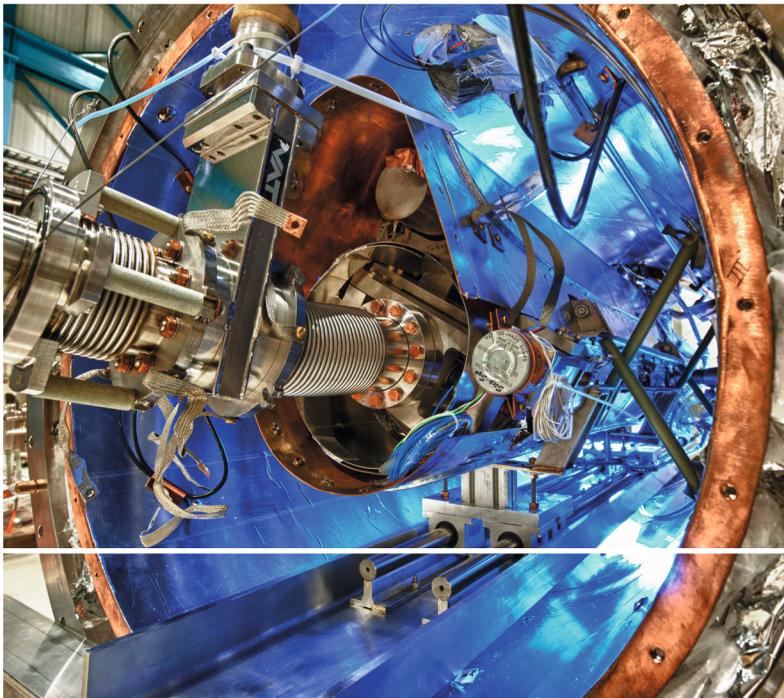


Marco Busch · Walther Ebner



# LINDNER PHYSIK

für das Ingenieurstudium



20., vollständig überarbeitete  
und erweiterte Auflage

HANSER





**Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial.

Geben Sie auf **plus.hanser-fachbuch.de** einfach diesen Code ein:

**plus-p34sh-u8tkd**



**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**www.hanser-fachbuch.de/newsletter**



Marco Busch, Walther Ebner

# Lindner Physik für das Ingenieurstudium

20., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

## **Begründer des Werks:**

Helmut Lindner †

## **Die Autoren:**

Priv.-Doz. Dr. rer. nat. habil. Marco Busch, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Professor Dr. rer. nat. Walther Ebner, Hochschule Niederrhein, Krefeld



Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2024 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Frauke Schafft

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelmotiv: © Fermilab

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Satz: Manuela Treindl, Fürth

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-45882-6

E-Book-ISBN: 978-3-446-46180-2

# Inhalt

<b>Vorwort</b> .....	<b>XI</b>
----------------------	-----------

<b>1 Einführung</b> .....	<b>1</b>
---------------------------	----------

1.1 Physikalische Größen und Gleichungen .....	1
1.2 Internationales Einheitensystem .....	3
1.2.1 Basisgrößen und Basiseinheiten des SI .....	3
1.2.2 Arbeiten mit Einheiten .....	7
1.3 Messgrößen und Messfehler .....	9
1.3.1 Messunsicherheiten .....	9
1.3.2 Messreihen .....	10
1.3.3 Fehlerfortpflanzung .....	13
1.3.4 Regression .....	14

<b>2 Mechanik</b> .....	<b>18</b>
-------------------------	-----------

2.1 Kinematik des Massepunktes .....	19
2.1.1 Bezugssysteme .....	19
2.1.2 Kinematische Größen .....	22
2.1.3 Freier Fall .....	30
2.1.4 Senkrechter Wurf .....	32
2.1.5 Waagerechter und schräger Wurf .....	32
2.1.6 Kreisbewegung .....	35
2.2 Dynamik des Massepunktes .....	39
2.2.1 Newton'sche Gesetze .....	40
2.2.2 Drehimpuls und Drehmoment .....	43
2.2.3 Gravitation und Planetenbewegung .....	46
2.2.4 Trägheitskräfte .....	58
2.2.5 Arbeit, Leistung und Energie .....	63
2.2.6 Erhaltungssätze der Mechanik .....	73
2.3 Stoßprozesse .....	78
2.3.1 Zentrale Stöße .....	81
2.3.2 Schiefe Stöße .....	86
2.4 Dynamik des starren Körpers .....	87
2.4.1 Translation und Rotation .....	92

2.4.2	Trägheitsmoment und Trägheitstensor	95
2.4.3	Kreiselbewegung	106
2.4.4	Gleichgewichtsbedingungen	113
2.4.5	Reibung	120
2.5	Grundlagen der Festigkeitslehre	125
2.5.1	Elastische Grundgrößen	126
2.5.2	Hooke'sches Gesetz	132
2.5.3	Biegung	138
2.5.4	Scherung	141
2.5.5	Torsion	142
<b>3</b>	<b>Strömungsmechanik</b>	<b>144</b>
3.1	Hydrostatik	145
3.1.1	Hydrostatischer Druck	145
3.1.2	Oberflächenspannung	151
3.1.3	Hydrostatischer Auftrieb	157
3.2	Hydrodynamik	160
3.2.1	Bernoulli-Gleichung	163
3.2.2	Strömungen mit innerer Reibung	175
3.2.3	Turbulente Strömungen	185
<b>4</b>	<b>Schwingungen und Wellen</b>	<b>192</b>
4.1	Kinematik schwingender Körper	193
4.1.1	Die harmonische Schwingung	194
4.1.2	Superposition von zwei Schwingungen	196
4.1.3	Allgemeine periodische Schwingungen	198
4.1.4	Drehschwingung	205
4.2	Dynamik schwingender Körper	206
4.2.1	Der ungedämpfte harmonische Oszillator	206
4.2.2	Linear gedämpfte Schwingungen	220
4.2.3	Erzwungene Schwingungen	224
4.2.4	Schwingungen gekoppelter Oszillatoren	231
4.2.5	Schwingungen ausgedehnter Körper	241
4.3	Wellen	247
4.3.1	Grundlagen der Wellenausbreitung	247
4.3.2	Harmonische Wellen	252
4.3.3	Überlagerung von Wellen	255
4.3.4	Reflexion, Brechung und Beugung von Wellen	264
4.4	Grundlagen der physikalischen Akustik	272
4.4.1	Schallausbreitung	273
4.4.2	Ultraschall	288
4.4.3	Akustischer Doppler-Effekt	291

<b>5</b>	<b>Thermodynamik</b>	<b>296</b>
5.1	Thermodynamische Grundlagen	297
5.1.1	Temperatur und Temperaturmessung	297
5.1.2	Thermodynamische Zustandsgrößen	300
5.1.3	Thermische Ausdehnung von Festkörpern	309
5.2	Kinetische Gastheorie	314
5.2.1	Maxwell-Boltzmann-Verteilung	314
5.2.2	Verhalten des idealen Gases bei Volumen-, Druck- und Temperatur- änderung	319
5.2.3	Zustandsgleichung des idealen Gases	322
5.3	Hauptsätze der Thermodynamik	324
5.3.1	Wärme und Wärmekapazität	324
5.3.2	Erster Hauptsatz der Thermodynamik	332
5.3.3	Reversible und irreversible Zustandsänderungen	334
5.3.4	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	336
5.3.5	Dritter Hauptsatz der Thermodynamik	340
5.4	Zustandsänderungen des idealen Gases	341
5.4.1	Isochore Zustandsänderung	342
5.4.2	Isobare Zustandsänderung	343
5.4.3	Isotherme Zustandsänderung	344
5.4.4	Adiabatische Zustandsänderung	346
5.4.5	Polytrope Zustandsänderung	349
5.5	Kreisprozesse	350
5.5.1	Wirkungsweise einer Wärmekraftmaschine	351
5.5.2	Kältemaschine und Wärmepumpe	353
5.5.3	Carnot-Kreisprozess	355
5.5.4	Otto-Kreisprozess	358
5.5.5	Diesel-Kreisprozess	361
5.5.6	Seiliger-Kreisprozess	364
5.5.7	Stirling-Kreisprozess	366
5.6	Reale Gase und Phasenübergänge	369
5.6.1	Die Van-der-Waals-Zustandsgleichung	371
5.6.2	Verflüssigung von realen Gasen	377
5.6.3	Phasenübergänge reiner Stoffe	379
5.7	Wärmetransportvorgänge	394
5.7.1	Wärmeströmung	394
5.7.2	Wärmeleitung	395
5.7.3	Wärmestrahlung	399

<b>6</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>411</b>
6.1	Grundbausteine	411
6.2	Das statische elektrische Feld	412
6.2.1	Grunderscheinungen der Elektrostatik	412
6.2.2	Elektrische Feldgrößen	415
6.2.3	Kraftwirkungen im elektrostatischen Feld	419
6.2.4	Materie im elektrischen Feld	432
6.3	Das statische magnetische Feld	441
6.3.1	Grunderscheinungen der Magnetostatik	441
6.3.2	Magnetische Feldgrößen	444
6.3.3	Durchflutungsgesetz	447
6.3.4	Biot-Savart'sches Gesetz	449
6.3.5	Kraftwirkungen im statischen Magnetfeld	451
6.3.6	Materie im magnetostatischen Feld	455
6.4	Elektromagnetismus	463
6.4.1	Faraday'sches Induktionsgesetz	463
6.4.2	Induktionsvorgänge in bewegten Leitern	467
6.4.3	Selbstinduktion	469
6.4.4	Energie und Energiedichte des magnetischen Feldes	471
6.4.5	Maxwell'sche Gleichungen	473
6.5	Der Gleichstromkreis	475
6.5.1	Elektrische Spannung	475
6.5.2	Elektrischer Widerstand und Ohm'sches Gesetz	477
6.5.3	Elektrische Leistung und Energie	480
6.5.4	Kirchhoff'sche Gesetze	481
6.5.5	Schaltvorgänge im Gleichstromkreis	482
6.6	Der Wechselstromkreis	485
6.6.1	Grundlagen des Wechselstroms	486
6.6.2	Widerstände im Wechselstromkreis	489
6.6.3	Berechnungen von Wechselstromkreisen mit komplexen Zahlen	492
6.6.4	Leistung im Wechselstromkreis	495
6.6.5	Transformator	498
6.7	Elektromagnetische Schwingungen und Wellen	499
6.7.1	Elektromagnetischer Schwingkreis	499
6.7.2	Freie elektromagnetische Wellen	503
6.7.3	Geführte elektromagnetische Wellen	512
6.8	Elektrische Leitung	514
6.8.1	Elektrische Leitung im Vakuum	514
6.8.2	Driftgeschwindigkeit und Beweglichkeit von Ladungsträgern	519
6.8.3	Elektrische Leitung in Gasen	520
6.8.4	Elektrische Leitung in Elektrolyten	523

<b>7</b>	<b>Optik</b>	<b>530</b>
7.1	Ausbreitung, Erzeugung und Nachweis von Licht	530
7.2	Strahlenoptik	534
7.2.1	Reflexion und Brechung an Grenzflächen	534
7.2.2	Spiegel	542
7.2.3	Prisma	549
7.2.4	Linsen und Linsensysteme	550
7.2.5	Optische Instrumente	565
7.3	Wellenoptik	574
7.3.1	Intensität bei Reflexion und Transmission	575
7.3.2	Polarisation des Lichtes	577
7.3.3	Interferenz des Lichtes	583
7.3.4	Beugung	595
7.4	Strahlungsphysikalische und lichttechnische Größen	606
7.4.1	Radiometrische (strahlungsphysikalische) Größen	606
7.4.2	Photometrische (lichttechnische) Größen	610
<b>8</b>	<b>Quantenphysik</b>	<b>615</b>
8.1	Grundlagen der Quantenphysik	615
8.1.1	Hohlraumstrahlung und Planck'sches Strahlungsgesetz	615
8.1.2	Quanteneigenschaften der elektromagnetischen Strahlung	617
8.1.3	Welleneigenschaften der Materie: Materiewellen	622
8.1.4	Schrödinger-Gleichung und Wellenfunktion	626
8.1.5	Heisenberg'sche Unschärferelation	628
8.1.6	Quantenphysikalische Phänomene	630
8.2	Atomphysik	639
8.2.1	Bestandteile der Atome	640
8.2.2	Quantenphysik des Atoms	642
8.2.3	Das Wasserstoffatom und das Bohr'sche Atommodell	650
8.2.4	Aufbau der Atomhüllen der Elemente	656
8.2.5	Strahlungs- und Absorptionsprozesse	661
8.2.6	Moderne Anwendungen und Experimente der Atomphysik	668
8.3	Kernphysik	676
8.3.1	Der Atomkern	677
8.3.2	Kernmodelle	685
8.3.3	Radioaktivität	689
8.3.4	Zerfallsarten und Zerfallsreihen	696
8.3.5	Kernreaktionen	709
8.3.6	Wechselwirkung radioaktiver Strahlung mit Materie	719
8.3.7	Strahlungsmessung und Dosimetrie	731
8.3.8	Energiegewinnung	742
8.4	Elementarteilchenphysik	748
8.4.1	Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik	749
8.4.2	Teilchenbeschleuniger	755

<b>9</b>	<b>Festkörperphysik</b>	<b>760</b>
9.1	Aufbau von Festkörpern	760
9.1.1	Bindungen im Festkörper	760
9.1.2	Kristallgitter und Symmetrien	765
9.1.3	Fehlordnung in Kristallen	772
9.1.4	Festkörperoberflächen	775
9.1.5	Kristallwachstum	778
9.2	Thermische und elektronische Eigenschaften	780
9.2.1	Gitterschwingungen und Phononen	780
9.2.2	Bandstruktur der Elektronenenergie	786
9.2.3	Elektronen in Metallen	791
9.2.4	Elektronen in Halbleitern	795
9.2.5	Thermoelektrische Erscheinungen	803
9.2.6	Supraleitung	806
9.3	Physikalische Grundlagen der Halbleiterelektronik	811
9.3.1	Halbleiter-Kontakte und -Schalter	811
9.3.2	Optoelektronische Bauelemente	824
9.3.3	Integrierte Schaltungen	833
9.4	Magnetismus in Festkörpern	838
9.4.1	Dia- und Paramagnetismus	839
9.4.2	Gekoppelte magnetische Momente	841
9.4.3	Spin und elektrische Leitung	845
<b>10</b>	<b>Relativitätstheorie</b>	<b>850</b>
10.1	Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie	851
10.1.1	Galilei-Transformation	852
10.1.2	Michelson-Morley-Experiment	854
10.1.3	Spezielles Relativitätsprinzip und Lorentz-Transformation	857
10.1.4	Relativistische Effekte	867
10.2	Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie	880
10.2.1	Einstein'sche Feldgleichungen	881
10.2.2	Experimentelle Tests	884
	<b>Fundamentale Konstanten</b>	<b>888</b>
	<b>Einheiten</b>	<b>891</b>
	Basisgrößen und -einheiten des SI	891
	Abgeleitete Einheiten	892
	Größen und ihre Einheiten	894
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>902</b>

# Vorwort

Die Physik ist integraler Bestandteil aller ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge an den Universitäten und Hochschulen für Angewandte Wissenschaften. Das hat gute Gründe. Alle technischen Disziplinen entstanden aus der Physik heraus. Daher bildet eine fundierte Kenntnis physikalischer Grundlagen die Basis für das Verständnis technischer Zusammenhänge und damit für die Entwicklung innovativer Technologien und Lösungen. Darüber hinaus ermöglicht das Studium der Physik die Entwicklung des methodischen Denkens und Vorgehens, die bei der Bearbeitung technisch komplexer Fragestellungen unabdingbar sind. Dabei ist es nicht entscheidend, sämtliche Details in den einzelnen physikalischen Teildisziplinen zu kennen. Wichtiger sind vielmehr ein umfassender Überblick und ein grundsätzliches Verständnis der physikalischen Zusammenhänge. Bei speziellen technischen Fragestellungen wird damit der physikalische Hintergrund sichtbar, auf den dann bei Bedarf näher eingegangen werden kann. Dieses Ziel verfolgt seit der ersten Auflage aus dem Jahre 1953 das Lehrbuch „Lindner - Physik für Ingenieure“, das aufgrund seiner großen Verbreitung inzwischen als Klassiker unter den einführenden Physik-Lehrbüchern gilt. Allerdings erfordert die fortschreitende Entwicklung in Forschung, Technik und auch in der Lehre die kontinuierliche, teilweise grundlegende Anpassung von Inhalt und Darstellung. Um dem Wandel zum aktuellen Stand in Wissenschaft und Technik gerecht zu werden, wurde das Werk für diese 20. Auflage daher völlig neu bearbeitet und strukturiert.

Die Gliederung der vorliegenden 20., vollständig überarbeiteten und erweiterten Auflage folgt den klassischen Bereichen der Physik, angefangen bei der Mechanik über die Thermodynamik und Elektrodynamik bis hin zur Quantenphysik und Festkörperphysik. Diese Struktur ermöglicht es den Leserinnen und Lesern, sich systematisch durch die verschiedenen physikalischen Disziplinen zu bewegen und gleichzeitig die Verbindungen zwischen ihnen zu erkennen. Ein Ziel des vorliegenden Buches ist es, dass die Physik als grundlegende Naturwissenschaft in ihren Zusammenhängen verstanden und nicht als bloße Aneinanderreihung spezieller physikalischer Gesetze fehlinterpretiert wird. Zahlreiche Rechenbeispiele helfen, das physikalische Verständnis zu vertiefen. An mathematischen Kenntnissen werden die Differential- und Integralrechnung sowie die Grundlagen der Vektorrechnung vorausgesetzt. Das vorliegende Buch wurde so konzipiert, dass es sowohl als Lehrbuch im Studium als auch als Nachschlagewerk in der beruflichen Praxis dienen kann. Sachliche Kritik und Verbesserungsvorschläge nehmen wir Autoren und der Hanser-Verlag dankend entgegen.

Wir als Autoren möchten uns bei den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Hanser-Verlags, insbesondere bei unserer Lektorin Frau Natalia Silakova-Herzberg für ihre Geduld und Unterstützung bei der Fertigstellung des Buches, gerade auch unter den schwierigen Bedingungen der letzten Jahre, herzlich bedanken. Ein großer Dank gilt darüber hinaus unseren Familien für die uns entgegengebrachte große Unterstützung und das Verständnis für das Buchprojekt.



# 1

## Einführung

### ■ 1.1 Physikalische Größen und Gleichungen

In der Physik werden aus Beobachtungen der Natur mithilfe von Experimenten (unter Umständen allerdings unter Einsatz aufwendiger Technik) Gesetze abgeleitet, die das Geschehen beschreiben. Die Formulierung dieser Gesetze wie auch ihre gegenseitige Verknüpfung geschieht mithilfe mathematischer Gleichungen. In diesen Gleichungen erscheinen die physikalischen Begriffe in der Form *physikalischer Größen*. Das sind messbare Merkmale von Objekten wie Gegenstände, Vorgänge oder Zustände.

Die in den einzelnen Teilgebieten der Physik verwendeten Größen sind recht zahlreich, hängen aber wegen ihrer gegenseitigen, in den Naturgesetzen gegebenen Beziehungen eng miteinander zusammen. Daher ist es möglich, sie auf nur wenige einfache *Basisgrößen* zurückzuführen und mit ihrer Hilfe alle übrigen als *abgeleitete* Größen darzustellen. So ist z. B. die Geschwindigkeit eine abgeleitete Größe, die als Quotient der beiden Basisgrößen Länge  $l$  und Zeit  $t$  definiert ist.

#### Werte von Größen

Die physikalischen Größen haben nicht die Bedeutung einfacher Zahlenwerte, sondern beinhalten außerdem eine zweckmäßig gewählte Einheit. Der Wert einer Größe gibt an, wie oft die Einheit in der gemessenen oder berechneten Größe enthalten ist.



#### Merke

Der Wert einer physikalischen Größe ist das Produkt aus einem Zahlenwert und einer Einheit.

Dies kommt in entsprechenden Gleichungen, wie  $t = 50 \text{ s}$  oder  $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$  zum Ausdruck, in denen die darin enthaltenen Einheiten ausdrücklich mitgeschrieben werden müssen.

Soll nur der Zahlenwert einer Größe bezeichnet werden, so wird ihr Formelzeichen in geschweiften Klammern gesetzt:  $\{l\} = 50$ . Will man nur die Einheit angeben, schreibt man das Formelzeichen in eckige Klammern:  $[t] = \text{s}$ . Der obige Merksatz kann also allgemein für eine Größe  $G$  durch die Gleichung  $G = \{G\} [G]$  ausgedrückt werden.

## Vektorielle und skalare Größen

In vielen Fällen reichen Zahlenwert und Einheit nicht aus, um eine physikalische Größe vollständig zu charakterisieren, zusätzlich ist noch die Angabe einer Richtung erforderlich. Dann handelt es sich um *vektorielle Größen*. Hierzu gehören Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , Beschleunigung  $\vec{a}$ , Kraft  $\vec{F}$  usw. Vektorielle Größen werden durch einen Pfeil über dem Symbol (Formelzeichen) der Größe hervorgehoben. Fehlt der Pfeil, so ist mit dem Symbol, wie  $v$ ,  $a$ ,  $F$  usw., der Betrag der vektoriellen Größe gemeint. Die mathematische Behandlung vektorieller Größen erfolgt nach den Regeln der Vektorrechnung. Deren Kenntnis wird hier nicht vorausgesetzt, sondern an den entsprechenden Stellen des Buches wird anhand der konkreten Beispiele näher darauf eingegangen.

Werden Vorgänge nur in einer Dimension betrachtet, kann die Richtung durch ein Vorzeichen vor dem Betrag angegeben werden, auf den Vektorpfeil kann dann verzichtet werden. So ist z. B. die Geschwindigkeit  $-v$  entgegengesetzt zur Geschwindigkeit  $v$ .

Als *skalare Größen* werden dagegen die Größen bezeichnet, denen kein Richtungssinn zugeordnet werden kann, wie z. B. die Zeit  $t$ , die Masse  $m$  oder die Temperatur  $T$  eines Körpers.

## Physikalische Größengleichungen

Die zur Formulierung der Naturgesetze aufgestellten Gleichungen werden mit physikalischen Größen gebildet. Sie werden daher als *Größengleichungen* bezeichnet, in denen die Größen durch ihre Symbole repräsentiert werden. Sie sind unabhängig von Zahlenwert und Einheit der Größen.

In der Praxis wird bei der Bearbeitung einer Aufgabenstellung zunächst mit Größengleichungen eine allgemeine Lösungsgleichung erarbeitet. Erst dann werden konkrete Werte für die Größen eingesetzt und damit eine spezielle Lösung berechnet, wie das folgende Beispiel zeigt.



### Beispiel

Aufgabenstellung: Wie groß ist die Masse  $m$  von  $l = 300$  m Kupferdraht mit dem Querschnitt  $A = 0,785 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>? Die Dichte von Kupfer beträgt  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Allgemeine Lösung: Die Definition der Dichte lautet  $\rho = \frac{m}{V}$ . Daraus ergibt sich für die Masse  $m = \rho \cdot V$ . Mit dem Volumen  $V = l \cdot A$  erhält man als allgemeine Lösung

$$m = \rho \cdot l \cdot A$$

Spezielle Lösung: Durch Einsetzen der Werte folgt schließlich

$$m = 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 300 \text{ m} \cdot 0,785 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 2,103 \text{ kg}$$

Hieraus ist zu ersehen, dass die Einheiten wie Faktoren behandelt werden und z. B. auch gegenseitig gekürzt werden können.

Mitunter sind *zugeschnittene Größengleichungen* in Gebrauch mit „Größensymbolen“, die nur für Größenangaben in bestimmten Einheiten gelten sollen. Im Unterschied zu den Größengleichungen stellen diese Symbole dann keine Größen, sondern nur Zahlenwerte dar. Solche sehr speziellen Gleichungen haben nur in eng begrenzten Bereichen eine Berechtigung, sollten nur mit großer Vorsicht verwendet werden und tauchen in diesem Buch nicht auf.

## Einheitengleichungen und Dimensionen

Oftmals kommt es darauf an, lediglich über die in einer Gleichung vorkommenden Einheiten Klarheit zu gewinnen. In einer solchen *Einheitengleichung* werden die Größen in eckige Klammern gesetzt, womit zum Ausdruck gebracht wird, dass nur die Einheiten gemeint sind. Beispielsweise folgt aus der Definition der Dichte  $\varrho = \frac{m}{V}$  die Einheitengleichung  $[\varrho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Mit der *Dimension* einer Größe wird dargestellt, wie diese Größe im Prinzip mit den Basisgrößen zusammenhängt. Als Dimensionssymbole werden Großbuchstaben verwendet. Die in der Mechanik verwendeten Basisgrößen haben die Dimensionen Länge L, Zeit T und Masse M. Zum Beispiel ergibt sich das Volumen V aus dem Produkt dreier Längen und hat daher die Dimension  $L^3$ . Die Dichte  $\varrho$  ist demzufolge von der Dimension  $M \cdot L^{-3}$ . Physikalische Größen, bei deren Bildung sich die Einheiten herauskürzen, besitzen die Dimension 1. Dies ist z. B. beim Bogenmaß des ebenen Winkels der Fall, das durch das Verhältnis  $\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$  bestimmt wird. Da die Dimensionen nicht an spezielle Einheiten gebunden sind, kann ihr Gebrauch häufig den Überblick über komplizierte Zusammenhänge erleichtern.

## ■ 1.2 Internationales Einheitensystem

### 1.2.1 Basisgrößen und Basiseinheiten des SI

Bei der Aufstellung der Naturgesetze mithilfe von Experimenten ist das Bestreben, dafür eine möglichst allgemeine Form zu finden, sodass sie sich also nicht nur auf den konkreten Fall beziehen, sondern sich als Theorie auch auf andere Umstände anwenden lassen. Dabei müssen letzten Endes aber wieder Experimente darüber entscheiden, ob die Theorie auf diese Umstände tatsächlich angewendet werden kann.

Die Ergebnisse von Experimenten, die also die Basis der Physik darstellen, können aber nur als gültig und aussagekräftig angesehen werden, wenn die Experimente reproduzierbar sind, d. h. unabhängig von Ort oder Zeitpunkt mit denselben Ergebnissen wiederholt werden können. Um nun die Ergebnisse der Experimente vergleichen zu können, müssen diese mit allgemein gültigen, möglichst präzise festgelegten und unveränderlichen Einheiten angegeben werden. Außerdem ist neben diesem eher prinzipiellen Motiv ein allgemein gültiges Einheitensystem in einer hochtechnisierten Welt für den globalen Austausch in Technik und Wissenschaft unerlässlich.

Die ersten Schritte zur Errichtung eines solchen Einheitensystems wurden 1790 im Anschluss an die Französische Revolution mit der Definition der *Sekunde* als Bruchteil des Sonnentages, des *Meters* als Bruchteil des Erdumfangs und des *Gramms* als Masse eines bestimmten Volumens Wasser gemacht. 1875 wurde das *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM, Internationales Büro für Gewichte und Maße) gegründet, das fortan die Arbeiten zur Vereinheitlichung koordinierte. 1889 fand die 1. *Conférence générale des poids et mesures* (CGPM, Generalkonferenz für Gewichte und Maße) statt, auf der unter anderem ein Körper aus einer Platin-Iridium-Legierung, gelagert beim BIPM, als das „Urkilogramm“ anerkannt wurde.

Mit dem weiteren wissenschaftlichen Fortschritt und der Weiterentwicklung der Messverfahren zu immer höherer Genauigkeit ist man heute so weit, einen Vorschlag von Max Planck aus dem Jahr 1900 zu realisieren, nämlich die Basiseinheiten des Einheitensystems auf der Grundlage von Naturkonstanten zu definieren. Die Präzision, mit der bestimmte Naturkonstanten inzwischen gemessen werden können, ist so hoch, dass die Festlegung der Einheiten auf ihrer Grundlage die Genauigkeit der herkömmlichen Festlegung übertrifft. Die Werte der Naturkonstanten können in diesem Zuge als exakte Werte so definiert werden, dass die neu festgelegten Einheiten mit den alten im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen. Für das *Système international d'unités* (SI, Internationales Einheitensystem), das 1960 von den meisten Ländern der Erde auf der 11. CGPM vereinbart worden war, wurde auf der 26. CGPM beschlossen, dass ab 2019 alle Basiseinheiten durch ausgewählte Naturkonstanten definiert werden.

Die Basisgrößen des SI mit ihren Basiseinheiten sind in Tabelle 1.1 aufgeführt, Tabelle 1.2 zeigt die im SI als exakt definierten Naturkonstanten. Die Definition der Basiseinheiten und ihre Rückführung auf die Naturkonstanten sowie vorgeschlagene Messverfahren werden im Folgenden kurz dargestellt.

**Tabelle 1.1** Basisgrößen und Basiseinheiten des SI

Basisgröße		Basiseinheit		abgeleitet von	
Bezeichnung	Symbol	Bezeichnung	Symbol	Konstante	Einheiten
Zeit	$t$	Sekunde	s	$\Delta f_{\text{Cs}}$	
Länge	$l$	Meter	m	$c$	s
Masse	$m$	Kilogramm	kg	$h$	s, m
Stromstärke	$I$	Ampere	A	$e$	s
Temperatur	$T$	Kelvin	K	$k$	s, m, kg
Stoffmenge	$n$	Mol	mol	$N_{\text{A}}$	
Lichtstärke	$I_{\text{v}}$	Candela	cd	$K_{\text{cd}}$	s, m, kg

**Tabelle 1.2** Im SI exakt definierte Konstanten

Bezeichnung	Symbol und Wert
Frequenz des Hyperfeinstruktur-Übergangs in $^{133}\text{Cs}$	$\Delta f_{\text{Cs}} = 9\,912\,631\,770 \frac{1}{\text{s}}$
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Planck'sches Wirkungsquantum	$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
Elementarladung	$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$
Boltzmann-Konstante	$k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{ K}}$
Avogadro-Konstante	$N_{\text{A}} = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
Photometrisches Strahlungsäquivalent	$K_{\text{cd}} = 683 \frac{\text{cd sr s}^3}{\text{kg m}^2}$

## Sekunde

Eine Sekunde ist festgelegt durch die Frequenz  $\Delta f_{\text{Cs}}$  der Strahlung eines bestimmten Übergangs im  $^{133}\text{Cs}$ -Atom (Genauerer dazu in Abschnitt 8.2.6).

Eine Sekunde entspricht 9 912 631 770 Perioden dieser Strahlung. Der exakte Wert ist also

$$1 \text{ s} = \frac{1}{\Delta f_{\text{Cs}}} \cdot 9\,912\,631\,770.$$

Die Messung von Frequenzen mit Mikrowellen-Resonanz an Atomwolken oder Einzel-Atom-Spektroskopie gehört zu den Messungen, bei denen die höchste relative Genauigkeit erreicht werden kann (Abschnitt 8.2.6). Die Sekunde wurde daher als Grundlage für die Definition der weiteren Basiseinheiten gewählt.

## Meter

Grundlagen sind der festgelegte Wert der Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum  $c$  sowie die Definition der Sekunde.

Ein Meter ist die Strecke, die das Licht im Zeitraum  $\frac{1}{299\,792\,458}$  s zurücklegt.

Auf die Konstanten zurückgeführt gilt exakt:  $1 \text{ m} = \frac{1}{299\,792\,458} \cdot c \cdot \text{s} = \frac{9\,912\,631\,770}{299\,792\,458} \cdot \frac{c}{\Delta f_{\text{Cs}}}.$

Zur Messung macht man sich den Zusammenhang  $\lambda = \frac{c}{f}$  (Gl. (4.98)) zwischen der Wellenlänge des Lichtes  $\lambda$ , seiner Geschwindigkeit  $c$  und Frequenz  $f$  zunutze. Mit einem Interferometer (siehe Abschnitt 7.3.3) kann damit über die Wellenlänge die Länge eines Längenmaßstabs mit der Frequenz des Lichtes in Beziehung gesetzt werden. Um die erforderliche Genauigkeit zu erreichen, werden unter anderem frequenzstabilisierte Laser als Lichtquelle verwendet.

## Kilogramm

Grundlagen sind der festgelegte Wert des Planck'schen Wirkungsquantums  $h$  sowie die Definitionen von Sekunde und Meter.

Damit gilt:  $1 \text{ kg} = \left( \frac{h}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}} \right) \text{ m}^{-2} \text{ s}.$

Die Masse eines Referenz-Kilogramms kann mit einer *Watt-* oder *Kibble-Waage* (B. Kibble, 1938–2016) gemessen werden. Darin wird in einem ersten Schritt die Gewichtskraft auf die Masse  $m \cdot g$  durch die magnetische Lorentz-Kraft auf eine stromführende Spule kompensiert, im zweiten Schritt die in der mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Spule induzierte Spannung gemessen. Spannung und Strom werden mithilfe des Josephson-Effektes (Abschnitt 9.2.6) und des Quanten-Hall-Effektes (Abschnitt 9.2.4) mit dem Planck'schen Wirkungsquantum in Beziehung gesetzt (und mit der Elementarladung, die aber in der Rechnung wegfällt). Für die Masse (in kg) erhält man daraus eine Beziehung zu  $g$  (in  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ),  $v$  (in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) und  $h$ .

Abweichungen im Mikrogramm-Bereich zwischen der Masse des Urkilogramms von 1889 und der von Vergleichskörpern, die sich im Laufe der letzten Jahrzehnte zeigten und nicht eindeutig einem der Körper zugeordnet werden konnten, waren ein wichtiges Motiv für die Neufassung des SI im Jahre 2019.



## Ampere

Grundlagen sind der festgelegte Wert der Elementarladung  $e$  sowie die Definition der Sekunde.

Ein Stromstärke von 1 A entspricht einem Fluss von  $\frac{1}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}} \approx 6,2 \cdot 10^{18}$  Elementarladungen pro Sekunde.

Für die messtechnische Realisierung kann das Ohm'sche Gesetz  $I = \frac{U}{R}$  (Gl. (6.95)) genutzt werden. Die zurzeit höchste Präzision bei der Messung von Spannung und Widerstand erreicht man wieder unter Nutzung des Quanten-Hall- und des Josephson-Effektes.

Eine sehr direkte Methode, nämlich das Zählen einzelner Elektronen mit einer mikroelektronischen sogenannten Ein-Elektron-Pumpe, ist in der Entwicklung. Ihre Genauigkeit leidet aber zurzeit noch an der begrenzten reproduzierbaren Zählrate von etwa  $10^9$  Elektronen pro Sekunde entsprechend einem Strom von ca. 100 pA.

## Kelvin

Grundlagen sind der festgelegte Wert der Boltzmann-Konstanten  $k$  sowie die Definitionen von Sekunde, Meter und Kilogramm.

Das Kelvin als Einheit der absoluten Temperaturskala ist damit gegeben durch  $1 \text{ K} = \frac{1,380\,694 \cdot 10^{-23}}{k} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ .

Der bisherige Fixpunkt der Temperaturskala, die Temperatur des Tripelpunktes von Wasser  $T = 273,16 \text{ K} = 0,01 \text{ }^\circ\text{C}$  (siehe Abschnitt 5.1) bleibt dabei erhalten, und auch die Celsius-Skala ist weiterhin gültig.

Eine sehr präzise Methode zur Messung der absoluten Temperatur und zur messtechnischen Realisierung der Einheit Kelvin beruht auf der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit eines idealen, monoatomaren Gases (sehr gut angenähert durch z. B. Helium unter Normalbedingungen)  $c = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k}{m} T}$  (Gl. (4.117)) mit  $\kappa = \frac{5}{3}$ ,  $R_i = \frac{k}{m}$  ( $m$ : mittlere Masse der Atome des Gases,  $R_i$ : spezifische Gaskonstante,  $\kappa$ : Isentropenkoeffizient). Zur Messung der Temperatur wird die Frequenz  $f$  einer stehenden Welle in einem gasgefüllten Hohlraum gemessen, dessen Abmessungen die Wellenlänge  $\lambda$  vorgeben (siehe Abschnitt 4.4.1). Mit  $c = \lambda f$  (Gl. (4.98)) kann die Schallgeschwindigkeit und damit die Temperatur bestimmt werden.

## Mol

Grundlage ist der festgelegte Wert der Avogadro-Konstanten  $N_A$ .

Die Einheit mol dient zur Angabe der Stoffmenge, d. h. zur Angabe der Anzahl der Teilchen eines Stoffes, z. B. der Atome, Moleküle, Ionen usw.

Ein Mol entspricht einer Stoffmenge von exakt  $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$  Teilchen.

Mit dieser neuen Festlegung orientiert man sich an der bisherigen Definition, nämlich, dass ein Mol der Anzahl der  $^{12}\text{C}$ -Atome in 0,012 kg, der molaren Masse von  $^{12}\text{C}$  entspricht. Da das aber nur im Rahmen der Messgenauigkeit gilt, ist nun die Anzahl der  $^{12}\text{C}$ -Atome eine Messgröße.

Die bisher genaueste Bestimmung der Avogadro-Konstanten wurde mit einer  $^{28}\text{Si}$  (Silicium)-Kugel durchgeführt, die bei einem Durchmesser von 93,7 mm nur um maximal 30 nm von der

Kugelgestalt abweicht, sodass das Kugelvolumen sehr genau berechnet werden kann. Mit der Kenntnis der Kristallstruktur von Silicium und des Atomabstands, die mit Röntgenstrukturanalysen bestimmt werden (siehe Abschnitt 9.1.2), kann man daraus die Anzahl  $N$  der Atome in der Kugel berechnen. Aus der Masse der Kugel und der molaren Masse von 0,028 kg von  $^{28}\text{Si}$  ergibt sich die Stoffmenge  $n$  in mol und damit die Avogadro-Konstante nach  $N_A = \frac{N}{n}$ .

### Candela

Die Einheit Candela bezieht sich als einzige der SI-Basiseinheiten direkt auf die Physiologie des Menschen. Sie dient als Maß für die Lichtstärke, wobei hier Licht im engeren Sinne als der mit dem menschlichen Auge und seiner spektralen Empfindlichkeit sichtbare Teil der elektromagnetischen Strahlung gemeint ist. Die Lichtstärke ist bei einer bestimmten Frequenz proportional zur Strahlstärke, d. h. der Strahlungsleistung pro Raumwinkeleinheit in eine bestimmte Richtung mit der Einheit  $\frac{\text{W}}{\text{sr}}$  (Watt pro Steradian):  $1 \text{ cd} = K_{\text{cd}} \cdot 1 \frac{\text{W}}{\text{sr}} = K_{\text{cd}} \cdot 1 \frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-3}}{\text{sr}}$ .

Die Proportionalitätskonstante ist auf den Wert  $K_{\text{cd}} = 683 \frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{W}}$  bei der Frequenz  $5,40 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  (grünes Licht) festgelegt. Dieser Wert wurde so gewählt, damit der Anschluss an frühere Definitionen der Einheit Candela gegeben ist.

Die Messung der Lichtstärke wird damit zurückgeführt auf die Messung der Strahlstärke. Will man die Lichtstärke einer Lichtquelle mit einem breiten Spektrum aus der Strahlstärke berechnen, muss man allerdings die spektrale Empfindlichkeitskurve des Auges einbeziehen (siehe Abschnitt 7.4.2).

## 1.2.2 Arbeiten mit Einheiten

Alle in den Naturwissenschaften und der Technik auftretenden Größen können als Produkte von Potenzen der SI-Basiseinheiten ausgedrückt werden. Diese Kombinationen werden als abgeleitete kohärente SI-Einheiten bezeichnet, wenn keine zusätzlichen Zahlenfaktoren darin vorkommen, ansonsten als abgeleitete, nicht kohärente. So ist die abgeleitete kohärente SI-Einheit für die Geschwindigkeit  $\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , nicht kohärent ist dagegen für die Massendichte  $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot (10^{-2} \text{ m})^{-3}$ .

Viele abgeleitete Einheiten haben aus praktischen Gründen eigene Bezeichnungen erhalten. Zum Beispiel wird die Kraft in der Einheit Newton mit  $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  angegeben, die elektrische Spannung in der Einheit Volt mit  $\text{V} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$ .

Zu den abgeleiteten Einheiten zählen auch die Winkeleinheiten:

Radian ( $\text{rad} = \text{m} \cdot \text{m}^{-1} = 1$ ) für den ebenen Winkel  $\alpha = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} \text{ rad}$ .

Steradian ( $\text{sr} = \text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2} = 1$ ) für den Raumwinkel  $\alpha = \frac{\text{Fläche der Kugelkappe}}{\text{Radius}^2} \text{ sr}$ .

Da sie dimensionslos sind, brauchen sie eigentlich nicht mitgeschrieben zu werden. Sie dienen aber zur Kennzeichnung einer Zahl als Winkel.

Es gibt darüber hinaus viele Einheiten, die zwar keine SI-Einheiten sind, aber wegen der häufigen Verwendung vom SI zugelassen sind. Dazu gehören Minute (min), Stunde (h), Tag (d), Liter (l), Tonne (t), Elektronvolt (eV) usw.

Schließlich stößt man auch häufig noch auf Nicht-SI-Einheiten, die aber in einigen Ländern gesetzlich zugelassen sind, wie Bar (bar), Kilowattstunde (kWh), Zoll (") usw.

Oft kommt es vor, dass Einheiten für den praktischen Umgang zu groß oder zu klein sind. Das SI erlaubt dafür die Verwendung von Vorsätzen (Präfixen), die dezimale Teile oder Vielfache einer Einheit kennzeichnen. Tabelle 1.3 führt die gebräuchlichsten Präfixe auf.

**Tabelle 1.3** SI-Präfixe

Symbol	Name	Faktor	Symbol	Name	Faktor
da	Deka	$10^1$	d	Dezi	$10^{-1}$
h	Hekto	$10^2$	c	Zenti	$10^{-2}$
k	kilo	$10^3$	m	Milli	$10^{-3}$
M	Mega	$10^6$	$\mu$	Mikro	$10^{-6}$
G	Giga	$10^9$	n	Nano	$10^{-9}$
T	Tera	$10^{12}$	p	Piko	$10^{-12}$
P	Peta	$10^{15}$	f	Femto	$10^{-15}$
E	Exa	$10^{18}$	a	Atto	$10^{-18}$

Einer Einheit dürfen nicht mehrere Präfixe vorangestellt werden. Insbesondere muss man sich beim Kilogramm dabei an der eigentlich abgeleiteten SI-Einheit Gramm oder an der zugelassenen Einheit Tonne orientieren, z. B.:  $50\,000\text{ kg} = 50\text{ Mg} = 50\text{ t}$ .

Häufig sind die Eingangswerte bei Berechnungen nicht als SI-Einheiten gegeben. Hier empfiehlt es sich, die Werte vor der Berechnung in SI-Einheiten umzurechnen. Das Ergebnis erhält man dann ebenfalls in SI-Einheiten, die dann bei Bedarf wieder in eventuell praktischere Einheiten umgerechnet werden können.



### Beispiel

Welche Zeit braucht ein Schiff bei einer Geschwindigkeit von 15 kn, um die Strecke von 4 000 km zurückzulegen?

Gerechnet wird nach der Gleichung  $t = \frac{l}{v}$

$$\text{mit } v = 15\text{ kn} = 15 \left( 1\,852 \frac{\text{m}}{\text{h}} \right) = 15 \left( 1\,852 \frac{\text{m}}{3\,600\text{ s}} \right) = 7,72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

und  $l = 4\,000\text{ km} = 4\,000 \cdot 10^3\text{ m}$ . Damit ergibt sich

$$t = \frac{4 \cdot 10^6\text{ m}}{7,72 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5,18 \cdot 10^5\text{ s} = 6,00\text{ d}$$

Grundsätzlich gilt also:



### Merke

Werden in einer Größengleichung die gegebenen Größen in SI-Einheiten eingesetzt, so ergibt sich die zu berechnende Größe auch in ihrer SI-Einheit.

## ■ 1.3 Messgrößen und Messfehler

Die Physik ist eine empirische Wissenschaft, d. h. ihre Aussagen beruhen, wie schon mehrfach erwähnt, auf Experimenten, also der Beobachtung von Vorgängen unter natürlichen oder auch künstlich hergestellten Bedingungen. Erst die durch Messungen gewonnenen Daten ermöglichen die Aufstellung und Überprüfung von Theorien oder die technische Umsetzung physikalischer Erkenntnisse. Ein großer Teil der Alltagsarbeit in der Physik (wie auch in anderen Naturwissenschaften) besteht in der Auswertung von Messdaten, insbesondere auch in Bezug auf ihre Gültigkeit und Zuverlässigkeit hin. Das mathematische Handwerkszeug dazu ist sehr umfangreich. Im Folgenden können daher nur einige Grundzüge der Vorgehensweise bei der Auswertung von Messdaten erläutert werden.

### 1.3.1 Messunsicherheiten

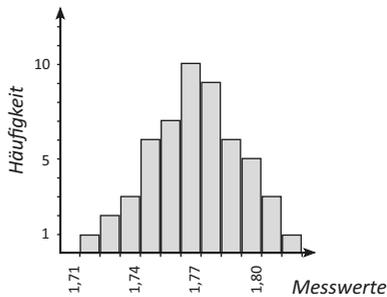
Jede Messung ist mit Unsicherheiten behaftet. Mit erhöhtem Aufwand kann man die Unsicherheit zwar verringern, man kann sie aber grundsätzlich nicht beseitigen. Ein Messergebnis ist daher immer nur ein Schätzwert für den *Erwartungswert*, den „wahren“ Wert der jeweiligen Messgröße. Zur vollständigen Angabe eines Messergebnisses gehört deshalb auch die Angabe der Messunsicherheit, mit deren Wert sich ein Intervall um den Schätzwert, der sogenannte *Vertrauensbereich*, festlegen lässt.

Zur Messunsicherheit tragen systematische und zufällige Ursachen bei. Als *systematische Unsicherheiten* werden Messabweichungen bezeichnet, die durch Unvollkommenheiten des Mess- und Auswertungsverfahrens, der Messgeräte, durch nicht erfasste Umwelteinflüsse (z. B. die Temperaturabhängigkeit eines Messwiderstandes bei der Strommessung) und auch durch persönliche Fehler des Beobachters verursacht werden. Sie können zeitlich sowohl konstant als auch veränderlich sein und sind allein durch Wiederholung der Messung nicht zu erfassen. Sind die Werte der systematischen Abweichungen bekannt, lassen sie sich durch rechnerische Korrektur der Messwerte berücksichtigen. Bei Messgeräten werden mögliche systematische Fehler in der Regel als Toleranz (z. B. wie „1,5 % vom Endwert“) angegeben, bei digitalen Anzeigen entspricht der minimale systematische Fehler dem Wert der letzten angezeigten Stelle. In vielen Fällen können sie nur abgeschätzt werden.

Mit statistischen Methoden kann man dagegen die *zufälligen, statistischen Unsicherheiten* erfassen, die sich in einer Streuung von Messwerten bei der Wiederholung von Messungen unter sonst unveränderten Bedingungen äußern. Ihre Ursachen reichen vom begrenzten Auflösungsvermögen des Auges beim Ablesen eines Längenmaßstabs bis zur mikroskopisch ungeordneten Bewegung von Elektronen bei einer Spannungsmessung. Der Umgang mit Unsicherheiten dieser Art soll im Folgenden erläutert werden.

### 1.3.2 Messreihen

Zur verlässlichen Bestimmung des „wahren“ Wertes einer Größe  $x$  (z. B. eine Geschwindigkeit, Spannung, Zeit usw.) reicht eine einzelne Messung wegen der oben erwähnten Unsicherheiten nicht aus. Es muss eine *Messreihe* mit mehrfachen Messungen unter möglichst konstanten Bedingungen durchgeführt werden. Trägt man die Häufigkeit, mit der eine Messung im Rahmen der Messreihe einen Wert innerhalb eines bestimmten Intervalls ergibt, gegen den Gesamtbereich der Werte auf, ergibt sich in der Regel ein Bild ähnlich wie in Bild 1.1.



**Bild 1.1**

Häufigkeitsverteilung bei einer Messreihe

Viele der Messwerte liegen in der Nähe eines „mittleren“ Wertes, mit zunehmendem Abstand davon nimmt ihre Häufigkeit ab. Anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert in der Nähe dieses mittleren Wertes liegt, ist hoch und nimmt mit zunehmendem Abstand davon ab. Mathematisch wird dies durch die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  ausgedrückt, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert in ein Intervall  $x \pm dx$  fällt. Ein bei Messungen in der Praxis häufig auftretender Fall ist die *Gauß-Verteilung* (C. F. Gauß, 1777–1855), die deshalb auch als *Normalverteilung* bezeichnet wird. Die Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte bei der Gauß-Verteilung lautet

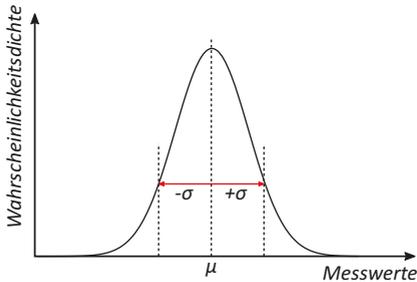
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (1.1)$$

$$-\infty < x < +\infty$$

Ihre Kurve, die wegen ihrer Gestalt auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet wird, zeigt Bild 1.2.

Der Parameter  $\mu$  ist der Erwartungswert der Verteilung. Er gibt die Position des Maximums der Kurve an, d. h. den Messwert, der mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auftritt. Die *Standardabweichung*  $\sigma$  bestimmt die Breite der Verteilung der Messwerte um den Erwartungswert.

Die Gesamtfläche unter der Kurve ist 1, entsprechend der (trivialen) Aussage, dass ein Messwert mit der Wahrscheinlichkeit 100 % irgendwo im Definitionsintervall von  $x$  liegt. Zwischen den Grenzen  $x = \mu - \sigma$  und  $x = \mu + \sigma$  liegen ca. 68,3 % der Fläche. Eine Messung ergibt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % einen Messwert innerhalb dieser Grenzen. Für die Grenzen  $\mu \pm 2\sigma$  liegt der Wert bei 95,4 %.



**Bild 1.2**  
Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung

Allerdings wird die Verteilung der Messwerte nur für den theoretischen Fall unendlich vieler Messwerte exakt durch Gl. (1.1) und Bild 1.2 beschrieben. Bei einer Messreihe mit nur endlich vielen Messwerten muss man sich daher mit Näherungen bzw. Schätzwerten für den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  begnügen. Für normalverteilte Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ist der beste Schätzwert für  $\mu$  der

Mittelwert der Messreihe<sup>1</sup>

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.2)$$

Als Schätzwert für  $\sigma$  gilt die Standardabweichung der Messreihe

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.3)$$

Eine Messung ist im Sinne der Statistik eine *Stichprobe*. Die Anzahl der Messungen  $n$  wird daher auch als Umfang der Stichprobe bezeichnet.

Je größer die Anzahl der Messwerte ist, desto genauer gibt der Mittelwert den Erwartungswert der gemessenen Größe wieder, als desto schmaler kann deshalb auch der Vertrauensbereich angegeben werden. Allerdings kann bei einer realen Messreihe mit endlich vielen Messwerten nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, dem *Vertrauensniveau*, davon ausgegangen werden, dass der Erwartungswert tatsächlich innerhalb des Vertrauensbereiches liegt. Beides drückt sich aus in der Berechnung der

Messunsicherheit des Mittelwertes

$$u_p = \frac{t_p}{\sqrt{n}} s_x \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> Zu den meist recht „aufwendigen“ Gleichungen zur Berechnung der statistischen Kennwerte sei angemerkt, dass sie in entsprechender Anwendungssoftware oft vorprogrammiert enthalten sind.

Wie man unmittelbar sieht, wird die Messunsicherheit  $u$  mit zunehmendem  $n$  kleiner. Der Student'sche t-Faktor  $t_p$  (W. S. Gosset, Pseudonym „Student“, 1876–1937) berücksichtigt außerdem neben dem Stichprobenumfang  $n$  das Vertrauensniveau  $p$ . Der t-Faktor folgt aus der Theorie der Fehlerrechnung, einige Werte für zwei häufig benutzte Vertrauensniveaus sind in Tabelle 1.4 angeführt.

**Tabelle 1.4** Student'scher t-Faktor

$n$		2	3	4	6	8	10	20	50	100
$t_p$	$p = 68,3\%$	1,84	1,32	1,20	1,11	1,08	1,06	1,03	1,01	1,01
	$p = 95,4\%$	13,8	4,50	3,29	2,64	2,42	2,31	2,14	2,05	2,02

Für die Begrenzung des Vertrauensbereichs ergibt sich damit

$$\Delta x_p = u_p + w \quad (1.5)$$

Dabei steht  $w$  für den systematischer Fehler, der, wie oben erwähnt, eventuell abgeschätzt werden muss. Streng genommen gilt Gl. (1.5) unter der Bedingung, dass  $w$  deutlich kleiner ist als  $u_p$ .

Das aus der Messreihe folgende Messergebnis wird damit so angegeben

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_p \quad (1.6)$$

mit dem Vertrauensniveau  $p$ .

Das Resultat einer Messreihe ist nur zusammen mit der Nennung des Vertrauensbereiches und des Vertrauensniveaus sinnvoll.

Der Wert von  $\Delta x_p$  ist unabhängig vom Wert von  $\bar{x}$  und wird deshalb als *absolute Unsicherheit* bezeichnet. Oft gibt eine Angabe der *relativen Unsicherheit* einer Größe einen besseren Eindruck von der Qualität einer Messreihe. Dabei wird die absolute Unsicherheit auf den Mittelwert bezogen, d. h. die relative Unsicherheit ist  $\frac{\Delta x_p}{\bar{x}}$ . Damit lautet das Resultat einer Messreihe

$$x = \bar{x}, \quad \text{rel. Unsicherheit } \frac{\Delta x_p}{\bar{x}} \quad (1.7)$$

mit dem Vertrauensniveau  $p$ .

Bei der praktischen Berechnung wird die Anzahl der signifikanten Stellen der Zahlenwerte des Mittelwertes und der Unsicherheit häufig nur durch das dafür verwendete Rechengerät (Computer) bestimmt. Dabei werden als signifikante Stellen einer Zahl die Stellen ohne führende Nullen bis zur Rundungsstelle bezeichnet. Deutlich wird dies bei der Notierung als Fließkommazahl. Die Zahl  $1\,234 = 1,234 \cdot 10^3$  hat vier signifikante Stellen, die Zahl  $0,001\,2 = 1,2 \cdot 10^{-3}$  nur zwei. Auch eine folgende Null kann signifikant sein:  $0,129\,6$  ist gerundet  $0,130 = 1,30 \cdot 10^{-1}$  mit drei signifikanten Stellen.

Für die Angabe von  $\Delta x_p$  ist nur eine Stelle real signifikant, also physikalisch sinnvoll. Die real signifikanten Stellen von  $\bar{x}$  ergeben sich aus dem Wert von  $\Delta x_p$ . Nur die Stellen, die sich im Bereich  $\bar{x} \pm \Delta x_p$  um weniger als 10 Werte ändern, können als real signifikant gelten. Als Ergebnis der Messreihe dürfen nur diese real signifikanten Stellen angegeben werden.



### Beispiel

Die Schwingungsperiode eines Pendels soll bestimmt werden. Dazu werden fünf Messungen der Periodendauer durchgeführt. Die Auflösung bzw. die Messunsicherheit der Stoppuhr beträgt  $w = 0,01$  s. Die Messwerte sind

$i$	1	2	3	4	5	6
$T_i/s$	1,92	1,95	1,91	1,89	1,93	1,88

Es ergibt sich

nach Gl. (1.2) für den Mittelwert:  $\bar{T} = 1,9167$  s,

nach Gl. (1.3) für die Standardabweichung:  $s_T = 0,0320$  s.

(jeweils auf die 4. Nachkommastelle gerundet)

Bei einem Vertrauensniveau von 95,4 % und einem Stichprobenumfang von 6 ist der t-Faktor  $t_{95} = 2,64$ . Für die Messunsicherheit des Mittelwertes erhält man damit nach Gl. (1.4):  $u_{95} = 0,0345$ .

Die Begrenzung des Vertrauensbereichs beträgt damit nach Gl. (1.5) rechnerisch:  $\Delta x_{95} = 0,0445$  bzw. mit real signifikanten Stellen  $\Delta x_{95} = 0,04$ . Mit diesem Wert ist die zweite Nachkommastelle des Mittelwertes noch real signifikant. Das Resultat der Messreihe lautet daher nach Gl. (1.6):

$T = (1,92 \pm 0,04)$  s, Vertrauensniveau  $p = 95,4$  %

bzw. mit der relativen Unsicherheit nach Gl. (1.7):

$T = 1,92$  s, rel. Unsicherheit 0,021 oder 2,1 %,  $p = 95,4$  %.

### 1.3.3 Fehlerfortpflanzung

Oft kann man eine gesuchte physikalische Größe  $y$  nicht direkt messen, sondern muss ihren Wert mithilfe einer physikalischen Gleichung aus anderen Größen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  bestimmen, die ihrerseits direkt gemessen werden können. Es besteht also der Zusammenhang  $y = y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ . In diesem Fall geht man folgendermaßen vor.

Den Schätzwert  $\bar{y}$  der Zielgröße  $y$  berechnet man mit den Mittelwerten der gemessenen Größen  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$ :

$$\bar{y} = y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots) \quad (1.8)$$

Für die Unsicherheit in  $y$  gilt das

Gauß'sche Gesetz der Fehlerfortpflanzung

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots} \Delta x_i \right)^2} \quad (1.9)$$

(mit derselben Einschränkung wie für Gl. (1.5), dass nämlich die systematischen Fehler der  $x_i$  deutlich kleiner sind als die statistischen Unsicherheiten)

Der Ausdruck  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$  bezeichnet eine partielle Ableitung. Beispielweise wird für den ersten Summanden  $\frac{\partial y}{\partial x_i} |_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots}$  zunächst  $y$  nach  $x_1$  abgeleitet, wobei die anderen  $x_i$  als Konstanten betrachtet werden. Anschließend werden in diese Ableitung die Mittelwerte  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$  eingesetzt und so der Wert berechnet.

In der Praxis braucht man in vielen Fällen nicht von der allgemeinen Grundform (Gl. (1.9)) auszugehen, da die Zusammenhänge  $y = y(x_1, x_2, x_3, \dots)$  speziellen Sonderformen entsprechen. Ist die Zielgröße  $y$  linear abhängig von den Messgrößen, so ergibt sich für die Unsicherheit in  $y$ :

Fehlerfortpflanzung für  $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$

$$\Delta y = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2 + \dots} \quad (1.10)$$

Ist die Zielgröße  $y$  ein Produkt von Potenzen der Messgrößen, so erhält man für die Unsicherheit in  $y$ :

Fehlerfortpflanzung für  $y = a \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots$

$$\Delta y = \bar{y} \sqrt{\left( n_1 \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} \right)^2 + \left( n_2 \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} \right)^2 + \dots} \quad (1.11)$$



### Beispiel

Durch eine Serienschaltung von zwei Widerständen  $R_1 = (3,9 \pm 0,2) \Omega$  und  $R_2 = (7,1 \pm 0,1) \Omega$  fließt ein Strom von  $I = (45 \pm 0,5) \text{ A}$ . (Diese Werte wurden in vorherigen Messreihen ermittelt.)

Wie groß ist der Gesamtwiderstand  $R = R_1 + R_2$ ?

Als Mittelwert ergibt sich  $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 11,0 \Omega$ , als Unsicherheit nach Gl. (1.10)

$\Delta R = \sqrt{(0,2 \Omega)^2 + (0,1 \Omega)^2} = 0,224 \Omega$ . Der Gesamtwiderstand ist also  $R = (11,0 \pm 0,2) \Omega$ .

Welche Leistung  $P = I^2 R$  wird umgesetzt?

Als Mittelwert ergibt sich  $\bar{P} = \bar{I}^2 \bar{R} = 22,28 \cdot 10^3 \text{ W}$ , als Unsicherheit nach Gl. (1.11)

$\Delta P = 22,28 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \sqrt{\left( 2 \frac{0,5 \text{ A}}{45 \text{ A}} \right)^2 + \left( \frac{0,2 \Omega}{11 \Omega} \right)^2} = 0,639 \cdot 10^3 \text{ W}$ . Die Leistung ist also  $P = (22 \pm 0,6) \cdot 10^3 \text{ W}$ .

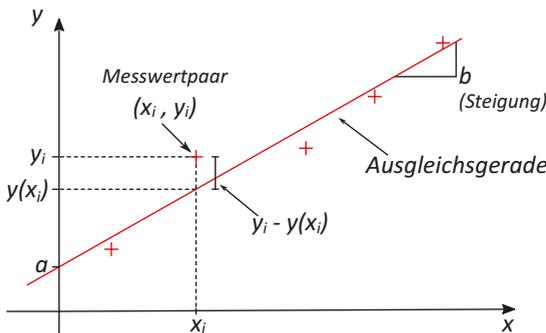
### 1.3.4 Regression

Oft kommt es vor, dass zwischen zwei Messgrößen ein funktionaler Zusammenhang vorliegt oder zumindest vermutet wird, z. B. zwischen Ort  $x$  und Zeit  $t$ :  $x(t) = x_0 + vt$  oder zwischen Spannung  $U$  und Widerstand  $R$ :  $U(R) = IR$ . Mit Messungen soll dann ein solcher

Zusammenhang bestätigt werden, oder Parameter der Funktion sollen bestimmt werden, wie oben z. B.  $x_0$  und  $v$ . Wegen der Messunsicherheiten bilden die Messwerte im Allgemeinen allerdings den Funktionsverlauf nicht exakt ab, wie Bild 1.3 zeigt. *Regression* heißt dann, die Parameter so zu wählen, dass die Funktionswerte die Messwerte möglichst genau wiedergeben. Ein mathematisches Verfahren dazu beruht auf der Methode der Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 \quad \text{minimal} \quad (1.12)$$

$(x_i, y_i)$  sind dabei die  $n$  Paare der Messwerte,  $y(x_i)$  ist der dem funktionalen Zusammenhang entsprechende Wert von  $y$  zum Wert  $x_i$ .



**Bild 1.3**

Messwertpaare (+) und Ausgleichsgerade bei einem angenommenen linearen Zusammenhang  $y(x) = a + b x$

Speziell für den Fall eines linearen Zusammenhangs  $y = a + b x$  lässt sich die dann sogenannte *lineare Regression* relativ einfach durchführen.

Oft werden deshalb andere funktionale Zusammenhänge zunächst mathematisch in eine lineare Form gebracht, um dann die lineare Regression anwenden zu können. Beispielsweise wird aus dem Zusammenhang zwischen der Länge  $l$  und der Schwingungsperiode  $T$  eines

Pendels  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  (siehe Abschnitt 4.2.1) durch Quadrieren der in  $l$  lineare Ausdruck  $T^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} l$ . Exponentielle Zusammenhänge können durch Logarithmieren linearisiert

werden, wie z. B. beim radioaktiven Zerfallsgesetz: Aus  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$  wird der in  $t$  lineare Ausdruck  $\ln N(t) = \ln N_0 - \lambda t$ .

Bei der linearen Regression gilt für die Steigung der Ausgleichsgeraden

$$b = r \frac{s_y}{s_x} \quad (1.13)$$

Der Faktor  $r$  ist der Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{1}{(n-1) s_x s_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (1.14)$$

$s_x$  und  $s_y$  werden wie die Standardabweichungen der Messwerte  $x_i$  und  $y_i$  nach Gl. (1.3) berechnet. (Es handelt sich hierbei aber nicht um statistisch sinnvolle Standardabweichungen, da sie nicht eine zufällige Streuung der Messwerte wiedergeben.)  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  sind die Mittelwerte der Messwerte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  nach Gl. (1.2).

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß dafür, wie gut die Messwerte durch eine lineare Funktion wiedergegeben werden. Es gilt  $-1 \leq r \leq +1$ , positive bzw. negative Werte bei positiver bzw. negativer Steigung der Ausgleichsgeraden. Je dichter  $|r|$  am Wert 1 liegt, desto kleiner ist die Summe der Fehlerquadrate und desto „besser“ wird der Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  durch eine lineare Funktion repräsentiert.

Aus der Steigung  $b$  und den Mittelwerten ergibt sich mit Gl. (1.15) der Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (1.15)$$

Auch für die Parameter der Ausgleichsgeraden müssen im Resultat der Messung Vertrauensbereiche angegeben werden. Unter der Voraussetzung normalverteilter Messwerte gilt:

Messunsicherheit der Steigung

$$u_p(b) = \tilde{t}_p \frac{s_y}{s_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \quad (1.16)$$

Messunsicherheit des Achsenabschnitts

$$u_p(a) = u_p(b) \sqrt{\frac{n-1}{n} s_x^2 + \bar{x}^2} \quad (1.17)$$

Der t-Faktor  $\tilde{t}_p$  berücksichtigt, wie in Abschnitt 1.3.2, den Einfluss des Vertrauensniveaus und des Stichprobenumfangs. Dabei gilt  $\tilde{t}_p(n) = t_p(n-1)$ .



### Beispiel

Um die Homogenität in Material und Abmessungen zu überprüfen, soll der längenspezifische Widerstand  $r_L$  eines Drahtes bestimmt werden. Der Widerstand sollte idealerweise in der Form  $R = R_0 + r_L L$  linear von der Länge abhängen. Um dies zu bestätigen, wird der Widerstand  $R_i$  verschieden langer Stücke der Länge  $L_i$  gemessen. Die Messungen ergeben diese Werte:

$L/m$	0,273	0,473	0,655	0,872	1,076
$R/\Omega$	3,800	5,198	6,101	6,930	8,237

Aus diesen Daten errechnen sich die für die Bestimmung der Regressionsparameter benötigten Mittelwerte nach Gl. (1.2) und Standardabweichungen nach Gl. (1.3) zu

$\bar{L}/m$	$\bar{R}/\Omega$	$s_L/m$	$s_R/\Omega$
0,317	1,684	0,670	6,053

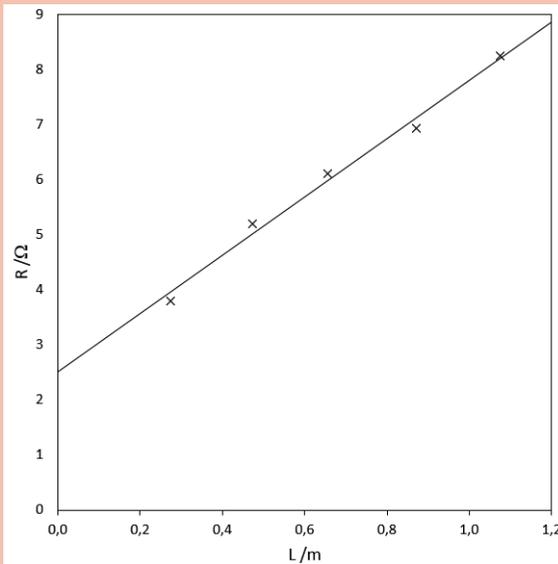
Damit erhält man für den Korrelationskoeffizienten  $r$  (Gl. (1.14)) und für den Achsenabschnitt  $R_0$  (Gl. (1.15)) und die Steigung  $r_L$  (Gl. (1.13)) der Ausgleichsgeraden.

$r$	$R_0/\Omega$	$r_L/(\Omega/\text{m})$
0,995	2,514	5,285

Der Korrelationskoeffizient liegt ausreichend nahe am Wert 1, sodass man davon ausgehen kann, dass der Zusammenhang zwischen Drahtlänge und Widerstand tatsächlich linear ist. Allerdings liegt auch bei der Drahtlänge 0 ein Restwiderstand  $R_0$  vor. Dies lässt sich z. B. auf Widerstände in den Messleitungen oder Kontaktwiderstände zurückführen. Der Wert des längenspezifischen Widerstands  $r_L$  wird dadurch aber nicht beeinflusst, da er sich nur aus der Steigung ergibt.

Für das Vertrauensniveau 95,4 % bei 5 Messungen liest man den Wert des t-Faktors aus Tabelle 1.4 ab:  $\tilde{t}_{95}(5) = t_{95}(4) = 3,29$ . Damit ergibt sich für die Unsicherheit in der Steigung (Gl. (1.16))  $u_{95}(r_L) = 0,449 \Omega/\text{m}$  und im Achsenabschnitt (Gl. (1.17))  $u_{95}(R_0) = 0,327 \Omega$ .

Das Resultat der Messung lautet also  $R_0 = (2,5 \pm 0,3) \Omega$ ,  $r_L = (5,3 \pm 0,4) \Omega/\text{m}$  bei dem Vertrauensniveau 95,4 %, grafisch dargestellt in Bild 1.4.



**Bild 1.4** Messwertpaare und der Ausgleichsgerade  $R = R_0 + r_L L$  zum obigen Beispiel

# 2

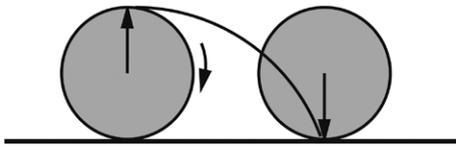
## Mechanik

Die Mechanik ist das historisch älteste Teilgebiet der Physik und ist die Lehre von der Bewegung und Verformung von materiellen Systemen sowie den dabei wirkenden Kräften. Solche Systeme können einzelne Massepunkte, ausgedehnte Körper, eine Flüssigkeit oder beispielsweise auch ein Netzwerk bestehend aus festen Komponenten, z. B. ein Fachwerk, sein. Sich mit den Ursachen der Kräfte auseinanderzusetzen, ist jedoch nicht Gegenstand der Mechanik, sondern anderer Teilgebiete der Physik, die ebenfalls in dem vorliegenden Buch behandelt werden (Elektrodynamik in Kapitel 6, Quantenphysik in Kapitel 8 und Festkörperphysik in Kapitel 9). Innerhalb der Physik sind die Begriffe Mechanik und klassische Mechanik synonym. Die relativistische Mechanik ist Teil der Relativitätstheorie (Kapitel 10), die ein Teilgebiet der Physik darstellt. Das für die Ingenieurwissenschaften wichtige Gebiet der Technischen Mechanik ist ein Teil der Mechanik. Sie wendet die physikalischen Grundlagen auf technische Systeme an. Grundsätzlich lässt sich die Mechanik in die beiden Teilgebiete *Kinematik* und *Dynamik* untergliedern. Während die Kinematik geeignete physikalische Größen zur räumlichen und zeitlichen Beschreibung der Bewegung von Massepunkten und ausgedehnten Körpern ohne Berücksichtigung der Kräfte bereitstellt, behandelt die Dynamik den Einfluss der Kräfte auf die Bewegungsabläufe. Innerhalb der Dynamik gibt es noch die Aufteilung in *Kinetik* und *Statik*, je nachdem ob es sich um Bewegungen von Körpern bzw. Ungleichgewichte oder um unbewegte Körper bzw. Gleichgewichte handelt.

Das Bewegungsverhalten von Körpern, soweit sie unserer unmittelbaren Anschauung und Beobachtung zugänglich sind, gehört zu unserer alltäglichen Erfahrung. Begriffe wie beispielsweise Wegstrecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung werden auch im Alltagsleben verwendet. Die Beobachtung von Himmelsobjekten wie die Sonne, der Mond, die Planeten unseres Sonnensystems sowie anderer Sterne und insbesondere die Deutung der Bewegungen der Himmelsobjekte führten zur Astronomie, die eine der ältesten Wissenschaften ist. Die Bewegungen der Planeten um die Sonne wurden jedoch erst Anfang des 17. Jahrhunderts durch J. Kepler (1571–1630) mit den nach ihm benannten drei *Kepler'schen Gesetzen* mit fundamentalen Gesetzmäßigkeiten beschrieben. Grundlage dafür waren das *heliocentrische Weltbild*, das auf die griechischen Astronomen A. von Samos (310 v. Chr.–230 v. Chr.) und S. von Seleukia (190 v. Chr.–150 v. Chr.) zurückgeht aber erst im 16. Jahrhundert von N. Kopernikus (1473–1543) detailliert ausgearbeitet wurde, sowie die jahrzehntelangen Präzisionsbeobachtungen von T. Brahe (1546–1601).

Alle Bewegungen lassen sich auf zwei Grundtypen zurückführen. Erfahren alle Punkte eines Systems die gleichen räumlichen Verschiebungen, so spricht man von einer *Translation*. Im Gegensatz dazu bewegen sich die Punkte bei einer Drehbewegung oder *Rotation* auf konzentrischen Kreisen um eine gemeinsame Drehachse, die auch außerhalb des betrachteten Systems liegen kann. Sehr oft liegt jedoch eine Kombination aus beiden Bewegungsarten

vor: So führen die Punkte eines rollenden Rades eine Rotation um die Radnabe durch und erfahren zugleich eine Translation mit der bewegten Radnabe (Bild 2.1).



**Bild 2.1**

Zusammengesetzte Bewegung bei einem rollenden Rad: Die Punkte auf dem Umfang führen sowohl eine Rotation als auch eine Translation aus

## ■ 2.1 Kinematik des Massepunktes

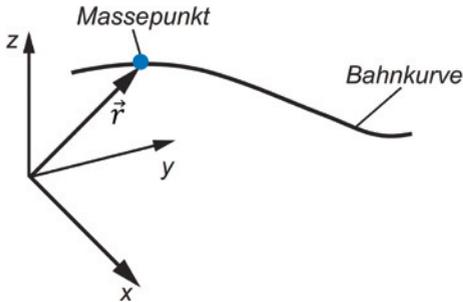
Bei der Behandlung mechanischer Probleme wird häufig die innere Struktur der betrachteten Systeme vereinfacht. So ist es oft zweckmäßig und auch ausreichend, einen Körper nur als einen *Massepunkt* zu betrachten. Das Konzept des Massepunktes ist nicht nur für die Mechanik, sondern für die gesamte Physik von fundamentaler Bedeutung. Dabei wird die räumliche Ausdehnung, die Form und die Gestalt des Körpers vollständig vernachlässigt und seine Masse idealisiert in einem Punkt, also einem Objekt ohne geometrische Struktur, konzentriert. Ebenfalls eine Idealisierung stellt der *starre Körper* (Abschnitt 2.4) dar, bei dem die reale verformbare Struktur von Körpern durch eine vollkommen starre und nicht verformbare Struktur ersetzt wird. Details wie die chemische Zusammensetzung und daraus folgende spezifische Bindungen werden dabei bewusst ignoriert. Bei der zu behandelnden Aufgabe ist jedoch jeweils zu prüfen, ob das zugrunde gelegte physikalische Modell die Wirklichkeit ausreichend beschreibt.

Die Kinematik ist durch zwei physikalische Grundgrößen gekennzeichnet: die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. In beiden Fällen handelt es sich um Begriffe, deren Inhalte sich wie bei vielen anderen physikalischen Größen im Laufe der Zeit verändert haben. Dabei ist es unvermeidlich, dass es Verständnisprobleme beim Umgang, vor allem mit in der Alltagswelt verankerten Begriffen, geben kann.

### 2.1.1 Bezugssysteme

Ausgangspunkt der Kinematik ist die genaue raumzeitliche Darstellung der Bewegung von Massepunkten und Körpern ohne Berücksichtigung der Kräfte. Dies setzt zunächst die Festlegung eines dafür geeigneten *Bezugssystems* bzw. *Koordinatensystems* voraus. Bei der Auswahl eines solchen Bezugssystems hat man grundsätzlich freie Wahl, jedoch können Nebenbedingungen bestehen, die sich aus der konkreten Problemstellung ergeben. Insbesondere ist zu beachten, dass bei der Gegenüberstellung von Messergebnissen, die in verschiedenen Bezugssystemen erhalten wurden, die Gleichwertigkeit nicht automatisch vorhanden ist. So liefert beispielsweise die Beobachtung von Bewegungsabläufen aus einem anfahrenen Fahrzeug andere Ergebnisse als die aus einem ruhenden Fahrzeug. Eine Besonderheit be-

sitzen dabei die sogenannten *Inertialsysteme*. Darunter versteht man Bezugssysteme, in denen die Gesetze der Mechanik überall die gleiche mathematische Form aufweisen (siehe Abschnitt 2.2.1). Die mathematische Darstellung eines Bezugssystems erfolgt im Allgemeinen mithilfe dreier senkrecht aufeinander stehender Achsen mit einem gemeinsamen Koordinatenursprung (Bild 2.2).



**Bild 2.2**  
Rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ortsvektor

Ein solch rechtwinkliges Bezugssystem wird auch *kartesisch* genannt. Die momentane Position eines Massepunktes relativ zum Koordinatenursprung (oft abkürzend auch als Nullpunkt bezeichnet) des Bezugssystems wird durch drei Längenangaben, die Koordinaten dieses Punktes, beschrieben. Der zeitliche Ablauf der Bewegung wird dann vollständig durch das Zeitverhalten der einzelnen Koordinaten erfasst. Bei der Benennung der *Koordinatenachsen*, hier  $x$ ,  $y$  und  $z$ , ist zu beachten, dass die Reihenfolge zwei unterschiedliche Anordnungen zulässt. Um Fehler bei Koordinatenangaben zu vermeiden, muss das gewählte System eindeutig sein. Üblich ist die Wahl des sogenannten *Rechtssystems*: Überführt man die positive  $x$ -Achse durch eine Drehung um einen Winkel von  $90^\circ$  in die positive  $y$ -Achse (entgegen dem Uhrzeigersinn, d. h. im mathematisch positiven Drehsinn), so zeigt die positive  $z$ -Achse in Richtung der Bewegung einer *Rechtsschraube*. Dementsprechend wird beim Linkssystem die positive  $x$ -Achse durch eine Drehung um einen Winkel von  $-90^\circ$  in die positive  $y$ -Achse (im Uhrzeigersinn, d. h. im mathematisch negativen Drehsinn) überführt und die positive  $z$ -Achse zeigt in Richtung der Bewegung einer *Linksschraube*. Die kartesischen Koordinaten selbst entsprechen den senkrechten Abständen des Punktes von den drei Ebenen ( $xy$ -,  $xz$ - und  $yz$ -Ebene), die aus jeweils zwei Achsen gebildet werden können. Die drei Koordinaten können auch als die Bestimmungsgrößen eines Vektors  $\vec{r}$  aufgefasst werden, der vom Koordinatenursprung des Bezugssystems zum Massepunkt zeigt. Die Länge bzw. der Betrag dieses als *Ortsvektor* bezeichneten Richtungspfeils entspricht dabei dem Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung. Er ergibt sich aus den Koordinaten mithilfe des Satzes des Pythagoras:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.1)$$

Die SI-Einheit des Betrages des Ortsvektors ist Meter:  $[r] = \text{m}$ . Die Pfeilspitzen des zeitabhängigen Ortsvektors bestimmen die Bahnkurve des Massepunktes, deren Länge dem Weg  $s$  des Massepunktes für einen bestimmten Beobachtungszeitraum  $t$  entspricht.

Der Ortsvektor ist ein sogenannter *gebundener Vektor*, d. h. er wird durch einen festgelegten Ausgangspunkt, den Koordinatenursprung, definiert. Andere Vektoren, wie z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung, sind freie Vektoren: sie können beliebig im Raum verschoben werden, sind also nicht an einen bestimmten Ausgangspunkt gebunden.

Projiziert man den Ortsvektor senkrecht auf die einzelnen Koordinatenachsen, so erhält man seine Komponenten bezüglich der Koordinatenachsen (Bild 2.3a). Bei den Komponenten handelt es sich ebenfalls um Vektoren, deren Beträge mit den Absolutwerten der Koordinaten übereinstimmen und deren Richtungen denen der Koordinatenachsen entsprechen. Mathematisch werden diese Komponenten als Produkte aus den Koordinaten und den sogenannten *orthonormierten Basisvektoren* mit der Länge 1 (ohne Einheit), die senkrecht (orthogonal)

aufeinander stehen, dargestellt. Die drei *kartesischen Basisvektoren*  $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind jeweils in Richtung der positiven  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Koordinatenachse orientiert und

bilden eine sogenannte vollständige Orthonormalbasis (VONB), da jeder Ortsvektor im dreidimensionalen Raum durch eine Superposition von  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  dargestellt werden kann und des Weiteren gilt:  $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z$  sowie  $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ . Der Koordinatenwert bestimmt den Betrag und den Richtungssinn (positiv oder negativ) der entsprechenden Komponente, der Basisvektor die Koordinatenachse.

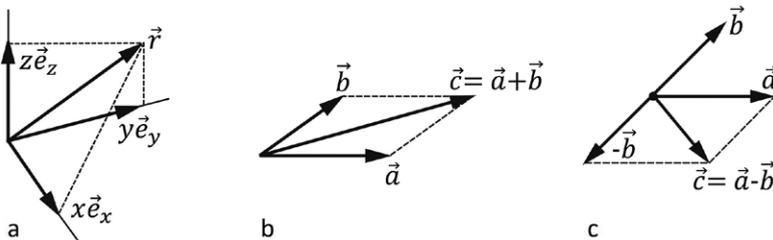
Durch Aneinandersetzen der drei Komponenten nach entsprechender Parallelverschiebung, sodass jeweils zwei Pfeilspitzen mit dem Ausgangspunkt einer anderen Komponente verbunden sind, entsteht ein gebrochener Linienzug, dessen direkte Verbindung zwischen Ausgangs- und Endpunkt genau den Ortsvektor als resultierenden Vektor ergibt. Die Reihenfolge, in der die Vektoren zusammengefügt werden, ist nicht relevant. Man nennt diese Verknüpfung von Vektoren auch Vektoraddition. Sie ist für alle Vektoren, nicht nur für Ortsvektoren, definiert und wird formal für zwei beliebige Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  als Summengleichung geschrieben:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\vec{c}$  der Summenvektor, d. h. die Resultierende aus den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  (Bild 2.3b). Sind mehr als zwei Vektoren zu addieren, so können auch jeweils zwei Vektoren zunächst zu einem resultierenden Vektor zusammengefasst werden. Die Vektoraddition wird mathematisch zwar wie die Summenbildung von gewöhnlichen Zahlen geschrieben. Eine Übereinstimmung zwischen der Vektorsumme und der Summe der Beträge liegt aber nur dann vor, wenn beide Vektoren die gleiche Richtung aufweisen.

Analog zur Addition von zwei Vektoren lässt sich auch eine Vektorsubtraktion definieren. Hierzu wird der Subtrahend zunächst invertiert, d. h. um  $180^\circ$  gedreht, und dann eine Addition durchgeführt (Bild 2.3c):

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2.3)$$



**Bild 2.3** (a) Komponenten des Ortsvektors, (b) Addition von Vektoren, (c) Subtraktion von Vektoren

Wendet man die Summationsschreibweise aus Gl. (2.2) auf die Komponenten des Ortsvektors an, so erhält man folgende Summe:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (2.4)$$

Üblicherweise wird diese Komponentendarstellung in einer Kurzform geschrieben, indem die drei Koordinaten als *Zahlentripel* entweder in Reihe als *Zeilenvektor* oder untereinander als *Spaltenvektor* in runden Klammern gesetzt werden:

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \text{und} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$



### Beispiel

Ein Massepunkt auf einer Bahnkurve erreicht zu einem bestimmten Zeitpunkt den Ort mit den Koordinaten  $x = 25 \text{ m}$ ,  $y = 27,1 \text{ m}$  und  $z = -5,3 \text{ m}$ . Wie lautet die Darstellung des Ortsvektors als Zeilenvektor und wie groß ist der Abstand des Massepunktes zum Ursprung des Koordinatensystems?

Der Ortsvektor als Zeilenvektor:

$$\vec{r} = (25 / 27,1 / -5,3) \text{ m}$$

und der Abstand vom Ursprung ist der Betrag des Ortsvektors:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{(25^2 + 27,1^2 + 5,3^2)} \text{ m} = 37,3 \text{ m}$$

## 2.1.2 Kinematische Größen

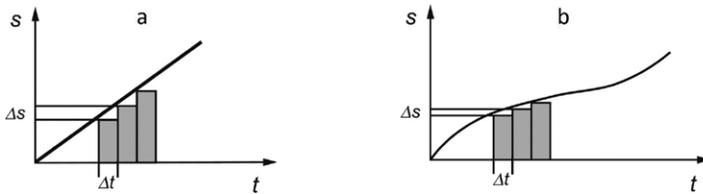
In der Alltagswelt ist der Begriff der Geschwindigkeit mit der Schnelligkeit oder dem Tempo eines bewegten Körpers verknüpft. Im einfachsten Fall wird sie bei einer Bewegung in nur einer Dimension als *mittlere skalare Geschwindigkeit*  $v_m$  als Verhältnis aus zurückgelegter Wegstrecke  $s$  und der dafür benötigten Zeit  $t$  angegeben:

$$v_m = \frac{s}{t} \quad (2.6)$$

Die SI-Einheit der Geschwindigkeit ist m/s und die im Alltag gebräuchliche SI-fremde Einheit ist  $1 \text{ km/h} = 3,6^{-1} \text{ m/s}$  (Stunde ist eine SI-fremde Einheit).

Diese so definierte mittlere skalare Geschwindigkeit ist abgesehen vom eher seltenen Fall der *gleichförmigen Bewegung* (Bild 2.4a) ungeeignet, um den zeitlichen Ablauf einer *ungleichförmigen Bewegung* zu kennzeichnen, wie er beispielhaft in Bild 2.4b in Form eines Weg-Zeit-Diagramms skizziert ist.

Bei Betrachtung eines Zeitintervalls  $\Delta t$  und der zugehörigen Wegstrecke  $\Delta s$  ergibt sich die mittlere skalare Geschwindigkeit aus:  $v_m = \Delta s / \Delta t$ . Wird das Zeitintervall  $\Delta t$  immer kleiner gewählt, erhält man als Ergebnis einen Geschwindigkeitswert, der dem momentanen Bewegungszustand immer besser entspricht. Unter der Voraussetzung, dass die Abhängigkeit der Wegstrecke  $s$  von der Zeit  $t$  mit einer stetigen Funktion  $s(t)$  beschrieben werden kann,



**Bild 2.4** a) Weg-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung, b) Weg-Zeit-Diagramm einer ungleichförmigen Bewegung

führt der Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  zu einem Grenzwert, der als *Differentialquotient* bezeichnet wird und gleich der momentanen skalaren Geschwindigkeit ist:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.7)$$

Mathematisch entspricht diese Definition der momentanen Geschwindigkeit der ersten Ableitung der Funktion  $s(t)$  nach der Zeit  $t$ . Sie wird in Symbolschreibweise mithilfe des Differentialoperators  $d/dt$  oder als Punkt über dem  $s$  dargestellt.

Gemessen werden allerdings stets *Differenzenquotienten*, da der geforderte Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  messtechnisch nicht vollzogen werden kann. Selbst noch so präzise Messvorrichtungen ermöglichen nur endlich große Zeitintervalle  $\Delta t > 0$  und endlich große Wegstrecken, sodass der Differentialquotient nur angenähert, wenn auch in einer für die Praxis im allgemeinen ausreichenden Genauigkeit, bestimmt werden kann.

Ein besonders einfacher Fall einer Bewegung ist die bereits erwähnte gleichförmige Bewegung. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden, d. h.  $ds/dt = v = \text{konstant}$ . Dabei spielt es keine Rolle, ob die Bewegung geradlinig (entlang einer Gerade) oder krummlinig (entlang einer Kurve) erfolgt. Das zugehörige *Weg-Zeit-Gesetz* ist linear:

$$s = vt \quad (2.8)$$

Nur für diesen sehr einfachen Fall sind die mittlere und die momentane Geschwindigkeit identisch. Im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (Bild 2.5) einer gleichförmigen Bewegung entspricht die Fläche des sich ergebenden Rechtecks dem zurückgelegten Weg  $s$ .



**Bild 2.5** Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

Während für einige praktische Anwendungen die bisherige Definition der Geschwindigkeit als skalare Größe ausreicht, ist im Allgemeinen jedoch der Begriff Geschwindigkeit durch Einbeziehung des Richtungscharakters der Bewegung zu erweitern. Der Grund hierfür liegt darin, dass durch Wechselwirkungen zwischen Körpern nicht nur Änderungen in der Maßzahl der Geschwindigkeit, sondern auch Richtungsänderungen in der Bewegung hervorgerufen werden. So kann z. B. die Bewegung eines Körpers gleichförmig, d. h. mit konstantem Ge-

schwindigkeitsbetrag  $v$ , erfolgen, trotzdem aber eine Kraftwirkung auf den Körper vorhanden sein, die in diesem Fall aber nur eine Richtungsänderung zur Folge hat (Bewegung eines Körpers auf einer stabilen Kreisbahn). Mathematisch geschieht die Erweiterung der Größe Geschwindigkeit durch Festlegung als vektorielle Größe. Dabei nutzt man den Umstand, dass die Bewegung beispielsweise eines Massepunktes als das Zusammenwirken dreier unabhängiger geradliniger Bewegungen entlang der Koordinatenachsen aufgefasst werden kann. So sind die einzelnen Raumkoordinaten ebenfalls Weg-Zeit-Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$ , bei denen aber anders als bei dem zurückgelegten Gesamtweg  $s(t)$ , der stets nur positive Werte annimmt, auch negative Werte auftreten können.



### Beispiele

1. Welche Strecke legt ein Kraftwagen mit der Geschwindigkeit von  $v = 80 \text{ km/h}$  in  $15 \text{ s}$  zurück? Mit der Formel für die gleichförmige Bewegung gilt:

$$s = vt = \frac{80 \text{ m} \cdot 15 \text{ s}}{3,6 \text{ s}} = 333 \text{ m}$$

2. Welche mittlere Geschwindigkeit hat ein Zug, der  $30 \text{ min}$  lang mit einer Geschwindigkeit von  $40 \text{ km/h}$  und  $90 \text{ min}$  mit  $60 \text{ km/h}$  fährt? Die gesamte Wegstrecke  $s$  ergibt sich aus  $s = s_1 + s_2$ , wobei für die beiden Teilstrecken gilt:  $s_1 = v_1 t_1$  und  $s_2 = v_2 t_2$ . Analog folgt für die gesamte Zeitdauer  $t = t_1 + t_2$ . Für die mittlere Geschwindigkeit  $v_m$  gilt dann:

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{40 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} + 60 \text{ km/h} \cdot 1,5 \text{ h}}{0,5 \text{ h} + 1,5 \text{ h}} = 55 \text{ km/h}$$

3. Ein Fahrzeug wird aus dem Stand so beschleunigt, dass die Wegstrecke mit der dritten Potenz der Zeit wächst. Wie groß ist die momentane Geschwindigkeit nach  $20 \text{ s}$ , wenn der zurückgelegte Weg  $400 \text{ m}$  beträgt? Das Weg-Zeit-Gesetz für diese Bewegung ist  $s = \text{Konstante} \cdot t^3$ . Für die Konstante gilt:

$$\frac{s}{t^3} = \frac{400 \text{ m}}{20^3 \text{ s}^3} = 50 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

Für die momentane Geschwindigkeit folgt daraus:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 \cdot \text{Konstante} = 3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot 400 \text{ s}^2 = 60 \text{ m/s}$$

Anmerkung: In diesen drei Beispielen ist der Weg-Zeit-Verlauf vorgegeben und die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit die gesuchte Größe. Häufig aber liegt eine Dokumentation des  $v(t)$ -Verlaufs vor, und die Aufgabe besteht darin, die entsprechende  $s(t)$ -Funktion zu rekonstruieren. Mathematisch handelt es sich dabei um die Umkehrung der Differentiation, also die Integration. Ohne auf Details einzugehen, sei erwähnt, dass die Integration der  $v(t)$ -Funktion geometrisch einer Flächenbestimmung entspricht. Besonders einfach lässt sich dies bei der gleichförmigen Bewegung erkennen. Betrachtet man den zugehörigen  $v(t)$ -Verlauf, so lässt sich daraus direkt ablesen, dass die Fläche des Rechtecks, das aus  $v$  und  $t$  gebildet wird, dem zurückgelegten Weg  $s = vt$  entspricht.

Entsprechend der zuvor beschriebenen Vorgehensweise bei der eindimensionalen Bewegung lassen sich im dreidimensionalen Fall für die drei Teilbewegungen momentane Geschwindigkeiten definieren, die die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors darstellen:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.9)$$

Multipliziert man diese Geschwindigkeiten mit den drei kartesischen Basisvektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  ergibt sich folgender Vektor für die momentane vektorielle Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (2.10)$$

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}$  ergibt sich wie der Betrag des Ortsvektors (Gl. (2.1)) mit dem Satz der Pythagoras:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (2.11)$$

Der Betrag und die Richtung des Geschwindigkeitsvektors haben eine anschauliche Bedeutung: Der Betrag stimmt mit der Definition der momentanen skalaren Geschwindigkeit (Gl. (2.7)) überein, die Richtung von  $\vec{v}$  entspricht der Bewegungsrichtung des Massepunktes bzw. des Körpers am momentanen Aufenthaltsort, d. h. der Richtung der Tangente an die Bahnkurve. Dies ist in Bild 2.6 veranschaulicht. Die Differenz der beiden Ortsvektoren  $\vec{r}_2$  und  $\vec{r}_1$  ergibt einen Abstandsvektor  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  zwischen den beiden Positionen, dessen Betrag  $\Delta r$  näherungsweise dem Streckenabschnitt  $\Delta s$  auf der Bahnkurve entspricht:  $\Delta r \approx \Delta s$ . Die Richtung von  $\Delta\vec{r}$  folgt, ebenfalls näherungsweise, der Krümmung der Bahnkurve. Beide Aussagen werden umso präziser, je kleiner das Zeitintervall  $\Delta t$  gewählt wird. Die Koordinaten des Vektors  $\Delta\vec{r}$  sind  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$ , d. h. die durch Projektion auf die Koordinatenachsen erhaltenen Achsenabschnitte. Bildet man die Differenzenquotienten  $\Delta x/\Delta t$ ,  $\Delta y/\Delta t$  und  $\Delta z/\Delta t$  und führt den Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  durch, so erhält man wieder die Geschwindigkeiten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  als Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}$ .

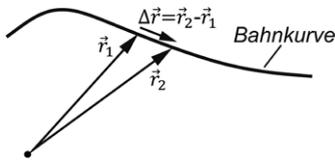


Bild 2.6

Abstandsvektor für zwei Positionen auf einer Bahnkurve

Der Vektorcharakter von  $\vec{v}$  ermöglicht auch eine vereinfachte mathematische Behandlung von Bewegungen, die sich in voneinander unabhängige Teilbewegungen zerlegen lassen, z. B. die Bewegung eines schwimmenden Körpers in einem strömenden Gewässer. Sei  $\vec{v}_1$  die Geschwindigkeit eines Körpers in einem Fluss, d. h. seine Eigengeschwindigkeit relativ zur Strömung, und  $\vec{v}_2$  die Geschwindigkeit des strömenden Wassers relativ zu einem ruhenden Beobachter am Ufer, so ist die resultierende Geschwindigkeit des Körpers für den Beobachter am Ufer gleich der Vektorsumme aus beiden Anteilen (Bild 2.7).

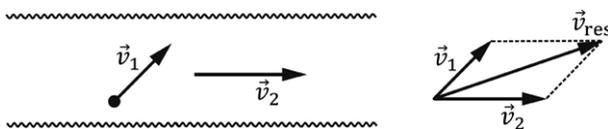


Bild 2.7

Addition von Geschwindigkeiten in einer Strömung

Im Rahmen der klassischen Mechanik gibt es bei der Addition von Geschwindigkeiten keine obere Geschwindigkeitsgrenze (*Galilei-Transformation*, G. Galilei, 1564–1642). In dem berühmten Michelson-Morley-Experiment von 1881 bzw. 1887 (A. A. Michelson, 1852–1931, Nobelpreis 1907; E. W. Morley, 1838–1923) und in einer Reihe von folgenden Experimenten wurde jedoch nachgewiesen, dass die Lichtgeschwindigkeit die größte Geschwindigkeit darstellt. Dies ist die Aussage der *Speziellen Relativitätstheorie* von Einstein und wird darin durch die *Lorentz-Transformationen* (H. A. Lorentz, 1853–1928) für die Geschwindigkeitskoordinaten berücksichtigt (Kapitel 10). Solange die Teilgeschwindigkeiten sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, genügen die Betrachtungen und Rechenregeln der Galilei-Transformation.



### Beispiele

1. Ein Pkw überholt mit der Geschwindigkeit  $v_1 = 72 \text{ km/h}$  einen zweiten, dessen Geschwindigkeit  $v_2 = 54 \text{ km/h}$  beträgt. Der Abstand zwischen beiden Fahrzeugen nach dem Überholvorgang beträgt 120 m. Welche Strecke hat der überholende Pkw während des Vorgangs zurückgelegt?

Der überholende Pkw legt den Abstand von 120 m mit der Relativgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}} = v_1 - v_2 = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$  zurück und benötigt dazu die Zeit  $t = s_{\text{rel}}/v_{\text{rel}} = 120 \text{ m}/(5 \text{ m/s}) = 24 \text{ s}$ . In dieser Zeit wird von ihm die Strecke  $s = v_1 \cdot t = 20 \text{ m/s} \cdot 24 \text{ s} = 480 \text{ m}$  durchfahren.

2. Eine Motorfähre überquert mit der Eigengeschwindigkeit  $3 \text{ m/s}$  einen Fluss senkrecht zur Strömungsrichtung. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt  $3,8 \text{ m/s}$ . Unter welchem Winkel  $\alpha$  zum Ufer wird die Fähre abgetrieben und wie groß ist ihre resultierende Geschwindigkeit  $v_{\text{res}}$ ?

Die Geschwindigkeitskomponenten  $v_1$  und  $v_2$  stehen senkrecht aufeinander.

Es gilt daher:  $\tan(\alpha) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3,8 \text{ m/s}}{3 \text{ m/s}} \approx 1,27$  und  $\alpha = \arctan(1,27) \approx 51,7^\circ$  und

$$v_{\text{res}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 4,8 \text{ m/s}.$$

Zur Charakterisierung der Spurtfreudigkeit von Fahrzeugen wird häufig die Zeit genannt, die das Fahrzeug bis zum Erreichen einer bestimmten Endgeschwindigkeit aus dem Stand heraus benötigt. Anstelle dieser Zeitangabe, die zu Vergleichszwecken natürlich nur dann sinnvoll ist, wenn immer dieselbe Endgeschwindigkeit vorausgesetzt wird, lässt sich auch der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  und dem dafür benötigten Zeitintervall  $\Delta t$  bilden:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.12)$$

Aus dieser mittleren (skalaren) Beschleunigung mit der SI-Einheit  $\text{m/s}^2$  können jedoch keine Rückschlüsse auf den tatsächlichen Verlauf der Geschwindigkeitsänderung gezogen werden. Sie könnte z. B. auch zu Null werden, wenn die Messdauer des Vorgangs sowohl den Beschleunigungs- als auch den Abbremsvorgang umfassen würde.

Soll zu einem beliebigen Zeitpunkt des Beschleunigungsvorgangs die Geschwindigkeitsänderung quantifiziert werden, so ist analog zur Definition der momentanen Geschwindigkeit bei dem Differenzenquotienten in Gl. (2.12) eine Grenzwertbetrachtung durchzuführen:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (2.13)$$

Ändert sich beispielsweise der Betrag der Geschwindigkeit linear mit der Zeit, so ist der Wert von  $a$  konstant, mittlere und momentane Beschleunigung sind dann identisch. Findet die Bewegung außerdem auf einer geraden Bahn statt, so wird dies als eine *gleichmäßig beschleunigte Bewegung* bezeichnet. Die mittlere und die momentane Beschleunigung  $a_m$  bzw.  $a$  sind vorzeichenbehaftet: Bei Zunahme der Geschwindigkeit mit der Zeit ist  $a$  positiv, bei Abnahme dagegen negativ. Letzteren Fall nennt man auch eine verzögerte Bewegung bzw. umgangssprachlich Abbremsung und dementsprechend die Größe  $a$  auch Verzögerung bzw. Bremsbeschleunigung.

Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung lässt sich aufgrund der linearen Abhängigkeit von der Zeit als Geradengleichung darstellen:

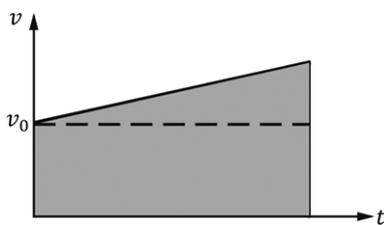
$$v = v_0 + at \quad (2.14)$$

Der Achsenabschnitt entspricht einer zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorhandenen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  (auch als Startgeschwindigkeit bezeichnet). Die Steigung entspricht der Beschleunigung  $a$ , wobei das Vorzeichen von der Art der Beschleunigung abhängig ist: Es ist positiv bei beschleunigter und negativ bei verzögerter (abgebremster) Bewegung.

Das entsprechende Weg-Zeit-Gesetz erhält man wieder durch eine Integration der  $v$ - $t$ -Kurve, d. h. durch eine Flächenberechnung. Die Fläche im Diagramm hat die Gestalt eines Trapezes und lässt sich in ein Rechteck mit der Fläche  $v_0 t$  und ein darüberliegendes Dreieck mit der Fläche  $(v - v_0)t/2$  zerlegen (Bild 2.8). Damit lautet das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung (Bild 2.9):

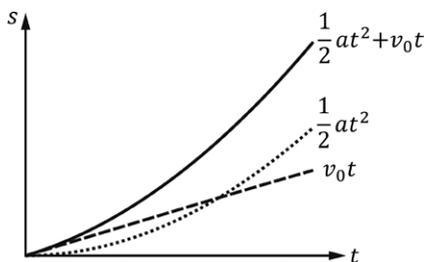
$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.15)$$

Auch hier gilt wieder das negative Vorzeichen bei verzögerter (abgebremster) Bewegung, wobei in diesem Fall die Gleichung nur gültig für  $v \geq 0$  ist, d. h. bis zum Stillstand des Körpers.



**Bild 2.8**

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung



**Bild 2.9**

Weg-Zeit-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$

Sowohl für das Weg-Zeit- als auch das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz sind Umformungen möglich, die je nach Problemstellung einfacher anzuwenden sind. Löst man Gl. (2.14) nach der Beschleunigung  $a$  auf, so erhält man  $a = (v - v_0)/t$ . Eingesetzt in Gl. (2.15) ergibt dies:

$$s = \frac{1}{2}(v + v_0)t \quad (2.16)$$



### Beispiele

1. Ein Fahrzeug benötigt 10 s, um aus der Ruhelage auf eine Endgeschwindigkeit von 100 km/h zu beschleunigen. Wie groß ist die mittlere Beschleunigung  $a_m$ ?

Die Geschwindigkeitsänderung beträgt:

$$\Delta v = 27,8 \text{ m/s} \Rightarrow a_m = \frac{27,8 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 2,8 \text{ m/s}^2$$

2. Beim Abbremsen eines Fahrzeugs mit einer Verzögerung von  $-2,5 \text{ m/s}^2$  wird die ursprüngliche Geschwindigkeit auf 27 km/h verringert. Der Bremsweg beträgt 80 m. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit?

Es gilt  $s = \frac{1}{2} \frac{(v^2 - v_0^2)}{a}$  und damit

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2sa} = \sqrt{27^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + \frac{400 \text{ m}^2}{\text{s}^2}} = 21,5 \text{ m/s}$$

Die bisherige, ausschließlich skalare Formulierung der Beschleunigung ist jedoch für viele Probleme und Sachverhalte ungenügend und muss durch die vektorielle Betrachtungsweise ersetzt werden. Dementsprechend beschreibt die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers nach Betrag und/oder Richtung.



### Merke

Die Bewegung eines Körpers heißt beschleunigt, wenn sich seine Geschwindigkeit nach Betrag und/oder Richtung ändert.

Die Vorgehensweise bei der erweiterten Definition der Messgröße Beschleunigung für eine beliebige Bewegung ist analog der Vorgehensweise bei der Festlegung des Geschwindigkeitsvektors. Ansatzpunkt ist wieder die Rückführung der räumlichen Bewegung auf drei unabhängige geradlinige Bewegungen. So wie die Koordinaten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  als Ableitungen der entsprechenden Weg-Zeit-Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  eingeführt wurden, so ergeben sich die Komponenten des Beschleunigungsvektors  $\vec{a}$  als Ableitungen der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}$ :

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \quad (2.17)$$

Für den Betrag von  $\vec{a}$  gilt in kartesischen Koordinaten analog zu  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.18)$$

In Bild 2.10 ist schematisch die Wirkung der Beschleunigung auf die Geschwindigkeit eines Massepunktes zwischen zwei benachbarten Positionen auf der Bahnkurve wiedergegeben.  $\Delta\vec{v}$  ist die Differenz zwischen den beiden Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}_2$  und  $\vec{v}_1$ . Aus der Darstellung geht hervor, dass die Länge von  $\Delta\vec{v}$  sowohl von der Betrags- als auch von der Richtungsänderung der Geschwindigkeit abhängig ist. Die Projektion von  $\Delta\vec{v}$  auf die Koordinatenachsen liefert die Abschnitte  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$  und  $\Delta v_z$ . Bildet man die Differenzenquotienten  $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ ,  $\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$  und  $\frac{\Delta v_z}{\Delta t}$  und führt anschließend den Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  durch, so erhält man die kartesischen Beschleunigungskomponenten  $a_x$ ,  $a_y$  und  $a_z$ . Anstelle der Zerlegung in diese drei Beschleunigungskomponenten wählt man häufig eine Komponentendarstellung für  $\vec{a}$  mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  als Bezugsrichtung (Bild 2.11):

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (2.19)$$

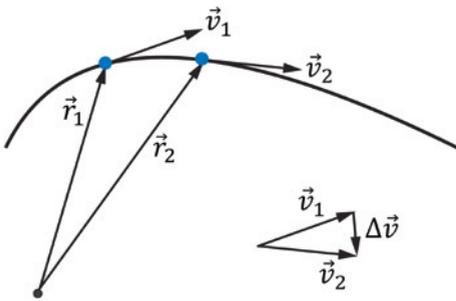


Bild 2.10

Geschwindigkeitsänderung bei der Bewegung auf einer Bahnkurve



Bild 2.11

Zerlegung der Beschleunigung in eine Tangential- und eine Normalkomponente

Die beiden Komponenten werden als *Tangentialbeschleunigung*  $\vec{a}_t$  und *Normalbeschleunigung*  $\vec{a}_n$  bezeichnet. Die Tangentialbeschleunigung ist parallel zur Richtung von  $\vec{v}$ , die Normalbeschleunigung senkrecht dazu orientiert. Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass die Tangentialbeschleunigung nur von der Betragsänderung und die Normalbeschleunigung nur von der Richtungsänderung der Geschwindigkeit abhängig ist. Für den Betrag von  $\vec{a}_t$  gilt damit:

$$|\vec{a}_t| = a_t = \left| \frac{dv}{dt} \right| \quad (2.20)$$

Zur Begründung betrachte man wieder das Vektordreieck in Bild 2.10 aus  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  und  $\Delta\vec{v}$ . Die Projektion von  $\Delta v_x$  in die Richtung von  $\vec{v}_1$  bestimmt die Tangentialkomponente  $\vec{a}_t$ . Ihre Länge entspricht der Betragsdifferenz  $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$  unter der Voraussetzung, dass die beiden Punkte wirklich benachbart sind. Die senkrechte Komponente, die für  $\vec{a}_n$  maßgeblich ist, wird ausschließlich durch den Richtungsunterschied zwischen den beiden Geschwindigkeitsvektoren, d. h. durch die Krümmung der Bahnkurve bestimmt. Die Berechnung von  $\vec{a}_n$  ist eine Aufgabe der Differentialgeometrie. Für den speziellen Fall einer Kreisbewegung wird dies in Abschnitt 2.1.6 durchgeführt.

Bei geradliniger Bahn verschwindet die Normalbeschleunigung  $\vec{a}_n$ . In diesem Fall ist die Gesamtbeschleunigung durch  $\vec{a}_t$  gegeben. Wenn außerdem die Ableitung  $dv/dt$  positiv, d. h. die Geschwindigkeit zunimmt, so sind  $\vec{v}$  und  $\vec{a}_t$  gleichgerichtet (parallel zueinander). Bei negativer Ableitung, entsprechend einer Abnahme der Geschwindigkeit, sind  $\vec{a}_t$  und  $\vec{v}$  entgegengesetzt gerichtet (antiparallel zueinander). Dieser Bewegungstyp entspricht der bereits oben erwähnten Verzögerung/Abbremsung.

Wie sich leicht erkennen lässt, stimmt die in Gl. (2.13) definierte momentane skalare Beschleunigung, abgesehen von dem negativen Vorzeichen bei verzögerter Bewegung, mit dem Betrag der Tangentialbeschleunigung  $\vec{a}_t$  überein. Das Vorzeichen ergibt sich aus der Richtung von  $\vec{a}_t$ , da der Betrag immer positiv ist. Solange die Bewegung geradlinig erfolgt oder die Normalbeschleunigung  $\vec{a}_n$  nicht berücksichtigt werden muss, genügt die skalare Beschleunigung zur Beschreibung der Bewegungsänderung.

### 2.1.3 Freier Fall

Die Beobachtung des Verhaltens eines Körpers im Schwerfeld der Erde zählt zu den elementarsten Erfahrungen, da sie mit einfachen Mitteln überall experimentell erworben werden kann. Hinsichtlich des Bewegungsablaufs lassen sich zwei Arten von Bewegungen unterscheiden:

- Die geradlinige eindimensionale Bewegung, bei der eine Koordinate ausreicht, um den zeitlichen Ablauf zu dokumentieren. Beispiele dafür sind: der freie Fall und der senkrechte Wurf (Abschnitt 2.1.4).
- Die zweidimensionale Bewegung in einer Ebene, bei der zwei Koordinaten benötigt werden. Beispiele dafür sind der horizontale und der schräge (schiefe) Wurf (Abschnitt 2.1.5).

Fällt ein Körper aus geringem Abstand von der Erdoberfläche aus der Ruhelage herunter (also zur Erdoberfläche zurück), so liegt eine spezielle gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor, die als der *freie Fall* bezeichnet wird. G. Galilei (1564–1642) fand Anfang des 17. Jahrhunderts durch Experimente heraus, dass die Beschleunigung unabhängig von Material, Masse und Form des Körpers ist. Dies ist die wesentliche Aussage des *schwachen Äquivalenzprinzips* (Abschnitt 10.1.3). Nur aufgrund des Luftwiderstandes fallen leichte Körper langsamer als schwerere Körper. Bei zunehmender Fallgeschwindigkeit und Fallzeit verringert der Luftwiderstand die weitere Beschleunigung, bis asymptotisch eine konstante Grenzggeschwindigkeit des fallenden Körpers erreicht wird. Diese Grenzggeschwindigkeit hängt von der Masse und der Form des fallenden Körpers ab und bestimmt sich aus dem Verhältnis von Masse zu Querschnittsfläche. Bei gleichem Material fallen daher beispielsweise größere Kugeln mit einer größeren Geschwindigkeit und damit schneller zur Erdoberfläche als kleinere Kugeln.

Die konstante Beschleunigung beim freien Fall wird als *Fallbeschleunigung* (oder auch als *Schwerebeschleunigung*)  $g$  bezeichnet und beträgt als über die Erdoberfläche gemittelte Größe:

$$g_m = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Für einfache technische Berechnungen genügt es meistens, diesen gemittelten Wert zu benutzen. Da die Erde keine homogene Kugel, sondern insbesondere an den Polen abgeflacht ist, hat die Fallbeschleunigung an jedem Ort der Erdoberfläche einen etwas anderen Wert. So beträgt die Fallbeschleunigung an den beiden Polen  $9,832 \text{ m/s}^2$  und am Äquator  $9,780 \text{ m/s}^2$ .

Damit ist die Fallbeschleunigung an den Polen um ca. 0,5 % größer als am Äquator. Innerhalb Deutschlands beträgt die maximale Abweichung von der mittleren Fallbeschleunigung  $\Delta g_m = \pm 0,004 \text{ m/s}^2$ . Als *Normfallbeschleunigung*  $g_n$  wurde im Jahre 1901 für die geografische Breite von  $45^\circ$  und Meereshöhe der Wert

$$g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

vereinbart. In der Nähe der Erdoberfläche nimmt der Wert der Fallbeschleunigung um etwa  $3,1 \mu\text{m/s}^2$  pro gestiegenem Meter ab. Aufgrund des Schichtenaufbaus der Erde mit ortsabhängiger (nicht konstanter) Massendichte ist der mathematische Zusammenhang zwischen Fallbeschleunigung und Tiefe im Erdinneren nichtlinear. Im Erdkern wird die Fallbeschleunigung mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt zunächst annähernd linear größer. An der Kern-Mantel-Grenze, in einem Abstand von ca. 2900 km vom Erdmittelpunkt, hat die Fallbeschleunigung ein Maximum von ca.  $10,68 \text{ m/s}^2$ , da der überwiegend metallische Erdkern eine fast doppelt so große Massendichte aufweist wie der Erdmantel und die Erdkruste. Von der Kern-Mantel-Grenze bis zu einem Abstand von ca. 4900 km vom Erdmittelpunkt sinkt die Fallbeschleunigung langsam bis auf einen Wert von  $9,93 \text{ m/s}^2$ , hat bei einem Abstand von 5700 km vom Erdmittelpunkt ein zweites Maximum von ca.  $10,01 \text{ m/s}^2$  und sinkt dann monoton bis auf einen Wert von ca.  $9,82 \text{ m/s}^2$  an der Erdoberfläche. Mit der *Gravitationskonstante*  $G = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ , der Erdmasse  $M_{\text{Erde}} = 5,97220 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  und dem mittleren Erdradius  $R_{\text{Erde}} = 6371,00079 \text{ km}$  ergibt sich ein Wert von  $g = G M_{\text{Erde}} / R_{\text{Erde}}^2 = 9,8203 \text{ m/s}^2$ . Der freie Fall als gleichmäßig beschleunigte Bewegung wird für eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$  durch folgende drei Größen quantifiziert.

Fallhöhe bzw. Abwurfhöhe:

$$h = \frac{g}{2} t^2 \quad (2.21)$$

Fallzeit bis zum Auftreffen auf der Erdoberfläche:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Endgeschwindigkeit bei Auftreffen auf der Erdoberfläche:

$$v = \sqrt{2gh}$$



### Beispiele

1. In der ersten Sekunde fällt ein Körper um  $h = \frac{9,81 \text{ m} \cdot 1 \text{ s}^2}{\text{s}^2 \cdot 2} = 4,9 \text{ m}$ . Am Ende dieser Strecke beträgt seine Geschwindigkeit

$$v = gt = \frac{9,81 \text{ m} \cdot 1 \text{ s}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ m/s}$$

2. Mit welcher Endgeschwindigkeit schlägt ein Gegenstand auf, der in einen 300 m tiefen Schacht hineinfällt?

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m}^2/\text{s} \cdot 300 \text{ m}} = 76,6 \text{ m/s}$$

Infolge des Luftwiderstandes kann dieser Wert jedoch nicht erreicht werden. ■

### 2.1.4 Senkrechter Wurf

Wird ein Körper senkrecht nach unten geworfen, so ist die dem Körper erteilte Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zusätzlich zur Fallbewegung zu berücksichtigen. Wiederum können die Gleichungen für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung angewendet werden. Es ist lediglich zu beachten, dass wie beim freien Fall die zurückgelegte Strecke vom Startpunkt aus, d. h. von oben nach unten (Erdoberfläche), gezählt und damit auch die Beschleunigung  $g$  mit einem positiven Zahlenwert eingesetzt wird. Beim senkrechten Wurf nach oben ist dagegen der Startpunkt unten (auf der Erdoberfläche), sodass die Fallbeschleunigung  $g$  als Verzögerung mit einem negativen Zahlenwert einzusetzen ist. Es ergeben sich folgende Relationen.

Wurfgeschwindigkeit:

$$v = v_0 \pm g t \quad (2.22)$$

Wurfhöhe:

$$h = v_0 t \pm \frac{g}{2} t^2$$

Endgeschwindigkeit:

$$v_e = \sqrt{v_0^2 \pm 2gh}$$

Das Minuszeichen gilt jeweils beim senkrechten Wurf nach oben und das Pluszeichen beim senkrechten Wurf nach unten. Dementsprechend ist die Wurfhöhe beim senkrechten Wurf nach oben gleich der maximal erreichbaren Höhe (Steighöhe):

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.23)$$

Beim senkrechten Wurf nach unten ist die Wurfhöhe gleich der Abwurfhöhe. Die Endgeschwindigkeit ist beim senkrechten Wurf nach oben am höchsten Punkt (Umkehrpunkt) gleich null und beim senkrechten Wurf nach unten gleich der Geschwindigkeit beim Auftreffen auf die Erdoberfläche.

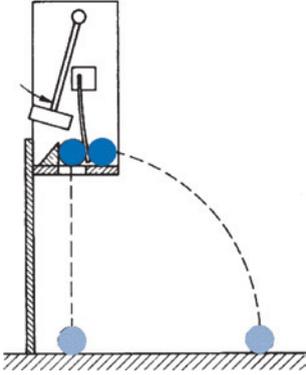


#### Merke

Um die maximale Wurfhöhe zu erreichen, muss ein Körper mit derselben Geschwindigkeit noch oben geworfen werden, mit der er beim freien Fall aus dieser Höhe unten ankommt.

### 2.1.5 Waagerechter und schräger Wurf

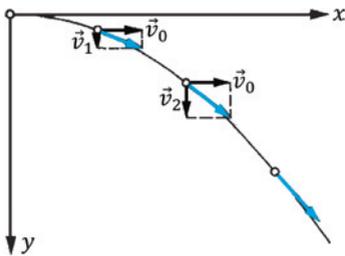
Die Bewegung eines in horizontaler Richtung (waagrecht) abgeworfenen Körpers lässt sich in zwei Bestandteile aufteilen. Der eine Bestandteil ist ihm durch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  aufgeprägt, mit der er abgeworfen wird. Der zweite Bestandteil ergibt sich aus der Fallbewegung im Schwerfeld der Erde. Die resultierende Bewegung ergibt sich aus dem Unabhängigkeitsprinzip so, als ob beide Bewegungen einzeln stattfinden würden. Dies lässt sich mithilfe der in Bild 2.12 skizzierten Vorrichtung veranschaulichen.

**Bild 2.12**

Die rechte Kugel wird beim Anschlag des Hammers waagrecht abgeworfen, die linke fällt (hier durch die Blattfeder noch festgeklemmt) durch ein Loch nach unten. Beide Kugeln erreichen den Boden gleichzeitig.

Während die eine Kugel losgelassen wird und frei herabfällt, wird die andere Kugel im gleichen Augenblick waagrecht abgeworfen. Beide Kugeln erreichen bei Vernachlässigung der Luftreibung zeitgleich den Erdboden, obgleich die von beiden Kugeln zurückgelegten Wege unterschiedlich lang sind. Zur quantitativen Beschreibung der Bahnkurve eignet sich das in Bild 2.13 gezeichnete zweidimensionale Koordinatensystem, wobei die positive  $y$ -Achse in senkrechter Fallrichtung zeigt und der Abwurfort im Koordinatenursprung liegt. Für die Zeitabhängigkeit der beiden kartesischen Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$  ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$x(t) = v_0 t \quad \text{und} \quad y(t) = \frac{g t^2}{2} \quad (2.24)$$

**Bild 2.13**

Wurfpabel mit Geschwindigkeitsvektoren

Durch mathematische Umformung ergibt sich aus Gl. (2.24) die Bahngleichung des waagerechten Wurfs in der Form  $y = y(x)$  mit der Anfangs- bzw. Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$ :

$$y(x) = \frac{g x^2}{2 v_0^2} \quad (2.25)$$

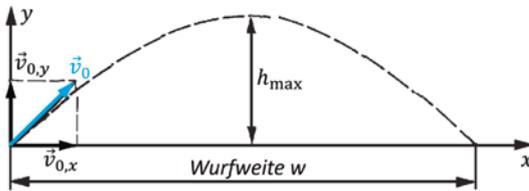
Da  $g$  und  $v_0$  Konstanten sind, stellt diese Gleichung eine Parabel dar, die als *Wurfpabel* bezeichnet wird.

Werden für einige Bahnpunkte die Geschwindigkeitsvektoren eingetragen, wie dies in Bild 2.13 erfolgt ist, so zeigen sie in jedem Augenblick die momentane Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung an. Die Krümmung der Wurfpabel kommt dadurch zustande, dass zwar die Horizontalkomponente  $v_0$  konstant ist, die Vertikalkomponente jedoch immer größer wird. Somit ändert sich die Richtung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors.

Wären beide Komponenten konstant, so bliebe auch die Richtung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors konstant.

Beim schrägen (schiefen) Wurf nach oben beschreibt der Körper ebenfalls eine Wurfparabel. Bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes und der daraus resultierenden Reibung, ist diese Parabel symmetrisch, wobei der Scheitelpunkt der Parabel der höchste Punkt ist, den der Körper erreicht. Die Bahngleichung lässt sich in ähnlicher Weise wie beim zuvor behandelten waagerechten Wurf aufstellen. Zur Berechnung wird der gegen die  $x$ -Achse um den Abwurfwinkel  $\alpha$  geneigte Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  in eine horizontale und eine vertikale Komponente  $v_{0x}$  und  $v_{0y}$  zerlegt (Bild 2.14). Dabei gilt  $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$  und  $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$ . Diese beiden Komponenten sind wie der Betrag und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  während des gesamten Wurfes konstant und voneinander unabhängig. Damit ergibt sich für die maximale Wurfhöhe  $h_{\max}$  im Scheitelpunkt der Parabel:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \quad (2.26)$$



**Bild 2.14**  
Schräger (schiefer) Wurf nach oben

Die Wurfdauer ist die Gesamtzeit des schrägen Wurfes vom Augenblick des Abwurfs bis zum Augenblick des Auftreffens des Körpers auf dem Erdboden und setzt sich aus den beiden Zeitabschnitten des Anstieges und des Wiederherabfallens zusammen. Aufgrund der Symmetrie der Wurfparabel ist die Wurfdauer  $T$  doppelt so groß wie die Fallzeit beim senkrechten freien Fall aus der Höhe  $h_{\max}$ :

$$T = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \quad (2.27)$$

Während des Wurfes legt der Körper mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$  die horizontal gerichtete Strecke  $v_0 t \cos(\alpha)$  zurück. Damit ergibt sich durch Einsetzen der Wurfdauer  $T$  aus Gl. (2.27) die Wurfweite  $w$ , also der Abstand zwischen Abwurfort und Auftreffort in  $x$ -Richtung, beim schrägen Wurf:

$$w = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (2.28)$$

Die Wurfweite ist somit für einen Abwurfwinkel von  $\alpha = 45^\circ$  maximal mit einem Wert von  $w_{\max} = v_0^2/g$ . Eine kleinere Wurfweite kann also entweder durch einen flacheren ( $\alpha < 45^\circ$ ) oder steileren ( $\alpha > 45^\circ$ ) Abwurfwinkel erzielt werden. Erfolgt der schräge Abwurf von einer endlichen Höhe  $h_0 > 0$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  gilt:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + h_0 \quad (2.29)$$

$$T = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh_0}}{g}$$

$$w = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} + \frac{v_0 \cos(\alpha)}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh_0}$$

Für  $h_0 = 0$  ergeben sich wieder Gl. (2.26), Gl. (2.27) und Gl. (2.28). Bei der Ballistik, der „Lehre von den geworfenen Körpern“, wird zur genaueren Bestimmung von Abwurfwinkel, Wurfweite und Wurfdauer die Reibung des Körpers in dem jeweiligen Medium berücksichtigt.

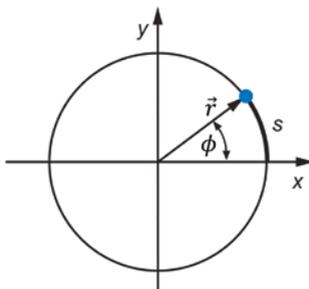
### 2.1.6 Kreisbewegung

Die Kreisbewegung ist neben der geradlinigen Bewegung, dem waagerechten und dem schrägen Wurf ein weiterer grundlegender Bewegungstyp. Die Mehrzahl der Planeten unseres Sonnensystems bewegen sich annähernd auf Kreisbahnen um die Sonne, viele Fortbewegungsmittel beruhen auf der Rotation von Rädern und rotierende elektrische Maschinen wie Motoren und Generatoren sind allgegenwärtig. Bei der Kreisbewegung läuft ein Massepunkt oder ein Körper auf dem Umfang eines Kreises um dessen Mittelpunkt, sodass der Abstand des Massepunktes bzw. des Körpers zum Mittelpunkt, also der Kreisradius, konstant ist. Ändert sich der Abstand zum Mittelpunkt kontinuierlich, ergibt sich eine *Spiralbahn*, wenn die Bewegung in einer Ebene erfolgt. Andernfalls ergibt sich eine *Schraubenbahn*. In der Technik ist die Kreisbewegung von großer Bedeutung, da sich jeder Punkt eines um eine Achse rotierenden Körpers auf einer Kreisbahn bewegt. Im Gegensatz zur geradlinig gleichförmigen Bewegung ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung nur der Betrag der Geschwindigkeit konstant, während sich die Richtung der Geschwindigkeit permanent ändert. Dementsprechend ist der Geschwindigkeitsvektor bei der gleichförmigen Kreisbewegung nicht konstant.

Für die Beschreibung der Kreisbewegung in einer Ebene ist die Verwendung der kartesischen Koordinaten weniger zweckmäßig. Besser geeignet sind die *ebenen Polarkoordinaten*, die zu den orthogonalen krummlinigen Koordinaten gehören.

Legt man den Ursprung des Bezugssystems in den Kreismittelpunkt und den Kreis in die von den Koordinatenachsen  $x$  und  $y$  aufgespannte Ebene (Bild 2.15), ergibt sich folgende geometrische und analytische Darstellung der Bewegung mit den kartesischen Koordinaten  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$ :

$$x^2 + y^2 = r^2 = \text{konstant} \quad (2.30)$$



**Bild 2.15**

Bewegung eines Massepunktes auf einer Kreisbahn in der  $xy$ -Ebene

Der Betrag des Ortsvektors  $\vec{r}$ , der auch *Radiusvektor* genannt wird, ist zeitlich konstant. Anstelle von  $x$  und  $y$  lässt sich die Kreisbewegung auch mit dem Radius  $r$  sowie dem Drehwinkel  $\phi$ , der üblicherweise als *Azimutwinkel* bezeichnet wird, beschreiben. Beiden Größen zusammen bilden die ebenen Polarkoordinaten. Der Azimutwinkel  $\phi$  wird dabei auf die positive  $x$ -Achse bezogen, wodurch sich folgende Wertebereiche ergeben:

- I. Quadrant:  $0^\circ < \phi < 90^\circ$ ,
- II. Quadrant:  $90^\circ < \phi < 180^\circ$ ,
- III. Quadrant:  $180^\circ < \phi < 270^\circ$  und
- IV. Quadrant:  $270^\circ < \phi < 360^\circ$ ,

wobei der Winkel  $\phi = 360^\circ$  dem Winkel  $\phi = 0^\circ$  gleichgesetzt ist. Es gelten folgende Beziehungen zwischen den kartesischen Koordinaten und den ebenen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos(\phi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r \sin(\phi(t)) \\ r &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad \text{und} \quad \phi(t) = \arctan\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) \quad (\text{für } y(t) \neq 0) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die zu den ebenen Polarkoordinaten gehörenden orthonormierten Basisvektoren sind:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Durch die zeitliche Abhängigkeit des Azimutwinkels  $\phi$  sind auch die beiden Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\phi$  zeitlich nicht konstant, im Gegensatz zu den konstanten kartesischen Basisvektoren  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$ . Nur für die Beträge der Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\phi$  gilt:  $|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\phi| = 1 = \text{konstant}$ . Für die Komponentendarstellung des Ortsvektors  $\vec{r}$  in der Ebene gilt somit:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\vec{e}_r \quad (2.33)$$

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ergibt sich die Bahngeschwindigkeit als die zeitliche Ableitung des Ortsvektors:

$$\vec{v} = r\dot{\phi}\vec{e}_\phi \quad \text{mit} \quad \dot{\phi}\vec{e}_\phi = \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad (2.34)$$

Die zeitliche Änderung des Azimutwinkels wird als *momentane Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet:

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \right) \quad (2.35)$$

Der Differenzenquotient  $\Delta\phi/\Delta t = \omega_m$  wird als *mittlere Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet. Wird der Azimutwinkel  $\phi$  im Bogenmaß (Radiant,  $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi \approx 57,3^\circ$  bzw.  $1^\circ = (\pi/180) \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$ ) angegeben, so ist die Einheit der Winkelgeschwindigkeit rad/s (Radiant pro Sekunde). Bei der gleichförmigen Kreisbewegung mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gilt das *Azimutwinkel-Zeit-Gesetz*:

$$\phi = \omega t \quad (2.36)$$

Insbesondere ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung der Betrag der Geschwindigkeit konstant, während sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ständig ändert. Gemäß

Gl. (2.33) und Gl. (2.34) sind der Ortsvektor  $\vec{r}$  und der Vektor der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  zu jedem Zeitpunkt senkrecht zueinander orientiert, wobei  $\vec{v}$  stets tangential zur Kreisbahn ausgerichtet ist. Erfolgt die Bewegung auf einer Spiralbahn setzt sich die Geschwindigkeit aus einer Tangentialkomponente und einer Radialkomponente zusammen, wobei die Radialkomponente die zeitliche Änderung des Abstands zum Mittelpunkt der Spiralbahn beschreibt.

Ist die Kreisbewegung ungleichförmig sind die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und dementsprechend auch die zeitliche Änderung des Drehwinkels nicht mehr konstant. Dieser Vorgang wird durch Einführung einer weiteren Beschleunigungsgröße, der *Winkelbeschleunigung*  $\alpha$  beschrieben. Analog zur translatorischen Beschleunigung ist zu unterscheiden zwischen der mittleren Winkelbeschleunigung:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.37)$$

und der *momentanen Winkelbeschleunigung*:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right) = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.38)$$

mit der SI- Einheit:  $[\alpha_m] = [\alpha] = \frac{\text{rad/s}}{\text{s}} = \text{rad/s}^2$  (Radiant je Quadratsekunde).

Die Winkelbeschleunigung ist positiv, wenn die Winkelgeschwindigkeit größer wird. Bei Abnahme der Winkelgeschwindigkeit liegt eine verzögerte bzw. abgebremste Drehbewegung vor,  $\alpha_m$  bzw.  $\alpha$  ist dann negativ.

In der Technik wird statt der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  oft die *Drehzahl*  $n$ , als Quotient aus der Anzahl der Umdrehungen  $N$  beispielsweise eines Rotors und der dafür benötigten Zeitdauer  $t$ , angegeben. Eine gebräuchliche SI-fremde Einheit der Drehzahl ist pro Minute bzw.  $\text{min}^{-1} = (60 \text{ s})^{-1}$ . Die Drehzahl hat dementsprechend die Einheit einer Frequenz. Andere Bezeichnungen sind *Umdrehungsfrequenz* oder *Drehfrequenz*. Die Drehfrequenz ist eine mittlere Größe, da sie nicht den momentanen Bewegungszustand kennzeichnet. Die kleinste Zeitdauer ist die *Umdrehungsdauer*  $T$ , die Dauer für eine Umdrehung. Berücksichtigt man, dass bei einer vollen Umdrehung ein Drehwinkel von  $2\pi = 360^\circ$  durchlaufen wird, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der mittleren Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$ , der Umdrehungsdauer  $T$  und der Drehfrequenz  $f$ :

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2.39)$$

Nicht immer sind die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  ausreichend, um die Kreisbewegung eines Massepunktes zu beschreiben. Zwischen den Bahngrößen  $v$  und  $a$  sowie den Winkelgrößen  $\omega$  und  $\alpha$  bestehen jedoch Verknüpfungen, die ein relativ einfaches Umrechnen ermöglichen. Die Verknüpfung zwischen  $v$  und  $\omega$  ergibt sich aus der Definition des ebenen Winkels: die Länge des Kreisbogens, der den Drehwinkel  $\phi$  umfasst, ist das Produkt aus dem Radius  $r$  und  $\phi$ :

$$s = r\phi \quad (2.40)$$

Da der Radius  $r$  konstant ist, folgt sofort mit  $v = \frac{ds}{dt}$ :

$$v = r\omega \quad (2.41)$$

Sowohl die Bahngeschwindigkeit als auch der Radius werden im Allgemeinen nicht als skalare Größen wie in Gl. (2.41) angegeben, sondern als Vektoren. Auch der Winkelgeschwindigkeit ist ein Vektor zugeordnet. Die Bedeutung des Vektors  $\vec{\omega}$  als *Drehachse* wird in Abschnitt 2.2.2 erläutert. Zunächst soll an dieser Stelle der vektorielle Zusammenhang zwischen der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$ , dem Radiusvektor  $\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  festgehalten werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.42)$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

Die mathematische Verknüpfung zwischen dem Vektor  $\vec{\omega}$  und dem Radiusvektor  $\vec{r}$  heißt Vektor- oder Kreuzprodukt. Im dreidimensionalen Raum lässt sich das Vektorprodukt geometrisch leicht deuten: Der Vektor der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  ist sowohl zum Radiusvektor als auch zum Vektor  $\vec{\omega}$  senkrecht orientiert bzw.  $\vec{v}$  steht senkrecht auf der von  $\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  aufgespannten Ebene. Die drei Vektoren  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  bilden gemäß der in Gl. (2.42) gegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem. Das bedeutet, dass die drei Vektoren  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  gleich orientiert sind wie die drei kartesischen Basisvektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$ . Anschaulich lässt sich dieses Rechtssystem mit dem Daumen, dem Zeigefinger und dem abgespreizten Mittelfinger der rechten Hand deuten und wird daher auch als *Rechte-Hand-Regel* bezeichnet. Ein Drehen des Vektors  $\vec{\omega}$  in den Vektor  $\vec{r}$  ergibt die positive Richtung des Vektors  $\vec{v}$  über den Rechtsschraubensinn. Für den Betrag des Vektors der Bahngeschwindigkeit gilt:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{r}) \quad (2.43)$$

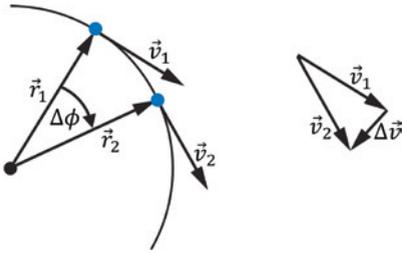
Der Betrag des Vektorprodukts  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  ist gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren  $\vec{\omega}$  und  $\vec{r}$  aufgespannten Parallelogramms, dessen Wert vom Winkel zwischen den beiden Vektoren bestimmt wird. Bei der hier betrachteten Kreisbewegung, in der die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{r}$  in einer Ebene liegen auf der wiederum der Vektor  $\vec{\omega}$  steht (Rechtssystem), gilt  $\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{r}) = 90^\circ$  und es ergibt sich die bereits aus der Gl. (2.41) bekannte Beziehung:  $|\vec{v}| = v = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| = \omega r$ .

Die Tangentialbeschleunigung (auch Bahnbeschleunigung genannt)  $a_t$  ist ebenfalls auf einfache Weise mit der Winkelbeschleunigung verknüpft. Wegen  $a_t = \left| \frac{dv}{dt} \right|$  und  $v = r\omega$  folgt:

$$a_t = r|\alpha| \quad (2.44)$$

Das Betragszeichen bei der Winkelbeschleunigung ist erforderlich, da diese Größe vorzeichenbehaftet ist,  $a_t$  aber der (positiv definierte) Betrag der Vektorkomponente  $\vec{a}_t$  ist. Alle drei Bahngrößen  $s$ ,  $v$  und  $a_t$  lassen sich somit auf einfache Weise in die Winkelgrößen umrechnen und umgekehrt.

Wie anhand der Bahnbeschleunigung gezeigt, besitzt jede Bewegung auf einer krummlinigen, also nicht geradlinigen Bahn auch eine Normalbeschleunigung  $\vec{a}_n$ . Insbesondere, wenn die Tangentialkomponente null ist, d. h. der Betrag der Bahngeschwindigkeit sich nicht ändert, bleibt ausschließlich die Normalkomponente der Beschleunigung übrig. Für den Fall der gleichförmigen Kreisbewegung sind die geometrischen Verhältnisse für den Ortsvektor und den zugehörigen Vektor der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  in Bild 2.16 dargestellt.

**Bild 2.16**

Orts- und Geschwindigkeitsvektor bei der gleichförmigen Kreisbewegung

Der Vektor der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  steht jederzeit senkrecht auf dem Radiusvektor  $\vec{r}$ , d. h.  $\vec{v}$  ist tangential zur Bahnkurve. Die Richtungsänderung von  $\vec{v}$  ist bedingt durch die Normalbeschleunigung  $\vec{a}_n$ , die ebenfalls senkrecht zu  $\vec{v}$  aber antiparallel zum Radiusvektor  $\vec{r}$  orientiert ist. Die Normalbeschleunigung wird auch als *Radialbeschleunigung* bzw. *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet. Für den Betrag der Normalbeschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung gilt:

$$a_n = \frac{2\pi v}{T} = \omega v = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (2.45)$$

Die Verknüpfungen von Gl. (2.45) gelten auch dann, wenn die Kreisbewegung ungleichförmig ist. In diesem Fall sind  $v$  und  $\omega$  die momentane Bahn- bzw. Winkelgeschwindigkeit. Bei einer ungleichförmigen Kreisbewegung ist die Tangentialbeschleunigung  $\vec{a}_t$ , die senkrecht zur Normalbeschleunigung orientiert ist, nicht mehr null und bewirkt eine Änderung des Betrags der Bahngeschwindigkeit. Die Gesamtbeschleunigung ergibt sich dann durch Vektoraddition von Normal- und Tangentialbeschleunigung:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

## ■ 2.2 Dynamik des Massepunktes

Mit dem Begriff Kraft wird im allgemeinen Sprachgebrauch das Vermögen Einfluss zu nehmen, Dinge zu verändern, beschrieben. Häufig wird auch der Begriff der Kraft mit dem der Stärke verknüpft bzw. gleichgesetzt. In der Physik hat die Kraft eine qualitative und eine quantitative Bedeutung: Sprachlich wird sie als Synonym für eine Wechselwirkung zwischen Körpern gebraucht, während der quantitative Aspekt die Stärke dieser Wechselwirkung erfasst. In den physikalischen Modellen wird zwischen vier elementaren Kräften bzw. zwischen vier elementaren/fundamentalen Wechselwirkungen unterschieden: Die starke, die elektromagnetische, die schwache und die Gravitationswechselwirkung. Alle noch so kompliziert erscheinenden Wechselwirkungen zwischen Körpern lassen sich letztlich auf diese vier elementaren Wechselwirkungen und die damit verbundenen Kräfte zurückführen.

In der klassischen Physik wird mit dem Begriff der Kraft eine Einwirkung auf einen Körper beschrieben, die den Körper verformen und/oder beschleunigen kann. Aufgrund der einwirkenden Kräfte wird Arbeit an dem Körper verrichtet, wodurch sich die Energie des Körpers

oder eines physikalischen Systems ändert. Während die Arbeit und die Energie skalare Größen sind, ist die Kraft eine gerichtete physikalische Größe, die mittels eines Vektors angegeben wird. Die durch Kräfte verursachte Änderung des Bewegungszustands eines Körpers wird in dem Teilgebiet Dynamik beschrieben. Bevor die Dynamik starrer Körper in Abschnitt 2.4 behandelt wird, sollen zunächst die dafür erforderlichen Grundlagen im vorliegenden Abschnitt 2.2 anhand der Dynamik des Massepunktes erarbeitet werden. Dennoch wird auch im vorliegenden Abschnitt 2.2 der Begriff des Körpers immer wieder auftreten, mit der Näherung, dass sowohl die geometrische Ausdehnung als auch die innere Beschaffenheit des Körpers bei den Betrachtungen in diesem Abschnitt vollständig vernachlässigt werden.

### 2.2.1 Newton'sche Gesetze

Kräfte treten auf zweierlei Weisen in Erscheinung. Zum einen können sie eine statische Anordnung von Komponenten in einem System bewirken (z. B. das Fachwerk eines Gebäudes). Die einzelnen Kräfte werden erst dann sichtbar, wenn dieses Gleichgewicht gestört wird und das System an Stabilität verliert. In diesem Fall kommt es dann zur beschleunigten Bewegung einzelner Teile des Systems, genauso wie bei der Einwirkung einer Kraft auf einen einzelnen Massepunkt. Im Grundsatz entspricht diese Aussage dem sogenannten *Trägheitsgesetz*, das auf G. Galilei (1564–1642) zurückgeht und von I. Newton (1643–1727) endgültig formuliert und an den Anfang seiner Bewegungsgesetze (auch Bewegungssaxiome genannt) gestellt wurde:



#### Merke

**Erstes Newton'sches Gesetz:** Ein Massepunkt oder ein Körper bleibt so lange im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wie keine Kräfte auf ihn einwirken.

Dieses Trägheitsgesetz (auch *Trägheitsprinzip* genannt) ist das *Erste Newton'sche Gesetz*. Das Besondere an diesem Gesetz ist die Feststellung, dass es den Zustand der absoluten Ruhe nicht gibt, sondern dass die gleichförmig geradlinige Bewegung und der Ruhezustand nur innerhalb eines bestimmten Bezugssystems unterschieden werden können. Dies hat unter anderem zur Folge, dass Bezugssysteme, die sich relativ zueinander in gleichförmiger geradliniger Bewegung befinden, physikalisch gleichwertig sind. Solche Bezugssysteme, in denen dieselben physikalischen Gesetzmäßigkeiten gelten, werden als *Inertialsysteme* (von lateinisch *inertia* für „Trägheit“) bezeichnet. In einem Inertialsystem ist demnach jeder kräftefreie Massepunkt oder Körper relativ zu diesem Bezugssystem in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig (unbeschleunigt) und geradlinig. Kräftefrei bedeutet, dass der Massepunkt oder Körper keine Kräfte von anderen Objekten erfährt, oder die einwirkenden Kräfte kompensieren sich vollständig gemäß Vektoraddition, sodass die resultierende Gesamtkraft null ist. Falls sich ein in diesem Sinne kräftefreier Massepunkt oder Körper relativ zu einem bestimmten Bezugssystem beschleunigt oder krummlinig bewegt, werden die auftretenden bzw. beobachtbaren Beschleunigungen durch sogenannte *Trägheitskräfte* verursacht (Abschnitt 2.2.4). Diese Trägheitskräfte entstehen dadurch, dass jedes Nicht-Inertialsystem gegenüber einem Inertialsystem rotiert und/oder geradlinig beschleunigt ist. Dementsprechend gehen Trägheitskräfte nicht von anderen Massepunkten oder Körpern aus

und werden bei einer Bilanz der Kräftefreiheit nicht berücksichtigt. In einem Inertialsystem gibt es somit keine Trägheitskräfte.

Die Unterscheidung von zwei sich gleichförmig geradlinig bewegenden Massepunkten mit gleicher Geschwindigkeit aber unterschiedlicher Masse ist mit der vektoriellen Größe des Impulses möglich. Definiert ist der Impuls eines Massepunktes oder eines Körpers aus dem Produkt aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.46)$$

Die SI-Einheit des Impulses ist:  $[p] = [m] \cdot [v] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (Kilogramm mal Meter je Sekunde). Aus dem Trägheitsgesetz folgt unmittelbar, dass jede auf einen Massepunkt oder Körper einwirkende Kraft seinen Bewegungszustand ändert. Befand er sich ursprünglich im Ruhezustand, so wird er durch die Krafteinwirkung beschleunigt. Diese Beschleunigung hält jedoch nur so lange an, wie die Kraft einwirkt. Befindet sich der Körper bereits in Bewegung und wirkt die Kraft der Bewegung entgegen, so wird die Bewegung verzögert (abgebremst). Dies ist die Aussage des *Zweiten Newton'schen Gesetzes* (auch *Aktionsprinzip* genannt):



### Merke

**Zweites Newton'sches Gesetz:** Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Die Aussage dieses Aktionsprinzip lässt sich auch noch etwas kürzer fassen: Kraft ist die Ursache der Beschleunigung (oder Verzögerung) eines Körpers.

Da die Beschleunigung gleich der Geschwindigkeitsänderung ist, liegt es nahe, die Beschleunigung als Messgröße für die Kraft anzusetzen. Die Erfahrung zeigt aber, dass unterschiedliche Massepunkte oder Körper, die der gleichen Kraft ausgesetzt sind, auch unterschiedlich reagieren, d. h. eine andere Beschleunigung erfahren. Das einzige Unterscheidungsmerkmal bei Massepunkten ist ihre Masse und bei Körpern spricht man von der *trägen Masse*. Damit lässt sich das Zweite Newton'sche Gesetz als mathematische Formel angeben:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.47)$$

Die SI-Einheit der Kraft ist:  $[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$  (Newton). In Worten ausgedrückt bedeutet diese mathematische Formulierung:



### Merke

**Zweites Newton'sches Gesetz:** Wird ein Massepunkt oder ein Körper durch eine Kraft  $\vec{F}$  beschleunigt, so ist die resultierende Beschleunigung  $\vec{a}$  proportional zur Kraft und umgekehrt proportional zur Masse  $m$  des Massepunktes bzw. zur trägen Masse des Körpers. Die Richtung der Beschleunigung und die der angreifenden Kraft stimmen überein.

Grundlegend für diese Betrachtung ist, dass sich die Masse des Massepunktes bzw. die träge Masse des Körpers während der gesamten Krafteinwirkung nicht ändert. In der klassischen Mechanik wird dies stets vorausgesetzt. Allerdings gibt es auch viele Fälle, bei denen diese

Annahme nicht richtig ist, beispielsweise die sich ändernde Masse eines Raketentriebwerks in Betrieb oder bei sehr hohen Geschwindigkeiten, wenn relativistische Effekte (Massenzunahme) relevant werden. Werden solche Fälle mit nicht konstanter Masse nicht betrachtet, ist die Gl. (2.47) in Übereinstimmung mit der ursprünglichen Formulierung des Zweiten Newton'schen Gesetzes:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.48)$$

Diese Formulierung wird auch als erweitertes Bewegungsgesetz der Mechanik bezeichnet und lautet in Worten:



### Merke

Die auf einen Massepunkt oder einen Körper einwirkende Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses

Die mathematische Umkehrung der Gl. (2.48) erlaubt die Berechnung einer unter einer Kräfteinwirkung erfolgten Impulsänderung, wenn der zeitliche Verlauf der Kraft gegeben ist. Dies ist vor allem dann von Bedeutung, wenn die Kräfteinwirkung zeitlich begrenzt ist, wie beispielsweise bei stoß- oder ruckartigen Vorgängen. Für den allgemeinen Fall einer sich zeitlich verändernden Kraft gilt für die Impulsänderung:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (2.49)$$

Die Indizierung 1, 2 bezieht sich dabei auf Anfangs- und Endzustand.

Wie in der Einleitung des vorliegenden Abschnitts bereits angedeutet, steht der Begriff Kraft eigentlich als Synonym für den treffenderen Ausdruck Wechselwirkung. Mit dem Begriff Wechselwirkung wird die gegenseitige Einflussnahme der beteiligten Massepunkte oder Körper deutlich. Tatsächlich lässt sich die Kraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, nicht isoliert betrachten, da die Kraft selber das Ergebnis des Zusammenwirkens der beiden Körper darstellt. Newton formulierte dieses *Reaktionsprinzip*, das häufig auch verkürzt als *actio = reactio*-Prinzip bezeichnet wird, als Drittes Newton'sches Gesetz:



### Merke

**Drittes Newton'sches Gesetz:** Die Wirkung ist stets gleich der Gegenwirkung. Oder: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Das Reaktionsprinzip (auch Gegenwirkungsprinzip oder Wechselwirkungsprinzip genannt) lässt sich in einer Formel folgendermaßen ausdrücken:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (2.50)$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  ist die Kraft (Aktion), die ein Massepunkt oder ein Körper 1 auf einen zweiten Massepunkt oder Körper 2 ausübt und dementsprechend ist  $-\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  die betragsmäßig gleich große Gegenkraft (Reaktion). Wenn bei einer solchen Wechselwirkung der Bewegungszustand

(Impuls) des einen Massepunktes oder Körpers geändert wird, so ändert sich auch der Bewegungszustand (Impuls) des anderen Massepunktes oder Körpers in die entgegengesetzte Richtung. Gemäß diesem Prinzip sind bei einer auftretenden Kraftwirkung zwei Massepunkte oder zwei Körper beteiligt. Das bedeutet auch, dass Kräfte nur von Massepunkten bzw. Körpern ausgehen und nur auf andere Massepunkte bzw. Körper wirken können.

## 2.2.2 Drehimpuls und Drehmoment

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Impuls als charakteristische vektorielle Größe der Translation eingeführt. Eine entsprechende Impulsgröße lässt sich auch für die im Abschnitt 2.1.6 dargestellte Kreisbewegung bzw. allgemein für die Rotation definieren. Dies ist der Drehimpuls und für einen Massepunkt gilt:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (2.51)$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}$$

Die SI-Einheit des Drehimpulses ist:  $[l] = [r] \cdot [p] = \text{m} \cdot \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Nm s} = \text{J s}$  (Newton-Meter mal Sekunde = Joule mal Sekunde).

Gemäß den Erläuterungen in Abschnitt 2.1.6 liegen bei einer Kreisbewegung der Radiusvektor  $\vec{r}$  und der Vektor der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  in einer Ebene, der Kreisbahnebene. Der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$ , der für diesen Fall auch als *Bahndrehimpuls* bezeichnet wird, ist senkrecht zu dieser Ebene orientiert und die drei Vektoren  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$  und  $\vec{L}$  bzw.  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{L}$  bilden ein Rechtssystem. Da dementsprechend  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  stets senkrecht zueinander orientiert sind, d. h.  $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{p}) = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{v}) = 90^\circ$ , ist der Betrag des Drehimpulses maximal und es gilt:  $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| = m|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|$ . Wird der Vektor der Bahngeschwindigkeit in der Gl. (2.51) mittels der Beziehung (Gl. (2.42)) ersetzt, ergibt sich folgende Beziehung (doppeltes Vektorprodukt) für den Drehimpuls bei der Kreisbewegung:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - m\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = mr^2\vec{\omega} \quad (2.52)$$

Bei der Umformung des doppelten Vektorproduktes in der Gl. (2.52) wurde die Graßmann-Identität (auch Graßmann'scher Entwicklungssatz benannt nach H. G. Graßmann, 1809–1877) angewendet. Der Term  $m\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$  ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung null, da die beiden Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  eines Massepunktes oder eines Körpers stets senkrecht zueinander orientiert sind. Somit sind in diesem Fall der Drehimpulsvektor und der Vektor der Drehachse, gegeben durch  $\vec{\omega}$ , gleichgerichtet bzw. parallel und unterscheiden sich nur um den skalaren Faktor  $mr^2$ . Bei der gleichförmigen Kreisbewegung sind sowohl die Richtungsorientierungen als auch die Beträge der Vektoren  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  konstant, d. h. ändern sich nicht zeitlich.

Der Drehimpuls gemäß Gl. (2.51) lässt sich prinzipiell auch für die Translation mit einem beliebig gewählten Koordinatenursprung als Bezugspunkt angeben. Da sich dann jedoch bereits bei einer gleichförmig geradlinigen Bewegung in einer Ebene der Abstandsvektor  $\vec{r}$  in Betrag und Richtung ständig ändert, wäre zwar die Orientierung des Drehimpulses konstant aber nicht der Betrag des Drehimpulses. Dementsprechend hat der Drehimpuls für einen solchen Fall keine relevante physikalische Bedeutung.

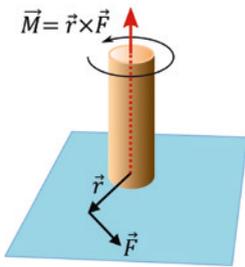
Bildet man in Gl. (2.51) beidseitig die zeitliche Ableitung und nutzt das Zweite Newton'sche Gesetz ergibt sich eine neue physikalische, ebenfalls vektorielle Größe, das Drehmoment  $\vec{M}$  (Bild 2.17):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + \left( \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p} \right) = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M} \quad (2.53)$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

Die SI-Einheit des Drehmoments ist:  $[M] = [r] \cdot [F] = \text{Nm}$  (Newton-Meter).



**Bild 2.17**  
Das Drehmoment

Formal ist die physikalische Einheit des Drehmoments identisch mit derjenigen der Arbeit. Die Einheit Joule ist jedoch den physikalischen Größen Energie und Arbeit vorbehalten. Die Bezeichnung Drehmoment rührt daher, dass der Bezugspunkt in vielen Fällen tatsächlich ein Drehpunkt sein kann, nämlich dann, wenn beispielsweise ein Körper nicht im Gleichgewicht ist, sondern als Drehkörper betrachtet wird. Gemäß dem Vektorprodukt in Gl. (2.53) ist das Drehmoment mit einem bestimmten *Drehsinn* verknüpft. Kräfte, die bezüglich des Drehpunktes eine Drehung im Uhrzeigersinn hervorrufen, besitzen ein *rechtsdrehendes Drehmoment*. Im anderen Fall heißt das Drehmoment *linksdrehend*. Es sei angemerkt, dass diese Unterscheidung zwischen links- und rechtsdrehend keine absolute Bedeutung hat, da sie vom Standpunkt des Betrachters abhängt. Sie dient nur dazu, die Wirkungen der verschiedenen Drehmomente in Bezug auf einen festen Standort zu kennzeichnen.



### Merke

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem wirkenden Drehmoment.

Für den Betrag des Drehmoments gilt gemäß Gl. (2.53):  $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \angle(\vec{r}, \vec{F})$ , das bedeutet insbesondere auch, dass das Drehmoment null und damit der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  konstant ist, wenn der Radiusvektor  $\vec{r}$  und die wirkende Kraft  $\vec{F}$  parallel oder antiparallel zueinander orientiert sind (Abschnitt 2.2.6). Für den anderen Grenzfall eines rechten Winkels zwischen den Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  (also  $\angle(\vec{r}, \vec{F}) = 90^\circ$ ) ergibt sich das zuerst von Archimedes (um 287 v. Chr.–212 v. Chr.) aufgestellte Hebelgesetz. Dazu sei beispielhaft die in Bild 2.18 skizzierte Situation betrachtet. Gegeben ist ein gerader Balken der Gesamtlänge  $l_2$  an dem

drei betragsmäßig verschieden große Kräfte  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  und  $\vec{F}_3$  an drei unterschiedlichen Punkten des Balkens jeweils senkrecht angreifen. Die Angriffspunkte sollen so gewählt werden, dass der Balken weder eine Translation noch eine Rotation ausführt.

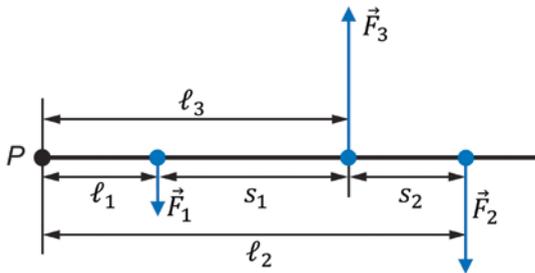


Bild 2.18

Zum Hebelgesetz an einem belasteten Balken

Der Balken führt keine Translation aus, wenn das Dritte Newton'sche Gesetz erfüllt ist, d. h.:

$$-\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

und mit den vorgegebenen Richtungen der Kräfte gilt für die Kraftbeträge:

$$F_3 = F_1 + F_2$$

Damit der Balken auch keine Rotation um einen beliebigen Bezugspunkt  $P$  ausführt, müssen sich die Drehmomente kompensieren:

$$-\vec{M}_3 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

und für die Beträge muss gelten:

$$M_3 = M_1 + M_2$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Strecken gemäß Bild 2.18 gilt:

$$l_3 F_3 = l_1 F_1 + l_2 F_2$$

Darüber hinaus soll der Balken auch keine Drehung um den Angriffspunkt von  $\vec{F}_3$  durchführen, sodass außerdem gelten muss:

$$s_1 F_1 = (l_3 - l_1) F_1 = s_2 F_2 = (l_2 - l_3) F_2$$

Allgemein ist ein Hebel ein nicht-verformbarer (starrer) Körper, der um einen festen Drehpunkt gedreht werden kann. Unterschieden wird zwischen dem einseitigen Hebel, bei dem der Drehpunkt an einem der beiden Hebelenden liegt, und dem zweiseitigen Hebel, bei dem der Drehpunkt an einem beliebigen Punkt innerhalb des Hebels liegt.



### Merke

Ein Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm anliegenden Drehmomente bezüglich desselben Bezugspunktes, der nicht notwendigerweise der Drehpunkt sein muss, gleich null ist:

$$\sum_{n=1}^N \vec{M}_n = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n = 0$$

In der Technik unterscheidet man bei Hebeln zwischen dem *Lastarm*, der gleich dem Hebelarm auf der Seite der zu bewegenden Last ist, und dem *Kraftarm*, der gleich dem Hebelarm auf der Seite der einwirkenden Kraft ist. Bei einem einseitigen Hebel liegen Last- und Kraftarm auf derselben Hebelseite, haben jedoch im allgemeinen unterschiedliche Abstände zum Drehpunkt. Hingegen liegen bei einem zweiseitigen Hebel Last- und Kraftarm auf unterschiedlichen Hebelseiten und haben im allgemeinen ebenfalls unterschiedliche Abstände zum Drehpunkt. Bei technischen Anwendungen muss häufig die Wirkung der Reibung im Drehpunkt berücksichtigt werden, wodurch eine betragsmäßig größere einwirkende Kraft erforderlich ist, als im reibungsfreien Fall.

### 2.2.3 Gravitation und Planetenbewegung

Die Gravitationskraft zählt zu den elementaren Wechselwirkungen zwischen Körpern. Obwohl sie in Bezug auf ihre „Stärke“ um viele Größenordnungen geringer ist als die elektromagnetische oder gar die starke Wechselwirkung, ist sie überall präsent und vergleichsweise gut bekannt. Die Gravitation bestimmt den Lauf der Planeten genauso wie die Bewegungen auf der Erde. Sie äußert sich auf eindrucksvolle Weise im freien Fall genauso wie in der Ablenkung von Lichtstrahlen an großen Massen (Abschnitt 10.2.2).

Unter Gravitation versteht man die gegenseitige Anziehung von Körpern aufgrund ihrer Massen. Ein Sonderfall der Gravitation ist die sogenannte *Schwerkraft*, mit der die Wechselwirkung zwischen einem materiellen Probekörper und einem Himmelskörper (z. B. der Erde) bei geringem gegenseitigem Abstand bezeichnet wird. Die Kinematik der Bewegung eines Körpers im Schwerfeld der Erde wurde bereits in Abschnitt 2.1.3 beim freien Fall beschrieben. Die wesentliche Aussage des Fallgesetzes ist, dass alle Körper unabhängig von ihrer stofflichen Zusammensetzung, Form und ihrer Gestalt am gleichen Beobachtungsort dieselbe Fallbeschleunigung aufweisen. Bestimmt man die Schwerkraft dynamisch, d. h. unter Anwendung des Grundgesetzes der Dynamik, ergibt sich, dass ihr Betrag proportional zur trägen Masse des beschleunigten Körpers ist:

$$F_G = m g \quad (2.54)$$

Führt man die Messungen statisch durch, beispielsweise mithilfe einer Federwaage, so erweist sich die Auslenkung als ebenfalls proportional zur trägen Masse. Dieses Ergebnis erscheint zunächst etwas verblüffend, da die träge Masse ja nur im Zusammenhang mit beschleunigten Bewegungen relevant ist, hier aber ein statischer Kräftevergleich vorgenommen wurde. Ohne Kenntnis des dynamischen Grundgesetzes ließe sich die Auslenkung der Feder auf die Wirkung einer von dem Körper ausgehenden Kraft, die auch als *Gewichtskraft* bezeichnet wird, zurückführen. Die Gewichtskraft wiederum kann man ebenfalls als Produkt aus einer Größe mit der Dimension einer Beschleunigung und einer Größe mit der Dimension einer Masse darstellen. Zur Unterscheidung von der trägen Masse wird die so eingeführte Masse aufgrund ihrer Herkunft auch *schwere Masse* genannt. Bei dieser Unterscheidung handelt es sich keinesfalls um eine Spitzfindigkeit, da die träge Masse eine grundsätzliche Eigenschaft aller Körper ist, während die schwere Masse nur im Zusammenhang mit der Gravitationswechselwirkung in Erscheinung tritt. Tatsächlich haben jedoch träge und schwere Masse den gleichen Wert und der Wert der Beschleunigung für die Gewichtskraft entspricht dem der Fallbeschleunigung. Eine Vielzahl von Experimenten haben die Übereinstimmung der

beiden Massen bestätigt. Diese *Äquivalenz* von schwerer Masse und träger Masse ist die Grundlage der von A. Einstein (1879–1955, Nobelpreis 1921) im Jahre 1915 vorgestellten *allgemeinen Relativitätstheorie*, in der er eine umfassende Theorie der Gravitation entwickelte (Abschnitt 10.2). Beim zugrundeliegenden Äquivalenzprinzip wird zwischen zwei Formulierungen unterschieden: Nach dem sogenannten *schwachen Äquivalenzprinzip* bestimmt allein die Masse eines Körpers, welche Schwerkraft in einem homogenen Gravitationsfeld auf den Körper wirkt. Gemäß dem sogenannten *starken Äquivalenzprinzip* gilt, dass Gravitations- und Trägheitskräfte in dem Sinn äquivalent sind, dass ihrer Wirkungen auf einen Körper nicht unterschieden werden können. Eine gebräuchliche Formulierung ist:



### Merke

Träge und schwere Masse eines Körpers sind äquivalent.

Das schwache Äquivalenzprinzip gilt als Folge des *Newton'schen Gravitationsgesetzes* in der klassischen Mechanik. Dementsprechend beschreiben alle Körper beim freien Fall in einem äußeren Gravitationsfeld bei gleichen Anfangsbedingungen in derselben Zeit dieselbe Bahn. Die Gl. (2.54) für die Schwerkraft eines Körpers in der Nähe der Erdoberfläche enthält die Gravitation noch in „versteckter“ Form. Wie jede Wechselwirkung wird auch die Gravitation durch die Eigenschaften der beiden beteiligten Körper bestimmt (*actio = reactio*). Dementsprechend hängt die Fallbeschleunigung  $g$  von der Masse des Himmelskörpers, in diesem Fall die Erde, ab. Darüber hinaus hängt die Fallbeschleunigung auch vom Abstand der beiden Körper ab, da mit zunehmender Entfernung die Schwerkraft kleiner wird.

## Kepler'sche Gesetze

Das Wesen der Gravitation offenbart sich am deutlichsten bei der Bewegung der Gestirne. Sorgfältige Beobachtungen der Bewegungsabläufe vor allem unseres Planetensystems mit der Sonne als „Bewegungszentrum“ (auch als *Zentralgestirn* bezeichnet) über viele Jahrhunderte hinweg und insbesondere die genauen astronomischen Beobachtungen von T. Brahe (1546–1601) hatten ein Datenmaterial geschaffen, das im Jahre 1609 durch den Astronomen J. Kepler (1571–1630) in drei nach ihm benannten Gesetze zusammengefasst wurde:



### Merke

**Erstes Kepler'sches Gesetz:** Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

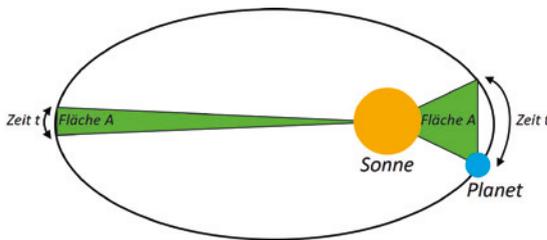
**Zweites Kepler'sches Gesetz (Flächensatz):** Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

**Drittes Kepler'sches Gesetz:** Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

Newton entwickelte, ausgehend von den Kepler'schen Gesetzen, eine mathematische Theorie der Planetenbewegung, die 1687 veröffentlicht wurde und als Schwerpunkt die Formulierung des Kraftgesetzes für die Gravitation zum Inhalt hatte:

$$\vec{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \text{und} \quad F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.55)$$

Das *Newton'sche Gravitationsgesetz* gilt streng für zwei Massepunkte  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$ . Mit  $G$  ist die Gravitationskonstante:  $G = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  bezeichnet. Bei der vektoriellen Form bezeichnen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  die Ortsvektoren der beiden Massepunkte und die Gravitationskraft in der angegebenen Formel ist die Kraft, die die Masse  $m_2$  auf die Masse  $m_1$  ausübt. Gemäß dem dritten Newton'schen Gesetz ist die Gegenkraft, die die Masse  $m_1$  auf die Masse  $m_2$  ausübt gleich  $-\vec{F}_G$ . Das Newton'sche Gravitationsgesetz (Gl. (2.55)) beschreibt im Gegensatz zum mathematisch sehr ähnlichen Coulomb-Gesetz (Abschnitt 6.1) eine stets anziehende Kraft bzw. attraktive Wechselwirkung zwischen zwei Massepunkten bzw. zwei Körpern, während die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Ladungen anziehend oder abstoßend (repulsiv) sein kann.



**Bild 2.19**

Ellipsenbahn eines Planeten. Die Sonne steht in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Die grünen Flächen sind bei gleichen Zeitdauern gleich groß.

Das Gravitationsgesetz ist symmetrisch in den beiden Massen, entsprechend der oben aufgestellten Forderung. Die quadratische Abstandsabhängigkeit des Betrages der Gravitationskraft erschließt sich aus der speziellen Form der Planetenbahnen: Nur Kurven zweiter Ordnung, also Kegelschnitte, sind verträglich mit einem  $1/r^2$ -Gesetz. Dazu zählen die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel. Während die Ellipse eine in sich geschlossene stabile Bahn repräsentiert, handelt es sich bei den anderen beiden Funktionen um offene Bahnkurven, die z. B. bei Kometen oder künstlichen Satelliten realisiert sein können. Ein Spezialfall der Ellipse ist der Kreis, der zumindest für einige Planetenbahnen eine gute Näherung darstellt und damit einen einfachen Beweis der quadratischen Abhängigkeit vom Abstand ermöglicht. Aus dem Flächensatz (Zweites Kepler'sches Gesetz) folgt nämlich unmittelbar, dass unter dieser Voraussetzung der Betrag der Bahngeschwindigkeit konstant ist und damit die Planeten eine reine Radialbeschleunigung  $a_r = r\omega^2$  erfahren mit  $\omega = 2\pi/T$ , wobei  $T$  die Umlaufdauer des Planeten ist. Ersetzt man im dritten Kepler'schen Gesetz die große Halbachse durch den Kreisradius, so folgt:  $T^2/r^3 = \text{konstant}$  und damit gilt für die Radialbeschleunigung der Planeten:

$$a_r = r \frac{4\pi^2}{T^2} = \text{const.} \frac{1}{r^2} \quad (2.56)$$

Die *große Halbachse*  $a$  einer Ellipse ist gleich dem größten Abstand zwischen Ellipsenmittelpunkt und dem Rand der Ellipse. Die *kleine Halbachse*  $b$  einer Ellipse ist gleich dem kleinsten Abstand zwischen Ellipsenmittelpunkt und dem Rand der Ellipse. Die *lineare Exzentrizität*  $e = \sqrt{a^2 - b^2} < a$  einer Ellipse ist gleich dem Abstand eines der beiden Brennpunkte zum Ellipsenmittelpunkt. Bei einem Kreis liegen beide Brennpunkte im Mittelpunkt, sodass gilt:

$e = 0 \Leftrightarrow a = b = \text{Kreisradius}$ . Die *numerische Exzentrizität*  $\varepsilon$  ergibt sich aus dem Verhältnis von linearer Exzentrizität  $e$  und großer Halbachse  $a$ :  $\varepsilon = e/a = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  mit einem Wertebereich  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Für einen Kreis gilt  $\varepsilon = 0$  (mit  $a = b$ ) und für eine Parabel gilt  $\varepsilon = 1$  (mit  $b \rightarrow 0$ ). Die numerischen Exzentrizitäten der Planeten unseres Sonnensystems sind mit Ausnahme von Merkur und Pluto kleiner als 10 % und bei den Planeten Venus und Neptun sogar kleiner als 1 %. Dementsprechend können insbesondere die Umlaufbahnen der Planeten Venus und Neptun als Kreisbahnen genähert werden. Die numerische Exzentrizität der Erdumlaufbahn ist mit  $\varepsilon = 1,7\%$  ebenfalls klein. Die Umlaufbahnen von Merkur und Pluto weichen hingegen deutlich von einer Kreisbahn ab. Weitere Kenngrößen der elliptischen Umlaufbahnen der Planeten sind der *Perihel* (sonnennächster Bahnpunkt) bzw. der *Perihelabstand*  $p$  (auch Periapsisdistanz genannt) und der *Aphel* (sonnenfernster Bahnpunkt) bzw. der *Aphelabstand*  $q$  (auch Apoapsisdistanz genannt). Es gilt für die große Halbachse:  $a = (p + q)/2$  und für die numerische Exzentrizität:  $\varepsilon = (q - p)/(q + p)$ . Die große Halbachse der Erdumlaufbahn beträgt  $a = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} \cong 1 \text{ AE}$  (Astronomische Einheit), der Perihelabstand der Erde beträgt  $147,1 \cdot 10^6 \text{ km}$  und der Aphelabstand beträgt  $152,1 \cdot 10^6 \text{ km}$ . In der Tabelle 2.1 sind einige Daten von über Himmelskörpern (Planeten und Monden) des Sonnensystems zusammengestellt.

**Tabelle 2.1** Übersicht über Himmelskörper unseres Sonnensystems

Himmelskörper	große Halbachse $a$ der Bahnellipse in Millionen km	Umlaufzeit $T$ in Jahren	Numerische Exzentrizität $\varepsilon$	Masse als Vielfaches der Erdmasse $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Radius als Vielfaches des Erdradius $R_E = 6370 \text{ km}$
Merkur	57,91	0,2408	0,206	0,053	0,383
Venus	108,21	0,6152	0,007	0,815	0,950
Erde	149,60	1	0,017	1	1
Mars	227,94	1,8809	0,093	0,107	0,532
Jupiter	778,3	11,8622	0,048	318,00	10,863
Saturn	1428	29,4577	0,056	95,22	9,001
Uranus	2872	84,0153	0,047	14,55	3,968
Neptun	4524	164,7883	0,009	17,23	3,856
Pluto	5910	248,4	0,253	0,002	0,186
Sonne	–	–	–	$3,33 \cdot 10^5$	109,298
Erdmond	mittlere Entfernung von der Erde: 384400 km	27,32 Tage um die Erde	0,055	0,012	0,273
Ganymed	mittlere Entfernung vom Jupiter: 1070400 km	7,155 Tage um den Jupiter	0,001	0,025	0,413
Titan	mittlere Entfernung vom Saturn: 1221830 km	15,95 Tage um den Saturn	0,029	0,023	0,404

Ganymed ist der dritte Mond (von bisher 79 bekannten Monden) des Gasplaneten Jupiter und mit einem Durchmesser von 5262 km der größte und auch der schwerste Mond des Sonnensystems. Titan ist der sechste Mond (von bisher 82 bekannten Monden) des Gasplaneten Saturn und mit einem Durchmesser von 5150 km der zweitgrößte Mond und der zweitschwerste Mond des Sonnensystems. Der Planet Merkur hat einen Durchmesser von 4879 km und ist damit kleiner als die beiden größten Monde des Sonnensystems. Der Erdmond hat einen Durchmesser von 3474 km und ist der fünftgrößte Mond des Sonnensystems.

Für den allgemeineren Fall einer elliptischen Umlaufbahn lässt sich das Erste Kepler'sche Gesetz aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz (Gl. (2.55)) herleiten. Unter der Annahme, dass die Masse des Zentralgestirns (Sonne)  $m_s \gg m_p$  sehr viel größer als die Masse eines Planeten  $m_p$  ist und somit die Anziehungskraft, die der Planet auf die Sonne ausübt, vernachlässigt werden kann, gilt im Rahmen des Zwei-Körper-Problems für die Gesamtenergie des Planeten:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m_p (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{G m_s m_p}{r} = \text{const.} \quad (2.57)$$

Dabei wird angenommen, dass die Bewegung des Planeten in einer Ebene erfolgt und daher mit den ebenen Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$  beschrieben werden kann. Die Sonne ist dabei im Nullpunkt (Koordinatenursprung) lokalisiert, der mit einem der beiden Ellipsenbrennpunkte zusammenfällt. Im Gegensatz zum Spezialfall einer kreisförmigen Umlaufbahn ist bei einer ellipsenförmigen Umlaufbahn der Abstand zum Nullpunkt  $r$  während eines Umlaufs um die Sonne nicht konstant. Da die wirkende Gravitationskraft eine sogenannte *konservative Kraft* ist, ändert sich die Gesamtenergie nicht bzw. ist konstant (siehe auch Abschnitt 2.2.6). Mit dem Betrag des ebenfalls konstanten Bahndrehimpulses des Planeten  $|\vec{L}| = L = m_p r^2 \dot{\phi}$  und der Beziehung  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi}$  ergibt sich aus der Energiebilanz (Gl. (2.57)) die folgende Differentialgleichung für die Funktion  $r(\phi)$ :

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = 2m_p \frac{r^4}{L^2} \left[ E + \frac{G m_s m_p}{r} - \frac{L^2}{2m_p r^2} \right] \quad (2.58)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die folgende Bahnkurve  $r(\phi)$ , die für  $0 < \varepsilon < 1$  eine Ellipse beschreibt:

$$r(\phi) = \frac{\mathcal{P}}{1 + \varepsilon \cos(\phi)} \quad (2.59)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{P} = \frac{L^2}{G m_s m_p^2}$  den *Bahnparameter* mit der SI-Einheit  $[\mathcal{P}] = \text{m}$  und  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 m_s^2 m_p^3}}$  ist die (einheitenlose) numerische Exzentrizität der Bahnellipse. Die Quotienten  $E/m_p$  und  $L/m_p$  werden als spezifische Gesamtenergie bzw. als spezifischer Bahndrehimpuls des Planeten bezeichnet. Für die große Halbachse  $a$  und die kleine Halbachse  $b$  sowie für den Perihelabstand  $p$  und den Aphelabstand  $q$  der Bahnellipse gilt:

$$a = \frac{\mathcal{P}}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad p = \frac{\mathcal{P}}{1 + \varepsilon} \quad \text{und} \quad q = \frac{\mathcal{P}}{1 - \varepsilon} \quad (2.60)$$

Für den Abstand zwischen den beiden Ellipsenbrennpunkten (Fokuspunkten)  $F_1$  und  $F_2$  gilt:

$$\overline{F_1 F_2} = 2(a - p) = \frac{2\varepsilon \mathcal{P}}{1 - \varepsilon^2}$$

Die veränderliche Bahngeschwindigkeit eines Planeten (mit der Masse  $m_p$ ) auf seiner ellipsenförmigen Umlaufbahn (mit der großen Halbachse  $a$ ) um die Sonne (mit der Masse  $m_s$ ) ergibt sich aus der *Vis-Viva-Gleichung* (Vis-Viva ist eine auf G. W. Leibniz, 1646–1716, zurückgehende Bezeichnung für die „Energie in der Bewegung“), die aus der Energie- und der Drehimpulserhaltung folgt:

$$v(r(\phi)) = \sqrt{G(m_s + m_p) \left( \frac{2}{r(\phi)} - \frac{1}{a} \right)} \quad (2.61)$$

Im Fall einer Kreisbahn mit  $r = a = \text{konstant}$  gilt für die dann ebenfalls konstante Kreisbahngeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{G(m_s + m_p)/r}$$

Wird als Zentralgestirn ein Planet wie beispielsweise die Erde betrachtet, ergibt sich aus der Formel für die Kreisbahngeschwindigkeit ein Mindestwert für die Geschwindigkeit eines Satelliten mit  $m_{\text{Satellit}} \ll m_E$  auf einer erdnahen kreisförmigen Umlaufbahn (d. h.  $r \gtrsim R_E$ ), die als *erste kosmische Geschwindigkeit*  $v_I$  bezeichnet wird:

$$v_I = \sqrt{\frac{G M_E}{R_E}} = 7,91 \text{ km/s} \quad (2.62)$$

Dieser Wert hat jedoch keine praktische Bedeutung, da solche Geschwindigkeiten innerhalb der Erdatmosphäre aufgrund des dort stark abbremsenden Luftwiderstands nicht aufrechtzuerhalten sind. In einer Höhe von 180 km über der Erdoberfläche, was der Grenze der Erdatmosphäre entspricht und gleich einem Bahnradius von  $r = R_{\text{Erde}} + h = (6370 + 180) \text{ km} = 6550 \text{ km}$  ist, beträgt die Kreisbahngeschwindigkeit etwa 7,8 km/s. Auf einer *geostationären Umlaufbahn* in einer Höhe von 36 000 km über der Erdoberfläche beträgt die Kreisbahngeschwindigkeit eines Satelliten 3,071 km/s, was weniger als der Hälfte der ersten kosmischen Geschwindigkeit entspricht.

Die *zweite kosmische Geschwindigkeit*  $v_{II}$  ist gleich der hypothetischen Startgeschwindigkeit, die beispielsweise ein Satellit erreichen muss, wenn er ohne weiteren Antrieb das Gravitationsfeld der Erde verlassen soll. Die zweite kosmische Geschwindigkeit wird daher auch als *Fluchtgeschwindigkeit* (von der Erde) bezeichnet und es gilt:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2 G M_E}{R_E}} = \sqrt{2} v_I = 11,2 \text{ km/s} \quad (2.63)$$

Soll der Anziehungsbereich der Erde von einer geostationären Umlaufbahn aus verlassen werden, beträgt die dafür notwendige Startgeschwindigkeit nur noch ca. 4,5 km/s. Auch die zweite kosmische Geschwindigkeit ist weniger von praktischer Bedeutung, denn gemäß der Definitionsgleichung der zweiten kosmischen Geschwindigkeit wäre beim Verlassen der Erde mit der Fluchtgeschwindigkeit die kinetische Energie und damit auch die Geschwindigkeit im Unendlichen gleich null. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit mit zunehmendem Abstand zur Erde stetig kleiner wird. Zum anderen müssen die Gravitationskräfte der anderen

Himmelskörper und insbesondere der Sonne berücksichtigt werden. Entfernt sich ein Satellit oder ein anderes Flugobjekt mehr als 1,5 Millionen km von der Erde, überwiegt die Sonnengravitation die Erdgravitation und der Satellit bzw. der Flugkörper wird in Abhängigkeit von seiner momentanen Geschwindigkeit und Flugrichtung eine Umlaufbahn um die Sonne einnehmen. Der Abstand von  $1,5 \cdot 10^6$  km ist kugelsymmetrisch bezüglich des Erdmittelpunktes und bildet die sogenannte *Hill-Sphäre* (benannt nach G. W. Hill, 1838–1914) um die Erde. Für den Radius der Hill-Sphäre der Erde (auch *Hill-Radius* genannt) gilt:

$$r_{\text{Hill}} = a \left( \frac{m_E}{3m_S} \right)^{1/3} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} \left( \frac{1}{3 \cdot 3,33 \cdot 10^5} \right)^{1/3} \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (2.64)$$

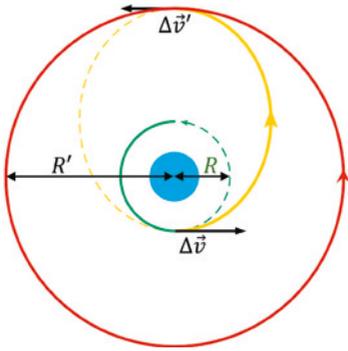
Der Hill-Radius der Erde beträgt somit ca. 1 % des mittleren Abstandes zwischen Sonne und Erde bzw. 0,01 AE (Astronomische Einheit). Da der Erdmond ungefähr  $0,37 \cdot 10^6$  km von der Erde entfernt ist, befindet er sich innerhalb der Hill-Sphäre der Erde. Die Hill-Sphäre um den Jupiter hat hingegen einen Radius von 0,35 AE und ist damit fast so groß wie die große Bahnhalbachse des Planeten Merkur. Die größte Hill-Sphäre unter allen Monden des Sonnensystems hat der Erdmond mit einem Radius von 9,2 Erdradien ( $R_{\text{Erde}} = 6370$  km), gefolgt vom Saturnmond Titan (Hill-Radius gleich 8,2 Erdradien) und vom Jupitermond Kallisto (Hill-Radius gleich 7,9 Erdradien).

Die *dritte kosmische Geschwindigkeit*  $v_{\text{III}}$  ist gleich der Startgeschwindigkeit von der Erdoberfläche, mit der das Sonnensystem verlassen werden kann. Es gilt:

$$v_{\text{III}} = \sqrt{v_{\text{ex}}^2 + v_{\text{II}}^2} = \sqrt{(12,3 \text{ km/s})^2 + (11,2 \text{ km/s})^2} = 16,6 \text{ km/s} \quad (2.65)$$

Dabei ergibt sich die *Exzessgeschwindigkeit*  $v_{\text{ex}} = 42,1 \text{ km/s} - 29,8 \text{ km/s} = 12,3 \text{ km/s}$  als Differenz aus der Fluchtgeschwindigkeit aus dem Sonnensystem bezüglich der Erdoberfläche mit einem Wert von  $42,1 \text{ km/s}$  und der Bahngeschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne mit einem Wert von  $v_{\text{Bahn}} = 29,8 \text{ km/s}$ , wenn das Flugobjekt in Richtung der Bahngeschwindigkeit der Erde sowie in ihrer Drehrichtung abgeschossen wird. Die Masse des Mondes und der anderen Planeten kann hierbei völlig vernachlässigt werden. Bisher wurde jedoch die dritte kosmische Geschwindigkeit bei keinem Start auf der Erdoberfläche erreicht. Die bisher größte Startgeschwindigkeit mit einem Wert von  $16,2 \text{ km/s}$  erreichte am 19.01.2006 die Raumsonde New Horizons, mit der das Pluto-System und der *Kuipergürtel* (benannt nach G. P. Kuiper, 1905–1973) erforscht werden soll, beim Verlassen der Erdoberfläche. Anfang 2023 war die Raumsonde New Horizons ca.  $8,23 \cdot 10^9$  km (55,02 AE) von der Sonne entfernt.

Soll ein Satellit von einer erdnahen (engl. low earth orbit = LEO) in eine erdferne (engl. geostationary orbit = GEO) kreisförmige Umlaufbahn übergehen, ist dies mit dem *Hohmann-Transfer* (W. Hohmann, 1880–1945) energetisch günstig zu realisieren. Die *Hohmann-Bahn* ist eine Ellipse, die sowohl zur Ausgangsbahn als auch zur Zielbahn tangential verläuft (Bild 2.20), wobei an den beiden Berührungspunkten die Anpassung der Bahngeschwindigkeit des Satelliten jeweils mittels eines Kraftstoßes erfolgt. Die erste Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_e$  bringt den Satelliten auf die elliptische Hohmann-Bahn, deren Perihelpunkt auf der kreisförmigen Ausgangsbahn mit dem Radius  $r_e$  liegt. Anschließend erfolgt in einem zweiten Kraftstoß die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v_a$  im Aphelpunkt der Hohmann-Bahn, wodurch der Satellit auf die kreisförmige Zielbahn mit dem Radius  $r_a$  übergeht.

**Bild 2.20**

Hohmann-Transfer (gelbe ellipsenförmige Umlaufbahn) beim Übergang zwischen einer erdnahen (grün) und einer erdfernen (rot) kreisförmigen Umlaufbahn

Unter Berücksichtigung der Vis-Viva-Gleichung (2.61) gilt für  $\Delta v_e$  und  $\Delta v_a$ :

$$\Delta v_e = v_e \left( \sqrt{\frac{2r_a}{r_e + r_a}} - 1 \right) \quad \text{und} \quad \Delta v_a = v_a \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_e}{r_e + r_a}} \right) \quad (2.66)$$

Dabei ist  $v_e = \Delta v_e + v_{\text{LEO}} > v_{\text{LEO}}$  die Bahngeschwindigkeit im Perihelium und  $v_a = v_{\text{GEO}} - \Delta v_a < v_{\text{GEO}}$  die Bahngeschwindigkeit im Aphelium der Hohmann-Bahn mit der großen Halbachse  $(r_e + r_a)/2$ . Die Größen  $v_{\text{LEO}}$  und  $v_{\text{GEO}}$  sind die Bahngeschwindigkeiten auf der erdnahen bzw. der erdfernen kreisförmigen Umlaufbahn. Zur Quantifizierung des benötigten Energieaufwandes wird die gesamte Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v = \Delta v_e + \Delta v_a$  im Verhältnis zu  $v_e$  betrachtet und es gilt:

$$\frac{\Delta v}{v_e} = \frac{\Delta v_e + \Delta v_a}{v_e} = \frac{\Delta v_e}{v_e} + \frac{r_e}{r_a} \cdot \frac{\Delta v_a}{v_a} = \left( 1 - \frac{r_e}{r_a} \right) \sqrt{\frac{2r_a}{r_e + r_a}} + \sqrt{\frac{r_e}{r_a}} - 1 \quad (2.67)$$

Wird der Ausdruck für  $\Delta v/v_e$  nach dem Radienverhältnis  $r_a/r_e > 1$  abgeleitet, ergibt sich ein (physikalisch sinnvolles) Maximum für  $\Delta v/v_e$  bei einem Radienverhältnis von  $r_a/r_e = 15,582$ , d. h. mit ansteigendem Radienverhältnis bis zum diesem Wert erhöht sich der Energieaufwand beim Hohmann-Transfer. Oberhalb des Maximums, also für Radienverhältnisse  $r_a/r_e > 15,582$  nimmt der erforderliche Energieaufwand beim Hohmann-Transfer wieder ab. Allgemein lassen sich Änderungen der Umlaufbahn eines Satelliten mit den *Hill'schen Gleichungen* (G. W. Hill, 1838–1914) analytisch beschreiben, so z. B. den weiteren Verlauf einer Satellitenbahn, wenn dessen Geschwindigkeit verändert wird.

Die Kepler'schen Gesetze, die ursprünglich für die Gravitationswechselwirkung zwischen Himmelskörpern formuliert worden sind, lassen sich auch auf die elektrostatische Coulomb-Wechselwirkung (Abschnitt 6.1) übertragen. Für zwei einander anziehende Ladungen  $q_1 \geq 0$  und  $q_2 \leq 0$  ergeben sich ebenfalls ellipsenförmige Umlaufbahnen. Hingegen führt die stets abstoßende Coulomb-Kraft zwischen zwei gleichartigen Ladungen  $q_{1,2} \geq 0$  zu nicht-geschlossenen Hyperbelbahnen.

Wie bereits angeführt, ist die auf der Erde wirkende Schwerkraft ein Sonderfall der Gravitation. Ein Grund für die Sonderstellung ist, dass zumindest eine der beiden in Wechselwirkung stehenden Massen, nämlich die Erde, nicht mehr als punktförmig angesehen werden kann. Die endliche Ausdehnung der Körper, verbunden mit einer eventuellen inhomogenen Massenverteilung, erfordert eine etwas aufwendigere mathematische Behandlung (Abschnitt 2.4).

Im Grundsatz wird dabei so vorgegangen, dass die beiden Körper jeweils in einzelne Massepunkte zerlegt werden, im nächsten Schritt die Kräfte zwischen den Massepunkten berechnet und anschließend zu einer Resultierenden überlagert werden. Für den Sonderfall homogener Massekugeln lässt sich das Problem allerdings wiederum auf das einfache Gravitationsgesetz zurückführen, wobei als Abstände der Körper die der beiden Kugelmittelpunkte einzusetzen sind. Diese Voraussetzungen sind bei den Planeten nur näherungsweise erfüllt. So ist z. B. die Erde ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid mit einer keinesfalls homogenen Massendichte. Zudem sind die durch Gebirge und Wassermassen bedingten Unregelmäßigkeiten in der Oberfläche zu berücksichtigen, die sich vor allem bei kleinen Abständen zwischen dem Probekörper und der Erdoberfläche bemerkbar machen. Zum anderen muss berücksichtigt werden, dass das Bezugssystem, in dem die Untersuchung der Schwerkraft stattfindet, sofern es Teil des Planeten ist, kein Inertialsystem darstellt, sondern ein beschleunigtes Bezugssystem ist.

### Periheldrehung

Neben der Gesamtenergie und dem Drehimpuls gibt es bei einem Zwei-Körper-System mit Gravitationswechselwirkung oder mit anziehender Coulomb-Wechselwirkung, also mit einem Zentralpotential der Form  $V(r) \propto -1/r$ , eine weitere, dritte Erhaltungsgröße. Dies ist der *Laplace-Runge-Lenz-Vektor*  $\vec{A}$  (auch *Runge-Lenz-Vektor* oder *Lenz'scher Vektor* genannt nach P.-S. Laplace, 1749–1827 und C. D. T. Runge, 1856–1927 und W. Lenz, 1888–1957). Für den Laplace-Runge-Lenz-Vektor  $\vec{A}$  und dessen Betrag  $|\vec{A}|$  gilt:

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + V(r) \vec{r} = \vec{v} \times \vec{L} - \frac{G m_S m_P}{r} \vec{r} = G m_S m_P \vec{e} \quad (2.68a)$$

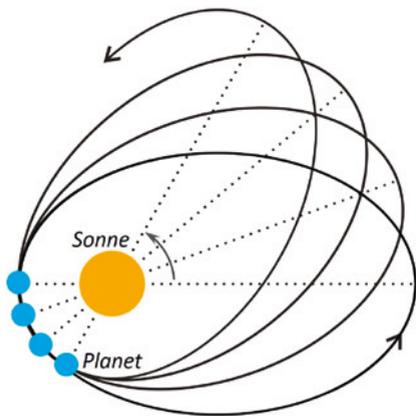
$$|\vec{A}| = \sqrt{(G m_S m_P)^2 + \frac{2E L^2}{m_P}} = G m_S m_P \sqrt{1 + \frac{2E L^2}{G^2 m_S^2 m_P^3}} = G m_S m_P \varepsilon \quad (2.68b)$$

Die SI-Einheit des Laplace-Runge-Lenz-Vektors ist:  $[\vec{A}] = \text{Jm} = \text{Nm}^2$  und  $\vec{e}$  ist der einheitenlose *Exzentrizitätsvektor*. Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt in der Bahnebene, in der auch der Ortsvektor  $\vec{r}$  und der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  des Planeten liegen und ist somit senkrecht zum Bahndrehimpulsvektor  $\vec{L}$  orientiert. Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt auf der gemeinsamen Linie (*Apsidenlinie*) der beiden Ellipsenbrennpunkte, des Perihels (sonnennächster Bahnpunkt) sowie des Aphels (sonnenfernster Bahnpunkt) und ist stets so orientiert, dass er von dem Ellipsenbrennpunkt, in dem sich die Sonne befindet, zum Perihel zeigt. Der Betrag des Laplace-Runge-Lenz-Vektors ist bis auf den Faktor  $G m_S m_P$  gleich der numerischen Exzentrizität  $\varepsilon = |\vec{e}|$  der Bahnellipse. Bei einem Zwei-Körper-System mit einem anziehenden Zentralpotential der Form  $V(r) \propto -1/r$  ist der Laplace-Runge-Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße und es gilt:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0 = \begin{pmatrix} \frac{dA_x}{dt} = 0 \\ \frac{dA_y}{dt} = 0 \\ \frac{dA_z}{dt} = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{A} = \text{const.} \quad (2.69)$$

Die drei Komponenten  $A_x$ ,  $A_y$  und  $A_z$  des Laplace-Runge-Lenz-Vektors  $\vec{A}$  sind somit Erhaltungsgrößen. Da jedoch der Betrag von  $\vec{A}$  bereits durch die anderen beiden Erhaltungsgrößen Bahndrehimpuls und Gesamtenergie und die Lage von  $\vec{A}$  durch die Orthogonalität zum Bahndrehimpulsvektor vorgegeben sind, liefert der Laplace-Runge-Lenz-Vektor nur eine unabhängige Erhaltungsgröße. Dementsprechend hat das Zwei-Körper-System mit einem anziehenden Zentralpotential der Form  $V(r) \propto -1/r$  fünf unabhängige Erhaltungsgrößen: Gesamtenergie, drei Komponenten des Bahndrehimpulsvektors und die Orientierung des Laplace-Runge-Lenz-Vektors für sechs Anfangsbedingungen, was als ein maximal integrables System bezeichnet wird. Das heißt, dass durch den Orts-, den Geschwindigkeits- und den Laplace-Runge-Lenz-Vektor sowohl die Form als auch die Orientierung der Umlaufbahn bei einem Zwei-Körper-System festgelegt sind.

Bei Abweichungen vom anziehenden Zentralpotential der Form  $V(r) \propto -1/r$ , beispielsweise durch Berücksichtigung weiterer Planeten des Sonnensystems, Abweichungen des Zentralgestirns von der Kugelform sowie die Krümmung der Raum-Zeit im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie (Kapitel 10), kommt es zu einer Drehung des Laplace-Runge-Lenz-Vektors, was als *Periheldrehung* bezeichnet wird. Der Planet bewegt sich als Folge dessen nicht mehr auf einer im Raum fixierten ellipsenförmigen sondern auf einer rosettenartigen Umlaufbahn (Bild 2.21). Die Periheldrehung erfolgt dabei in gleicher Richtung wie der Planet das Zentralgestirn umläuft. Ist nicht die Sonne sondern die Erde das Zentralgestirn, wird die Drehung des Laplace-Runge-Lenz-Vektors als *Perigäumsdrehung* bezeichnet. Im Gegensatz zur Periheldrehung war die Perigäumsdrehung des Mondes bereits babylonischen Astronomen etwa seit 700 v. Chr. bekannt und wurde in damaligen Berechnungen zur Mondbewegung berücksichtigt. In einem Doppelsternsystem wird die Drehung des Laplace-Runge-Lenz-Vektors als *Periastrondrehung* bezeichnet.



**Bild 2.21**

Periheldrehung der Umlaufbahn eines Planeten  
(blauer Kreis)

Da die Ausprägung der Periheldrehung für ellipsenförmige Umlaufbahnen größer als für kreisförmige bzw. kreisähnliche Umlaufbahnen ist, sollte dieser Effekt insbesondere beim Merkur mit einer numerischen Exzentrizität von über 20 % nachweisbar sein. So wurde bei Beobachtungen der Bewegung des Merkurs ein Wert von  $574''$  (Bogensekunden, auch als arcsec bezeichnet;  $360^\circ = 1\,296\,000''$  bzw.  $1^\circ = 3\,600'' = 60' = 60$  arcmin bzw. Bogenminuten) pro Jhd. (Jahrhundert) für die Periheldrehung festgestellt. Dementsprechend hat sich die Umlaufbahn des Merkurs in ca. 225 000 Jahren einmal vollständig gedreht. Während die-

ses Zeitraums umläuft der Merkur ca. 930 000-mal die Sonne. Im Jahre 1859 präsentierte U. J. J. Le Verrier (1811–1877) eine Theorie für die Periheldrehung des Merkurs auf der Grundlage des Newton'schen Gravitationsgesetzes (Gl. (2.55)). Der größte Effekt entsteht gemäß Le Verrier durch den Nachbarplaneten Venus und bewirkt einen Beitrag von  $277''/\text{Jhd.}$  zur Periheldrehung. Der zweitgrößte Effekt entsteht durch den Planeten Jupiter mit einem Beitrag von  $154''/\text{Jhd.}$  Zwar ist der Planet Jupiter ca. zehnmal weiter von Merkur entfernt als die Venus, hat jedoch die 400-fache Masse als die Venus. Die Erde als übernächster Nachbarplanet des Merkurs liefert einen Beitrag von  $90''/\text{Jhd.}$  und alle weiteren Planeten (Mars, Saturn, Uranus und Neptun) des Sonnensystems einen Beitrag von  $10''/\text{Jhd.}$  zur Periheldrehung des Merkurs. In Summe konnte Le Verrier einen Wert von  $531''/\text{Jhd.}$  rechnerisch bestätigen. Zur Erklärung der Differenz von ca.  $43''/\text{Jhd.}$  zum Beobachtungswert von  $574''/\text{Jhd.}$  postulierte Le Verrier die Existenz eines Planeten innerhalb der Umlaufbahn des Merkurs und nannte diesen Planeten Vulkan, dessen Existenz jedoch bis heute nicht experimentell bestätigt werden konnte.

Die Diskrepanz  $\Delta\varphi$  zwischen der experimentellen Beobachtung und der klassischen Theorie der Gravitation konnte erst im Jahre 1915 von A. Einstein (1879–1955, Nobelpreis 1921) im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie als Folge der Krümmung der Raum-Zeit erklärt und mit folgender Formel quantifiziert werden:

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi R_S}{a(1-\varepsilon^2)} \quad (2.70)$$

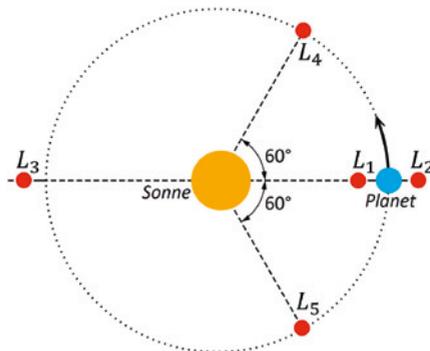
Dabei bezeichnen  $R_S = 2,95 \text{ km}$  den *Schwarzschild-Radius* der Sonne (K. Schwarzschild, 1873–1916),  $a$  die große Halbachse und  $\varepsilon$  ist die numerische Exzentrizität der Planetenumlaufbahn. Für den Merkur hat diese relativistische Korrektur einen Wert von  $\Delta\varphi_{\text{Merkur}} = 42,98''/\text{Jhd.}$  und für die Erde einen Wert von  $\Delta\varphi_{\text{Erde}} = 3,8''/\text{Jhd.}$  Die relativistische Korrektur ist für die Erde kleiner als für den Merkur, da der Abstand Erde-Sonne größer ist und als Folge dessen die Krümmung der Raum-Zeit durch die Sonne bei der Erde geringer als beim Merkur ist. Die experimentell bestimmten Werte für die Periheldrehung der Umlaufbahnen von Erde und Venus betragen  $1\,170''/\text{Jhd.}$  bzw.  $21,6''/\text{Jhd.}$ , sodass sich die Umlaufbahnen der Erde und der Venus in ca. 111 000 Jahren bzw. 6 Mio. Jahren einmal vollständig gedreht haben. Im Gegensatz dazu hat sich die Umlaufbahn des Erdmonds in nur 8,85 Jahren einmal vollständig gedreht. Im Vergleich zur Periheldrehung bei den Planetenumlaufbahnen ist die sehr schnelle Perigäumsdrehung des Erdmondes eine Folge der starken Störung des Zwei-Körper-Systems Erde-Mond (mit der Erde als Zentralgestirn und einem Schwarzschild-Radius von weniger als 1 cm) durch die sehr massenreiche Sonne. Des Weiteren trägt die Äquatorwulst der Erde zur Perigäumsdrehung des Mondes bei. Denn während ein exakt kugelsymmetrischer Körper dasselbe invers-quadratische Gravitationsfeld erzeugt wie ein punktförmiger Körper mit derselben Masse, führen inhomogene Masseverteilungen wie die Äquatorwulst und die Erdabplattung zu Abweichungen vom invers-quadratischen Gravitationsfeld.

### Lagrange-Punkte

Die Kepler'schen Gesetze beziehen sich auf ein Zwei-Körper-System bestehend aus einem Zentralgestirn (der Sonne) und einem Planeten. Jedoch wird bereits im Rahmen der Newton'schen Betrachtungsweise der Gravitation deutlich, dass sich die Himmelskörper nicht voneinander unabhängig um das Zentralgestirn bewegen, sondern auch untereinander gravitative Kräfte

ausüben. Die Betrachtung beispielsweise aller Planeten des Sonnensystems führt zu einem Mehr-Körper-Problem, das analytisch nicht lösbar ist und bereits das Drei-Körper-Problem ist als allgemeiner Fall nur numerisch lösbar. Ein Spezialfall ist das analytisch lösbare *eingeschränkte* bzw. *restringierte Drei-Körper-Problem*, bei dem einer der drei Körper eine verschwindend kleine Masse hat und somit seine gravitative Wirkung auf die beiden anderen Körper, einem massereichen Zentralgestirne, dass von einem masseärmeren Himmelskörper (z. B. ein Planet) umlaufen wird, vernachlässigt werden kann. L. Euler (1707–1783) und J.-L. de Lagrange (1736–1813) fanden die Lösungen des restringierten Drei-Körper-Systems in Form von fünf Gleichgewichtspunkten, in denen der dritte, annähernd masselose Körper kräftefrei ist. Diese Punkte werden als *Liberationspunkte* oder *Lagrange-Punkte*  $L_1$  bis  $L_5$  bezeichnet und sind bedeutsam in der modernen Astronomie, um beispielsweise Forschungs-satelliten auf annähernd konstanten Positionen zu halten.

Alle fünf Lagrange-Punkte liegen in der Bahnebene der beiden massebehafteten Himmelskörper. Die Lagrange-Punkte  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  liegen auf der Verbindungslinie der beiden massebehafteten Himmelskörper und sind in tangentialer Richtung (senkrecht zu dieser Verbindungslinie) stabil jedoch in radialer Richtung (entlang der Verbindungslinie) instabil. Hingegen liegen die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  auf zwei gegenüberliegenden Eckpunkten eines gleichseitigen Vierecks (Raute), während sich auf den anderen beiden Eckpunkten des gleichseitigen Vierecks die zwei massebehafteten Himmelskörper befinden (Bild 2.22). Die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  sind für ein Massenverhältnis der beiden massebehafteten Himmelskörper größer als 25 sowohl in tangentialer als auch in radialer Richtung stabil, was als *Ljapunow-stabil* (A. M. Ljapunow, 1857–1918) bezeichnet wird. Das bedeutet, dass ein Körper mit verschwindend kleiner Masse in einer Umgebung um einen der beiden Lagrange-Punkt  $L_4$  und  $L_5$  auf einer geschlossenen Bahn in dieser Umgebung bleibt, sodass kleine Störungen der Lage keine Auswirkungen auf die Stabilität der Umlaufbahn haben.



**Bild 2.22**

Lagrange-Punkte  $L_1$  bis  $L_5$  in einem restringierten Drei-Körper-System mit einem Zentralgestirn (gelb) und einem Planeten (blau)

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf das Beispielsystem Sonne-Erde mit der Sonne als massereiches Zentralgestirn und der Erde als masseärmeren Himmelskörper, der die Sonne auch einer kreisförmigen Bahn (numerische Exzentrizität  $\varepsilon = 0,017$ ) umläuft. Der Lagrange-Punkt  $L_1$  befindet sich innerhalb der Erdumlaufbahn in einem Abstand von ca.  $1,5 \cdot 10^6$  km von der Erde, was etwa dem Vierfachen des Abstandes zwischen Erde und Mond entspricht. Gemäß den Kepler'schen Gesetzen hätte ein Körper, der die Sonne innerhalb der Erdumlaufbahn umläuft, eine höhere Bahngeschwindigkeit als die Erde. Durch die Gravitationskraft der Erde wird jedoch die Anziehungskraft der Sonne auf den

Körper etwas kompensiert, wodurch sich für einen Körper im Lagrange-Punkt  $L_1$  eine zur Erde synchrone Umlaufgeschwindigkeit ergibt. Bereits seit Ende der 1970er-Jahre werden im Lagrange-Punkt  $L_1$  Raumsonden zur Erforschung der Sonne positioniert, unter anderem die Raumsonde Genesis zur Erforschung des Sonnenwinds im Zeitraum von 2001 bis 2004. Seit dem Jahr 2015 umkreist das Deep Space Climate Observatory auf einem *Lissajous-Orbit* (quasi-periodische Flugbahn benannt nach J. A. Lissajous, 1822–1880) den Lagrange-Punkt  $L_1$ . Der Lagrange-Punkt  $L_1$  bei dem System Erde-Mond ist ca. 58 000 km vom Mittelpunkt des Mondes in der Richtung zur Erde hin entfernt.

Der Lagrange-Punkt  $L_2$  befindet sich außerhalb der Erdumlaufbahn in einem Abstand von ca.  $1,5 \cdot 10^6$  km von der Erde. Die Umlaufdauer eines Körpers, der die Sonne im Lagrange-Punkt  $L_2$  umkreist, entspricht ebenfalls der Erdumlaufdauer, da sich die auf den Körper wirkenden Gravitationskräfte von Sonne und Erde additiv überlagern. Die Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)-Raumsonde, die die kosmische Hintergrundstrahlung untersuchte, befand sich im Zeitraum 2001 bis 2010 auf einem Lissajous-Orbit um den Lagrange-Punkt  $L_2$ .

Der Lagrange-Punkt  $L_3$  befindet sich bezogen auf den masseärmeren Himmelskörper hinter dem massereichen Zentralgestirn auf deren Verbindungslinie etwas außerhalb der Umlaufbahn des masseärmeren Himmelskörpers. Im Fall des Systems Sonne-Erde ist der Lagrange-Punkt  $L_3$  von der Sonne ca. 190 km weiter entfernt als die Erde. Die gleichgerichteten Anziehungskräfte von der Sonne und der Erde bewirken für einen Körper, der im Lagrange-Punkt  $L_3$  lokalisiert ist, eine Umlaufdauer, die gleich der Erdumlaufdauer ist. Die Übertragung von Funksignalen zwischen einer Raumsonde im Lagrange-Punkt  $L_3$  und der Erde wird jedoch durch die Sonne vollständig blockiert.

Die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  bilden jeweils einen Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks. Beide Dreiecke haben eine Seite gemeinsam, wobei das massereiche Zentralgestirn und der masseärmere Himmelskörper sich an den beiden Eckpunkten dieser Seite befinden. Bezogen auf die Umlaufrichtung des masseärmeren Himmelskörpers läuft der Lagrange-Punkt  $L_4$  voraus und  $L_5$  hinterher. Im Fall des Systems Sonne-Erde mit dem sehr großen Massenunterschied zwischen diesen beiden Himmelskörpern liegen die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  annähernd auf der Umlaufbahn der Erde und die Innenwinkel der beiden gleichseitigen Dreiecke betragen jeweils  $60^\circ$ . Bereits in den 1950ern wurden Staubwolken in den Lagrange-Punkten  $L_4$  und  $L_5$  des Systems Sonne-Erde experimentell nachgewiesen. Im Jahre 2010 wurde der Asteroid 2010TK<sub>7</sub> entdeckt, der sich um den Lagrange-Punkt  $L_4$  bewegt. Asteroiden oder kleine Monde, die sich in der näheren Umgebung der Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  befinden, werden auch als *Trojaner* oder *Trojanermonde* bezeichnet. Unter anderem gibt es im Mondsystem des Saturns einige Trojanermonde. So befinden sich in den Lagrange-Punkten  $L_4$  und  $L_5$  des Saturnmondes Tethys die kleinen Monde Telesto (in  $L_4$ ) bzw. Calypso (in  $L_5$ ). Bei dem System Erde-Mond wurden im Jahre 2018 die Kordylewski'schen Staubwolken (K. Kordylewski, 1903–1981) in den Lagrange-Punkten  $L_4$  und  $L_5$  nachgewiesen.

## 2.2.4 Trägheitskräfte

Das Trägheitsgesetz (Abschnitt 2.2.1) besagt, dass Bezugssysteme, die sich relativ zueinander gleichförmig bewegen (Inertialsysteme), physikalisch gleichwertig sind und die physikalischen Gesetzmäßigkeiten die gleichen mathematischen Abhängigkeiten zeigen. Anders

ausgedrückt: Das Grundgesetz der Dynamik ändert beim Übergang von einem in ein anderes Inertialsystem nicht seine Form, d. h. die wirkenden Kräfte haben den gleichen Betrag und die gleiche Richtung. Als Beispiel sei die gleichförmige Bewegung eines Massepunktes in einem Bezugssystem  $S$  genannt (Bild 2.23). Untersucht man diesen Vorgang von einem anderen Bezugssystem  $S'$  aus, das sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}_r$  relativ zu  $S$  bewegt, so ist zwar die Geschwindigkeit des Massepunktes in  $S'$  eine andere als in  $S$ , die Bewegung ist aber nach wie vor gleichförmig, d. h. die Beschleunigung  $\vec{a}$  ist null in beiden Systemen. Da Kraft und Beschleunigung proportional zueinander sind, kommen Beobachter in beiden Systemen zum gleichen Ergebnis, dass der Körper kräftefrei ist.

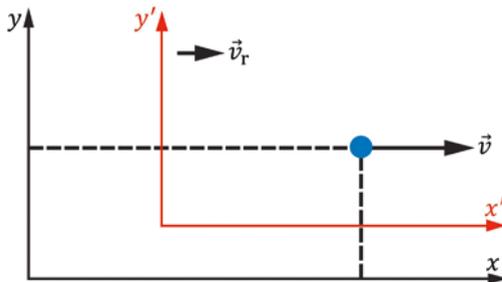


Bild 2.23

Gleichförmige Bewegung eines Massepunktes in zwei Inertialsystemen

Eine physikalisch andere Situation liegt vor, wenn das gewählte Bezugssystem beschleunigt ist. Dabei lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. das Bezugssystem erfährt eine Translationsbeschleunigung, wie beispielsweise in einem Aufzug oder in einem anfahrenen oder abbremsenden Fahrzeug.
2. das Bezugssystem rotiert, wobei die Rotation sowohl gleichförmig als auch ungleichförmig sein kann.

Entsprechend diesem zweiten Fall ist jedes mit der Erde fest verbundene Laborsystem ein rotierendes Bezugssystem.

Zunächst soll jedoch der Fall der Translationsbeschleunigung betrachtet werden: Ein einfaches Beispiel aus der Erfahrung ist das Verhalten von Gepäckstücken in einem Fahrzeug, das eine beschleunigte Bewegung durchführt. Bei einer Vollbremsung des Fahrzeugs beispielsweise nehmen alle mit dem Fahrzeug fest verbundenen Teile an dieser Verzögerung teil, verhalten sich also kinematisch ähnlich. Anders dagegen verhalten sich Gegenstände, die nur durch Haftreibung mit der Unterlage verbunden sind. Von außerhalb betrachtet, bewegen sich diese Gegenstände gleichförmig weiter, die in dem Fahrzeug ruhenden Insassen stellen jedoch eine beschleunigte Bewegung fest. Als Ursache dieser Bewegung würden sie die Anwesenheit einer beschleunigenden Kraft vermuten, was aber nicht der Wirklichkeit entspricht, da jeder Körper gemäß dem Trägheitsprinzip nur versucht, seinen Bewegungszustand beizubehalten. Tatsächlich erfahren nur die fixierten Teile des Systems (Fahrzeugs) eine Kraft, da ihr Bewegungszustand objektiv geändert wird, während die übrigen Teile nur subjektiv betrachtet beschleunigt werden.

Kräfte, die nur in beschleunigten Bezugssystemen auftreten, nicht aber in Inertialsystemen, sind sogenannte *Scheinkräfte*, da sie im Gegensatz zu eingepägten Kräften, die auch in Inertialsystemen vorhanden sind, nur vom Standpunkt abhängen. Man nennt sie auch *Trägheitskräfte*, da ihre „Existenz“ auf der Trägheit von Körpern beruht.



### Merke

Trägheitskräfte wirken in einem beschleunigten Bezugssystem entgegen dessen Beschleunigungsrichtung. Sie haben ihre Ursache darin, dass sich das System mit dem Beobachter beschleunigt bewegt und der betrachtete Körper allein seiner Trägheit unterliegt. Trägheitskräfte genügen nicht dem Dritten Newton'schen Gesetz (Reaktionsprinzip).

Der Betrag der Trägheitskraft ergibt sich aus der Beschleunigung des Systems und der Masse des betrachteten Körpers. Für den Vektor der Trägheitskraft in einem beschleunigten Bezugssystem gilt:

$$\vec{F}_T = -m\vec{a} \quad (2.71)$$

In analoger Weise wie dem eben behandelten Fall der translationsbeschleunigten Systeme lassen sich auch rotierende Bezugssysteme diskutieren. Betrachtet man beispielsweise einen Massepunkt, der sich gleichförmig auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  bewegt, so lässt sich diese Bewegung, von einem ruhenden Bezugssystem (Inertialsystem) aus beobachtet, nur durch eine Radialbeschleunigung  $a_r = v^2/r$  begründen. Damit diese Beschleunigung zustande kommt, muss eine zum Kreismittelpunkt gerichtete *Zentripetalkraft*  $\vec{F}_{ZP} = m\vec{a}_r$  vorhanden sein. Befindet sich der Beobachter dagegen in einem Bezugssystem, dessen Ursprung ebenfalls im Kreismittelpunkt liegt, sich aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, erscheint der Massepunkt in Ruhe. Dies bedeutet für den Beobachter im rotierenden System, dass der Massepunkt kräftefrei sein muss, was wiederum bedeutet, dass keine Kräfte wirken, oder sich die wirkenden Kräfte in einem Kräftegleichgewicht vollständig kompensieren. Eine Entscheidung herbeizuführen, ist für den mitrotierenden Beobachter nicht immer sofort möglich: z. B. werden die an der Trommelwandung einer Zentrifuge anhaftenden Teilchen durch die Führungskraft der Wandung „beschleunigt“, was dem in der Mitte befindlichen Beobachter verborgen bleibt. Wird andererseits die Kreisbahn durch eine im Zentrum befestigte Feder erzwungen, so kann der Beobachter aufgrund der Federdehnung die Bewegungsursache feststellen. Beide Fälle sind physikalisch gleichwertig, und für den rotierenden Beobachter kann nur ein Kräftegleichgewicht aus der unzweifelhaft vorhandenen Zentripetalkraft und einer entgegengesetzt gerichteten Kraft gleichen Betrags vorliegen. Diese „Gegenkraft“ wird *Zentrifugalkraft*  $\vec{F}_{ZF}$  (umgangssprachlich auch *Fliehkraft*) und die zugehörige Beschleunigung als *Zentrifugalbeschleunigung* bezeichnet:

$$\vec{F}_{ZF} = -\vec{F}_{ZP} = -m\vec{a}_r \quad \text{und} \quad F_{ZF} = F_{ZP} = m \frac{v^2}{r} \quad (2.72)$$

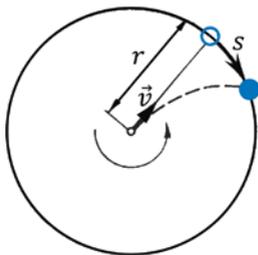
Im Gegensatz zur Zentripetalkraft ist die Zentrifugalkraft eine Trägheitskraft, da sie nur in Nicht-Inertialsystemen auftritt. Für einen Beobachter in einem Inertialsystem hat die Zentrifugalkraft keinerlei reale Bedeutung. Man kann daher auch nicht sagen, dass die Zentrifugalkraft Ursache für eine beschleunigte Bewegung ist. Dies wird auch dadurch belegt, dass der rotierende Körper nach „Abschalten“ der Zentripetalkraft sich innerhalb des Inertialsystems nur noch gleichförmig weiterbewegt, im rotierenden System jedoch eine beschleunigte Bewegung in radialer Richtung durchführt, die wiederum durch die Zentrifugalkraft „verursacht“ erscheint.

Die physikalischen Ursachen für die Zentripetalkraft können unterschiedlicher Natur sei:

1. So wird beispielsweise die Kurvenfahrt eines Fahrzeugs dadurch ermöglicht, dass sich die zur Kurveninnenseite gerichtete Zentripetalkraft als Summe der Reibungskräfte zwischen den Fahrzeugreifen und der Fahrbahn ergibt. Sind diese Reibungskräfte zu gering (z. B. bei Glatteis) verlässt das Fahrzeug die Kurvenbahn.
2. Der Mond bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Bahn (numerische Exzentrizität  $\varepsilon = 0,055$ ) um die Erde, die sich im Mittelpunkt dieser Bahn befindet. Die Kreisbewegung wird durch die von der Erde auf den Mond wirkende Gravitationskraft verursacht.
3. Bewegen sich geladene Teilchen (z. B. Elektronen) senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld, werden sie durch die sogenannte Lorentz-Kraft (Abschnitt 6.3.2) senkrecht zur Richtung ihrer ursprünglichen geradlinigen Bewegung und senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes auf eine Kreisbahn abgelenkt.

Während bei einer Kreisbahn die Zentripetalkraft stets zum Kreismittelpunkt orientiert ist, zeigt sie bei einer nicht-kreisförmigen Bahn auf den Mittelpunkt des momentanen Krümmungskreises und bewirkt die Richtungsänderung der Bahngeschwindigkeit. Die zur Zentripetalkraft orthogonale Tangentialkomponente bewirkt bei nicht-kreisförmigen Bahnen hingegen die Betragsänderung der Bahngeschwindigkeit. Daher ist bei den elliptischen Planetenbahnen die Geschwindigkeit eines Planeten im Perihel am größten und im Aphel am kleinsten.

Eine weitere Trägheitskraft in rotierenden Bezugssystemen ist die nach ihrem Entdecker benannte *Coriolis-Kraft* (G. G. de Coriolis, 1792–1843). Sie tritt stets dann in Erscheinung, wenn sich ein Körper in einem rotierenden Bezugssystem bewegt und diese Bewegung nicht parallel zur Rotationsachse verläuft bzw. nicht parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit orientiert ist. Die Coriolis-Kraft ist senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung des Körpers im rotierenden Bezugssystem orientiert und bewirkt eine seitliche Ablenkung, jedoch keine Vergrößerung oder Verkleinerung seiner Geschwindigkeit. In Bild 2.24 ist der Fall einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Kreisscheibe dargestellt. Vom Zentrum der Kreisscheibe wird mit radialer Anfangsrichtung und der Bahngeschwindigkeit  $v$  eine Kugel weggeschleudert. Die Kugel wird gemäß dem Trägheitsgesetz ihre vorgegebene Richtung beibehalten. Für einen außerhalb der Scheibe stehenden Beobachter, der sich in einem Inertialsystem befindet, bewegt sich die Kugel gemäß Trägheitsgesetz in radialer Richtung nach außen.



**Bild 2.24**  
Zur Entstehung der Coriolis-Kraft

Die Kreisscheibe dreht sich unter der Kugel weiter, wobei die Kugel auf der Kreisscheibe eine spiralförmige Spur „hinterlässt“. Ein im Drehzentrum stehender und mitrotierender Beobachter wird daher feststellen, dass die Kugel von der radialen Richtung nach rechts abweicht.

Die *Coriolis-Beschleunigung* ergibt sich dann aus folgender Betrachtung: Der Körper legt in der Zeit  $t$  in radialer Richtung die Strecke  $r = vt$  zurück. Die seitliche Abweichung in dieser Zeit beträgt  $s = r\omega t = v\omega t^2$ . Daraus folgt für die Coriolis-Beschleunigung  $\vec{a}_{\text{Coriolis}}$ :

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\vec{v} \times \vec{\omega} \quad \text{und} \quad a_{\text{Coriolis}} = 2v\omega \quad (\text{wenn } \vec{v} \perp \vec{\omega}) \quad (2.73)$$

und für die Coriolis-Kraft  $\vec{F}_{\text{Coriolis}}$  gilt:

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \quad \text{und} \quad F_{\text{Coriolis}} = 2m v \omega \quad (\text{wenn } \vec{v} \perp \vec{\omega}) \quad (2.74)$$

Die beiden vektoriellen Formeln gelten allgemein und insbesondere auch dann, wenn die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{\omega}$  nicht orthogonal zueinander orientiert sind.

Wie die Zentrifugalkraft ist auch die Coriolis-Kraft eine Trägheitskraft, die für die reale Bewegung des Körpers entbehrlich ist. Sie muss allerdings dann berücksichtigt werden, wenn die Kugel anders als im obigen Beispiel keine seitliche Ablenkung erfahren darf, d. h. sich innerhalb des rotierenden Systems gleichförmig nach außen bewegt. In diesem Fall ist eine reale Führungskraft erforderlich, deren Betrag der Coriolis-Kraft entspricht, jedoch in der Richtung entgegengesetzt ist. Beispiele sind Translationsbewegungen auf einem kurvenfahrenden Schiff oder ein rotierender Wasserschlauch. In der Technik ist die Coriolis-Kraft immer dann von Bedeutung, sobald eine Rotation von einer zweiten Bewegung überlagert wird. Wenn beispielsweise eine Last am Ausleger eines Krans senkrecht zur Drehachse des Krans bewegt wird, während sich der Kran um diese Achse dreht, hängt sie aufgrund der Coriolis-Kraft nicht senkrecht nach unten, sondern wird seitlich ausgelenkt. In der Robotik ist die Coriolis-Kraft aufgrund der Überlagerung von gleichzeitigen Translationen und Rotationen ebenfalls von Bedeutung.

Neben der Zentrifugal- und der Coriolis-Kraft ist die nach L. Euler (1707–1783) benannte *Euler-Kraft* die dritte Trägheitskraft in rotierenden Bezugssystemen. Im Gegensatz zur Coriolis-Kraft wirken die Zentrifugal- und die Euler-Kraft auch dann, wenn der Körper in dem rotierenden Bezugssystem ruht. Die Euler-Kraft tritt auf, wenn sich die Rotationsachse und/oder die Rotationsgeschwindigkeit eines rotierenden Bezugssystems ändert (beispielsweise in einem beschleunigenden oder abbremsenden Karussell) und es gilt:

$$\vec{F}_{\text{Euler}} = -m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = -m \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad \text{und} \quad F_{\text{Euler}} = m \alpha r \quad (\text{wenn } \vec{\alpha} \perp \vec{r}) \quad (2.75)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  den Vektor der Winkelbeschleunigung des rotierenden Bezugssystems.



### Beispiele

1. Mit welcher Kraft drückt ein Gepäckstück der Masse 20 kg auf die Lehne eines Rücksitzes in einem Pkw, wenn dieser mit einer Beschleunigung von  $2 \text{ m/s}^2$  anfährt? Die Kraft, die im Bezugssystem des beschleunigten Fahrzeuges vom Gepäckstück ausgeübt wird, ist eine Trägheitskraft und ihre Richtung ist entgegengesetzt zur Beschleunigung des Fahrzeugs. Für den Betrag gilt:

$$F_{\text{T}} = ma = 20 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 40 \text{ N}$$

2. Ein Körper der Masse 2 kg wird an einer 2 m langen Kette waagrecht im Kreis herumgeschwungen. Bei welcher Drehzahl zerreißt die Kette, wenn die maximal zulässige Zugkraft 8,5 kN beträgt? Im Bezugssystem des rotierenden Körpers übt dieser eine Zentrifugalkraft auf die Kette aus und es gilt:

$$F_{ZF} = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = mr \cdot 4\pi^2 f^2$$

und damit

$$f = \sqrt{\frac{F_{ZF}}{mr \cdot 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{8,5 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot 4\pi^2}} = 7,34 \text{ s}^{-1} = 440 \text{ min}^{-1}$$

3. Eine Waschmaschine mit einem Waschtrommeldurchmesser von 0,5 m erreicht im Schleudergang eine Drehzahl von 1000 Umdrehungen pro Minute. Die Zentrifugalbeschleunigung für ein mitrotierendes Wäschestück ergibt sich zu:

$$a_{ZF} = \omega^2 r \approx 2760 \text{ m/s}^2$$

(mit  $\omega \approx 105 \text{ rad/s}$  und  $r = 0,25 \text{ m}$ ). Das Ergebnis entspricht etwa dem 300-Fachen der Erdbeschleunigung. Auf ein Kleidungsstück an der Trommelwand wirkt somit eine Zentrifugalkraft, die 300-mal so groß ist wie seine Gewichtskraft.

## 2.2.5 Arbeit, Leistung und Energie

Der Begriff der Arbeit bedeutet im Alltagsleben die gezielte Schaffung von Werten unter Anwendung körperlicher und/oder geistiger Kräfte. Natürlich ist es unmöglich, aufgrund der Vielfalt von möglichen Werten und ihrer gesellschaftlichen Anerkennung zu einer einheitlichen und auch zeitlich beständigen Maßzahl für die so definierte Arbeit zu gelangen. In der Physik und der Technik dagegen ist der Begriff Arbeit viel enger gefasst und wird weniger mit dem produktiven Vorgang als vielmehr mit dessen Ergebnis verknüpft. Mit ihr wird eine für alle Kräfte gültige Messgröße bereitgestellt, die den mit Kraftwirkungen verbundenen Aufwand oder Nutzen erfasst, unabhängig von der speziellen Art des Vorgangs.

Ein einfaches Beispiel ist das Heben einer Last im Schwerfeld der Erde. Die körperliche Anstrengung, die hierzu erforderlich ist, hängt zum einen davon ab, wie hoch der Körper gehoben wird, und zum anderen, welche Gewichtskraft des Körpers zu überwinden ist bzw. welche Masse der zu hebende Körper hat. Der Einsatz eines technischen Hilfsmittels, wie der eines Flaschenzugs, mit dem die erforderliche Kraft verringert werden kann, ändert nichts an dem tatsächlichen physischen Aufwand, der zu leisten ist, da sich mit der Kraftminderung gleichzeitig die Wegstrecke zum Antrieb des Geräts gegenüber dem direkten Vorgang (ohne Verwendung des Flaschenzugs) verlängert.

Offensichtlich ist das Produkt aus ausgeübter Kraft und zurückgelegter Wegstrecke sowohl für den Aufwand als auch für das Ergebnis, nämlich die Lageveränderung des Gewichtes, entscheidend. In der Physik wird auf diese Weise der Begriff Arbeit definiert und die einfachste Formulierung lautet:

**Merke**

Arbeit ist das Produkt aus Kraft und zurückgelegtem Weg.

Durch die Produktbildung werden sowohl die Wegstrecke als auch die Kraft gleichwertig berücksichtigt. Hingegen wird keine Arbeit beispielsweise bei der rein statischen Wirkung von Kräften verrichtet, d. h. bei Kräftegleichgewichten in ruhenden Systemen.

Allerdings erfordert der obige Ansatz insofern eine Präzisierung, als Kräfte zur Bewegung von Körpern beitragen können, ohne selbst Ursache für die Bewegung zu sein. Beispiel: Jede Führungs- oder Zwangskraft bei einer Bewegung ermöglicht zwar eine bestimmte Bahnkurve, die reine Richtungsänderung bei einer Bewegung erfordert im Sinne der Physik aber keine besondere Anstrengung. Die gleichförmige Kreisbewegung, wie sie z. B. aufgrund einer konstanten Zentripetalkraft zustande kommt, liefert zwar eine Wegstrecke, aber sie erfordert keine Arbeit. Allgemein formuliert bedeutet das:

**Merke**

Durch eine Kraft, die senkrecht zum Vektor der momentanen Bahngeschwindigkeit eines bewegten Körpers angreift, wird keine Arbeit verrichtet.

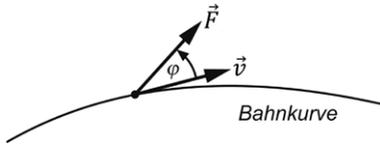
Damit folgt auch konsequenterweise, dass nur durch die Tangentialkomponente  $\vec{F}_t$  einer beliebigen Kraft in Richtung der Bahnkurve Arbeit verrichtet wird. Dabei muss noch unterschieden werden, ob die Richtung von  $\vec{F}_t$  mit der von  $\vec{v}$  übereinstimmt oder entgegengesetzt ist: bei gleicher Richtung wird die von der Kraft verrichtete Arbeit positiv gewertet, bei entgegengesetzter Richtung erhält die Arbeit ein negatives Vorzeichen. So ist die bei der Beschleunigung eines Massepunktes aufzubringende Arbeit positiv, bei Verzögerung (Abbremsung) dagegen negativ. Damit lautet schließlich die Definition der Arbeit bei konstanter Kraft längs eines geradlinigen Weges:

$$W = \pm F_t s \quad (2.76)$$

Die SI-Einheit der Arbeit ist:  $[W] = [F][s] = \text{Nm}$  (Newton mal Meter) = J (Joule). Gebräuchliche SI-fremde Einheiten sind:  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$  (Kilowattstunde) und  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (Elektronvolt). Die Einheit Kilowattstunde liefert für größere Arbeitsbeträge handlichere Zahlenwerte als die Verwendung der Einheit Joule. Sie leitet sich, wie auch die noch größeren Einheiten Mega- und Gigawattstunde, von der Einheit  $\text{W s}$  (Wattsekunde) = 1 J ab. Das Elektronvolt wird besonders in der Kern- und Elementarteilchenphysik, in der Atom- und Molekülphysik (Kapitel 8) und auch teilweise in der Festkörperphysik (Kapitel 9) verwendet. Die Arbeit ist im Gegensatz zu den Größen Kraft, Geschwindigkeit und Beschleunigung eine skalare Größe und besitzt dementsprechend keinen Richtungssinn und keine Orientierung, sondern ist nur vorzeichenbehaftet.

Mithilfe des Winkels  $\varphi$  zwischen dem Vektor der Kraft und dem Geschwindigkeitsvektor (Bild 2.25) lässt sich die Arbeit bei konstantem Betrag der Kraftkomponente in Bewegungsrichtung folgendermaßen angeben:

$$W = F s \cos(\varphi) \quad (2.77)$$

**Bild 2.25**

Zur Definition der Arbeit: Nur durch die Tangentialkomponente der Kraft wird Arbeit verrichtet

Bei dieser Darstellung wird das Vorzeichen der Arbeit durch die Winkelfunktion bestimmt. Die Gl. (2.77) ist auch dann korrekt, wenn die Bewegung krummlinig erfolgt, solange der Betrag von  $F_t$  und  $\cos(\varphi)$  entlang der Bahn konstant bleiben. So gilt beispielsweise für eine gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung während eines Umlaufs:  $W = F_t 2\pi r = m a_t 2\pi r = m \alpha 2\pi r^2$ , wobei  $\alpha$  die Winkelbeschleunigung ist. Die für die Radialbeschleunigung  $a_r$  erforderliche Komponente der Kraft trägt nichts zur Arbeit bei.

In vielen Fällen ist jedoch die Tangentialkomponente  $F_t$  entlang der Bahnkurve nicht konstant, weil sich der Betrag und/oder die Richtung der Kraft  $\vec{F}$  ändern. Sofern  $F_t$  abschnittsweise konstant ist, setzt sich die Arbeit längs einer Wegstrecke  $s$  aus einzelnen Beiträgen zusammen, die zu summieren sind:

$$W = \sum_{i=1}^n F_i \cos(\varphi_i) \Delta s_i \quad (2.78)$$

Ist auch die Voraussetzung der abschnittswisen konstanten Tangentialkomponente der Kraft nicht mehr gegeben, so muss die Summation durch ein Weg- bzw. Linienintegral ersetzt werden. Für die Arbeit bei ortsabhängiger Kraft gilt dann:

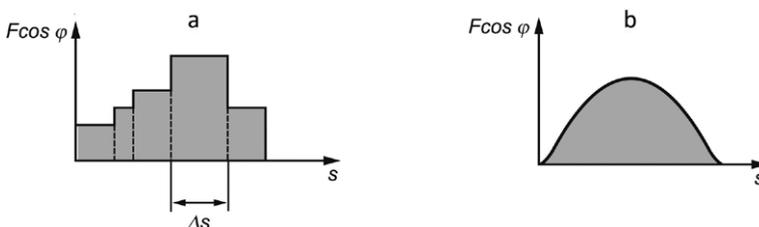
$$W = \int_1^2 F \cos(\varphi) ds \quad (2.79a)$$

Die vektorielle Form des Arbeitsintegrals lautet:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.79b)$$

Die Integrationsgrenzen 1 und 2 bezeichnen Anfangs- und Endpunkt der Bewegung.

Das Verfahren ist ähnlich dem bei der Bestimmung der Wegstrecke, die bei einer ungleichförmig beschleunigten Bewegung zurückgelegt wird. Geometrisch entspricht  $s$  der Fläche unter der  $v$ - $t$ -Kurve. Die Ermittlung der Arbeit  $W$  lässt sich ebenfalls als Flächenbestimmung veranschaulichen. Hierzu wird  $F_t = F \cos(\varphi)$  in Abhängigkeit von  $s$  aufgetragen. Die zwischen dem Graphen und der Abszisse liegende Fläche entspricht bei Bewegungen mit abschnittsweise konstanter Kraftkomponente  $F_t$  der Summe der Einzelarbeiten (Bild 2.26a), bei kontinuierlichem Verlauf dem Integral (Bild 2.26b).



**Bild 2.26** a) Die Arbeit bei unstetiger Wegabhängigkeit der Kraft ergibt sich aus der Summe der Teilbereiche, b) die Arbeit bei stetiger Wegabhängigkeit der Kraft ergibt sich als das Integral über dem Weg

Sowohl bei unstetigem als auch stetigem Kurvenverlauf kann die Arbeit positiv, null oder negativ sein. Der Fall Null tritt beispielsweise dann ein, wenn ein Körper zuerst beschleunigt und dann auf die Anfangsgeschwindigkeit wieder abgebremst wird. Die hierzu erforderliche Tangentialkraft wechselt beim Übergang von der Beschleunigungs- in die Verzögerungsphase ihre Richtung, sodass sich die beiden Beiträge gegenseitig aufheben.

Bei der Bewegung eines Körpers sind häufig verschiedene Kräfte mit unterschiedlichen Ursachen beteiligt. So ist beispielsweise für die Bewegung eines Fahrzeugs die Überwindung von Reibungs- oder Fahrwiderstandskräften erforderlich. Hinzu kommt bei Fahrtstrecken mit Höhenunterschieden die Einwirkung der Schwerkraft, und jede Änderung des Bewegungszustandes erfordert Beschleunigungs- oder Verzögerungskräfte. Dabei lässt sich grundsätzlich für jede Teilkraft auch die damit verbundene Arbeit ermitteln. Bei den Kräften, die keine Änderung des Bewegungszustandes hervorrufen, muss aber noch zwischen der auslösenden Aktionskraft und der zu überwindenden Gegenkraft unterschieden werden. Beispielsweise wirken bei der gleichförmigen Bewegung eines Körpers im Schwerfeld vom Erdboden senkrecht nach oben zwei Kräfte auf den Körper ein: die Schwerkraft sowie die vom Verursacher ausgeübte Aktionskraft, die der Schwerkraft entgegen gerichtet ist. Dementsprechend haben die Arbeiten der Aktionskraft sowie der Schwerkraft unterschiedliche Vorzeichen: die von der Aktionskraft verrichtete Arbeit ist positiv während die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit negativ ist.

Die im folgenden Abschnitt näher erläuterten Beispiele lassen sich zwei Gruppen zuordnen. Unter der *Beschleunigungsarbeit* versteht man die Arbeit, die mit der Beschleunigung oder Verzögerung von Körpern verbunden ist. *Verschiebungsarbeit* dagegen nennt man die Arbeit, die bei allen übrigen Vorgängen, bei denen es ebenfalls zu einer Lageveränderung des betrachteten Körpers kommt, erbracht wird. Reine Verschiebungsarbeit liegt immer dann vor, wenn die Bewegung des Körpers gleichförmig erfolgt.

### Beschleunigungsarbeit

Das Ergebnis einer beschleunigten oder verzögerten Bewegung ist die Änderung der Geschwindigkeit des betroffenen Körpers. Dies ermöglicht, die Beschleunigungsarbeit durch eben diese Geschwindigkeitsänderung auszudrücken. Da nur die Tangentialkomponente der Kraft maßgeblich für die Beschleunigungsarbeit ist, bedeutet dies, dass nur die Betragänderung der Geschwindigkeit hierfür relevant ist.

Ein einfacher Fall ist die beschleunigte Bewegung eines Körpers mit konstanter Tangentialbeschleunigung  $a_t$  und der Anfangsgeschwindigkeit null. Für die in der Zeit  $t$  zurückgelegte

Wegstrecke gilt:  $s = \frac{1}{2} v t = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a_t}$  mit der Endgeschwindigkeit  $v$ . Daraus folgt für die Beschleunigungsarbeit bei Anfangsgeschwindigkeit null:

$$W_B = m a_t s = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.80)$$

Das Ergebnis ist auch dann gültig, wenn die Beschleunigung ungleichmäßig erfolgt. Dies bedeutet, dass die Arbeit nur vom Quadrat der Geschwindigkeit jedoch nicht vom tatsächlichen Zeitverlauf der Bewegung abhängt. Hatte der Körper zu Beginn bereits eine von null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit, so ist die resultierende Arbeit die Differenz aus zwei Beschleunigungsarbeiten:

$$W_B = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad (2.81)$$

Gl. (2.81) liefert auch das korrekte Ergebnis bei einer verzögerten Bewegung: In diesem Fall ist die Anfangsgeschwindigkeit  $v_1$  größer als die Endgeschwindigkeit  $v_2$ , d. h., die Beschleunigungsarbeit wird negativ.



### Beispiel

Welche Beschleunigungsarbeit muss der Antrieb eines Pkw der Masse 1 200 kg verrichten, wenn während einer Fahrt 10-mal an einer Ampel gehalten und zwischen den Stopps jeweils auf 50 km/h beschleunigt wurde?

Für die Arbeit für den gesamten Beschleunigungsvorgang gilt:

$$W_B = 10 \cdot \frac{1\,200 \text{ kg} \cdot 50^2 \text{ m}^2}{2 \cdot 3,6^2 \text{ s}^2} = 1,16 \text{ MJ} = 1,16 \text{ MWs} = 0,322 \text{ kWh}$$

### Verschiebungsarbeit

Am einfachsten sind die Verhältnisse, wenn die betrachteten Kräfte längs des Wegs konstant, d. h. weder von der momentanen Lage des bewegten Körpers noch von seiner Geschwindigkeit abhängig sind. Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung eines Körpers im homogenen Schwerfeld der Erde. Um eine Masse  $m$  entgegengesetzt zur Richtung der Schwerkraft anzuheben, ist die Hubarbeit  $W_H$  erforderlich:

$$W_H = mgh \quad (2.82)$$

Dabei bezeichnet  $h$  den Höhenunterschied zwischen Ausgangs- und Endlage. Das Ergebnis gilt auch dann, wenn die Bewegung nicht parallel zur Schwerkraft, sondern beliebig erfolgt, sofern nur die beiden Lagen sich durch die Höhendifferenz  $h$  unterscheiden.



### Merke

Die entgegen der Schwerkraft verrichtete Arbeit ist unabhängig vom Weg auf dem der Körper bewegt wird und hängt nur vom Höhenunterschied ab.

Ein weiteres Beispiel einer Verschiebung, bei der die wirkende Kraft von der momentanen Lage des bewegten Körpers abhängt, ist die Bewegung im Gravitationsfeld eines Planeten, z. B. der Erde. Solange die Lageveränderungen klein gegenüber dem Abstand der miteinander wechselwirkenden Massen sind, lässt sich die Näherung des homogenen Schwerfelds anwenden, wie beispielsweise auf der Erdoberfläche. Sind jedoch die Lageveränderungen nicht klein gegenüber dem Abstand und der betrachtete Körper legt große Entfernungen, wie etwa in der Raumfahrt, zurück, gilt die Näherung des homogenen Schwerfelds nicht mehr. Dann ist das Gravitationsgesetz (Gl. (2.55)) zu berücksichtigen, wonach der Betrag der Gravitationskraft zwischen zwei Massen umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat ist. Daher muss die Verschiebungsarbeit wieder per Integration bestimmt werden. Beispielhaft sei ein Körper der Masse  $m$ , der sich in radialer Richtung von einem Planeten mit der Masse  $m_p$

entfernen soll. Für die Verschiebungsarbeit im Gravitationsfeld zwischen zwei Abständen  $r_A$  und  $r_B$  mit  $r_B > r_A$  gilt dann:

$$W = G m m_p \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = -G m m_p \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (2.83)$$

Die so berechnete Arbeit gilt auch für Bewegungen, die nicht radial, sondern beliebig erfolgen, da analog zur Schwerkraft bei der Bewegung senkrecht zur wirkenden Gravitationskraft keine Arbeit verrichtet wird. Die Arbeit hängt damit insbesondere nur vom Anfangs- und vom Endabstand ab.

### Reibungsarbeit

Eine zunächst ähnliche Situation scheint vorzuliegen, wenn man die Auswirkungen der Widerstandskräfte bei der Festkörperreibung betrachtet. Die für deren Überwindung erforderliche Reibungsarbeit  $W_R$  ergibt sich bei konstanter Reibungskraft aus:

$$W_R = F_R s \quad (2.84)$$

Ein wesentlicher Unterschied zur Hubarbeit besteht jedoch darin, dass bei der Reibungsarbeit der tatsächlich zurückgelegte Weg entscheidend ist, sofern die Reibung längs der gesamten Bahnkurve wirksam ist. Besonders deutlich wird dies bei einer Richtungsumkehr des bewegten Körpers. Im Gegensatz zur Hubarbeit, bei der eine Bewegung in Richtung der Schwerkraft mit einer negativen Arbeit (vom Standpunkt des Beobachters aus) entspricht, ist die Reibungsarbeit stets positiv, sodass die Addition der Reibungsarbeitsbeiträge aus Hin- und Rückweg den doppelten Wert für die gesamte Reibungsarbeit ergibt. Ist die Reibung nicht ausschließlich Festkörperreibung, sondern sind flüssige oder gasförmige Medien beteiligt, so hängt die Widerstandskraft im Allgemeinen von der Momentangeschwindigkeit des bewegten Körpers ab. Dementsprechend gilt Gl. (2.84) nur bei gleichförmiger Bewegung, nicht aber während einer Beschleunigungs- oder Verzögerungsphase, da sich dann  $F_R$  längs des Wegs verändert. Als Beispiel sei die Berechnung der Reibungsarbeit bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung eines Körpers mit Luftwiderstand betrachtet. Für die dabei auftretende *Strömungswiderstandskraft*  $F_W$  gilt:

$$F_W = c_W A \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2.85)$$

Dabei bezeichnet  $c_W$  den dimensionslosen Strömungswiderstandskoeffizient (auch als Widerstandsbeiwert, Widerstandskoeffizient, Stirnwiderstand oder als  $c_W$ -Wert bezeichnet),  $A$  ist die Bezugsfläche (üblicherweise ist dies die Stirnfläche des Körpers) und  $\rho$  die Massendichte der Luft. Der Faktor  $\frac{1}{2} \rho v^2$  wird als Staudruck bezeichnet (Abschnitt 3.2). Für praktische Anwendungen wird der Wert von  $c_W$  als konstant angesetzt, sodass die Strömungswiderstandskraft quadratisch mit der Geschwindigkeit zunimmt. Bei gleichmäßiger Beschleunigung  $a$  gilt für die Geschwindigkeit  $v^2 = 2 s a$  und damit  $F_W = c_W A \rho s a$ , d. h. die Strömungswiderstandskraft und damit der Luftwiderstand sind direkt proportional zum zurückgelegten Weg  $s$ . Durch Integration ergibt sich daraus die Reibungsarbeit bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung mit Luftwiderstand:

$$W_W = \int F_W ds = \frac{1}{2} c_W A \rho s^2 a = \frac{1}{2} F_W s \quad (2.86)$$

## Verformungsarbeit

Eine direkte Proportionalität zwischen der Kraft und dem zurückgelegten Weg liegt auch bei einem völlig anders gearteten Fall vor, nämlich der elastischen und damit reversiblen Verformung einer Feder. Für den Betrag der Spannkraft einer Feder gilt im linear-elastischen Bereich:  $F_F = ks$  mit der Federkonstanten  $k$  und der Auslenkung  $s$ . Die Arbeit, die erforderlich ist, um die Feder um die Länge  $s$  auszulenken, d. h. zu dehnen oder zu stauchen, ergibt sich durch Integration als linear-elastische Verformungsarbeit bei einer Feder:

$$W_F = \frac{1}{2} ks^2 = \frac{1}{2} F_F s \quad (2.87)$$



### Beispiele

1. Ein Körper mit der Masse 1 kg soll von der Erdoberfläche aus so weit verschoben werden, bis die Gravitationswechselwirkung mit der Erde vernachlässigt werden kann. Wie groß ist die erforderliche Verschiebungsarbeit?

Für  $r_1$  ist der Erdradius  $R_E = 6370$  km und für  $r_2$  ist der Wert unendlich einzusetzen. Mit der Gravitationskonstanten  $G$  und der Erdmasse  $M_E = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg folgt daraus:

$$W = mGM_E \frac{1}{r_E} = mgR_E = \frac{1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot 6378 \text{ km}}{\text{s}^2} = 62,6 \text{ MJ}$$

2. Ein Fahrzeug mit der Masse 1000 kg beschleunigt mit  $1,5 \text{ m/s}^2$  aus dem Stand und erreicht eine Endgeschwindigkeit von 100 km/h. Die Strömungswiderstandskraft  $F_W$  bei der Endgeschwindigkeit beträgt 600 N. Wie groß ist die zu erbringende Widerstandsarbeit?

Um die angegebene Endgeschwindigkeit zu erreichen, legt das Fahrzeug eine Strecke von

$$s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{100^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^2}{2 \cdot 3,6^2 \text{ s}^2 \cdot 1,5 \text{ m}} = 257 \text{ m}$$

zurück. Die Reibungsarbeit ist dann:

$$W_R = \frac{1}{2} F_W s = \frac{1}{2} \cdot 600 \text{ N} \cdot 257 \text{ m} = 77,1 \text{ kJ}$$

## Leistung

Noch häufiger als der Begriff der Arbeit wird der Begriff der Leistung zur Bewertung von technischen oder ökonomischen Vorgängen benutzt. Die ebenfalls skalare und vorzeichenlose Größe Leistung verknüpft die Größe Arbeit mit dem Zeitaufwand, der für die Verrichtung der Arbeit erforderlich ist, und stellt somit ein Maß für die Effektivität eines Vorgangs dar. In der Technik dient die Größe Leistung insbesondere dazu, das Arbeitsvermögen einer Maschine zu charakterisieren. Die *mittlere Leistung*  $P_m$  ist folgendermaßen definiert:

$$P_m = \frac{W}{t} \quad (2.88)$$

Die SI-Einheit der Leistung ist:  $[P] = [W]/[t] = \text{J/s} = \text{W}$  (Watt). Durch Umstellen der Einheitsgleichung ergibt sich folgende Beziehung:  $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ W s}$  (Wattsekunde). Eine ältere, heute ungesetzliche, aber dennoch gebräuchliche Einheit ist:  $1 \text{ PS}$  (Pferdestärke) =  $735,5 \text{ W}$  bzw.  $1 \text{ kW} \approx 1,36 \text{ PS}$ .

Bei allen Vorgängen, bei denen die Arbeit linear von der Zeitdauer  $t$  abhängig ist, entspricht die mittlere Leistung zugleich auch einer momentanen Größe. Dies trifft dann zu, wenn beispielsweise die wirkende Kraft konstant und die Bewegung gleichförmig ist. In diesem Fall gilt für die Verschiebungsarbeit:  $W = F s \cos(\varphi) = F v t \cos(\varphi)$  und damit für die mittlere Leistung:  $P_m = F v \cos(\varphi)$ . Ist hingegen die Arbeit keine lineare Funktion der Zeit  $t$ , so ist die *momentane Leistung* mittels des Grenzwertes der mittleren Leistung für kleine Zeitintervalle  $\Delta t$  zu berechnen:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta W}{\Delta t} \right) = \frac{dW}{dt} \quad (2.89)$$

Das Produkt aus den Beträgen der Vektoren  $\vec{F}$  und  $\vec{v}$  sowie  $\cos \varphi$  lässt sich auch mit dem Skalarprodukt angeben:

$$P = F v \cos(\varphi) = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.90)$$

Die momentane Leistung einer Kraft  $\vec{F}$  ist proportional der Tangentialkomponente von  $\vec{F}$  und dem Betrag der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Massepunktes oder Körpers, auf den die Kraft  $\vec{F}$  wirkt. Daraus folgt, dass bei einem Beschleunigungsvorgang die Momentanleistung mit der Zeit zunehmen muss. Beispielhaft sei die gleichmäßige Beschleunigung aus der Ruhelage heraus betrachtet. In diesem Fall nimmt die Geschwindigkeit linear mit der Zeit  $t$  zu und es gilt für die Leistung:  $P = m a^2 t$ , d. h. die Leistung  $P$  ist proportional zur Zeit  $t$ . Dementsprechend erreicht die Leistung am Ende des Beschleunigungsvorgangs ihren Maximalwert  $P_{\max}$ . Für die mittlere Leistung  $P_m$  bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt dann:

$$P_m = \frac{1}{2} P_{\max} = \frac{1}{2} F v_{\max} \quad (2.91)$$



### Beispiele

1. Eine Pumpe fördert 10 Liter Wasser pro Sekunde über eine Steigleitung mit einem Höhenunterschied von 10 m. Das Wasser hat eine Dichte von ca.  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Welche Förderleistung muss die Pumpe erbringen?

Die von der Pumpe in einer Sekunde geleistete Hubarbeit ist:

$$W_H = m g h = \rho V g h = \frac{1000 \text{ kg} \cdot 0,010 \text{ m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} = 981 \text{ J}$$

Die mittlere Leistung ist dann

$$P_m = \frac{W_H}{t} = \frac{981 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 981 \text{ W}$$

Nicht berücksichtigt wurde bei diesem Ansatz die Leistung, die für die Beschleunigung des Wassers erforderlich ist.

2. Ein Pkw mit der Masse 1 200 kg soll aus dem Stand gleichmäßig in 10 s auf eine Endgeschwindigkeit von 90 km/h beschleunigt werden. Welche maximale und welche mittlere Leistung muss der Antrieb des Pkws erbringen?

Für die Beschleunigung gilt:

$$a = \frac{v_{\max}}{t} = \frac{90 \text{ m}}{10 \text{ s} \cdot 3,6 \text{ s}} = 2,5 \text{ m/s}^2,$$

für die Antriebskraft gilt:

$$F = ma = 1\,200 \text{ kg} \cdot 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3 \text{ kN},$$

für die maximale Leistung gilt:

$$P_{\max} = F v_{\max} = \frac{3 \text{ kN} \cdot 90 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 75 \text{ kW}, \text{ und}$$

für die mittlere Leistung gilt:

$$P_m = P_{\max} / 2 = 37,5 \text{ kW}.$$

Diese berechnete Leistung gilt jedoch nur für den Beschleunigungsvorgang.

## Energie

Die durch die verrichtete Arbeit bewirkten Veränderungen beispielsweise am Bewegungszustand eines Massepunktes oder eines Körpers werden mit der Zustandsgröße Energie quantitativ erfasst. Wie die zuvor diskutierten Größen Arbeit und Leistung ist auch die Energie eine skalare Größe, die wie die Größe Arbeit vorzeichenbehaftet sein kann. Da der Begriff der Arbeit zuvor im Rahmen der Mechanik diskutiert wurde, soll dementsprechend auch der Begriff der Energie im vorliegenden Abschnitt aus Sicht der Mechanik betrachtet werden. Zwischen der Arbeit als Prozessgröße, mit der die Änderung zwischen zwei Zuständen (1 und 2) erfasst wird, und der Energie besteht folgender Zusammenhang:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W(1 \rightarrow 2) \quad (2.92)$$

Je nach Vorzeichen der geleisteten Arbeit ist die Energieänderung  $\Delta E$  positiv oder negativ, was entweder einer Zunahme oder einer Abnahme der Energie entspricht.

Im Rahmen der Mechanik wird zwischen zwei grundsätzlich verschiedene Formen der Energie unterschieden: die *potentielle Energie* oder Lageenergie und die *kinetische Energie* oder *Bewegungsenergie*. Während mit der potentiellen Energie alle die Zustandsänderungen erfasst werden, die mit einer reinen Lageveränderung des betrachteten Massepunktes oder Körpers verbunden sind, beschreibt die kinetische Energie den Bewegungszustand. Somit entspricht die Änderung der kinetischen Energie der Beschleunigungsarbeit, die verrichtet wurde. Hingegen entspricht beispielsweise die Verformungsarbeit an einer Feder oder die Hubarbeit bei der Bewegung im Schwerfeld der Erde der Änderung der potentiellen Energie.

Die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  eines Massepunktes bzw. Körpers ist stets positiv (größer oder gleich null) und ist gleich dem Betrag der Beschleunigungsarbeit:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.93)$$

Der Wert der potentiellen Energie eines Massepunktes oder eines Körpers hängt von der speziellen Wechselwirkung und von der Wahl des Ausgangszustands ab, mit dem die Veränderungen verglichen werden sollen. Er hat daher keine absolute Bedeutung. Bei der potentiellen Energie einer Masse  $m$  im Schwerfeld der Erde wird im allgemeinen die Erdoberfläche (z. B. auf Meereshöhe) als Bezugsebene gewählt. Die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  ergibt sich in diesem Fall aus der verrichteten Hubarbeit  $W_{\text{H}}$ , um die Masse  $m$  auf die Höhe  $h$  zu heben:

$$E_{\text{pot}} = mgh \quad (2.94)$$

Dazu analog ergibt sich die potentielle Energie einer gespannten Feder durch die geleistete Verformungsarbeit für die erzielte Auslenkung  $s$ :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k s^2 \quad (2.95)$$

Die Berechnung der potentiellen Energie bezüglich der Gravitation ergibt sich aus der Verschiebungsarbeit, die durch die Gravitationskraft verrichtet wurde und es gilt:

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = -mMG \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.96)$$

Als Bezugspunkt für die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  wird der Fall mit unendlich großem Abstand zwischen den beiden Massen gewählt:  $E_{\text{pot},1} = 0$  für  $r_1 \rightarrow \infty$ . Mit  $r_2 = r$  folgt damit:

$$E_{\text{pot}} = -mMG \frac{1}{r} \quad (2.97)$$



### Beispiele

1. Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Körper von der Erdoberfläche starten, damit er den Anziehungsbereich der Erde verlassen kann?

In einem vorangegangenen Beispiel wurde die Arbeit berechnet, die zum Verschieben einer Masse von 1 kg ins Unendliche benötigt wird. Setzt man diese Arbeit gleich der äquivalenten Beschleunigungsarbeit, so erhält man daraus die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 62,6 \text{ MJ}}{1 \text{ kg}}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Diese Geschwindigkeit ist die *Fluchtgeschwindigkeit* bzw. die *zweite kosmische Geschwindigkeit* (Abschnitt 2.2.3).

2. Wie groß ist das Verhältnis aus kinetischer zu potentieller Energie bei einem Satelliten, der sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um einen Planeten befindet?

Die Bewegungsgleichung des Satelliten mit der Masse  $m$  lautet:

$$ma = m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

Nach Multiplikation mit dem Faktor  $r/2$  erhält man

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} G \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}}$$

Die kinetische Energie ist also gerade die Hälfte des Betrags der potentiellen Energie (*Virialsatz*, aufgestellt im Jahre 1870 von R. J. E. Clausius, 1822–1888).

## 2.2.6 Erhaltungssätze der Mechanik

Bleibt eine skalare oder eine vektorielle physikalische Größe während der zeitlichen Entwicklung eines Systems konstant bzw. erhalten, wird dies in einem Erhaltungssatz ausgedrückt. Die wichtigsten Erhaltungssätze der Mechanik beziehen sich auf die Impuls-, die Drehimpuls- und auf die Energieerhaltung.

### Impulserhaltung

Im Abschnitt 2.2.1 wurde bei der Diskussion der Newton'schen Gesetze bereits gezeigt, dass die zeitliche Änderung (erste Ableitung) des Impulses gleich der wirkenden Kraft ist (Gl. (2.48)). Dementsprechend ändert sich der Impuls nicht, d. h. der Betrag und die Richtung des Impulses sind konstant, wenn keine Kraft wirkt. Dieses Konzept lässt sich auf beliebige Systeme, die aus zwei oder mehreren Massepunkten oder Körpern zusammengesetzt sind, erweitern. Zunächst sei der Fall von zwei wechselwirkenden Massepunkten, die im Folgenden mit den Ziffern 1 und 2 bezeichnet sind, betrachtet. Gemäß dem Reaktionsprinzip (Drittes Newton'sches Gesetz) gilt für die zwischen den beiden Massepunkten wirkenden Kräfte:  $\vec{F}_1 = \vec{F}(2 \rightarrow 1) = -\vec{F}_2 = \vec{F}(1 \rightarrow 2)$ . Die Kraft, die Massepunkt 2 auf 1 ausübt, ist dem Betrag nach gleich groß, in der Richtung aber entgegengesetzt der Kraft, die Massepunkt 1 auf 2 ausübt. Sofern keine weiteren Kräfte wirken, sind die Beschleunigungen  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  der beiden Massepunkte entgegengesetzt gerichtet. Durch Einsetzen des Differentialquotienten  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  ergibt sich:  $\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1 = m_1 d\vec{v}_1/dt = -\vec{F}_2 = -m_2 \vec{a}_2 = -m_2 d\vec{v}_2/dt$ . Da im Rahmen der klassischen Mechanik die Massen konstant sind folgt daraus:  $dm_1 \vec{v}_1/dt = d\vec{p}_1/dt = -dm_2 \vec{v}_2/dt = -d\vec{p}_2/dt$ . Dies bedeutet für die Impulse der beiden Massepunkte:  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  bzw.  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ . Gemäß dem Reaktionsprinzip sind die Impulse der beiden Massepunkte dem Betrag nach gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet, sodass sich die beiden Impulse vektoriell zu einem verschwindenden Gesamtimpuls addieren, sofern keine weitere (externe) Kraft auf die beiden Massepunkte wirkt.

Der Gesamtimpuls lässt sich auch allgemein für eine größere Anzahl von Massepunkten oder Körpern definieren:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad (2.98)$$

Gemäß dem vorangegangenen Beispiel ist der Gesamtimpuls konstant, wenn keine externe Kraft wirkt bzw. sich die externen Kräfte vollständig kompensieren:

$$\vec{P} = \text{konstant} \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ex}} = 0 \quad (2.99)$$

**Merke**

**Impulserhaltungssatz:** Der Gesamtimpuls eines Systems ist erhalten, sofern keine externen Kräfte wirken, oder sich die externen auf das System wirkenden Kräfte vollständig kompensieren.

Die Impulserhaltung lautet:

$$\vec{P} = \text{konstant} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dP_x}{dt} = F_{\text{ex},x} = 0 \\ \frac{dP_y}{dt} = F_{\text{ex},y} = 0 \\ \frac{dP_z}{dt} = F_{\text{ex},z} = 0 \end{cases} \quad (2.100)$$

Dieser Erhaltungssatz des Gesamtimpulses ist fundamental und gilt unabhängig von der Art der Wechselwirkung sowie den Anfangsbedingungen und darüber hinaus in jeder Phase einer Wechselwirkung, d. h. nicht nur am Anfang oder Ende eines Vorgangs. Der Impulserhaltungssatz ist die am besten überprüfte Erfahrungstatsache in der Physik, was nicht weiter verwundert, da als Messgrößen nur Massen und Geschwindigkeiten benötigt werden. Die mathematische Umkehrung der Impulserhaltung (Gl. (2.99)) ermöglicht die Berechnung einer unter einer Krafteinwirkung erfolgten Impulsänderung, wenn der zeitliche Verlauf der Kraft gegeben ist. Dies ist vor allem dann von Bedeutung, wenn die Krafteinwirkung zeitlich begrenzt ist wie bei stoß- oder ruckartigen Vorgängen. Als Beispiel sei eine Kraft betrachtet, die während ihrer Wirkungsdauer konstant ist, d. h. es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. In diesem Fall ist die Impulsänderung  $\Delta\vec{p}$  gleich dem Produkt  $\vec{F}\Delta t$ . Bei einer zeitabhängigen Kraft ist dieses Produkt durch eine Integration zu ersetzen:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (2.101)$$

Die durch eine kurzzeitige Krafteinwirkung verursachte Impulsänderung wird als Kraftstoß bezeichnet.

Ein klassisches Beispiel für die Anwendung des Impulserhaltungssatzes ist die Beschleunigung eines Flugkörpers durch einen Strahlantrieb, bei dem die beschleunigende Kraft durch einen gerichteten Masseausstoß zustande kommt. In den meisten Fällen wird dies durch die Verbrennung eines gasförmigen, flüssigen oder festen Treibstoffs realisiert. Die heißen Verbrennungsabgase verlassen den zuvor meist ruhenden Flugkörper mit hoher Geschwindigkeit. Aufgrund der Impulserhaltung, die für das Gesamtsystem Flugkörper und ausströmende Verbrennungsabgase gilt, erfährt der Flugkörper eine Impulsänderung, deren Betrag genau dem Gesamtimpuls der ausgestoßenen Gasteilchen der heißen Verbrennungsabgase entspricht: Sei  $\Delta m$  der während eines Zeitintervalls  $\Delta t$  entstandene Masseverlust des Flugkörpers durch die austretenden Verbrennungsabgase. Unter der Annahme, dass die Austrittsgeschwindigkeit  $u$  der Gasteilchen während des Vorgangs nahezu konstant ist, ergibt sich für den Betrag der Impulsänderung:  $|\Delta\vec{p}| = \Delta p = |\Delta m \cdot u| = -\Delta m \cdot u$ . Das negative Vorzeichen ist erforderlich, da  $\Delta m < 0$ . Die Geschwindigkeit  $u$  ist dabei die von einem nicht

beschleunigten Bezugssystem (Inertialsystem), d. h. nicht vom Flugkörper aus gemessene Geschwindigkeit. Sie ist somit gleich der Differenz aus der Austrittsgeschwindigkeit  $u_0$  der Gasteilchen relativ zum Flugkörper und der momentanen Geschwindigkeit  $v$  des Flugkörpers:  $u = u_0 - v$ . Aufgrund des Impulserhaltungssatzes gilt:

$$\begin{aligned}\Delta p &= (m + \Delta m)(v + \Delta v) - m v = m \Delta v + \Delta m v + \Delta m \Delta v \\ \Delta p &\approx -\Delta m u = m \Delta v + \Delta m v\end{aligned}\quad (2.102)$$

Die Näherung folgt aus der Tatsache, dass der Summand  $\Delta m \Delta v$  sehr viel kleiner als die beiden anderen Summanden ist. Die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  des Flugkörpers ist dann  $\Delta v = -\Delta m u_0/m$  und für die Beschleunigung während des Zeitraums  $\Delta t$  gilt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{1}{m} \frac{\Delta m}{\Delta t} u_0 \quad (2.103)$$

Das Produkt aus  $m$  und  $a$  entspricht der Kraft, die der Flugkörper erfährt, und wird als Schubkraft bezeichnet. Die Schubkraft ist demnach proportional zur Austrittsgeschwindigkeit  $u_0$  der Gasteilchen relativ zum Flugkörper und zur Änderung der Masse  $\Delta m/\Delta t$ , was als Massenstrom bezeichnet wird. Bei konstantem Massenstrom und konstanter Austrittsgeschwindigkeit relativ zum Flugkörper ist die Schubkraft ebenfalls konstant. Dies gilt aber nicht für die Beschleunigung des Flugkörpers, da die Masse  $m$  des Flugkörpers durch die ausströmenden Verbrennungsabgase linear mit der Zeit abnimmt ( $\Delta m < 0$ ):

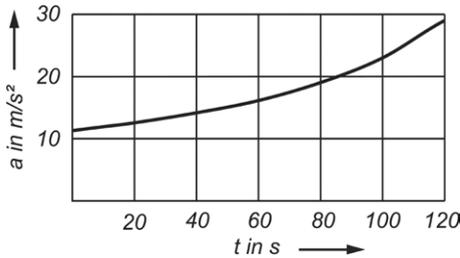
$$m = m_0 - \left| \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| t = m_0 + \frac{\Delta m}{\Delta t} t \quad (2.104)$$

Dabei ist  $m_0$  die Gesamtmasse des Flugkörpers vor dem Start (Startmasse), also vor Beginn der Verbrennung. Damit ergibt sich für die Beschleunigung des Flugkörpers (ohne Berücksichtigung der Schwerkraft) folgende Beziehung:

$$a = -\frac{\Delta m}{(m_0 \Delta t + \Delta m t)} u_0 = \frac{\lambda u_0}{(1 - \lambda t)} \quad \text{mit} \quad \lambda = \left| \frac{1}{m_0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| \quad (2.105)$$

Die Beschleunigung  $a$  ist umso größer, je größer der Parameter  $\lambda$  und je größer die Geschwindigkeit  $u_0$  der Gasteilchen der austretenden Verbrennungsgase relativ zum Flugkörper sind. Darüber hinaus wird die Beschleunigung  $a$  mit zunehmender Brenndauer  $t$  größer, da sich die zu beschleunigende Masse um den Massenausstoß verringert.

In Bild 2.27 ist der zeitliche Verlauf der Beschleunigung einer Rakete vom Typ Saturn V (1. Stufe) dargestellt. Die Familie der Saturn-Raketen gehört bis heute zu den leistungsstärksten und schwersten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Entwickelt wurden sie im Rahmen des Apollo-Programms, das als Ziel die Mondlandung hatte. Die Saturn V-Raketen, die im Zeitraum von November 1967 bis Mai 1973 eingesetzt wurden, hatten eine Startmasse von jeweils  $m_0 = 2965$  t, waren insgesamt (mit allen für die Mondladung erforderlichen Komponenten) 110,6 m hoch, hatten einen Durchmesser von 10,1 m und konnten bei den Flügen zum Mond eine Nutzlast von bis zu 50 t transportieren. Gemäß dem in Bild 2.27 dargestellten zeitlichen Verlauf der Beschleunigung ergibt sich die momentane Geschwindigkeit  $v(t)$  der Rakete zur Zeit  $t$  durch Integration, was in diesem Fall zu einer logarithmischen Funktion führt:  $v(t) = -u_0 \ln(1 - \lambda t)$ . Die Austrittsgeschwindigkeit der Gasteilchen hat einen Wert von  $u_0 = 2,22 \cdot 10^3$  m/s; dies ist mehr als das Sechsfache der Schallgeschwindigkeit in Luft  $c_{s, \text{Luft}} = 343,5$  m/s (Abschnitt 4.4.1).

**Bild 2.27**

Zeitlicher Verlauf der Beschleunigung einer Rakete vom Typ Saturn V (1. Stufe) mit einer Startmasse von  $m_0 = 2\,965\text{ t}$ ,  $\lambda = 5,1 \cdot 10^{-3}\text{ s}^{-1}$ ,  $u_0 = 2,22 \cdot 10^3\text{ m/s}$  und einer Startschubkraft  $F_{\text{Schub}} \approx 34\text{ MN}$

### Drehimpulserhaltung

Wie der Impuls kann auch der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße sein. Gemäß Gl. (2.53) für die zeitliche Ableitung des Drehimpulses  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = (\vec{v} \times \vec{p}) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M}$  ist der Drehimpuls konstant, wenn das Drehmoment null ist. Dies ist dann der Fall, wenn zum einen keine äußere Kraft wirkt (innere Kräfte zwischen den Bestandteilen eines Systems haben keinen Einfluss auf den Drehimpuls) bzw. mehrere äußere Kräfte sich vollständig kompensieren oder zum anderen mehrere Drehmomente sich vollständig kompensieren.

$$\vec{L} = \text{konstant} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dL_x}{dt} = M_x = 0 \\ \frac{dL_y}{dt} = M_y = 0 \\ \frac{dL_z}{dt} = M_z = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

Darüber hinaus ist das Drehmoment auch null, wenn die Kraft parallel oder antiparallel zum Radiusvektor orientiert ist, also wenn gilt  $\vec{r} \parallel \vec{F}$ . Solche rein radialen Kräfte werden *Zentralkräfte* genannt; Beispiele sind die Federkraft und die Gravitationskraft. Dementsprechend lässt sich aus dem Zweiten Kepler'schen Gesetz die Drehimpulserhaltung für einen Planeten, der auf einer elliptischen Bahn die Sonne umkreist, herleiten. Die Zentripetalkraft ist im allgemeinen keine Zentralkraft, da sie zum Mittelpunkt des momentanen Bahnkrümmungskreises orientiert ist, während eine Zentralkraft immer auf denselben Bezugspunkt gerichtet ist. Nur bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die Zentripetalkraft eine Zentralkraft. Hingegen ist bei einer elliptischen Planetenbahn die Zentralkraft an jedem Punkt der Bahn auf einen der beiden Ellipsenbrennpunkte (an dessen Ort sich die Sonne befindet) gerichtet. Eine Zentralkraft kann stets in eine Zentripetalkraft und in eine Tangentialkraft, die rechtwinklig zueinander orientiert sind, zerlegt werden. Dabei bewirkt die Zentripetalkraft die Richtungsänderung und die Tangentialkraft die Betragsänderung des Vektors der Bahngeschwindigkeit, sodass beispielsweise die Bahngeschwindigkeit von Planeten in Sonnennähe größer ist als in Sonnenferne.



#### Merke

**Drehimpulserhaltungssatz:** Der Drehimpuls eines Systems ist erhalten, sofern keine externen Kräfte oder nur Zentralkräfte wirken.

Der Drehimpuls und dessen Erhaltung wird nochmals bei der Rotation des starren Körpers (Abschnitt 2.4.1) und bei der Kreiselbewegung (Abschnitt 2.4.3) erläutert.

### Energieerhaltung

Neben dem Impuls und dem Drehimpuls kann auch die Summe aus kinetischer und potentieller Energie  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$  eines Systems eine Erhaltungsgröße sein. Gemäß den vorangegangenen Betrachtungen zur Impuls- und zur Drehimpulserhaltung liegt die Vermutung nahe, dass die Summe aus kinetischer und potentieller Energie nur bei bestimmten Kräften konstant ist. Ausgangspunkt ist wieder die zeitliche Änderung bzw. Ableitung der betrachteten Größe, in diesem Fall der Gesamtenergie:  $\frac{dE}{dt} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} + \frac{dE_{\text{pot}}}{dt}$ . Durch Einsetzen der einfachen Beziehung für die kinetische Energie eines Massepunktes oder eines Körpers  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$  ergibt sich für deren zeitliche Ableitung:

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = m \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.107)$$

Die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie ist also gleich einer Leistung, was auch durch einen Einheitenvergleich plausibel ist. Die Gesamtenergie  $E$  ist somit konstant, wenn gilt:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.108)$$

Kräfte, die diese Bedingung erfüllen werden *konservative Kräfte* genannt.



#### Merke

**Energieerhaltungssatz:** Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eines Systems ist erhalten, sofern nur konservative Kräfte wirken.

Neben diesem Energieerhaltungssatz der Klassischen Mechanik gibt es auch Energieerhaltungssätze in der Thermodynamik (Abschnitt 5.3), in der Elektrodynamik (Abschnitt 6.1), in der Quantenmechanik (Abschnitt 8.1) und in der Relativitätstheorie (Abschnitt 10.1).

Mit der Energiehaltung im Rahmen der Klassischen Mechanik sind folgende zueinander äquivalente Eigenschaften konservativer Kräfte verknüpft:

- Jeder konservativen Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  ist eine skalare Funktion  $V(\vec{r})$  zugeordnet und es gilt:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\text{grad}V(\vec{r})$ .

$\vec{\nabla}$  ist der sogenannte Nabla-Operator, grad steht für Gradient und in kartesischen Koordinaten gilt:

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \vec{e}_x \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}.$$

Die skalare Funktion  $V(\vec{r})$  heißt Potential und ist in der vorliegenden Definition gleich der potentiellen Energie. Sowohl die konservative Kraft als auch das Potential hängen nicht explizit von der Zeit, von der Geschwindigkeit bzw. von der Beschleunigung ab. Ein typischer Sprachgebrauch ist auch, dass eine konservative Kraft der Gradient eines Potentials ist.

- Das Arbeitsintegral einer konservativen Kraft ist wegunabhängig und wird nur bestimmt von der Potentialdifferenz zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt:

$$W = \int_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} (\vec{\nabla}V(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = V_{\text{Anfang}} - V_{\text{Ende}}.$$

- Das Arbeitsintegral einer konservativen Kraft entlang eines geschlossenen Weges ist null:

$$W = \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

- Konservative Kräfte erfüllen die sogenannte *Integrabilitätsbedingung* für *Gradientenfelder*, die in kartesischen Koordinaten lautet:

$$\left\{ \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \right\} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = 0.$$

$\text{rot } \vec{F}(\vec{r})$  steht für Rotation von  $\vec{F}(\vec{r})$ .

Nicht-konservative Kräfte wie beispielsweise die Reibungskraft werden als *dissipative Kräfte* bezeichnet. Diese Kräfte erfüllen nicht den Energieerhaltungssatz der Klassischen Mechanik und die durch sie verrichtete Arbeit, wie z. B. die Reibungsarbeit, ist wegabhängig. Auf geschlossenen Wegen ist das Arbeitsintegral von dissipativen Kräften ungleich null.



### Beispiel

Ein Körper mit der Masse  $m = 10 \text{ kg}$  wird aus der Ruhe aus einer Höhe von  $h = 10 \text{ m}$  fallen gelassen. Die Auftreffgeschwindigkeit des Körpers auf den Erdboden lässt sich mit dem Energieerhaltungssatz berechnen, da die Luftreibung beim freien Fall vernachlässigt wird und es gilt:

$$E_{\text{pot}} = mgh = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \approx 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 50,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

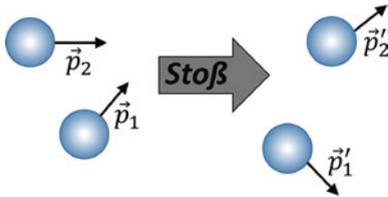
## 2.3 Stoßprozesse

Die besondere Bedeutung des in Abschnitt 2.2.6 behandelten Impulserhaltungssatzes wird bei Stoßprozessen deutlich. Darunter versteht man Vorgänge, bei denen zwei oder auch mehrere Stoßpartner, deren innere Struktur vollständig vernachlässigt wird, einer zeitlich befristeten, häufig sehr kurzen Wechselwirkung unterliegen. Dies hat zur Folge, dass Änderungen im Bewegungsablauf nur während dieser begrenzten Zeitspanne auftreten. Für die Zeit vor und nach der Wechselwirkung liegen definierte Anfangs- und Endzustände vor. Unabhängig von den zum Teil recht komplizierten Vorgängen während der Wechselwirkung gilt während jeder Phase der Wechselwirkung, insbesondere aber für die Anfangs- und Endzustände der Impulserhaltungssatz. Bei zwei Stoßpartnern lautet die Impulserhaltung:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (2.109)$$

Dabei sind  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  die Geschwindigkeiten der Stoßpartner vor und  $\vec{v}'_1$  sowie  $\vec{v}'_2$  die Geschwindigkeiten der Stoßpartner nach dem Stoß (Bild 2.28). Beispiele für solche Stoßvorgänge sind Zusammenstöße zwischen atomaren Teilchen wie Atomen und Molekülen, aber auch zwischen makroskopischen Körpern wie Billardkugeln, der Schlag eines Tennisschlägers gegen einen Tennisball, das Auftreffen eines Geschosses auf einen Körper oder ein Hammerschlag auf

einen Nagel etc. Auch die Reflexion eines Körpers, z. B. eines Balls an einer Wand, lässt sich als Stoßvorgang betrachten. Voraussetzung für diese vereinfachte Behandlung von Wechselwirkungen ist, dass die Reichweite der Kräfte, die die Stoßpartner aufeinander ausüben, sehr begrenzt ist, wie es beispielsweise bei Billardkugeln der Fall ist: Die Wechselwirkung der Kugeln macht sich erst beim direkten Kontakt bemerkbar, nicht aber schon vorher wie z. B. bei der Wechselwirkung zweier geladener Teilchen, bei denen die langreichweitige Coulomb-Kraft (Abschnitt 6.1) wirksam ist. Hingegen kann die ebenfalls langreichweitige, aber viel schwächere Gravitationswechselwirkung zwischen den Stoßpartnern bei Stoßprozessen beispielsweise auf der Erdoberfläche vernachlässigt werden.



**Bild 2.28**  
Stoßprozess zwischen zwei Kugeln

Stoßprozesse lassen sich nach unterschiedlichen Kriterien klassifizieren. Neben dem Impuls ist die kinetische Energie ein wichtiges Merkmal und es wird bezüglich der Energiebilanz unterschieden zwischen:

- *elastischen Stößen*, bei denen die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß gleich ist (Energieerhaltung), d. h. insbesondere nur rein elastische bzw. reversible Verformungen/Deformationen der Stoßpartner auftreten,
- *inelastischen (teilplastischen) Stößen*, bei denen die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß unterschiedlich ist (keine Energieerhaltung) und teilweise plastische Verformungen/Deformationen der Stoßpartner stattfinden,
- *unelastischen (plastischen) Stößen*, bei denen die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß unterschiedlich ist (keine Energieerhaltung) und eine vollkommen plastische, d. h. irreversible Verformung/Deformation der Stoßpartner derart stattfindet, dass die Stoßpartner nach dem Stoß vereint bleiben und sich mit derselben Endgeschwindigkeit weiterbewegen.

Ein typisches Beispiel für einen inelastischen Stoß ist der Zusammenprall zwischen Fahrzeugen mit meist deutlich sichtbarer Verformung der Stoßpartner. Ein Beispiel für einen unelastischen Stoß ist der Aufprall eines Meteoriten auf der Erde, bei dem die gesamte kinetische Energie des Meteoriten in die lokale Verformung der Erdoberfläche (Kraterbildung) umgewandelt wurde und die Meteoritenreste auf der Erdoberfläche zurückbleiben.

Beim elastischen Stoß zwischen zwei Stoßpartnern lautet die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 \quad (2.110)$$

Eine andere Möglichkeit der Klassifizierung von Stoßprozessen ergibt sich aus der Geometrie bzw. Kinematik der unterschiedlichen Stoßprozesse. Dies wird insbesondere für die Klassifizierung von Stößen zwischen zwei Stoßpartnern genutzt. Die *Berührungsebene* (auch Tangentialebene genannt) liegt dabei tangential zu den beiden Stoßpartnern und der Stoßpunkt P liegt in der Berührungsebene. Die *Stoßnormale* verläuft durch den Stoßpunkt P und

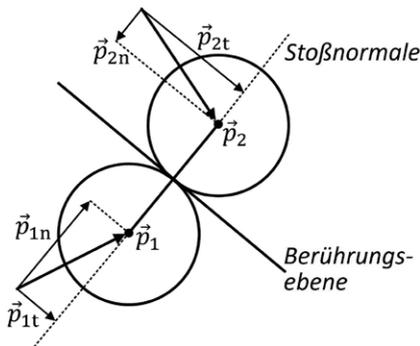
steht senkrecht auf der Berührungsebene. Die Impulse beider Stoßpartner lassen sich dementsprechend vor und nach dem Stoß zerlegen in jeweils eine Normalkomponente parallel zur Stoßnormalen sowie in eine Tangentialkomponente parallel zur Berührungsebene (Bild 2.29):

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{1n} + \vec{p}_{1t} \quad \text{und} \quad \vec{p}'_1 = \vec{p}'_{1n} + \vec{p}'_{1t} \quad (2.111a)$$

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_{2n} + \vec{p}_{2t} \quad \text{und} \quad \vec{p}'_2 = \vec{p}'_{2n} + \vec{p}'_{2t} \quad (2.111b)$$

Da die Normal- und die Tangentialkomponenten voneinander unabhängig sind, lautet die Impulserhaltung:

$$\vec{p}_{1n} + \vec{p}_{2n} = \vec{p}'_{1n} + \vec{p}'_{2n} \quad \text{und} \quad \vec{p}_{1t} + \vec{p}_{2t} = \vec{p}'_{1t} + \vec{p}'_{2t} \quad (2.112)$$



**Bild 2.29**  
Berührungsebene und Stoßnormale

Bezüglich der Stoßgeometrie wird unterschieden zwischen:

- **zentralen Stößen**, bei denen die Schwerpunkte beider Stoßpartner stets auf der Stoßnormalen liegen (bei solchen Stößen ist der Bewegungsablauf rein translatorisch und die Stoßpartner können als Massepunkte idealisiert werden),
- **exzentrischen Stößen**, bei denen die Stoßnormale nicht durch die beiden Schwerpunkte der Stoßpartner verläuft,
- **geraden Stößen**, bei denen die Geschwindigkeitsvektoren vor dem Stoß parallel zur Stoßnormalen orientiert sind oder auf der Stoßnormalen liegen,
- **schiefen Stößen**, bei denen die Geschwindigkeitsvektoren vor dem Stoß nicht parallel zur Stoßnormalen orientiert sind.

Daraus ergeben sich die folgenden möglichen Kombinationen:

- **gerade zentrale Stöße**, bei denen die Geschwindigkeitsrichtungen beider Stoßpartner parallel zur Stoßnormalen orientiert und die Stoßnormale verläuft durch beide Schwerpunkte,
- **schiefe zentrale Stöße**, bei denen die Geschwindigkeitsrichtung eines Stoßpartners nicht parallel zur Stoßnormalen orientiert; die Stoßnormale verläuft durch beide Schwerpunkte,
- **gerade exzentrische Stöße**, bei denen die Geschwindigkeitsrichtungen beider Stoßpartner parallel zur Stoßnormalen orientiert; die Stoßnormale verläuft nicht durch beide Schwerpunkte,
- **schiefe exzentrische Stöße**, bei denen die Geschwindigkeitsrichtung eines Stoßpartners nicht parallel zur Stoßnormalen orientiert; die Stoßnormale verläuft nicht durch beide Schwerpunkte.