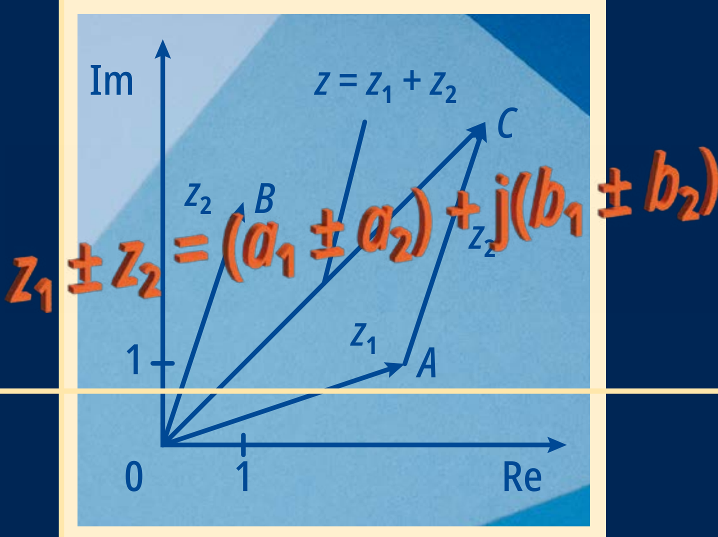
Hans-Jochen Bartsch
Michael Sachs

Kleine Formelsammlung Mathematik



9., aktualisierte Auflage

HANSER

Disclaimer zur Barrierefreiheit

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Aufgrund der komplexen Strukturen der vorliegenden Inhalte, war es dem Verlag mit wirtschaftlich vertretbarem Aufwand nicht möglich, den Inhalt in barrierefreier Form zur Verfügung zu stellen.

Sollten Sie Bedarf an den Inhalten in barrierefreier Form haben, wenden Sie sich bitte an den Verlag.

Bartsch / Sachs

Kleine Formelsammlung Mathematik

Hans-Jochen Bartsch
Michael Sachs

Kleine Formelsammlung Mathematik

9., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor: Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch
Bearbeiter: Prof. Dr. Michael Sachs, Hochschule München
Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik
sci.hm.edu

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-48505-1
E-Book-ISBN: 978-3-446-48506-8

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © Prof. Dr. Michael Sachs, Hintergrund: gettyimages.de/Iuliia Bondar
Satz: Dr. Steffen Naake, Limbach-Oberfrohna
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Vorwort

Vorwort zur 9. Auflage

Einige wenige bekanntgewordene Fehler der 8. Auflage habe ich korrigiert und danke wie immer allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern für ihre Hinweise, sowie Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die Betreuung und Herrn Dr. Steffen Naake für die Gestaltung des Satzes mit LaTeX.

München, im September 2025

Michael Sachs
Bearbeiter

Vorwort zur 8. Auflage

Gegenüber der 7. Auflage wurde die Integraltabelle komplett überarbeitet und übersichtlicher strukturiert. Die trigonometrischen Funktionen habe ich um die für die Integration wichtigen Produkt-Formeln ergänzt. In die beschreibende Statistik wurden die in letzter Zeit immer häufiger anzutreffenden Box-Plots neu aufgenommen. Bei den inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 2. Ordnung habe ich die schwer lesbare Grafik zum Auffinden einer partikulären Lösung durch eine übersichtliche Tabelle ersetzt. Bei den Mehrfach-Integralen wurden die am häufigsten vorkommenden Flächen- und Volumenelemente in einer Tabelle zusammengestellt.

Druckfehler der Vorgängerauflagen habe ich wie immer korrigiert, dafür sei allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern gedankt, die mir Hinweise geschickt haben.

Mein Dank geht an Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die Betreuung und an Herrn Dr. Steffen Naake für die sorgfältige Arbeit des Umbruches und die Gestaltung der endgültigen Fassung.

München, im November 2022

Michael Sachs

Aus dem Vorwort zur 6. Auflage

Mit Wissen des im Frühjahr 2008 verstorbenen Verfassers der ersten vier Auflagen dieser Formelsammlung, Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch, wurde mir vom Verlag die Fortführung des Werkes anvertraut. Nachdem ich in der fünften Auflage im Wesentlichen nur bekannte Druckfehler verbessert hatte, lege ich nun eine völlige Neubearbeitung der Formelsammlung vor. Dabei sind die Auswahl und Grobgliederung des Stoffes weitgehend gleich geblieben, ebenso habe ich die meisten Bilder und Tabellen aus den Vorgängerauflagen übernommen. Bei der Gestaltung der einzelnen Kapitel war mir ein Hauptanliegen, dass diese in sich logisch aufgebaut und weitgehend unabhängig von anderen Kapiteln lesbar sind. Erforderliche Querverweise habe ich ergänzt.

Das Buch enthält keine Beweise und auch keine Beispiele, sondern nur mathematische Definitionen, Sätze und Verfahren. Dadurch konnten Umfang und Preis niedrig gehalten werden, außerdem wird die Zulassung als Hilfsmittel in Prüfungen erleichtert, wenn keine durchgerechneten Aufgaben enthalten sind. Das Buch kann daher als Kompaktskript zur Mathematik eingesetzt werden, welches die Studierenden vom lästigen Mitschreiben von Definitionen und Sätzen befreit. Aufgaben können und sollen der einschlägigen und reichhaltigen Fachliteratur entnommen und hinzugezogen werden.

München, im März 2015 Michael Sachs

Inhalt

1 Logik, Arithmetik, Algebra

1.1 Mathematische Logik

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde mit dem Wahrheitswert *wahr* oder *falsch*.

Ein *aussagenlogischer Ausdruck* (eine *Aussageform*) ist eine Aussage, bestehend aus

- BOOLE*schen Variablen (Aussagenvariablen):* $\varphi, \psi, \vartheta, \varphi_1, \ldots$
- *Junktoren (logischen Zeichen):* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- technischen Zeichen

Er ist bei jeder Belegung der Variablen entweder wahr (w, 1) oder falsch (f, 0).

Eine *Wahrheitsfunktion* (BOOLEsche Funktion) F ordnet jeder Belegung der k Variablen x_1 bis x_k mit 0 oder 1 einen Wahrheitswert zu.

Allquantor (Generalisator): $\forall x\colon A(x)$ „Für alle x gilt $A(x)$."
Existenzquantor: $\exists x\colon A(x)$ „Es gibt (wenigstens) ein x mit $A(x)$."

1.1.1 Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen

(φ, ψ Aussageformen)

Negation, Komplement (nicht, NOT)

$\overline{\varphi} = \neg\varphi = 1$ genau dann wenn $\varphi = 0$

häufig auch Durchstreichen des Zeichens gebräuchlich, z. B. $a \neq b$ für $\neg(a = b)$

Konjunktion (*logisches Produkt*, und zugleich, AND)

$(\varphi \wedge \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi = 1$ und zugleich $\psi = 1$

auch $\varphi\psi$, $\varphi \cdot \psi$, $\varphi \& \psi$
NAND (SHEFFER*sche Funktion*), negiertes AND: $\neg(\varphi \wedge \psi)$

Disjunktion (*logische Summe*, oder, OR)

$(\varphi \vee \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi = 1$ oder $\psi = 1$ auch $\varphi + \psi$

NOR (NICOD*sche Funktion*), negiertes OR: $\varphi \overline{\vee} \psi = \overline{\varphi \vee \psi} = \varphi \downarrow \psi$

Implikation (*logische Folgerung*, wenn-dann)

$(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$ genau dann wenn $\varphi = 1$ und zugleich $\psi = 0$

Äquivalenz

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi = \psi$

Antivalenz (*ausschließliches Entweder-Oder*, exclusive-or, EXOR, XOR)

$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi \neq \psi$

Ein- und zweiwertige Wahrheitstafel

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi)$
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0

Notwendige und hinreichende Bedingung

Gilt für zwei Aussagen φ und ψ die Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$, so heißt
φ *hinreichende Bedingung* für ψ und
ψ *notwendige Bedingung* für φ.

Im Falle $\varphi \Leftrightarrow \psi$ heißt φ *hinreichende* und *notwendige Bedingung* für ψ.

1.1.2 Rechengesetze (BOOLEsche Algebra)

kommutativ: $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi = \psi \Leftrightarrow \varphi$
assoziativ: $\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta = \varphi \wedge \psi \wedge \vartheta$ (analog mit $\vee$ und $\Leftrightarrow$)
distributiv: $\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$ (bzw. $\wedge$ und $\vee$ vertauschen)

DE MORGANsche Regeln

$\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi} \qquad \overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$

Die Regeln können auf mehr als zwei Variable verallgemeinert werden.
Involutionsregel (doppelte Verneinung): $\neg(\neg\varphi) = \overline{\overline{\varphi}} = \varphi$
Tautologie (ausgeschlossenes Drittes): $\varphi \vee \neg\varphi = \varphi \vee \overline{\varphi} = 1$
Kontradiktion (Widerspruch): $\varphi \wedge \neg\varphi = \varphi \wedge \overline{\varphi} = 0$
Idempotenz: $\varphi \wedge \varphi = \varphi$
$\varphi \vee \varphi = \varphi$
neutrale Elemente 0 und 1: $\varphi \vee 0 = \varphi \quad \varphi \wedge 1 = \varphi \quad 0 = \neg 1$
Kontraposition: $(\varphi \Rightarrow \psi) = (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

1.2 Mengen

1.2.1 Grundlagen

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Sammlung von inhaltlich zusammengehörigen Objekten (*Elementen*).

Mengenbezeichnung: $A, B, M, \ldots \qquad A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (aufzählende Form)
Elementebezeichnung: $a, b, x_1, \ldots$
Zuordnung zur Menge: $x \in M$ („x Element M“) bzw. $x_i \notin M$ („x kein Element M“)
Mengenbildungsoperator: $\{x \in G | A(x)\}$
„Menge aller x Element G, für die gilt: $A(x)$.“

Angabe einer charakteristischen Eigenschaft: $B = \left\{x | x = k^3 \wedge k \in \mathbb{N}\right\}$
Zweiermenge (ungeordnete Reihenfolge): $\{a, b\}$
Paar (*geordnete* Reihenfolge): (a, b)

Stets gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$, für $a \neq b$ ist jedoch $(a, b) \neq (b, a)$.

Geordnetes Tripel: (x, y, z) *geordnetes* n*-Tupel*: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Leere Menge: $\emptyset, \{\}$ (enthält kein Element, auch nicht die Null)
Endliche Menge: $\{a_1, a_2, a_3\}$ *unendliche Menge:* $\{a_1, a_2, \ldots\}$

Ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ nach unten (oben) beschränkt, so hat sie mindestens eine untere (obere) *Schranke* S.

Supremum: $\sup X$, kleinste obere Schranke, *obere Grenze* der Menge X
Infimum: $\inf X$, größte untere Schranke, *untere Grenze* der Menge X

1.2.2 Mengenoperationen

Inklusion, A ist *Teilmenge* (*Untermenge*) von B (*Obermenge*)

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ echte Teilmenge: $A \subset B$

Gleichheit

$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$ $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

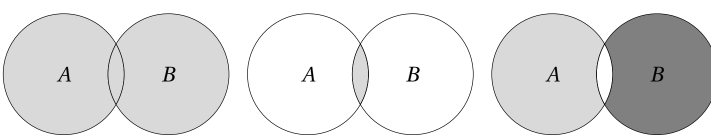
Vereinigung, Disjunktion

$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Durchschnitt, Konjunktion

$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

A und B sind *disjunkt* (elementefremd): $A \cap B = \emptyset$



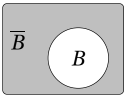
Vereinigung $A \cup B$ Durchschnitt $A \cap B$ $A \setminus B$ Differenzen $B \setminus A$

Differenz zweier Mengen

$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$A \setminus B \neq B \setminus A$ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

Komplement einer Menge B in Bezug auf Grundmenge G (Bild)



$\overline{B} := G \setminus B = \{x \in G | x \notin B\}$

Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von A

$\boldsymbol{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$ $\quad A, \varnothing \in \boldsymbol{P}(A)$

kartesisches Produkt zweier Mengen (Menge von geordneten Paaren)

$A \times B := \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$ $\quad$ für $A \neq B$ gilt $A \times B \neq B \times A$

Produktmenge, Menge aller n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$: $M_1 \times \cdots \times M_n$ $\quad x_i \in M_i$

Mengenpotenz: $M^n := \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n}$ $\quad n \geq 1$

1.2.3 Rechenregeln für Mengen

(G Grundmenge)

Reflexive Beziehung:	$A \subseteq A \qquad \overline{\overline{A}} = A$
Komplementgesetze:	$\overline{G} = \varnothing \quad \overline{\varnothing} = G \quad \overline{A} \cap A = \varnothing \quad \overline{A} \cup A = G$
Transitive Beziehung:	$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
Teilmengenbeziehung:	$A \cap B \subseteq A \cup B, \quad A \setminus B \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq A, \quad A \subseteq G$
Kommutativgesetze:	$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ desgl. mit $\cup$
Absorptionsgesetze:	$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$
Distributivgesetze:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
DE MORGAN*sche Regeln:*	$\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2} \qquad \overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$

Produktbeziehungen

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B) \qquad C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$

Es gilt: $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \qquad A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

1.2.4 Relationen

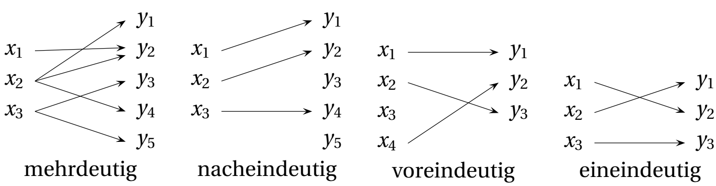
Eine *Relation R* zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$: $R \subseteq A \times B$

Infix-Schreibweise: xRy für $(x, y) \in R$
Definitionsbereich sind alle Elemente x, für die ein y mit xRy existiert.

Mächtigkeit

Die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* einer Menge ist ihre Elementeanzahl. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive (eineindeutige) Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

Eine Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich* oder kurz *abzählbar*.



1.2.5 Zahlensysteme

Heute gebräuchliche *Zahlensysteme* sind *polyadische* oder *Positionssysteme*.

Dualsystem (*Zweiersystem, dyadisches System*)
Grundziffern: $a_k \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$ *Stellenwert*: Potenzen von 2

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 2^k = \pm\left(a_n 2^n + \ldots + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + \ldots\right)$$

Dezimalsystem (*dekadisches System*)
Grundziffern: $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ *Stellenwert:* Potenzen von 10

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k = \pm\left(a_n 10^n + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \ldots\right)$$

Endlicher Dezimalbruch: $\exists a_k \neq 0$ für $k < 0$, alle folgenden Ziffern sind Null
Periodischer Dezimalbruch: unendliche Wiederholung einer Ziffernfolge

Normalisierte Gleitkommadarstellung einer reellen Zahl

$a = \mp m \cdot 10^k \quad a \in \mathbb{R}$

Mantisse: $1 \leq m < 10$ (auch $0{,}1 \leq m < 1$ ist üblich), *Exponent*: $k \in \mathbb{Z}$
Hat die Mantisse t *tragende Ziffern,* heißt sie t*-stellig.*

Übersicht über häufig verwendete Zahlensysteme

(*BCD-Code:* Jede Ziffer einer Dezimalzahl wird einzeln binär codiert)

dezimal	**dual**	**BCD**	**oktal**	**hexadezimal**
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F
16	10000	0001 0110	20	10
usw.	⋮	⋮	⋮	⋮

1.3 Menge der reellen Zahlen

1.3.1 Standard-Zahlenmengen

Menge der nichtnegativen ganzen (natürlichen) Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Herausnahme der Zahl 0 durch Anfügen des Sternchens:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Kardinalzahlen: Anzahl der Elemente einer abzählbaren Menge
Ordinalzahlen: Stelle eines Elements in einer geordneten Menge

Menge der Primzahlen
Eine *Primzahl* p ist eine natürliche Zahl ≥ 2, die ohne Rest nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar ist:

$$\mathbb{P} = \left\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\right\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Sind a und b *teilerfremde ganze Zahlen,* d. h. ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1, so spricht man von der *Normaldarstellung.*
$\mathbb{Q}$ ist *abzählbar,* d. h. es gibt genauso viele rationale Zahlen wie natürliche.
Rationale Zahlen liegen überall dicht auf der *Zahlengeraden.* Rationale Zahlen sind

- *Brüche von ganzen Zahlen*
- *endliche Dezimalbrüche*
- *unendliche periodische Dezimalbrüche*

Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Menge der irrationalen Zahlen}$$

Irrationale Zahlen sind nichtperiodische, nicht abbrechende Dezimalbrüche, z. B. π, $\sqrt{2}$, e. Als Näherungswerte benutzt man endliche Dezimalbrüche, etwa $\pi \approx 3{,}1415927$.

Menge der *positiven* reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (*überabzählbar*). Die reelle Zahlengerade und $\mathbb{R}$ sind *gleichmächtig.*

Anordnungsaxiome für reelle Zahlen (a, b, $c \in \mathbb{R}$)
Stets gilt eine der drei Beziehungen zwischen zwei reellen Zahlen a und b:

$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a > b$$

Für $a, b > 0$ gilt

$$a + b > 0 \quad \text{und} \quad ab > 0$$

Daraus: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (*Transitivität*)

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (*Monotonie der Addition*)

$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (*Monotonie der Multiplikation*)

Intervalle

Offenes Intervall: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Halboffene Intervalle: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Statt (a, b) ist auch die Schreibweise $]a, b[$ gebräuchlich.

1.3.2 Grundoperationen für reelle Zahlen

Klammern auflösen, Ausklammern, Produkte von Summen

$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$

$ac + bc = c(a + b) \qquad ac - bc = c(a - b) \qquad -ac - bc = -c(a + b)$

$a(b - c) = ab - ac$ „Punkt vor Strich"

Bruchrechnung

Echter Bruch: $\frac{a}{b} < 1$ mit $0 < a < b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ *Gemeiner Bruch:* für $b \neq 10^n$

Stammbruch: $\frac{1}{a}$ (*Kehrwert* von a) *Kehrwert* von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$ $\quad a, b \neq 0$

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ *Kürzen:* $\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$ $\quad b, c \neq 0$

Addieren/Subtrahieren: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ $\quad b, d \neq 0$

(*Hauptnenner* bd)

Multiplizieren: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dividieren: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b}\Big/\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c} \quad b, c, d \neq 0$

Nullsetzen: $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)
Produkt der Potenzen der *Primfaktoren* mit den *höchsten* Exponenten der beteiligten Zahlen bzw. Variablen (z. B. bei Hauptnennerbestimmung).

Größter gemeinsamer Teiler (ggT)
Größte natürliche Zahl, die gemeinsamer Teiler aller beteiligten Zahlen ist.

Polynomdivision

- Ordnen von Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen der Variablen
- 1. Glied Dividend durch 1. Glied Divisor ergibt 1. Glied Quotient
- Rückmultiplikation mit Divisor
- Subtraktion, bis die Differenz null wird bzw. ein Rest bleibt

Proportionen, Verhältnisgleichungen ($b, d \neq 0$)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$ „über Kreuz multiplizieren"

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a = k\cdot c \wedge b = k\cdot d$

k Proportionalitätsfaktor, $k \in \mathbb{R}$

Direkte Proportionalität (Graph: *Gerade*): $y \sim x \Leftrightarrow y = kx$

Indirekte Proportionalität (Graph: *Hyperbel*): $y \sim \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y = k\dfrac{1}{x}$

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel

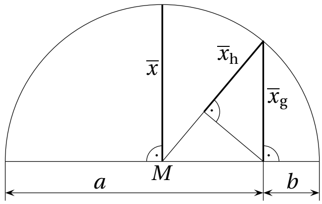
$$\overline{x} = \frac{a+b}{2}$$

Mittlere Proportionale, geometrisches Mittel ($a, b \geq 0$)

$$\overline{x}_{\mathrm{g}} = \sqrt{ab}$$

Harmonisches Mittel

$$\overline{x}_{\mathrm{h}} = \frac{2ab}{a+b}$$



Ungleichung der Mittelwerte:
Für $a, b > 0$ gilt $\overline{x}_{\mathrm{h}} \leq \overline{x}_{\mathrm{g}} \leq \overline{x}$. Gleichheit herrscht genau dann, wenn $a = b$ ist.

Näherung, Rundungsregeln
Abrunden: Ziffer a_i bleibt, wenn die folgende Ziffer $a_{i+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
Aufrunden: Ziffer a_i wird um 1 erhöht, wenn $a_{i+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$
absoluter Fehler ε: $|\varepsilon| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-i}$, *$i$ sichere (gültige) Stellen/Dezimalen*

Betrag einer reellen Zahl

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln: $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
$|x + y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecksungleichung*

Signum einer reellen Zahl

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln: $\operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$
$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

Summen- und Produktzeichen ($i, m, n \in \mathbb{Z}$)

$m \leq n$: $$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n \qquad \prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \ldots \cdot x_n$$

i Laufvariable, Index

$m > n$: $\sum\limits_{i=m}^{n} x_i := 0$ (*leere Summe*) $\prod\limits_{i=m}^{n} x_i := 1$ (*leeres Produkt*)

Regeln: $\sum\limits_{i=m}^{n} (x_i + y_i) = \sum\limits_{i=m}^{n} x_i + \sum\limits_{i=m}^{n} y_i$ $\prod\limits_{i=m}^{n} (x_i \cdot y_i) = \prod\limits_{i=m}^{n} x_i \cdot \prod\limits_{i=m}^{n} y_i$

$\sum\limits_{i=m}^{n} c x_i = c \sum\limits_{i=m}^{n} x_i$ $\prod\limits_{i=1}^{n} c x_i = c^n \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$

$\sum\limits_{i=1}^{n} c = n \cdot c$ $\prod\limits_{i=1}^{n} c = c^n$

Im Allgemeinen ist aber $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum\limits_{i=m}^{n} a_i \cdot \sum\limits_{i=m}^{n} b_i$.

1.3.3 Potenzen, Wurzeln

Natürliche Exponenten ($a \in \mathbb{R}$)

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

a Basis, n Exponent

Speziell $0^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}^*$, aber 0^0 ist nicht definiert.

Gebrochene Exponenten ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}, \text{ wobei } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$
$$a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

a Radikand, n Ordnung der Wurzel

Negative Exponenten ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{-x} := \frac{1}{a^x}$$ speziell *Kehrwert:* $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Wurzelgesetze ($m, n \in \mathbb{N}$)

$\sqrt[n]{0} = 0$ $\sqrt[n]{1} = 1$ $\sqrt[n]{a} > 1$ falls $a > 1$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$

Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kurz $\sqrt{a}$.

Beachte: $\sqrt{a}$ ist stets nichtnegativ, also z. B. $\sqrt{4} = 2$, und nicht -2 oder gar ± 2.

Potenzgesetze ($x, y \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}_{>0}$)

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x\cdot y}$

1.3.4 Logarithmen

b Basis, $b \in \mathbb{R}_{>0}, b \neq 1$
a Numerus, Logarithmand, $a \in \mathbb{R}_{>0}$
x Exponent, $x \in \mathbb{R}$

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

In Worten: Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige reelle Zahl x, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

Regeln:

$b^{\log_b x} = x \qquad \log_b b^x = x$

$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1$

Logarithmengesetze ($u, v \in \mathbb{R}_{>0}$)

$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v \qquad \log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$

$\log_b \dfrac{u}{v} = -\log_b \dfrac{v}{u} \qquad \log_b \dfrac{1}{v} = -\log_b v$

$\log_b u^c = c \log_b u,\ c \in \mathbb{R} \qquad \log_b \sqrt[n]{u} = \dfrac{1}{n} \log_b u \qquad n \geq 2$

Dekadische (gemeine, BRIGGSsche) Logarithmen

$\lg a := \log_{10} a$

$\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a \qquad \lg 10^x = x \qquad 10^{\lg a} = a \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0$

Gleitkommadarstellung einer reellen Zahl: $a = m \cdot 10^k$ mit $m \in [1;10)$,
daraus $\lg a = \lg m + k$ mit $\lg m \in [0;1)$, $a > 0$
m Mantisse, $k \in \mathbb{Z}$ Kennzahl

Natürliche Logarithmen

$\ln a := \log_\mathrm{e} a$

$\boxed{\ln a = x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = a} \quad \ln \mathrm{e}^x = x \quad \mathrm{e}^{\ln a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$

$a^z = \mathrm{e}^{z \ln a} \quad a > 0, z \in \mathbb{R}$

Basis: $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ EULER*sche Zahl*

Zweierlogarithmen, binäre Logarithmen

$\mathrm{lb}\, a := \log_2 a$

$\boxed{\mathrm{lb}\, a = x \Leftrightarrow 2^x = a} \quad \mathrm{lb}\, 2^x = x \quad 2^{\mathrm{lb}\, a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$

Basiswechsel der Logarithmensysteme ($b, c \in \mathbb{R}_{>0}, b, c \neq 1$)

$\boxed{\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}} \quad$ speziell $c = 10$: $\log_b a = \dfrac{\lg a}{\lg b}$

1.3.5 Binomischer Satz

Fakultät (rekursive Definition, $n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}}$$

Für $n \geq 1$ ist $n!$ (lies: „n-Fakultät") also gleich dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Speziell: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ usw.

Binomialkoeffizient ($n, k \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}} \quad \text{(lies: „}n\text{ über }k\text{" oder „}k\text{ aus }n\text{")}$$

Für $1 \le k \le \frac{n}{2}$ effiziente Berechnung möglich durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 1},$$

für $\frac{n}{2} < k \le n$ verwende man zunächst den *Symmetriesatz*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{speziell } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Rekursionsformel zur Berechnung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

Additionssatz:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

PASCALsches Dreieck zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

$n = 0$					1					Zeilensumme	2^0
$n = 1$				1		1					2^1
$n = 2$			1		2		1				2^2
$n = 3$		1		3		3		1			2^3
$n = 4$	1		4		6		4		1		2^4

Binomische Formeln

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

Allgemeiner binomischer Satz für natürliche Exponenten

($n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{R}$)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$