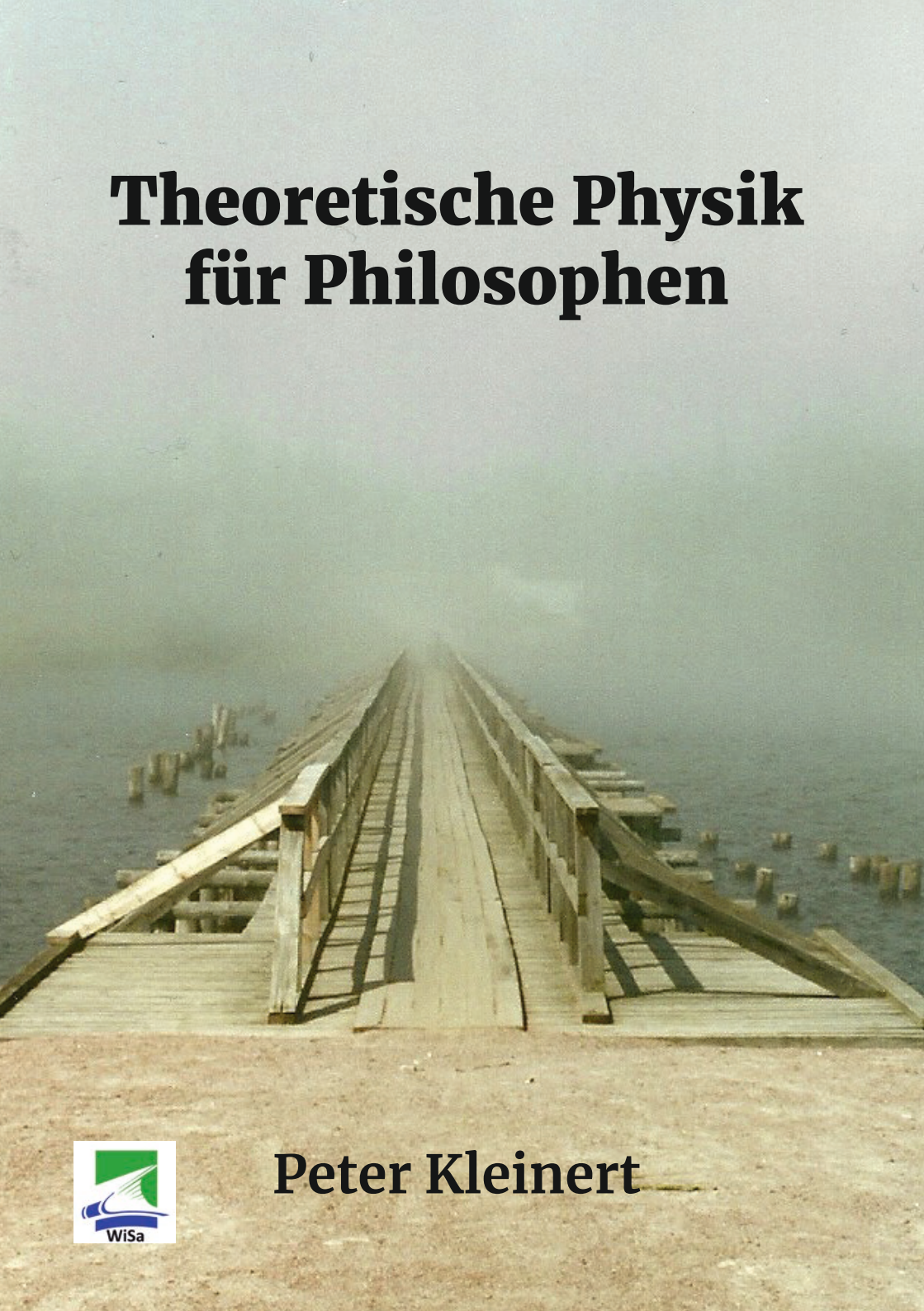
Theoretische Physik für Philosophen



Peter Kleinert

WiSa

Peter Kleinert

Theoretische Physik für Philosophen

Peter Kleinert

Theoretische Physik für Philosophen

WiSa

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available on the Internet at http://dnb.dnb.de.

ISBN (Print): 978-3-95538-043-4
ISBN (E-Book [PDF]): 978-3-95538-643-6

Hannover • Stuttgart 2025

Leuschnerstraße 40
30457 Hannover
Germany / Deutschland
info@wisa.eu

Alle Rechte vorbehalten

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und elektronische Speicherformen sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in or introduced into a retrieval system, or transmitted, in any form, or by any means (electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise) without the prior written permission of the publisher. Any person who commits any unauthorized act in relation to this publication may be liable to criminal prosecution and civil claims for damages.

0.1 Vorwort

Vorlesungen zur theoretischen Physik sind in den Lehrplänen für das Philosophie-Studium selbstverständlich nicht vorgesehen. Warum auch sollten sich alle Philosophen in den Grundlagen einer Einzelwissenschaft auskennen? Schließlich hat die Philosophie selbst ihren ureigenen Gegenstand und dementsprechend ihre Lehrinhalte. Allenfalls in Spezialvorlesungen zur Naturphilosophie können Cartoons über die neue Physik verteilt werden, doch keinesfalls gehören sie ins Grundstudium.

Wie plausibel diese Auffassung auch ist, es kann ihr widersprochen werden, worauf der Wissenschaftsphilosoph Bernard d' Espagnat hinwies. Wer heute Antworten sucht auf die Frage nach unserer Stellung in der Welt, der „muss die Errungenschaften und die Problematik der Quantentheorie einbeziehen“, gab Espagnat zu bedenken. Und er fügte sogar noch hinzu: „Mehr noch, er muss sie in den Mittelpunkt seines Fragens stellen.“

Zwei essenzielle Gründe stützen diese Behauptung. 1) Dem heutigen Wissensstand nicht entsprechend ist der mechanische Materialismus (die klassische Physik) noch immer das am weitesten verbreitete naturphilosophische Weltbild mit all seinen bedenklichen Implikationen. Diese betreffen die Wissenschaft insgesamt, die Technik und in einem viel weiteren Sinne auch den Zeitgeist und somit fast alle philosophisch relevanten Themen. 2) Durch die physikalisch vielfach begründete Ablehnung des klassischen Naturalismus, der angeblich geschlossen und unangreifbar ist, gelangen ontologische Fragestellungen erneut und mit Wucht ins Blickfeld der spekulativen Denker. Eine Rückbesinnung auf die philosophisch - theologische Tradition wird von der neuen Physik nicht mehr blockiert, sondern geradezu gefordert. Nicht Nebensächlichkeiten geraten ins Blickfeld, vielmehr gerät das Fundament des philosophischen Denkens ins wanken. Im Zentrum des vorliegenden Lehrbuches steht die fundamentale Immaterialität einerseits und die damit begründete fundamentale Einheit der Wirklichkeit andererseits. Die Tragweite beider Erkenntnisse ist nicht abschätzbar. Federführend und sachkundig können Philosophen das neue Denken jedoch nur forcieren, wenn ihnen Grundbegriffe der modernen theoretischen Physik geläufig sind.

Um philosophisch relevante Prinzipien der neuen Physik darzustellen, wurden zahlreiche Anwendungsbeispiele zusammengetragen, die der Leser hin und wieder möglichst detailliert nachvollziehen sollte, weil sich durch Übungen der gelernte Stoff am besten festigt. Passagen, die der Darstellung des abstrakten Fundaments der Theorie gewidmet

sind, ließen sich allerdings nicht vermeiden.

Im zweiten Teil des Buches sind zwei Anwendungsbeispiele bewusst lediglich nur kurz skizziert. Schließlich ist es die vornehmste Aufgabe der Philosophen selbst, die philosophischen Konsequenzen des völlig neuartigen Naturbildes herauszuarbeiten und auf deren Ausstrahlung in unterschiedliche Bereiche hinzuweisen.

Das „neue“ Denken in der Physik mit dem „alten“ Denken in der Philosophie zu vergleichen und auf neue Horizonte aufmerksam zu machen, das ist eine der dringendsten, aber auch faszinierendsten Herausforderungen in unserer Zeit. Wird man sie annehmen?[1]

[1] „Große Wahrheiten erobern nicht die Herzen der Massen. Und wenn die ganze Welt jetzt auf dem falschen Weg ist, wie soll ich, der den wahren Weg kennt, ihr Führer sein? Wenn ich weiß, dass es mir nicht gelingen kann, und es trotzdem erzwingen will, werde ich Fehler machen. Dann ist es besser, aufzugeben und keine weiteren Anstrengungen zu machen. Aber wenn ich es nicht versuche, wer dann?“ Dschuang Dsi

Inhaltsverzeichnis

0.1 Vorwort 1

1 Lehrbeispiele Physik **5**
1.1 Raum, Zeit und Materie 5
1.2 Thermodynamik 46
1.3 Quantentheorie 59
1.4 Das elektromagnetische Feld 103
1.5 Vielteilchentheorie 148

2 Lehrbeispiele Philosophie **175**
2.1 Fundamentaler Geist 175
2.2 Fundamentale Einheit 187
Literaturverzeichnis 207
Register 211

1 Lehrbeispiele Physik

1.1 Raum, Zeit und Materie

Die Grundlagen der mechanisch-materialistischen Naturlehre sind durch ihre Anschaulichkeit ausgezeichnet: Erfahrungsgemäß und denknotwendig gibt es den absoluten Raum, der etwas in sich beherbergen aber auch leer sein könnte. Dieser Behälter muss sein. Selbst wenn es nichts gäbe, was hinein gehörte, müsste die Leere doch „existieren“. Kleinste Steinchen, Galaxienhaufen oder gar das gesamte anheimelnde Pantheon - wohin damit, wenn es keinen leeren Ortsraum gäbe? Also muss es diesen Weltenkanister unter allen denkbaren Umständen „geben“ - er ist das schlechthin Unverzichtbare. Von rechts nach links, von oben nach unten, von vorne nach hinten erstreckt sich ins „Unendliche“ das naturnotwendige „Behälter-Dasein“. Abschließende Begrenzungen des unendlichen Raumes sind nicht vorstellbar, denn auch die Grenze hätte, wie jedes Ding, seinen Ort, wo sie hingehörte, umgeben von der Leere - vom Raum. Die Anerkenntnis der fundamentalen Bedeutung des Begriffs „absoluter Raum“ für die mechanistische Naturphilosophie hat ersichtlich den Status „unverzichtbar“, ein Nachdenken über ihn ist deshalb illegitim.

Ebenso unentbehrlich wie der unveränderliche absolute Raum, der dicht gedrängte Orte bereitstellt, um Dinge unterschiedlichen Ursprungs und unterschiedlicher Machart platzieren zu können, ist auch die absolute Zeit unentbehrlich, weil die Dinge nach Gutdünken jeden freien Platz einnehmen können. Allerdings ist es der Weltbühne einerlei, was in ihr „tanzt“ und wie es „tanzt“. Für jedes Theaterstück, das zur Aufführung drängt, steht sie gleichgültig zur Verfügung. Mit den Dingen, die nacheinander ihre Aufenthaltsorte wechseln dürfen, kommt also auch die Zeit in die Welt. Der absolute Raum ist „da“, er muss „da“ sein. Die absoluten Teilchen sind auch „da“, man sieht ja ihre Erscheinungsbilder und da diese ständig wechseln, ist auch die absolute Zeit notwendigerweise „da“. Dass sich der leere Raum im Laufe der Zeit nicht selbst ändert (verbiegt, schrumpft oder expandiert), gilt als ge-

wiss, doch nachprüfbar ist diese scheinbare „Trivialität“ nicht, schließlich gibt es in ihm keine Anhaltspunkte, auch keine „feinstofflichen“ Netzwerke, an denen man ein absolutes Koordinatensystem festmachen könnte.

Für eine Übersicht und Einführung in die Denkweise der Mechanisten genügt es, sich auf die Mechanik der Massenpunkte zu beschränken, deren Abmessungen vernachlässigbar klein sind im Vergleich zu den Ausmaßen ihrer Ortsveränderung. Die Lage eines Massenpunktes im Raum wird durch den Vektor $\vec{r}$ mit den drei kartesischen Koordinaten x, y und z beschrieben. Die Ableitung dieses Vektors nach der Zeit t ($\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t \equiv \dot{\vec{r}}$) heißt Geschwindigkeit des Massenpunktes. Die Erfahrung lehrt, dass für eine vollständige Bestimmung des Zustandes eines mechanischen Systems von N Massenpunkten $3N$ Orts- und $3N$ Geschwindigkeitskoordinaten ausreichen. Sind diese zu einem bestimmten Zeitpunkt t bekannt, dann können alle Beschleunigungen $\mathrm{d}^2\vec{r}_i/\mathrm{d}t^2$ ($i = 1, 2, \ldots, 3N$) aber auch alle Orte $\vec{r}_i(t)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ zu früheren und späteren Zeiten aus den Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik berechnet werden.

Für Anwendungen mit Bewegungsbeschränkungen ist es zweckmäßig, den Zustand des Vielteilchensystems durch seine Freiheitsgrade zu beschreiben, denen n verallgemeinerte Koordinaten q_i und n verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ zugeordnet sind. Die Bewegungsgesetze selbst werden aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta S = 0$ abgeleitet. Die Wirkungsfunktion S besteht aus der Lagrange - Funktion L, integriert über das Zeitintervall vom Beginn t_1 bis zum Ende t_2 der betrachteten Ortsveränderung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t).$$

Zur Bestimmung der Variation δS wird die Gleichung $\delta\dot{q} = \mathrm{d}\delta q/\mathrm{d}t$ beachtet und eine partielle Integration ausgeführt:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} \delta q + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2}.$$

Bei festgehaltenen Anfangs- und Endkoordinaten ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$) ergeben sich daraus die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen der

Mechanik. Für die einzelnen Komponenten lauten sie:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1.1}$$

Ist die Lagrange - Funktion eines gegebenen Vielteilchensystems bekannt, dann gestatten diese Gleichungen bei gegebenen Anfangsbedingungen die Berechnung aller Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Ortskoordinaten des Teilchenschwarmes für jeden beliebigen Zeitpunkt t des Intervalls von minus bis plus Unendlich. Die exakte, vollständige Lösung des Bewegungsproblems lässt also nichts offen. Um sie zu erhalten, sind n gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für n unbekannte verallgemeinerte Ortskoordinaten $q_i(t)$ zu lösen.

Im folgenden anschaulichen Beispiel, das die Vorgehensweise der klassischen Mechanik illustriert, untersuchen wir kleine Schwingungen eines ebenen Doppelpendels. Die Abbildung 1.1.1 zeigt den Versuchsaufbau. Zwei gleiche Massen hängen an gewichtslosen Stangen der Länge l. Sie sind mit Scharnieren verbunden, die ihnen eine Auslenkung um die Winkel α_1 bzw. α_2 in einer gemeinsamen Ebene ermöglichen. Den gekoppelten Bewegungsablauf beider Massenpunkte gilt es zu bestimmen. Wegen der Voraussetzung und der Zwangsbedingungen haben die beiden gleich schweren Massen m nur zwei Freiheitsgrade und nicht sechs wie zwei völlig ungebundene Punktmassen. Für die Lagrange - Funktion L des Doppelpendels, das in der x - y Ebene schwingt, gilt

$$L = T - V = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{x}_i(t)^2 + \dot{y}_i(t)^2\right) + mg\sum_{i=1}^{2} y_i(t).$$

g bezeichnet die Erdbeschleunigung, T die kinetische und V die potentielle Energie. Die vier kartesischen Koordinaten werden ersetzt durch Polarkoordinaten (das sind die Winkel $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ sowie die Pendellänge l).

$$\begin{aligned} x_1(t) &= l\sin\alpha_1(t), \quad y_1(t) = l\cos\alpha_1(t), \\ x_2(t) &= x_1(t) + l\sin\alpha_2(t), \quad y_2(t) = y_1(t) + l\cos\alpha_2(t). \end{aligned}$$

Im Koordinatensystem, das den Bewegungsbeschränkungen angepasst ist, hängt die Lagrangefunktion L von den zeitabhängigen Winkeln $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ und deren zeitlichen Änderungen $\dot{\alpha}_1(t)$, $\dot{\alpha}_2(t)$ ab:

$$L = \frac{ml^2}{2}[2\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + 2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)] + mgl(2\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2).$$

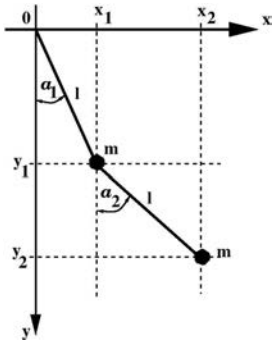


Abbildung 1.1.1: Das ebene Doppelpendel bestehend aus zwei gleiche Massen m, die jeweils mit einer Stange der Länge l verbunden sind.

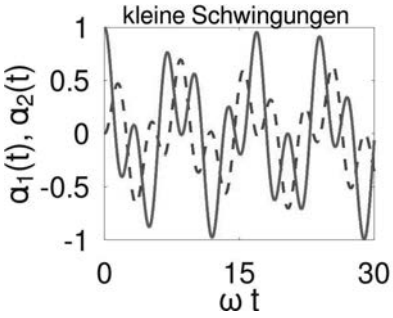


Abbildung 1.1.2: Die Auslenkungen $\alpha_1(t)$ (gestrichelte Linie) und $\alpha_2(t)$ als Funktionen des dimensionslosen Parameters ωt. Die Anfangsbedingungen lauten: $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$ und $\alpha_2(0) \equiv \alpha_0 = 1$.

Die Funktion L enthält alle Informationen über die möglichen Bewegungsformen des idealisierten Doppelpendels.

Das Bewegungsproblem hat eine analytische Näherungslösung, die für kleine Schwingungen gültig ist. Für kleine Ausschläge des Pendels α_1, $\alpha_2 \ll 1$, ist die Näherung $\cos\alpha_{1,2} \approx 1 - \alpha_{1,2}^2/2$ geeignet, so dass sich die Gleichung für L wie folgt vereinfacht

$$L = ml^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\alpha}_2^2 + ml^2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 - mgl\alpha_1^2 - \frac{m}{2}gl\alpha_2^2\,.$$

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (1.1) haben in diesem Spezialfall folgende Matrixform

$$\sum_{j=1}^{2} A_{ij}\ddot{\alpha}_j = -\sum_{j=1}^{2} B_{ij}\alpha_j, \quad \widehat{A} = l\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = g\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses homogene Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung muss bei vorgegebenen Anfangsbedingungen gelöst werden.

Empfohlen wird ein allgemeines Lösungsschema folgender Art: Durch eine Transformation auf Normalkoordinaten Q_i ($\alpha_i(t) \to Q_i(t)$) soll erreicht werden, dass die Schwingungen im neuen Koordinatensystem entkoppeln und deshalb ihre jeweils eigenen Eigenfrequenzen ω_i haben. Diese Transformation wird durch Zahlen λ_i ($i = 1, 2$) ermöglicht, die für jede Eigenfrequenz ω_i (sie sind Lösungen der charakteristischen

Gleichung $\det(\omega^2 A_{ij} - B_{ij}) = 0$) die Komponenten des zugehörigen Eigenvektors $\vec{\lambda}$ sind. Diese Zahlen erfüllen also die Gleichung:

$$Q = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i A_{ij} \alpha_j = (1/\omega^2) \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i B_{ij} \alpha_j.$$

Darüber hinaus entkoppeln tatsächlich die Schwingungsgleichungen, da für jede Lösung ω_i der Eigenwertgleichung die zugehörigen Normalkoordinaten Q_i jeweils zu einem individuellen harmonischen Oszillator gehören:

$$\ddot{Q} = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i A_{ij} \ddot{\alpha}_j = -\sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i B_{ij} \alpha_j = -\omega^2 Q, \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}).$$

Die entkoppelten Differentialgleichungen haben die allgemeine Lösung

$$Q_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t),$$
$$Q_2(t) = C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t),$$

mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4. Die Rücktransformation $\alpha_1 = (Q_2 - Q_1)/(2l\sqrt{2})$, $\alpha_2 = (Q_1 + Q_2)/(2l)$ führt auf eine Lösung des Bewegungsproblems, das für die Anfangsbedingungen $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = 0$, $\alpha_2(0) = \alpha_0$ und $\dot{\alpha}_2(0) = 0$ folgende Gestalt hat:

$$\alpha_1(t) = \frac{\alpha_0}{2\sqrt{2}}[\cos(\omega_2 t) - \cos(\omega_1 t)],$$
$$\alpha_2(t) = \frac{\alpha_0}{2}[\cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t)].$$

Die Abbildung 1.1.2 zeigt die Resultate für die Zeitabhängigkeiten der Auslenkungen $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ beider Massen. Die analytischen Resultate der einfachen Näherung für kleine Schwingungen sind deshalb erwähnenswert, weil ihre Bewegungen nicht periodisch sind (das Verhältnis der Frequenzen ω_1/ω_2 ist eine irrationale Zahl).

Noch aufschlussreicher ist die Berechnung der Pendelbewegung, bei der auch große Ausschläge zugelassen werden. Zur Vorbereitung der numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen wird die Zeitabhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf die Frequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ bezogen, sodass die zugehörige, von Parametern freie Lagrange - Funktion

$$L = \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2/2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (2\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

auf folgende Bewegungsgleichungen führt

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\alpha}_i\partial\dot{\alpha}_j}\ddot{\alpha}_j+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\alpha}_i\partial\alpha_j}\dot{\alpha}_j\right\}\equiv\sum_{j=1}^{2}\{A_{ij}\ddot{\alpha}_j+B_{ij}\dot{\alpha}_j\}=\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}.$$

$\dot{\alpha}_j$ bedeutet $\partial\alpha_j/\partial\omega t$. Für die Matrizen $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ gelten die Ausdrücke:

$$\widehat{A}=\begin{pmatrix}2 & \cos\Delta\alpha\\ \cos\Delta\alpha & 1\end{pmatrix},\quad \widehat{B}=\sin\Delta\alpha\begin{pmatrix}-\dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_2\\ -\dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_1\end{pmatrix},$$
$$\widehat{A}^{-1}=\frac{1}{2-\cos^2\Delta\alpha}\begin{pmatrix}1 & -\cos\Delta\alpha\\ -\cos\Delta\alpha & 2\end{pmatrix},$$

wobei $\Delta\alpha=\alpha_1-\alpha_2$ gesetzt wurde. Das System der zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann man durch die Einführung der neuen Variablen $\beta_1=\dot{\alpha_1}$ und $\beta_2=\dot{\alpha_2}$ in vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die vier Funktionen $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ und $\beta_2(t)$ überführen:

$$\dot{\beta}_i(t)=\sum_{j=1}^{2}\left\{-(\widehat{A}^{-1}\widehat{B})_{ij}\beta_j+(\widehat{A}^{-1})_{ij}\frac{\partial L}{\partial\alpha_j}\right\}.$$

Zusätzlich zu den Gleichungen $\dot{\alpha}_1=\beta_1$ und $\dot{\alpha}_2=\beta_2$ gilt es zwei weitere Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1(t)&=\frac{1}{2-\cos^2\Delta\alpha}\{(\beta_1-\beta_2)\sin\Delta\alpha[\beta_2-\beta_1\cos\Delta\alpha]\\ &\qquad+[h_1-h_2\cos\Delta\alpha]\},\\ \dot{\beta}_2(t)&=\frac{1}{2-\cos^2\Delta\alpha}\{(\beta_1-\beta_2)\sin\Delta\alpha[2\beta_1-\beta_2\cos\Delta\alpha]\\ &\qquad+[2h_2-h_1\cos\Delta\alpha]\},\quad \text{mit}\end{aligned}$$

$$h_1=-2\sin\alpha_1-\beta_1\beta_2\sin\Delta\alpha,\quad h_2=-\sin\alpha_2+\beta_1\beta_2\sin\Delta\alpha.$$

Bei vorgegebenen Anfangsbedingungen für die Funktionen $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ und $\beta_2(t)$ können diese vier Differentialgleichungen numerisch gelöst werden. Die Abbildung 1.1.3 zeigt numerische Lösungen für die instabile Anfangslage (wenn $\alpha_1(0)=0$, $\alpha_2(0)=\pi-10^{-6}$, $\beta_1(0)=0$ und $\beta_2(0)=0$). Wäre $\alpha_2(0)$ exakt gleich π, dann ergäbe sich die statische Lösung $\alpha_1(t)=0$, $\dot{\alpha}_1(t)=0$, $\dot{\alpha}_2(t)=0$ und $\alpha_2(t)=\pi$, welche die ausbalancierte, instabile Lage des Doppelpendels beschreibt. Selbst

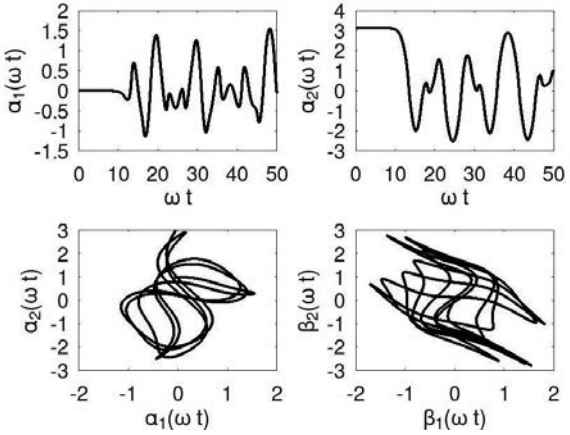


Abbildung 1.1.3:
Bewegung eines Doppelpendels aus der instabilen Anfangslage $\alpha_1(0) = \pi - 0.000001$ heraus. Alle anderen Anfangswerte sind Null.

kleinste Änderungen dieses Zustandes versetzten das Pendel nach einer längeren Anlaufzeit in Bewegung. Die unteren beiden Teilabbildungen in Abbildung 1.1.3 illustrieren den chaotischen Bewegungsablauf beider Massen. Ein Muster ist nicht erkennbar. Selbst wenn die Anfangsauslenkungen nur minimal anders sind, ergeben sich nach relativ kurzer Zeit deutlich andere Bewegungsabläufe. Das mathematische Doppelpendel ist eines der einfachsten und beliebtesten Beispiele der Chaostheorie. Hinzu kommt, dass die Berechnung der chaotischen Bewegung nur für kurze Zeitintervalle überhaupt möglich ist. Die Daten, die von einer Rechenmaschine für einen längeren Zeitraum berechnet, ausgedruckt und für Vorhersagen genutzt werden, sind stets fehlerhaft, unabhängig vom benutzten numerischen Lösungsverfahren. Selbst der Laplace'sche Dämon wäre, bei exakter Kenntnis aller Anfangsbedingungen, nicht in der Lage, im voraus, mit welchem Aufwand auch immer, exakt vorherzusagen, wie das Doppelpendel in Zukunft schwingen wird. Da auch Klimamodelle chaotische Lösungen haben, sind langfristige Vorhersagen nicht möglich.

Eine andere allgemeine Darstellung der klassischen Mechanik - die Hamilton'sche Theorie - hat sich wegen ihrer einzigartigen Vorzüge

etabliert. Gleichberechtigt können nämlich statt der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ verallgemeinerte, kanonisch konjugierte Impulse $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ herangezogen werden, um das mechanische Vielteilchensystem vermittels der Hamilton - Funktion

$$H(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)$$

zu charakterisieren. H selbst ist unabhängig von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen, aufgeschrieben für die Hamilton - Funktion H, lauten daher:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.2)$$

Hängt die Lagrange - Funktion nicht explizit von der Zeit t ab ($\partial L/\partial t = 0$), dann ist die Hamilton - Funktion eine Konstante der Bewegung, welche die Gesamtenergie des Systems angibt, bestehend aus der potentiellen und kinetischen Energie $H = T + V$.

Zu Übungszwecken wird in der Fußnote ein weiteres Anwendungsbeispiel abgehandelt.[1]

[1] Es werden kleine, eindimensionale Schwingungen um eine Gleichgewichtslage bei $q = 0$ betrachtet. Die einfache Parabelform für die potentielle Energie $V(q) = (k/2)q^2$ (mit der „Federkonstanten“ k) hat das geforderte Minimum $\mathrm{d}V(q)/\mathrm{d}q = 0$ bei $q = 0$. In diesem Fall ist die Rückstellkraft proportional zur kleinen Auslenkung q. Mit der kinetischen ($T = m\dot{q}^2/2$) und potentiellen Energie wird die Lagrange - Funktion aufgebaut:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2$$

sowie der kanonisch konjugierte Impuls $p = \partial L/\partial \dot{q} = m\dot{q}$ berechnet. Für die Hamilton - Funktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen folgt dementsprechend

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.$$

Eine Gleichung für $q(t)$ allein ergibt sich aus der Kombination der beiden Hamilton'schen Bewegungsgleichungen: $\ddot{q} = -(k/m)q$. Die Lösung dieser gewöhnlichen

Führt man die sogenannten Poisson - Klammern für beliebige Funktionen $F(p,q,t)$ und $G(p,q,t)$ ein, die von den verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen abhängen

$$\{F,G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} \right),$$

dann lassen sich die kanonischen Bewegungsgleichungen (1.2) auf eine Form bringen, die für die Herleitung der Quantenmechanik richtungweisend war

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \{H, q_i\}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \{H, p_i\}. \tag{1.3}$$

Bedeutungsvoll sind insbesondere die trivialen Poisson - Klammern

$$\boxed{\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij},} \tag{1.4}$$

welche die Heisenberg'sche Formulierung der Quantenmechanik vorbereiten. Für jede beliebige Observable $F(q,p,t)$ der klassischen Mechanik lässt sich die Bewegungsgleichung durch Poisson - Klammern darstellen. Es gilt die allgemeine Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

Differentialgleichung zweiter Ordnung ist periodisch

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{k/m},$$

wobei die Konstanten A und B aus den Anfangsbedingungen berechnet werden.

Dieses einfache Lösungsschema lässt sich noch weiter vereinfachen. Dazu werden p und q durch neue Variablen a und a^+ ersetzt:

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{im\omega}}\, p + \sqrt{2im\omega}\, q \right), \quad a^+ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{im\omega}}\, p - \sqrt{2im\omega}\, q \right).$$

Man nennt diese Ersetzungsvorschrift eine kanonische Transformation, da sich dabei die Werte der Poisson - Klammern $\{a, a^+\} = 1$ aber auch die Form der Bewegungsgleichungen nicht ändern. Wie p und q, so können auch die zeitabhängigen Funktionen a und a^+ zur vollständigen Beschreibung des Bewegungsproblems benutzt werden. a und a^+ sind gleichberechtigte verallgemeinerte Koordinaten, mit deren Hilfe die Hamilton - Funktion $H = i\omega a a^+$ und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \{H, a\} = i\omega a, \quad \frac{\mathrm{d}a^+}{\mathrm{d}t} = \{H, a^+\} = -i\omega a^+$$

aufgeschrieben werden können. Die entkoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung sind leicht lösbar: $a(t) = A\exp(i\omega t)$ und $a^+(t) = B\exp(-i\omega t)$.

die gemäß der Hamilton'schen Gleichungen (1.2) auf die Form

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{H, F\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \tag{1.5}$$

gebracht werden kann. Auch auf diese fundamentale Bewegungsgleichung kommen wir im Kapitel „Quantentheorie“ zurück.

Newtons Mechanik ist theoretisch gut fundiert, praktikabel und hat ihren unbestrittenen Zuständigkeitsbereich. Trotzdem ist sie naturphilosophisch unbefriedigend. Sie fordert nämlich ein problematisches Relativitätsprinzip. Es besagt: Beobachter, die mit einer konstanten Geschwindigkeit gradlinig das Weltall durchqueren, können partout nicht feststellen, ob sie sich bewegen oder ruhen. Folglich charakterisierte Newton den „absoluten Raum“ physikalisch durch die Abwesenheit von Beschleunigungen $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ ($\vec{r}$ ist der Ortsvektor). Gemäß der klassischen Newtonschen Mechanik gibt es demzufolge unendlich viele „absolute Räume“ - sogenannt Inertialsysteme Σ -, die alle gleichwertig sind und durch eine Galilei - Transformation ineinander überführt werden können ($\Sigma \to \Sigma'$ mit $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}t$, der absoluten Zeit $t' = t$ und der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$). Der gesamte Kosmos könnte sich längs einer Richtung gradlinig, gleichförmig bewegen - feststellbar wäre es nicht.

Ist Newtons Behauptung, es gibt unendlich viele gleichberechtigte Inertialsysteme, nicht widersprüchlich? Denn nur in Bezug auf einen, „ruhenden“, absoluten Raum kann von einem anderen unendlich ausgedehnten Raum gesprochen werden, dessen Koordinaten sich wie eben beschrieben ändern.[2]

[2] Newton sprach vom absoluten Raum und postulierte, dass er physikalisch durch die Abwesenheit von Beschleunigungen $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ definiert werden kann. Beschleunigt bewegte Bezugssysteme verursachen hingegen Trägheitskräfte, die sofort auf alle Dinge wirken, welche in den leeren Raum hineingeraten. Die auf diesem Gedanken aufbauende Newtonsche Mechanik steht in Lehrbüchern. Trotzdem widersprachen schon frühzeitig bedeutende Gelehrte wie Descartes, Huygens und Leibniz diesem Prinzip der mechanisch-materialistischen Naturlehre. Es sei sinnlos, entgegneten sie, von einem Raum zu sprechen, der keine Dinge beherbergt. Folglich sei es absurd zu behaupten, der Raum könne von sich aus (weil er sich beispielsweise dreht) Kräfte hervorbringen, welche etwas Materielles gesetzmäßig antreiben. Ernst Mach und später Albert Einstein ergänzten diese Kritik, indem sie forderten: Trägheitskräfte müssen sich auf die Gravitationspotentiale aller anderen Körper im Universum zurückführen lassen. Durch die Umdeutung der Newtonschen Trägheit - deren Ursprung das kollektive Gravitationspotential des ganzen Kosmos sein sollte - wird eine trägheitslose Mechanik anvisiert, in der bei-

Newtons Prinzip (bewegte sich der Kosmos mit einer konstanten Geschwindigkeit, dann ergäben sich keinerlei Änderungen) ist deshalb nicht-trivial, weil andere Bewegungsformen des leeren Raumes in der Tat physikalische Effekte hervorrufen würden. Beispielsweise treten in einem rotierenden Bezugssystem messbare, sogenannte Trägheitskräfte

---

spielsweise die Rotation eines einzelnen Körpers nicht mehr nachweisbar wäre in einem ansonsten massefreien Raum (die „Wirklichkeit“ der Trägheitskräfte wird in der Mach'schen Mechanik auf die Wirkung der fernen Massen zurückgeführt, in Einstein's Allgemeiner Relativitätstheorie hingegen auf die „Realität“ des metrischen Feldes $g_{\mu\nu}$). Die Mach-Einstein Doktrin kann mathematisch modelliert werden vermittels des Prinzips von Maupertius für eine Wirkungsfunktion S, die von Geschwindigkeiten abhängt:

$$S = \int \sqrt{\left(\sum_{a,b} f\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\right)\left(\frac{\beta}{c^2}\sum_{c,d} f\frac{m_c m_d}{r_{cd}}(\mathrm{d}r_{cd})^2\right)}, \quad \delta S = 0,$$

wobei m_a und r_{ab} die Massen im Kosmos und deren Abstände bezeichnen. β/c^2 ist ein zunächst unbestimmter Parameter, der erfolgreich dazu benutzt werden kann, um Korrekturen, die von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie vorhergesagt werden, korrekt zu reproduzieren. Dabei handelt es sich um die Perihelbewegung der Planeten und um drei Gravitationseffekte erster Näherung, die sich auf die Bewegung des Lichtes im Gravitationsfeld beziehen (H.J. Treder, Die Relativität der Trägheit, Akademie Verlag, Berlin, 1972). In der Mach'schen Mechanik ist nicht nur der Trägheits-, sondern auch der Zeitbegriff nachrangig und abgeleitet. Die unendlich vielen, im Raum verteilten Körper sind schon immer eingerastet in ein starres Gerüst, dessen Bauplan festgelegt wird durch den Extremalwert der Wirkungsfunktion S. In diesem Weltall rührt sich nichts. Julian Barbour spricht von einer eingefrorenen Landschaft, die er Platonia nannte. „Platonia is entire and eternal. No place in it is different from any other place ... We see before us a true landscape whose every point is marked of necessity by individuality. It has striking topographic features. So there is a landscape, but nothing of a quite different nature that one might call time ...“ (J. Barbour, The end of time, Phoenix, London, 2000, S. 260). Die statischen Lösungen des Extremalprinzips lassen sich parametrisieren, wobei ein „absoluter Zeitparameter“ t darin eingearbeitet sein kann, wie beispielsweise im hypothetischen Spezialfall, wenn alle Körper i ihre eigene „Eigenzeit“ t_i haben:

$$\mathrm{d}r_{cd} = \sum_i \frac{\partial r_{cd}(t_1, t_2, ...)}{\partial t_i}\frac{\mathrm{d}t_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.$$

Käme ein neues Teilchen zur Gesamtheit aller anderen im Kosmos vorhandenen hinzu, dann änderten sich alle Eigenzeiten simultan. Die Zurückführung der Trägheitskräfte auf die kollektive Fremdinduktion aller anderen Massen im Kosmos ist also mathematisch konsistent modellierbar und liefert eine korrekte Himmelsmechanik ebenso wie eine sinnvolle Kosmologie. Die Mach-Einstein Doktrin hat daher ein hohes Ansehen und gewänne ein noch höheres, wenn sie sich als der klassische Grenzfall einer soliden Theorie der Quantengravitation darstellen ließe.

auf.

Ein Beispiel dafür ist die Erdrotation. Eine volle Drehung um die Erdachse erfolgt in 24 Stunden (die Kreisfrequenz hat also den Wert $\omega_E = 2\pi/24$ pro Stunde). Befindet sich ein Pendel in einem irdischen Laboratorium, dessen geographische Breite der Winkel φ festlegen soll, so kann die Drehung der Pendelebene aus der Gleichung $\omega_P = \omega_E \sin\varphi$ berechnet werden. Wird der Demonstrationsversuch in Berlin durchgeführt ($\varphi = 52.5^o$), dann dreht sich die Pendelebene in zirka 30 Stunden einmal in Gänze um ihre Drehachse. Als Ursache für diese seitliche Ortsveränderung der pendelnden Masse wird eine Kraft, die sogenannte Corioliskraft, verantwortlich gemacht. Allgemein gilt für alle Trägheitskräfte $\vec{K}_T$, dass sie auf eine zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ zurückgehen: $\vec{K}_T = m_T \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$. Der Proportionalitätsfaktor m_T heißt träge Masse. Das erste Axiom der Newtonschen Mechanik ($\vec{K}_T = m_T\ddot{\vec{r}}$) problematisiert demnach die physikalische Vorstellung vom leeren Raum, da er selbst das Geschehen der in ihm beheimateten Dinge beeinflussen könnte, wenn er sich nur beschleunigt in Bewegung setzte (sich drehte oder expandierte).

Andererseits ist bekannt und wird durch Experimente quantitativ auch bestätigt, dass alle Körper sich gegenseitig anziehen. Auf zwei Massen m_S und M_S im Abstand r wirkt die anziehende Kraft $K = fm_SM_S/r^2$. Der Faktor f =6.66 $10^{-8}\,\mathrm{g}^{-1}\mathrm{cm}^3\mathrm{s}^{-2}$ wird Gravitationskonstante genannt. Um also die Ortsveränderung einer schweren Masse m_S über einen längeren Zeitraum korrekt berechnen zu können, müssen die Einflüsse der „wahren“ Kraft K (die durch Newton's Gravitationsgesetz beschrieben wird) und der „Schein-“ bzw. Trägheitskraft K_T (deren Ursprung eine beschleunigte Bewegung ist) berücksichtigt werden. Mit diesen experimentell überprüften Erkenntnissen der klassischen Mechanik geraten die scheinbar klaren Begriffe „leerer Raum“ oder „Vakuum“ bereits in den Strudel der Nachdenklichkeit, wird ihnen die Aura genommen, über metaphysische Einwände erhaben zu sein.

In den Strudel der begrifflichen Verwirrung und Bedeutungsänderung, in den Newtons Begriff des absoluten Raumes hineingezogen wurde, geriet auch der Zeitbegriff durch Maxwells Theorie des Elektromagnetismus, deren naturphilosophisches Gewicht kaum überschätzt werden kann, wie in anderen Abschnitten dargelegt wird.

Das Erstaunen über die überwältigende Gedankentiefe dieses im 19. Jahrhundert etablierten Gleichungssystems zur Berechnung elektrischer

und magnetischer Effekte war nicht minder überwältigend als über die Vielzahl der überaus nützlichen Anwendungsmöglichkeiten. Geraume Zeit nach der Etablierung der grundlegenden Theorie wurde nämlich erkannt, dass die gekoppelten Gleichungen für die elektrischen $\vec{E}(\vec{r},t)$ und magnetischen $\vec{H}(\vec{r},t)$ Felder nicht invariant sind gegenüber einer Galilei-Transformation (siehe Seite 14), welche gemäß der Raum-Zeitauffassung der klassischen Newtonschen Physik universell gültig sein sollte. Die „Existenz“ einer absoluten Weltzeit konnte nicht länger postuliert werden. Vielmehr musste anerkannt werden, dass die Begriffe „Raum“ und „Zeit“ ihre strenge Gegensätzlichkeit einbüßen, wenn die Gesetze des Elektromagnetismus universell gelten. Wie der Gegensatz konkret abgeschwächt wird, ist aus den Maxwell-Gleichungen im Detail ablesbar.

Der antisymmetrische Feldstärketensor F^i_k, der parametrisch vom raum - zeitlichen Vierervektor $x^i = (x, y, z, ct)$ abhängt (c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) und der aus den elektrischen und magnetischen Feldstärken wie folgt zusammengesetzt wird:

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

gestattet es nämlich die Maxwell-Gleichungen für das freie elektromagnetische Feld (siehe Seite 105) so aufzuschreiben, dass die Raum- und die Zeitkoordinaten in gleichberechtigter Weise auftreten:

$$F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0, \quad F^{ik}{}_{,k} = 0. \tag{1.7}$$

($F^{ik}{}_{,k}$ ist eine Abkürzung für $\sum_{k=1}^{4} \partial F^{ik}/\partial x^k$). Die erste Gruppe der Maxwell-Gleichungen hat die Lösung

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} A_i \equiv A_{k,i} - A_{i,k}\,,$$

wobei A_i das nunmehr aus der zweiten Gruppe der Gleichungen zu bestimmende Viererpotential ist. Wegen

$$F^{ik}{}_{,k} = -\Box A^i + g^{il} A^k_{,lk}, \quad \Box = g^{km} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m},$$
$$g^{km} = \mathrm{diag}(1,1,1,-1) = \eta^{km} = \eta_{km},$$

können die Maxwell-Gleichung für den Feldstärketensor durch Gleichungen für die Komponenten des Viererpotential ersetzt werden. Unter Berücksichtigung der Lorentz - Eichung $A^k{}_{,k} = 0$ reduzieren sich