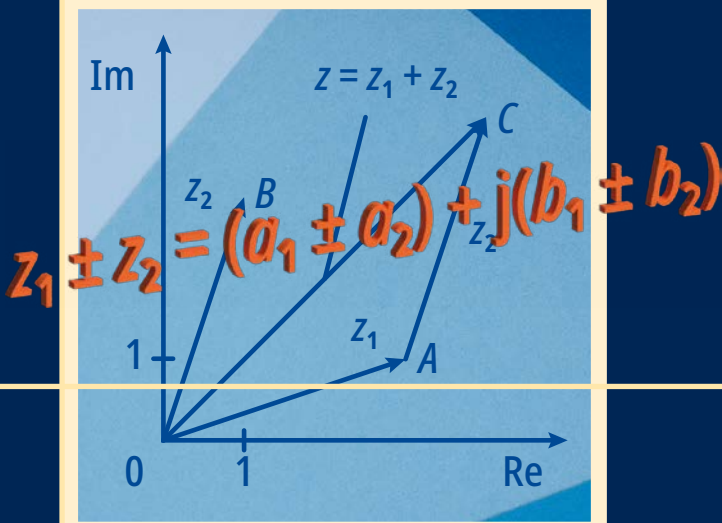


Hans-Jochen Bartsch  
Michael Sachs

# Kleine Formelsammlung Mathematik



9., aktualisierte Auflage

HANSER

**Disclaimer zur Barrierefreiheit**

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Aufgrund der komplexen Strukturen der vorliegenden Inhalte, war es dem Verlag mit wirtschaftlich vertretbarem Aufwand nicht möglich, den Inhalt in barrierefreier Form zur Verfügung zu stellen.

Sollten Sie Bedarf an den Inhalten in barrierefreier Form haben, wenden Sie sich bitte an den Verlag.

---

<b>1</b>	<b>Logik, Arithmetik, Algebra</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>48</b>
<b>3</b>	<b>Elementare und analytische Geometrie</b>	<b>79</b>
<b>4</b>	<b>Funktionen</b>	<b>123</b>
<b>5</b>	<b>Analysis</b>	<b>151</b>
<b>6</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>203</b>
<b>7</b>	<b>Reihen, Integral-Transformationen</b>	<b>220</b>
<b>8</b>	<b>Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>243</b>
<b>9</b>	<b>Integraltabelle</b>	<b>275</b>
<b>S</b>	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>281</b>

---



Bartsch / Sachs

## Kleine Formelsammlung Mathematik



### **bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

*[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)*



Hans-Jochen Bartsch  
Michael Sachs

# **Kleine Formelsammlung Mathematik**

9., aktualisierte Auflage

HANSER

*Autor: Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch*  
*Bearbeiter: Prof. Dr. Michael Sachs, Hochschule München*  
*Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik*  
*sci.hm.edu*



Print-ISBN: 978-3-446-48505-1  
E-Book-ISBN: 978-3-446-48506-8

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.  
Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2026 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München  
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | [info@hanser.de](mailto:info@hanser.de)  
[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Frauke Schafft

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Prof. Dr. Michael Sachs, Hintergrund: [gettyimages.de/](http://gettyimages.de/)Tuliiia Bondar

Satz: Dr. Steffen Naake, Limbach-Oberfrohna

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

# Vorwort

## ■ Vorwort zur 9. Auflage

Einige wenige bekanntgewordene Fehler der 8. Auflage habe ich korrigiert und danke wie immer allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern für ihre Hinweise, sowie Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die Betreuung und Herrn Dr. Steffen Naake für die Gestaltung des Satzes mit  $\text{\LaTeX}$ .

München, im September 2025

Michael Sachs  
Bearbeiter

## ■ Vorwort zur 8. Auflage

Gegenüber der 7. Auflage wurde die Integraltabelle komplett überarbeitet und übersichtlicher strukturiert. Die trigonometrischen Funktionen habe ich um die für die Integration wichtigen Produkt-Formeln ergänzt. In die beschreibende Statistik wurden die in letzter Zeit immer häufiger anzutreffenden Box-Plots neu aufgenommen. Bei den inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 2. Ordnung habe ich die schwer lesbare Grafik zum Auffinden einer partikulären Lösung durch eine übersichtliche Tabelle ersetzt. Bei den Mehrfach-Integralen wurden die am häufigsten vorkommenden Flächen- und Volumenelemente in einer Tabelle zusammengestellt.

Druckfehler der Vorgängerauflagen habe ich wie immer korrigiert, dafür sei allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern gedankt, die mir Hinweise geschickt haben.

Mein Dank geht an Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die Betreuung und an Herrn Dr. Steffen Naake für die sorgfältige Arbeit des Umbruches und die Gestaltung der endgültigen Fassung.

München, im November 2022

Michael Sachs

## ■ Aus dem Vorwort zur 6. Auflage

Mit Wissen des im Frühjahr 2008 verstorbenen Verfassers der ersten vier Auflagen dieser Formelsammlung, Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch, wurde mir vom Verlag die Fortführung des Werkes anvertraut. Nachdem ich in der fünften Auflage im Wesentlichen nur bekannte Druckfehler verbessert hatte, lege ich nun eine völlige Neubearbeitung der Formelsammlung vor. Dabei sind die Auswahl und Grobgliederung des Stoffes weitgehend gleich geblieben, ebenso habe ich die meisten Bilder und Tabellen aus den Vorgängerauflagen übernommen. Bei der Gestaltung der einzelnen Kapitel war mir ein Hauptanliegen, dass diese in sich logisch aufgebaut und weitgehend unabhängig von anderen Kapiteln lesbar sind. Erforderliche Querverweise habe ich ergänzt.

Das Buch enthält keine Beweise und auch keine Beispiele, sondern nur mathematische Definitionen, Sätze und Verfahren. Dadurch konnten Umfang und Preis niedrig gehalten werden, außerdem wird die Zulassung als Hilfsmittel in Prüfungen erleichtert, wenn keine durchgerechneten Aufgaben enthalten sind. Das Buch kann daher als Kompaktskript zur Mathematik eingesetzt werden, welches die Studierenden vom lästigen Mitschreiben von Definitionen und Sätzen befreit. Aufgaben können und sollen der einschlägigen und reichhaltigen Fachliteratur entnommen und hinzugezogen werden.

München, im März 2015

Michael Sachs

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Logik, Arithmetik, Algebra</b> .....	<b>15</b>
1.1	Mathematische Logik .....	15
1.1.1	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen .....	15
1.1.2	Rechengesetze (BOOLEsche Algebra) .....	17
1.2	Mengen .....	17
1.2.1	Grundlagen .....	17
1.2.2	Mengenoperationen .....	18
1.2.3	Rechenregeln für Mengen .....	19
1.2.4	Relationen .....	20
1.2.5	Zahlensysteme .....	20
1.3	Menge der reellen Zahlen .....	21
1.3.1	Standard-Zahlenmengen .....	21
1.3.2	Grundoperationen für reelle Zahlen .....	23
1.3.3	Potenzen, Wurzeln .....	26
1.3.4	Logarithmen .....	27
1.3.5	Binomischer Satz .....	28
1.4	Menge der komplexen Zahlen .....	30
1.4.1	Grundlagen .....	30
1.4.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen .....	31
1.4.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen .....	32
1.4.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen .....	33
1.5	Kombinatorik .....	33
1.6	Folgen .....	35
1.6.1	Grundlagen .....	35
1.6.2	Schranken, Grenzwert und Monotonie einer Folge .....	35
1.6.3	Arithmetische und geometrische Folgen .....	36
1.6.4	Zins-, Zinseszins-, Renten- und Tilgungsrechnung .....	38

1.7	Gleichungen und Ungleichungen, Algebra .....	40
1.7.1	Grundlagen.....	40
1.7.2	Lineare Gleichungen.....	41
1.7.3	Nichtlineare Gleichungen, Polynome .....	42
1.7.4	Wurzelgleichungen, transzendente Gleichungen .	45
1.7.5	Numerische Verfahren für Gleichungen .....	45

<b>2</b>	<b>Lineare Algebra .....</b>	<b>48</b>
2.1	Vektoren .....	48
2.1.1	Grundbegriffe.....	48
2.1.2	Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ .....	52
2.1.3	Vektoren im $\mathbb{R}^3$ .....	54
2.2	Matrizen .....	57
2.2.1	Grundlagen.....	57
2.2.2	Matrizengesetze .....	58
2.2.3	$n$ -reihige quadratische Matrizen.....	59
2.2.4	Rang, Normen .....	62
2.2.5	Determinanten .....	63
2.2.6	Eigenwerte und Eigenvektoren.....	65
2.3	Lineare Gleichungssysteme .....	67
2.3.1	Bezeichnungen .....	67
2.3.2	Lösbarkeitsbedingungen .....	68
2.3.3	Lösungsverfahren .....	69
2.4	Lineare Abbildungen.....	71
2.4.1	Grundlagen.....	71
2.4.2	Spezielle lineare Abbildungen in der Ebene .....	72
2.5	Koordinatensysteme .....	73
2.5.1	Kartesische Koordinaten .....	73
2.5.2	Zylinderkoordinaten .....	74
2.5.3	Kugelkoordinaten .....	74
2.6	Koordinatentransformationen.....	75
2.6.1	Koordinatentransformationen in der Ebene .....	76
2.6.2	Koordinatentransformationen im Raum .....	77

<b>3</b>	<b>Elementare und analytische Geometrie</b>	<b>79</b>
3.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie	79
3.1.1	Winkel	79
3.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz	81
3.1.3	Dreiecke	82
3.1.4	Vierecke	84
3.1.5	Vielecke	86
3.1.6	Kreis	87
3.2	Geometrische Körper (Stereometrie)	89
3.2.1	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielfache)	90
3.2.2	Krummflächig begrenzte Körper	91
3.3	Punkt, Gerade, Ebene	94
3.3.1	Punkt, Strecke	94
3.3.2	Gerade in der Ebene	95
3.3.3	Gerade im Raum	97
3.3.4	Mehrere Geraden	99
3.3.5	Ebene	101
3.3.6	Flächeninhalt, Volumen	104
3.4	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	104
3.4.1	Gemeinsame Charakterisierungen aller Kegelschnitte	104
3.4.2	Kreis	106
3.4.3	Ellipse	107
3.4.4	Parabel	111
3.4.5	Hyperbel	113
3.5	Flächen 2. Ordnung	116
3.6	Hauptachsentransformation	121

<b>4</b>	<b>Funktionen</b>	<b>123</b>
4.1	Grundlagen	123
4.2	Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke	126
4.2.1	Grenzwerte einer Funktion	126
4.2.2	Unbestimmte Ausdrücke	127
4.3	Eigenschaften reeller Funktionen	128

4.4	Rationale Funktionen .....	129
4.4.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) .....	129
4.4.2	Interpolation .....	131
4.4.3	Gebrochenrationale Funktionen .....	132
4.5	Nichtrationale Funktionen .....	133
4.5.1	Elementare Funktionen .....	133
4.5.2	Wurzelfunktionen .....	134
4.5.3	Exponentialfunktionen .....	135
4.5.4	Logarithmusfunktionen .....	135
4.5.5	Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen .....	136
4.5.6	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) ...	142
4.5.7	Hyperbelfunktionen .....	143
4.5.8	Areafunktionen .....	146
4.6	Ausgewählte ebene Kurven.....	148
4.7	Kurvendiskussion.....	150

## **5** Analysis ..... **151**

5.1	Differenzialrechnung .....	151
5.1.1	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen....	151
5.1.2	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	156
5.1.3	Extrema und Wendepunkte.....	158
5.1.4	Differenzialgeometrie ebener Kurven .....	161
5.1.5	Differenzialgeometrie von Raumkurven und Raumflächen .....	165
5.2	Integralrechnung .....	169
5.2.1	Unbestimmtes und bestimmtes Integral .....	169
5.2.2	Grundintegrale und Integrationsregeln.....	172
5.2.3	Integrationstechniken .....	174
5.2.4	Numerische Integration .....	177
5.2.5	Gebietsintegrale, Mehrfachintegrale .....	179
5.2.6	Anwendungen der Integralrechnung .....	182
5.3	Vektoranalysis.....	189
5.3.1	Vektorwertige Funktionen, Felder .....	189
5.3.2	Gradient eines skalaren Feldes .....	192
5.3.3	Divergenz eines Vektorfeldes .....	192
5.3.4	LAPLACE-Operator eines skalaren Feldes .....	193

5.3.5	Rotation eines Vektorfeldes .....	194
5.3.6	Kurvenintegrale .....	195
5.3.7	Oberflächenintegrale .....	198
5.3.8	Integralsätze von GREEN, GAUSS und STOKES .....	201

## **6** Gewöhnliche Differenzialgleichungen ..... 203

6.1	Grundlagen .....	203
6.2	Ausgewählte Differenzialgleichungen 1. Ordnung.....	205
6.3	Ausgewählte Differenzialgleichungen 2. Ordnung.....	209
6.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung .....	209
6.3.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung .....	212
6.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung .....	214
6.5	Numerische Verfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung .....	216
6.5.1	Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY .....	216
6.5.2	Verfahren 4. Ordnung von RUNGE-KUTTA.....	217
6.6	Lineare Differenzialgleichungssysteme .....	218

## **7** Reihen, Integral-Transformationen ..... 220

7.1	Unendliche Reihen .....	220
7.1.1	Zahlenreihen.....	220
7.1.2	Konvergenzkriterien für Reihen.....	222
7.1.3	Potenzreihen.....	224
7.1.4	TAYLOR-Formel und TAYLOR-Reihen.....	225
7.1.5	Zusammenstellung fertig entwickelter TAYLOR- Reihen .....	227
7.1.6	FOURIER-Reihen.....	230
7.2	FOURIER-Transformation .....	233
7.3	LAPLACE-Transformation.....	236
7.3.1	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation .....	237
7.3.2	Lösung von gewöhnlichen linearen Differenzial- gleichungen .....	239
7.3.3	Korrespondenztabelle der LAPLACE- Transformation .....	240

<b>8</b>	<b>Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>243</b>
8.1	Beschreibende (deskriptive) Statistik	243
8.1.1	Grundbegriffe, Darstellungsarten	243
8.1.2	Lagemaße (Mittelwerte)	245
8.1.3	Streuungsmaße	247
8.1.4	Korrelationsmaße	249
8.1.5	Regressionsrechnung	250
8.1.6	Fehlerrechnung	251
8.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	253
8.2.1	Grundbegriffe	253
8.2.2	Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung	255
8.2.3	Zufällige Variable	257
8.2.4	Diskrete zufällige Variable	261
8.2.5	Stetige zufällige Variable	263
8.3	Schließende (induktive) Statistik	267
8.3.1	Schätzfunktionen	267
8.3.2	Intervallschätzung	268
8.3.3	Signifikanztests	269
8.4	Tabellen	272
8.4.1	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normal- verteilung	272
8.4.2	Quantile der $t$ -Verteilung (STUDENT-Verteilung)	273
8.4.3	Quantile der $\chi^2$ -Verteilung	274
<b>9</b>	<b>Integraltafel</b>	<b>275</b>
9.1	Rationale Funktionen	275
9.2	Wurzelfunktionen	275
9.3	Trigonometrische Funktionen	277
9.4	Exponential- und Hyperbelfunktionen	279
9.5	Exponential- und trigonometrische Funktionen	279
9.6	Logarithmusfunktionen	280
9.7	Arcusfunktionen	280
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>281</b>

# 1

# Logik, Arithmetik, Algebra

## ■ 1.1 Mathematische Logik

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde mit dem Wahrheitswert *wahr* oder *falsch*.

Ein *aussagenlogischer Ausdruck* (eine *Aussageform*) ist eine Aussage, bestehend aus

- *BOOLEschen Variablen* (*Aussagenvariablen*):  $\varphi, \psi, \vartheta, \varphi_1, \dots$
- *Junktoren* (*logischen Zeichen*):  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- technischen Zeichen

Er ist bei jeder Belegung der Variablen entweder wahr (w, 1) oder falsch (f, 0).

Eine *Wahrheitsfunktion* (BOOLEsche Funktion)  $F$  ordnet jeder Belegung der  $k$  Variablen  $x_1$  bis  $x_k$  mit 0 oder 1 einen Wahrheitswert zu.

*Allquantor* (*Generalisator*):  $\forall x: A(x)$  „Für alle  $x$  gilt  $A(x)$ .“

*Existenzquantor*:  $\exists x: A(x)$  „Es gibt (wenigstens) ein  $x$  mit  $A(x)$ .“

### 1.1.1 Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen

( $\varphi, \psi$  Aussageformen)

**Negation, Komplement** (nicht, NOT)

$$\overline{\varphi} = \neg\varphi = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = 0$$

häufig auch Durchstreichen des Zeichens gebräuchlich, z. B.  $a \neq b$  für  $\neg(a = b)$

**Konjunktion** (*logisches Produkt*, und zugleich, AND)

$$(\varphi \wedge \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = 1 \text{ und zugleich } \psi = 1$$

auch  $\varphi\psi$ ,  $\varphi \cdot \psi$ ,  $\varphi\&\psi$

NAND (SHEFFERSche Funktion), negiertes AND:  $\neg(\varphi \wedge \psi)$

**Disjunktion** (*logische Summe*, oder, OR)

$$(\varphi \vee \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = 1 \text{ oder } \psi = 1 \quad \text{auch } \varphi + \psi$$

NOR (NICODSche Funktion), negiertes OR:  $\varphi\bar{\vee}\psi = \overline{\varphi \vee \psi} = \varphi \downarrow \psi$

**Implikation** (*logische Folgerung*, wenn-dann)

$$(\varphi \Rightarrow \psi) = 0 \text{ genau dann wenn } \varphi = 1 \text{ und zugleich } \psi = 0$$

**Äquivalenz**

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = \psi$$

**Antivalenz** (*ausschließliches Entweder-Oder*, exclusive-or, EXOR, XOR)

$$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi \neq \psi$$

**Ein- und zweiwertige Wahrheitstafel**

$\varphi$	$\psi$	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi)$
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0

**Notwendige und hinreichende Bedingung**

Gilt für zwei Aussagen  $\varphi$  und  $\psi$  die Implikation  $\varphi \Rightarrow \psi$ , so heißt  $\varphi$  *hinreichende Bedingung* für  $\psi$  und  $\psi$  *notwendige Bedingung* für  $\varphi$ .

Im Falle  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  heißt  $\varphi$  *hinreichende* und *notwendige Bedingung* für  $\psi$ .

## 1.1.2 Rechengesetze (BOOLESCHE Algebra)

*kommutativ:*  $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$      $\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi$      $\varphi \Leftrightarrow \psi = \psi \Leftrightarrow \varphi$

*assoziativ:*  $\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta = \varphi \wedge \psi \wedge \vartheta$  (analog mit  $\vee$  und  $\Leftrightarrow$ )

*distributiv:*  $\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$  (bzw.  $\wedge$  und  $\vee$  vertauschen)

### DE MORGANSche Regeln

$$\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi} \quad \overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$$

Die Regeln können auf mehr als zwei Variable verallgemeinert werden.

*Involutionsregel* (doppelte Verneinung):  $\neg(\neg\varphi) = \overline{\overline{\varphi}} = \varphi$

*Tautologie* (ausgeschlossenes Drittes):  $\varphi \vee \neg\varphi = \varphi \vee \overline{\varphi} = 1$

*Kontradiktion* (Widerspruch):  $\varphi \wedge \neg\varphi = \varphi \wedge \overline{\varphi} = 0$

*Idempotenz:*  $\varphi \wedge \varphi = \varphi$

$$\varphi \vee \varphi = \varphi$$

*neutrale Elemente 0 und 1:*  $\varphi \vee 0 = \varphi$      $\varphi \wedge 1 = \varphi$      $0 = \neg 1$

*Kontraposition:*  $(\varphi \Rightarrow \psi) = (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

## ■ 1.2 Mengen

### 1.2.1 Grundlagen

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Sammlung von inhaltlich zusammengehörigen Objekten (*Elementen*).

Mengenbezeichnung:  $A, B, M, \dots$      $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  (aufzählende Form)

Elementebezeichnung:  $a, b, x_1, \dots$

Zuordnung zur Menge:  $x \in M$  („ $x$  Element  $M$ “) bzw.  $x_i \notin M$  („ $x$  kein Element  $M$ “)

*Mengenbildungsoperator:*  $\{x \in G \mid A(x)\}$

„Menge aller  $x$  Element  $G$ , für die gilt:  $A(x)$ .“

Angabe einer charakteristischen Eigenschaft:  $B = \{x \mid x = k^3 \wedge k \in \mathbb{N}\}$

*Zweiermenge* (ungeordnete Reihenfolge):  $\{a, b\}$

*Paar* (geordnete Reihenfolge):  $(a, b)$

Stets gilt  $\{a, b\} = \{b, a\}$ , für  $a \neq b$  ist jedoch  $(a, b) \neq (b, a)$ .

*Geordnetes Tripel:*  $(x, y, z)$     *geordnetes  $n$ -Tupel:*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
*Leere Menge:*  $\emptyset, \{\}$     (enthält kein Element, auch nicht die Null)  
*Endliche Menge:*  $\{a_1, a_2, a_3\}$     *unendliche Menge:*  $\{a_1, a_2, \dots\}$

Ist eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  nach unten (oben) beschränkt, so hat sie mindestens eine untere (obere) *Schranke*  $S$ .

*Supremum:*  $\sup X$ , kleinste obere Schranke, *obere Grenze* der Menge  $X$

*Infimum:*  $\inf X$ , größte untere Schranke, *untere Grenze* der Menge  $X$

## 1.2.2 Mengenoperationen

*Inklusion,  $A$  ist Teilmenge (Untermenge) von  $B$  (Obermenge)*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{echte Teilmenge: } A \subset B$$

*Gleichheit*

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B \quad A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

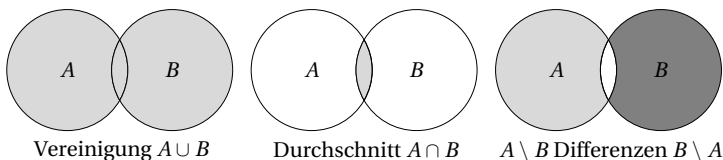
*Vereinigung, Disjunktion*

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

*Durchschnitt, Konjunktion*

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$A$  und  $B$  sind *disjunkt* (elementefremd):  $A \cap B = \emptyset$

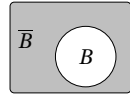


*Differenz zweier Mengen*

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$A \setminus B \neq B \setminus A \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$

*Komplement* einer Menge  $B$  in Bezug auf Grundmenge  $G$  (Bild)



1

$$\overline{B} := G \setminus B = \{x \in G \mid x \notin B\}$$

*Potenzmenge*, Menge aller Teilmengen von  $A$

$$\mathbf{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\} \quad A, \emptyset \in \mathbf{P}(A)$$

*kartesisches Produkt* zweier Mengen (Menge von geordneten Paaren)

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \quad \text{für } A \neq B \text{ gilt } A \times B \neq B \times A$$

*Produktmenge*, Menge aller  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) : M_1 \times \dots \times M_n \quad x_i \in M_i$

$$\text{Mengenpotenz: } M^n := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_n \quad n \geq 1$$

### 1.2.3 Rechenregeln für Mengen

( $G$  Grundmenge)

<i>Reflexive Beziehung:</i>	$A \subseteq A \quad \overline{\overline{A}} = A$
<i>Komplementgesetze:</i>	$\overline{\overline{G}} = \emptyset \quad \overline{\emptyset} = G \quad \overline{A \cap A} = \emptyset \quad \overline{A \cup A} = G$
<i>Transitive Beziehung:</i>	$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
<i>Teilmengenbeziehung:</i>	$A \cap B \subseteq A \cup B, \quad A \setminus B \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq G$
<i>Kommutativgesetze:</i>	$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
<i>Assoziativgesetze:</i>	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{desgl. mit } \cup$
<i>Absorptionsgesetze:</i>	$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$
<i>Distributivgesetze:</i>	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
<i>DE MORGANSche Regeln:</i>	$\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2} \quad \overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$

*Produktbeziehungen*

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B) \quad C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$$

$$\text{Es gilt: } A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \quad A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$$

### 1.2.4 Relationen

Eine *Relation*  $R$  zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes  $A \times B$ :  $R \subseteq A \times B$

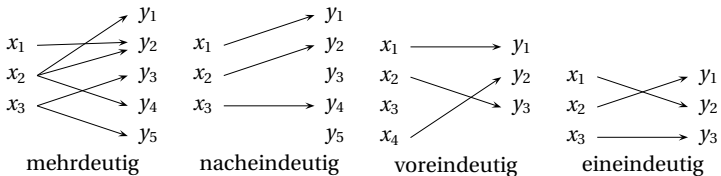
*Infix-Schreibweise*:  $xRy$  für  $(x, y) \in R$

*Definitionsbereich* sind alle Elemente  $x$ , für die ein  $y$  mit  $xRy$  existiert.

#### Mächtigkeit

Die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* einer Menge ist ihre Elementanzahl. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive (eindeutige) Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

Eine Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich* oder kurz *abzählbar*.



### 1.2.5 Zahlensysteme

Heute gebräuchliche *Zahlensysteme* sind *polyadische* oder *Positionssysteme*.

#### Dualsystem (Zweiersystem, dyadisches System)

Grundziffern:  $a_k \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Stellenwert: Potenzen von 2

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 2^k = \pm (a_n 2^n + \dots + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + \dots)$$

#### Dezimalsystem (dekadisches System)

Grundziffern:  $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Stellenwert: Potenzen von 10

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 10^k = \pm (a_n 10^n + \dots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \dots)$$

*Endlicher Dezimalbruch*:  $\exists a_k \neq 0$  für  $k < 0$ , alle folgenden Ziffern sind Null

*Periodischer Dezimalbruch*: unendliche Wiederholung einer Ziffernfolge

**Normalisierte Gleitkomma-Darstellung einer reellen Zahl**

$$a = \mp m \cdot 10^k \quad a \in \mathbb{R}$$

*Mantisse:*  $1 \leq m < 10$  (auch  $0,1 \leq m < 1$  ist üblich), *Exponent:*  $k \in \mathbb{Z}$

Hat die Mantisse  $t$  tragende Ziffern, heißt sie  $t$ -stellig.

**Übersicht über häufig verwendete Zahlensysteme**

(BCD-Code: Jede Ziffer einer Dezimalzahl wird einzeln binär codiert)

dezimal	dual	BCD	oktal	hexadezimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F
16	10000	0001 0110	20	10
usw.	⋮	⋮	⋮	⋮

**1.3 Menge der reellen Zahlen****1.3.1 Standard-Zahlenmengen****Menge der nichtnegativen ganzen (natürlichen) Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Herausnahme der Zahl 0 durch Anfügen des Sternchens:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

*Kardinalzahlen:* Anzahl der Elemente einer abzählbaren Menge

*Ordinalzahlen:* Stelle eines Elements in einer geordneten Menge

### Menge der Primzahlen

Eine *Primzahl*  $p$  ist eine natürliche Zahl  $\geq 2$ , die ohne Rest nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar ist:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

### Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

### Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Sind  $a$  und  $b$  *teilerfremde ganze Zahlen*, d. h. ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1, so spricht man von der *Normaldarstellung*.

$\mathbb{Q}$  ist *abzählbar*, d. h. es gibt genauso viele rationale Zahlen wie natürliche. *Rationale Zahlen* liegen überall dicht auf der *Zahlengeraden*. Rationale Zahlen sind

- *Brüche von ganzen Zahlen*
- *endliche Dezimalbrüche*
- *unendliche periodische Dezimalbrüche*

### Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Menge der irrationalen Zahlen}$$

*Irrationale Zahlen* sind nichtperiodische, nicht abbrechende Dezimalbrüche, z. B.  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $e$ . Als Näherungswerte benutzt man endliche Dezimalbrüche, etwa  $\pi \approx 3,1415927$ .

Menge der *positiven* reellen Zahlen:  $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

$\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar (*überabzählbar*). Die reelle Zahlengerade und  $\mathbb{R}$  sind *gleichmächtig*.

### Anordnungsaxiome für reelle Zahlen ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ )

Stets gilt eine der drei Beziehungen zwischen zwei reellen Zahlen  $a$  und  $b$ :

$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a > b$$

Für  $a, b > 0$  gilt

$$a + b > 0 \quad \text{und} \quad ab > 0$$

Daraus:  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  (Transitivität)  
 $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  (Monotonie der Addition)  
 $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$  (Monotonie der Multiplikation)

### Intervalle

Offenes Intervall:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Abgeschlossenes Intervall:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Halboffene Intervalle:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Statt  $(a, b)$  ist auch die Schreibweise  $]a, b[$  gebräuchlich.

## 1.3.2 Grundoperationen für reelle Zahlen

### Klammern auflösen, Ausklammern, Produkte von Summen

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \quad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

$$ac + bc = c(a + b) \quad ac - bc = c(a - b) \quad -ac - bc = -c(a + b)$$

$$a(b - c) = ab - ac \quad \text{„Punkt vor Strich“}$$

### Bruchrechnung

Echter Bruch:  $\frac{a}{b} < 1$  mit  $0 < a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}^*$  Gemeiner Bruch: für  $b \neq 10^n$

Stammbruch:  $\frac{1}{a}$  (Kehrwert von  $a$ ) Kehrwert von  $\frac{a}{b}$  ist  $\frac{b}{a}$   $a, b \neq 0$

Erweitern:  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$  Kürzen:  $\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$   $b, c \neq 0$

Addieren/Subtrahieren:  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$   $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$   $b, d \neq 0$   
 (Hauptnenner  $bd$ )

Multiplizieren:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$$\text{Dividieren: } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad b, c, d \neq 0$$

$$\text{Nullsetzen: } \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$$

### Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Produkt der Potenzen der *Primfaktoren* mit den *höchsten* Exponenten der beteiligten Zahlen bzw. Variablen (z. B. bei Hauptnennerbestimmung).

### Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Größte natürliche Zahl, die gemeinsamer Teiler aller beteiligten Zahlen ist.

### Polynomdivision

- Ordnen von Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen der Variablen
- 1. Glied Dividend durch 1. Glied Divisor ergibt 1. Glied Quotient
- Rückmultiplikation mit Divisor
- Subtraktion, bis die Differenz null wird bzw. ein Rest bleibt

### Proportionen, Verhältnisgleichungen ( $b, d \neq 0$ )

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad \text{„über Kreuz multiplizieren“}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a = k \cdot c \wedge b = k \cdot d$$

$k$  Proportionalitätsfaktor,  $k \in \mathbb{R}$

*Direkte* Proportionalität (Graph: *Gerade*):  $y \sim x \Leftrightarrow y = kx$

*Indirekte* Proportionalität (Graph: *Hyperbel*):  $y \sim \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = k \frac{1}{x}$

### Mittelwerte

*Arithmetisches Mittel*

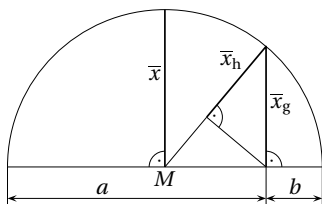
$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

*Mittlere Proportionale, geometrisches Mittel* ( $a, b \geq 0$ )

$$\bar{x}_g = \sqrt{ab}$$

### Harmonisches Mittel

$$\bar{x}_h = \frac{2ab}{a+b}$$



### Ungleichung der Mittelwerte:

Für  $a, b > 0$  gilt  $\bar{x}_h \leq \bar{x}_g \leq \bar{x}$ . Gleichheit herrscht genau dann, wenn  $a = b$  ist.

### Näherung, Rundungsregeln

*Abrunden:* Ziffer  $a_i$  bleibt, wenn die folgende Ziffer  $a_{i+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

*Aufrunden:* Ziffer  $a_i$  wird um 1 erhöht, wenn  $a_{i+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

absoluter Fehler  $\varepsilon: |\varepsilon| \leq 0,5 \cdot 10^{-i}$ ,  $i$  sichere (gültige) Stellen/Dezimalen

### Betrag einer reellen Zahl

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln:  $|x| \geq 0$ ,  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

### Signum einer reellen Zahl

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln:  $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$  für  $x \neq 0$

$$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$$

### Summen- und Produktzeichen ( $i, m, n \in \mathbb{Z}$ )

$$m \leq n: \quad \sum_{i=m}^n x_i := x_m + x_{m+1} + \dots + x_n \quad \prod_{i=m}^n x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n$$

$i$  Laufvariable, Index

$$m > n: \sum_{i=m}^n x_i := 0 \text{ (leere Summe)} \qquad \prod_{i=m}^n x_i := 1 \text{ (leeres Produkt)}$$

$$\begin{aligned} \text{Regeln: } \sum_{i=m}^n (x_i + y_i) &= \sum_{i=m}^n x_i + \sum_{i=m}^n y_i & \prod_{i=m}^n (x_i \cdot y_i) &= \prod_{i=m}^n x_i \cdot \prod_{i=m}^n y_i \\ \sum_{i=m}^n cx_i &= c \sum_{i=m}^n x_i & \prod_{i=1}^n cx_i &= c^n \prod_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n c &= n \cdot c & \prod_{i=1}^n c &= c^n \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist aber  $\sum_{i=m}^n a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=m}^n a_i \cdot \sum_{i=m}^n b_i$ .

### 1.3.3 Potenzen, Wurzeln

**Natürliche Exponenten** ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

$a$  Basis,  $n$  Exponent

Speziell  $0^n = 0$  für  $n \in \mathbb{N}^*$ , aber  $0^0$  ist nicht definiert.

**Gebrochene Exponenten** ( $a \in \mathbb{R}_{>0}$ )

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} &:= \sqrt[n]{a}, \text{ wobei } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \\ a^{\frac{m}{n}} &:= (\sqrt[n]{a})^m \end{aligned}$$

$a$  Radikand,  $n$  Ordnung der Wurzel

**Negative Exponenten** ( $a \in \mathbb{R}_{>0}$ )

$$a^{-x} := \frac{1}{a^x} \quad \text{speziell Kehrwert: } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

**Wurzelgesetze** ( $m, n \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{0} &= 0 & \sqrt[n]{1} &= 1 & \sqrt[n]{a} &> 1 \text{ falls } a > 1 \\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Statt  $\sqrt[n]{a}$  schreibt man kurz  $\sqrt{a}$ .

Beachte:  $\sqrt{a}$  ist stets nichtnegativ, also z. B.  $\sqrt{4} = 2$ , und nicht  $-2$  oder gar  $\pm 2$ .

**Potenzgesetze** ( $x, y \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ )

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$$

### 1.3.4 Logarithmen

$b$  Basis,  $b \in \mathbb{R}_{>0}, b \neq 1$

$a$  Numerus, Logarithmand,  $a \in \mathbb{R}_{>0}$

$x$  Exponent,  $x \in \mathbb{R}$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

In Worten: Der Logarithmus von  $a$  zur Basis  $b$  ist diejenige reelle Zahl  $x$ , mit der man  $b$  potenzieren muss, um  $a$  zu erhalten.

Regeln:

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b b^x = x$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

**Logarithmengesetze** ( $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ )

$$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = -\log_b \frac{v}{u}$$

$$\log_b \frac{1}{v} = -\log_b v$$

$$\log_b u^c = c \log_b u, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_b u \quad n \geq 2$$

**Dekadische (gemeine, BRIGGSsche) Logarithmen**

$$\lg a := \log_{10} a$$

$$\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a \quad \lg 10^x = x \quad 10^{\lg a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

*Gleitkommadarstellung* einer reellen Zahl:  $a = m \cdot 10^k$  mit  $m \in [1; 10)$ ,  
 daraus  $\lg a = \lg m + k$  mit  $\lg m \in [0; 1)$ ,  $a > 0$   
 $m$  Mantisse,  $k \in \mathbb{Z}$  Kennzahl

### Natürliche Logarithmen

$\ln a := \log_e a$

$$\ln a = x \Leftrightarrow e^x = a \quad \ln e^x = x \quad e^{\ln a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$a^z = e^{z \ln a} \quad a > 0, z \in \mathbb{R}$$

Basis:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 2,718281828459\dots$  EULERSche Zahl

### Zweierlogarithmen, binäre Logarithmen

$\lg a := \log_2 a$

$$\lg a = x \Leftrightarrow 2^x = a \quad \lg 2^x = x \quad 2^{\lg a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

**Basiswechsel der Logarithmensysteme** ( $b, c \in \mathbb{R}_{>0}, b, c \neq 1$ )

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad \text{speziell } c = 10: \log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$$

### 1.3.5 Binomischer Satz

**Fakultät** (rekursive Definition,  $n \in \mathbb{N}$ )

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Für  $n \geq 1$  ist  $n!$  (lies: „n-Fakultät“) also gleich dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ :  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Speziell:  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$  usw.

**Binomialkoeffizient** ( $n, k \in \mathbb{N}$ )

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases} \quad (\text{lies: „}n \text{ über } k\text{“ oder „}k \text{ aus } n\text{“})$$

Für  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$  effiziente Berechnung möglich durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 1},$$

für  $\frac{n}{2} < k \leq n$  verwende man zunächst den *Symmetriesatz*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{speziell } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Rekursionsformel zur Berechnung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

*Additionssatz:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

**PASCALSCHES DREIECK** zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

$n = 0$	1		Zeilensumme	$2^0$		
$n = 1$	1	1		$2^1$		
$n = 2$	1	2	1	$2^2$		
$n = 3$	1	3	3	1	$2^3$	
$n = 4$	1	4	6	4	1	$2^4$

### Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

### Allgemeiner binomischer Satz für natürliche Exponenten

$(n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R})$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$