Detlef Wille

Repetitorium der Linearen Algebra

Teil 1

5. Auflage

HANSER

Wichtige Definitionen und Sätze

Gruppe

$(G,\circ)$ heißt Gruppe, falls gilt:

(G1) $\forall a,b,c\in G$
$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$

(G2) $\exists 0\in G\ \forall a\in G\ 0\circ a = a\circ 0 = a$

(G3) $\forall a\in G\ \exists b\in G\ a\circ b = b\circ a = 0$

G abelsch : $\forall a,b\in G\ \ a\circ b = b\circ a$

Körper

$(K,+,\cdot)$ heißt Körper, falls gilt:

(K1) $(K,+)$ abelsche Gruppe

(K2) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ abelsche Gruppe

(K3) $\forall a,b,c\in K$
$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

Vektorraum

V heißt Vektorraum über K, falls gilt:

(V1)–(V4) $(V,+)$ ist abelsche Gruppe
und $\forall v,w\in V$, $\forall \lambda,\mu\in K$ gilt

(V5) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

(V6) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

(V7) $\lambda\,(\mu v) = (\lambda\mu)\,v$

(V8) $1v = v$

Untervektorraum

heißt jede Teilmenge U des Vektorraums V mit:

(U1) $0\in U$

(U2) $v,w\in U \implies v+w\in U$

(U3) $\lambda\in K$, $v\in U \implies \lambda v\in U$

Lineare Unabhängigkeit

Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ heißen linear unabhängig, falls gilt:

$$\forall\,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in K\ (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0)$$

(Der Nullvektor ist aus $v_1,\ldots,v_m$ nur trivial linear kombinierbar!)

Dimensionsformel

Sind U und W endlich-dimensionale Vektorräume, so gilt:

$$\dim\,(U+W) + \dim\,(U\cap W) \;= \dim U + \dim W$$

Lineare Abbildung

$\varphi\ :\ V \longrightarrow W$ heißt linear, falls gilt:

(L1) $\forall v,w\in V\ \varphi(v+w) = \varphi(v)+\varphi(w)$

(L2) $\forall v\in V$, $\forall\lambda\in K\ \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$

Endomorphismus: $V = W$

Automorphismus: $V = W$, φ bijektiv

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}\varphi &= \{v\in V \mid \varphi(v) = 0\}\\ \operatorname{Bild}\varphi &= \varphi(V)\end{aligned}$$

Kern–Bild–Satz

$$\dim\operatorname{Kern}\varphi + \dim\operatorname{Bild}\varphi \;= \dim V$$

Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$\det\mathbf{A} = \sum_{\pi\in\gamma_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\pi(n)}$$

Leibnizformel

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\mathbf{A}_{ij}$$

Entwicklung n. d. $i-$ten Zeile (analog für Spalten)

$\mathbf{A}_{ij}$ entsteht aus $\mathbf{A}$ durch Streichen von Zeile i und Spalte j.

Lineare Abbildungen und Matrizen im $\mathbb{R}^n$

Ist $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, so ist $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \text{also } \varphi(v) = \mathbf{M}v \\ v & \longmapsto & \mathbf{M}v & \text{eine } \textbf{lineare Abbildung}. \end{cases}$

Jede Matrix bestimmt auf diese Weise eine lineare Abbildung. Umgekehrt gehört zu jeder linearen Abbildung dieser Art eine Matrix, nämlich:

Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear und ist $\mathbf{M} = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ die $n \times n-$Matrix, deren n Spalten aus den Bildern $\varphi(e_i)$ der n Vektoren e_i der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ bestehen, so ist $\varphi(v) = \mathbf{M}v$.

Hierbei wurde im $\mathbb{R}^n$ die kanonische Basis zugrunde gelegt.
Für lineare Abbildungen $\varphi : V \longrightarrow W$ hängen die zu φ gehörenden Matrizen noch von Basen A von V und B von W ab und werden mit $\mathbf{M}_A^B(\varphi)$ bezeichnet (siehe nächsten Kasten).

Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_A^B(\varphi)$

Es sei $\varphi : V \longrightarrow W$ linear, A Basis von V, B Basis von W.

1. Die Spalten von $\mathbf{M}_A^B(\varphi)$ sind die Koordinatenvektoren bzgl. B der Bilder $\varphi(v_i)$ der Vektoren v_i aus A.
2. Multipliziert man $\mathbf{M}_A^B(\varphi)$ mit dem Koordinatenvektor von v bzgl. A, so erhält man den Koordinatenvektor bzgl. B vom Bildvektor $\varphi(v)$.
3. $\psi : W \longrightarrow U$ linear, C Basis von U: $\quad \mathbf{M}_A^C(\psi \circ \varphi) = \mathbf{M}_B^C(\psi) \cdot \mathbf{M}_A^B(\varphi)$
   (Nacheinanderausführen linearer Abbildungen ergibt wieder eine lineare Abbildung, deren Matrix das Produkt der Matrizen von ψ und φ ist.)
4. Ist $\varphi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V und sind A, B Basen von V, so gilt die folgende **Transformationsformel**:
   $$\mathbf{M}_B^B(\varphi) = \mathbf{M}_A^B(\mathrm{id}) \cdot \mathbf{M}_A^A(\varphi) \cdot \mathbf{M}_B^A(\mathrm{id}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{M}_A^A(\varphi) \cdot \mathbf{B}$$

Spezielle lineare Abbildungen der Ebene

Die Abbildungsmatrizen beziehen sich auf die kanonische Basis.

Spiegelung an		Drehung um		Projektion auf	
$x-$Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\alpha°$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$x-$Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$y-$Achse	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$y-$Achse	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Gerade $t(a,b)$	$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$	$60°$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	Gerade $t(a,b)$	$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$
Gerade $y = mx$	$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$	$90°$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Gerade $y = mx$	$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte, Eigenvektoren von Matrizen

Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Gilt $\mathbf{A}v = \lambda v$ für $v \neq 0$ und $\lambda \in K$, so heißt v Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ.
Die Eigenwerte sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E})$.
Die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ sind die nicht-trivialen Lösungen des LGS $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})x = 0$.

REPETITORIUM

DER

LINEAREN ALGEBRA

Teil 1

Dr. Detlef Wille

5. Auflage, Ebook

Binomi Verlag	**Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**	
	Telefon	**05105–6624000**
	Telefax	**05105–515798**
	E–Mail	**verlag@binomi.de**
	Internet	**www.binomi.de**
Druck	Qubus media www.qubus.media	

Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel

ISBN 978–3–923923–71-7

Hannover 04/21

Vorwort

Es ist ein immer wieder von Studenten geäußerter Wunsch, Aufgabensammlungen mit vollständigen Lösungen zu den verschiedenen mathematischen Gebieten zu besitzen, um damit Anleitungen zum eigenständigen Bearbeiten entsprechender Aufgaben zu erhalten.
Das vorliegende Repetitorium will für die LINEARE ALGEBRA in diesem Sinne eine Hilfe sein. Es ist vom Inhalt her so zusammengestellt worden, daß einerseits Mathematik– und Physikstudenten des ersten Semesters, zum anderen aber auch Ingenieurstudenten damit arbeiten können.
Mathematik– und Physikstudenten finden speziell

- einen grundlegenden mengentheoretischen Teil, in dem auch verschiedene Beweisverfahren vorgestellt werden.
- vektorielle Beweise.
- wichtige Begriffe der LINEAREN ALGEBRA zunächst am Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eingeführt und später auf allgemeine Vektorräume ausgedehnt.
- in fast allen Abschnitten nach einfachen "Rechenaufgaben" typische "Beweisaufgaben".
- Aufgaben, in denen wichtige mathematische Konstruktionen behandelt werden, sowie Aufgaben, die Ausblicke auf Begriffe der Algebra geben.

Ingenieurstudenten finden speziell

- elementare Vektorrechnung mit allen wichtigen Grundaufgaben.
- Matrizen und Determinanten.
- lineare Gleichungssysteme.
- Hauptachsentransformation im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.
- lineare Abbildungen.

Da in den ersten beiden Kapiteln alle Begriffe am R^n eingeführt werden, eignet sich das Buch ebenfalls gut für die neu entstehenden Bachelor-Studiengänge.

Jeder Abschnitt beginnt mit einer Zusammenstellung wichtiger Definitionen und Sätze, wodurch schnell ein Überblick über das entsprechende Gebiet gewonnen werden kann. Dann folgen Aufgaben mit ausführlichen Lösungen, die nach Schwierigkeitsgrad angeordnet wurden. Teilweise wird in diesen Aufgaben auch weiterführende Theorie behandelt.

Die in diesem Repetitorium aufgenommenen Themen werden üblicherweise in einer Vorlesung LINEARE ALGEBRA I behandelt. In Teil 2 dieses Repetitoriums werden in gleicher Weise Aufgaben zur LINEAREN ALGEBRA II ausführlich gelöst. Im einzelnen findet man dort u. a. Aufgaben zu folgenden Themen:

- Eigenwerttheorie
- JORDANsche Normalform
- Vektorräume mit Skalarprodukt
- Euklidische und unitäre Vektorräume
- Affine Räume
- Klassifizierung von Quadriken

Hannover, Mõrz 2021

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

a	j	s
b	k	t
c	l	u
d	m	v
e	n	w
f	o	x
g	p	y
h	q	z
i	r	

Kapitel 1

Grundlagen

Mengenterminologie wird in der Sprache der Mathematik benötigt. In diesem Kapitel wird im Rahmen der Linearen Algebra dafür nötiges Mengenvokabular zusammengestellt, keine "Mengenlehre" betrieben. Man bewerte daher die Aussagen der meisten Aufgaben nicht über. Es sind überwiegend einfache Regeln für den Gebrauch von Mengen. Allerdings können daran sehr gut der Aufbau eines Beweises und die verschiedenen Beweismethoden der Mathematik - wie **direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion** - geübt werden.

1.1 Mengen

Wir geben hier nur eine Zusammenstellung der Definitionen von Mengenbildungen.
Alle Mengen $A, B, C, \ldots$ seien Teilmengen einer Menge X.
Den Term $\{x \mid \ldots\}$ lese man stets als:
Menge aller x aus X mit der Eigenschaft ....

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	**Durchschnitt** von A und B
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	**Vereinigung** von A und B
$X \setminus A = \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin A\}$	X **vermindert** um A
$\mathcal{P}(A) = \{Y \mid Y \subseteq A\}$	**Potenzmenge** von A
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$	**Kartesisches Produkt** von A und B

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist für uns üblicherweise die Menge $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Sollte es sich als praktisch erweisen, wird aber auch die 0 hinzugenommen.

1.1.1

Es seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ gegeben:

$X_1 := \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist eine gerade Zahl }\}$

$X_2 := \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } y^2 + z^2 \leq 2\}$

$X_3 := \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist teilbar durch } 6\}$

$X_4 := \{y \in \mathbb{Z} \mid (y^4 + y^2 - 2)(y^2 - 2y) = 0\}$

$X_5 := \{y \in \mathbb{Z} \mid 3y^2 \text{ ist teilbar durch } 4\}$

a) *Man bestimme: $X_1 \cap X_2$, $X_3 \cup X_5$, $X_1 \setminus X_3$ und $X_2 \times X_4$.*

b) *Man untersuche, für welche $i, j \in \{1, \ldots, 5\}, i \neq j$ die Beziehung $X_i \subseteq X_j$ gilt. Welche der Mengen sind gleich?*

Alle fünf Mengen lassen sich leicht in aufzählender Schreibweise angeben. Damit kann man dann **a)** und **b)** beantworten. Sofort ersichtlich ist:

$$X_1 = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} =: 2 \cdot \mathbb{Z}$$

und

$$X_3 = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots\} =: 6 \cdot \mathbb{Z}$$

X_5 kann nur gerade Zahlen enthalten. Ein Quadrat einer ungeraden Zahl und das Produkt ungerader Zahlen sind nämlich ungerade. Ist y aber eine gerade Zahl, so ist y^2 und damit auch $3y^2$ durch 4 teilbar. Also gilt $X_5 = X_1$.
Für X_2 findet man durch Einsetzen:

$$X_2 = \{-1, 0, 1\}$$

Benutzt man schließlich, daß ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist, so folgt für X_4:

$$y \in X_4 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \mathbb{Z} \text{ und } \big(y(y-2) = 0 \text{ oder } y^4 + y^2 - 2 = 0\big)$$

$$\begin{aligned} y(y-2) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = 0 \text{ oder } y = 2 \\ y^4 + y^2 - 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = 1 \text{ oder } y = -1 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$$

a) Man erhält:

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

$$X_3 \cup X_5 = X_1$$

$$X_1 \setminus X_3 = \{\ldots, -8, -4, -2, 2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$$

$$X_2 \times X_4 = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2), \ldots, (1,2)\}$$

$X_2 \times X_4$ hat $3 \cdot 4 = 12$ Elemente.

b) Durch Vergleich ergeben sich folgende Beziehungen:

$$X_2 \subseteq X_4, \qquad X_3 \subseteq X_1, \qquad \text{sowie } X_1 = X_5$$

1.1.2
A, B, C seien Mengen. Man zeige:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

a) Wir müssen die **Gleichheit zweier Mengen** X **und** Y zeigen. Dazu ist zu zeigen, daß jedes Element aus X auch in Y vorkommt und umgekehrt:

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X \subseteq Y \text{ und } Y \subseteq X$$

Daher ergibt sich der folgende Beweis, bei dem wir lediglich noch die Definitionen von $\cup$ und $\cap$ berücksichtigen:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Longleftrightarrow x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Liest man diese Äquivalenz von oben nach unten, so ergibt sich die Teilmengenbeziehung "$\subseteq$", liest man sie von unten nach oben, so ergibt sich "$\supseteq$". Eine solche Äquivalenzaussage

$$A \Longleftrightarrow B$$

bedeutet die Gültigkeit **zweier** Aussagen, nämlich

$$A \Longrightarrow B \qquad \text{und} \qquad A \Longleftarrow B.$$

Häufig beweist man eine Äquivalenz durch Beweis dieser beiden Implikationen. Man spricht von einem Beweis in "zwei Richtungen".

Bei **b)** schließt man wie bei **a)**.

1.1.3
A, B seien Teilmengen der Menge X. Man beweise die folgenden Äquivalenzen:

a) $A \cap B = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq X \setminus B \quad \Longleftrightarrow \quad B \subseteq X \setminus A$
b) $A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A$

a) Wir bezeichnen die oben stehenden drei Aussagen mit (i), (ii) und (iii). Man überlegt sich leicht, daß man die Äquivalenzen dann durch folgenden "Ringschluß " beweisen kann:

$$(i) \implies (ii), \qquad (ii) \implies (iii), \qquad (iii) \implies (i)$$

Beweis von $(i) \implies (ii)$, also: $A \cap B = \emptyset \implies A \subseteq X \setminus B$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x \in A &\implies x \in X, \text{ da } A \subseteq X \text{ und} \\ & \quad\;\; x \notin B, \text{ da } A \cap B = \emptyset \\ &\implies x \in X \setminus B \end{aligned}$$

Beweis von $(ii) \implies (iii)$, also: $A \subseteq X \setminus B \implies B \subseteq X \setminus A$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x \in B &\implies x \in X, \text{ da } B \subseteq X \text{ und} \\ & \quad\;\; x \notin A, \text{ da } A \subseteq X \setminus B \\ &\implies x \in X \setminus A \end{aligned}$$

Beweis von $(iii) \implies (i)$, also: $B \subseteq X \setminus A \implies A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} \text{Annahme: } x \in A \cap B &\implies x \in A \text{ und } x \in B \\ &\implies x \in X \setminus A, \text{ da } B \subseteq X \setminus A \\ &\implies x \notin A \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $x \in A \cap B$.

b) Wir gehen wie bei a) vor:
Beweis von $(i) \implies (ii)$, also: $A \subseteq B \implies A \cup B = B$
Die Inklusion $B \subseteq A \cup B$ ist klar. Es bleibt also $A \cup B \subseteq B$ zu zeigen. Sei dazu $x \in A \cup B$. Ist $x \in B$, so sind wir fertig. Ist $x \in A$, so folgt nach Voraussetzung auch $x \in B$, also ist alles gezeigt.
Beweis von $(ii) \implies (iii)$, also: $A \cup B = B \implies A \cap B = A$
Hier ist die Inklusion $A \cap B \subseteq A$ klar, und es bleibt $A \subseteq A \cap B$ zu zeigen. Sei dazu $x \in A$. Dann folgt nach Voraussetzung $x \in B$, also insgesamt $x \in A \cap B$.
Beweis von $(iii) \implies (i)$, also: $A \cap B = A \implies A \subseteq B$.
Es sei $x \in A$. Dann ist nach Voraussetzung auch $x \in B$, da $A \cap B = A$. Damit ist alles gezeigt.

1.1.4

A, B seien Teilmengen der Menge X.
Man beweise die **de Morgan'schen** *Gesetze:*
a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

a) Wir zeigen die Gleichheit der Mengen wie bei Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \text{ und } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in X \text{ und } (x \notin A \text{ und } x \notin B) \\ &\iff (x \in X \text{ und } x \notin A) \text{ und } (x \in X \text{ und } x \notin B) \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \end{aligned}$$

b) läßt sich wieder genauso beweisen.

1.1.5

Man untersuche, ob die folgenden Gleichungen gelten:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

a) Wir werden die Gleichheit beweisen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff X \subseteq A \text{ und } X \subseteq B \\ &\iff X \subseteq A \cap B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

b) gilt nicht.
Eine Behauptung der Art

Für alle $X, Y, \ldots$ gilt die Aussage ...

widerlegt man durch Angabe **eines** Beispiels, für das die Aussage **nicht** gilt. Solch ein Beispiel nennt man **Gegenbeispiel**.
Wir geben hier ein **Gegenbeispiel** an.
Sei $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$. Dann ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ und $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$. Also gilt $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Dagegen ist $A \cup B = \{1, 2\}$, d.h. $\mathcal{P}(A \cup B)$ enthält die Menge $\{1, 2\}$, die aber nicht in $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ liegt.

1.1.6

A, B, C seien Mengen. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $(C \times C) \cup (A \times B) = (C \cup A) \times (C \cup B)$

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

d) $(C \times C) \cap (A \times B) = (C \cap A) \times (C \cap B)$

a) gilt. Beweis: (Wir benutzen ab jetzt die Symbole $\wedge$ für "und" sowie $\vee$ für "oder".)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \cup B \wedge y \in C \\
&\Longleftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\
&\Longleftrightarrow \quad (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

b) Die Aussage ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:
Sei $C = \{1\}, \quad A = B = \{2\}$. Dann ist:
$(C \times C) \cup (A \times B) = \{(1,1),(2,2)\}$ und
$(C \cup A) \times (C \cup B) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

c) Diese Gleichheit gilt wieder. Beweis:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \setminus B) \times C \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \notin B \times C \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)
\end{aligned}$$

d) Die Aussage ist richtig. Beweis:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (C \times C) \cap (A \times B) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in C \times C \wedge (x,y) \in A \times B \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in C \wedge y \in C \wedge x \in A \wedge y \in B \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in C \wedge x \in A \wedge y \in C \wedge y \in B \\
&\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in (C \cap A) \times (C \cap B)
\end{aligned}$$

1.1.7

Man beweise: $(a,b) = (c,d) \iff a = c$ *und* $b = d$

Das geordnete Paar (a,b) ist wie folgt definiert:

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Der Beweis wird nun in zwei Richtungen geführt. Wir beweisen zunächst "$\Longleftarrow$": Gilt $a = c$ und $b = d$, so folgt $\{a\} = \{c\}, \quad \{a,b\} = \{c,d\}$, und damit gilt auch $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Nach Definition des geordneten Paares bedeutet das gerade $(a,b) = (c,d)$.

Es folgt der Beweis in Richtung “$\Longrightarrow$”.
Sei $(a,b) = (c,d)$ d.h. $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Wir unterscheiden nun 2 Fälle:
1.Fall: $a = b$
Dann folgt aus $(a,a) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ zunächst die Gleichheit $\{a\} = \{c,d\}$. Also muß $c = d$ gelten, damit die rechts stehende Menge einelementig ist. Das liefert nun $a = c$, und wegen der Voraussetzung $a = b$ folgt noch $b = d$, d. h. $(a,b) = (c,d)$.
2.Fall: $a \neq b$
Dann gilt auch $c \neq d$, denn wäre $c = d$, so enthielte $(c,d) = \{\{c\},\{c,d\}\}$ keine zweielementige Menge wie $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. (Beachte hier $a \neq b$!) Wegen $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ folgt nun aus den Elementanzahlen $a = c$ und $\{a,b\} = \{c,d\} = \{a,d\}$. Damit erhält man auch $b = d$.

1.1.8
Man zeige: $A \setminus (A \setminus B) = B \iff B \subseteq A$

Beweis von “$\Longrightarrow$”:
Sei $x \in B$. Dann gilt nach Voraussetzung $x \in A \setminus (A \setminus B)$, also $x \in A$.
Beweis von “$\Longleftarrow$”:
Wir zeigen zunächst $A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$.
Aus $x \in A \setminus (A \setminus B)$ folgt $x \in A$ und $x \notin A \setminus B$. Daraus ergibt sich $x \in B$, denn wäre $x \notin B$, so wäre $x \in A \setminus B$.
Es bleibt $B \subseteq A \setminus (A \setminus B)$ zu zeigen.
Sei $x \in B$. Nach Voraussetzung ist dann auch $x \in A$. Damit erhält man $x \in A$ und $x \notin A \setminus B$, also $x \in A \setminus (A \setminus B)$.

1.2 Relationen

Sind A und B Mengen, so heißt jede Teilmenge von $A \times B$ eine **Relation** zwischen A und B. Gilt $A = B$, so spricht man von einer Relation **auf** A. Beliebige Relationen sind in Teilgebieten der Mathematik wie "Lineare Algebra" relativ uninteressant. Einige spezielle Relationen sind aber sehr wichtig, da sie zur Konstruktion von algebraischen Strukturen (z. B. Ringe, Körper, Vektorräume) benutzt werden.

Eine Relation R auf A, also $R \subseteq A \times A$ heißt

reflexiv	$\Longleftrightarrow$	für alle $x \in A$ gilt $(x, x) \in R$. *(Die Diagonale von $A \times A$ gehört zu R.)*
symmetrisch	$\Longleftrightarrow$	$(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$ für alle $x, y \in A$
antisymmetrisch	$\Longleftrightarrow$	$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$.
transitiv	$\Longleftrightarrow$	$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$ für alle $x, y, z \in A$.
konnex	$\Longleftrightarrow$	für alle $x, y \in A$ gilt: $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ *(Je zwei Elemente aus A sind vergleichbar.)*

Spezielle Relationen

Eine Relation R auf A heißt

Äquivalenzrelation	$\Longleftrightarrow$	R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Halbordnung	$\Longleftrightarrow$	R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
Ordnung	$\Longleftrightarrow$	R ist Halbordnung und konnex.

Eine Ordnung wird auch **Kette** genannt, da alle Elemente vergleichbar sind.

Bei Äquivalenzrelationen und Halbordnungen R schreibt man statt $(x, y) \in R$ üblicherweise xRy. Äquivalenzrelationen werden meistens mit dem Symbol $\sim$ bezeichnet.

Äquivalenzklassen

$\sim$ sei eine Äquivalenzrelation auf A. Die Teilmengen

$$a/_{\sim} := \{b \in A \mid b \sim a\} \quad (a \in A)$$

von A heißen **Äquivalenzklassen** von $\sim$.

1.2.1

a) *Man gebe alle Relationen auf $A = \{1, 2\}$ an.*
b) *Welche Relationen davon sind symmetrisch, reflexiv, transitiv?*
c) *Welches sind Äquivalenzrelationen auf A?*
d) *Welches sind Halbordnungen?*
e) *Welche der Halbordnungen sind Ordnungen?*

a) Eine Relation auf A ist eine Teilmenge von $A \times A$. Für $A \times A$ erhalten wir:

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Wir bilden sämtliche Teilmengen der $4-$elementigen Menge $A \times A$ und erhalten die folgenden $2^4 = 16$ Relationen:
(über die Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(\{1,2\})$ siehe Aufgabe 1.5.2.)

$R_1 = \emptyset$			
$R_2 = \{(1,1)\}$	$R_3 = \{(1,2)\}$	$R_4 = \{(2,1)\}$	$R_5 = \{(2,2)\}$
$R_6 = \{(1,1), (1,2)\}$		$R_7 = \{(1,1), (2,1)\}$	
$R_8 = \{(1,1), (2,2)\}$		$R_9 = \{(1,2), (2,1)\}$	
$R_{10} = \{(1,2), (2,2)\}$		$R_{11} = \{(2,1), (2,2)\}$	
$R_{12} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$		$R_{13} = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$	
$R_{14} = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$		$R_{15} = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$	
$R_{16} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$			

Da $A \times A$ vierelementig ist, gibt es $\binom{4}{1} = 4$ Relationen mit genau einem Element, $\binom{4}{2} = 6$ Relationen mit genau 2 Elementen usw. .

b) Von den obigen Relationen sind
symmetrisch: $R_1, R_2, R_5, R_8, R_9, R_{12}, R_{15}, R_{16}$
reflexiv: $R_8, R_{13}, R_{14}, R_{16}$
transitiv: $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13}, R_{14}, R_{16}$

c) Äquivalenzrelationen sind reflexiv, symmetrisch und transitiv. Also sind nur R_8 und R_{16} Äquivalenzrelationen.

d) Halbordnungen sind: R_8, R_{13}, R_{14}

e) Nur R_{13} und R_{14} sind Ordnungen.
So gilt z. B. für R_{13} : $1\, R_{13}\, 1,\ \ 1\, R_{13}\, 2,\ \ 2\, R_{13}\, 2$

1.2.2

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei definiert: $x \sim y \iff 5$ *teilt* $x - y$
Man zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist und beschreibe die Äquivalenzklassen von $\sim$.

$\sim$ ist Äquivalenzrelation, wenn gilt: $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
α) $\sim$ **reflexiv:** Zu zeigen ist: Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \sim x$.
$x \sim x$ heißt aber: 5 teilt $x - x$. Dies gilt, da $x - x = 0$ und 5 wegen $5 \cdot 0 = 0$ ein Teiler von 0 ist.
β) $\sim$ **symmetrisch:** Zu zeigen ist: $x \sim y \implies y \sim x$.
$x \sim y$ heißt: 5 teilt $x - y$. Dann teilt 5 auch $-(x - y) = y - x$, also gilt $y \sim x$.
γ) $\sim$ **transitiv:** Zu zeigen ist: $x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$
$x \sim y$ bedeutet 5 teilt $x-y$, $y \sim z$ bedeutet 5 teilt $y-z$. Es gibt also $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $5n = x - y$ und $5m = y - z$. Wir addieren die Gleichungen und erhalten $5n + 5m = (x - y) + (y - z)$. Daraus folgt $5(n + m) = x - z$, also gibt es $k \in \mathbb{N}$ (nämlich $k = n+m$), mit $5k = x-z$, d. h. 5 teilt $x-z$. Damit ist $x \sim z$ gezeigt.
Die zur Äquivalenzrelation $\sim$ gehörenden Äquivalenzklassen sind wie folgt definiert: Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ ist

$$x/_{\sim} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \sim x\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 5 \text{ teilt } y - x\}$$

5 teilt $y - x$ gilt genau dann, wenn x und y bei Division durch 5 den gleichen Rest lassen. Als Reste kommen nur 0,1,2,3,4 in Frage, also gibt es genau 5 Äquivalenzklassen, die man auch **Restklassen** nennt und üblicherweise mit $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\} \\
\overline{1} &= \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\} \\
\overline{2} &= \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\} \\
\overline{3} &= \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\} \\
\overline{4} &= \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}
\end{aligned}$$

So ist z. B. $-11/_{\sim} = 4/_{\sim} = 19/_{\sim} = \ldots$ oder in der anderen eingeführten Bezeichnung $-\overline{11} = \overline{4} = \overline{19} = \ldots$.

1.2.3

Es sei $A := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Auf A sei $\sim$ definiert durch:
$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$
Man zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A ist und beschreibe die Äquivalenzklassen von $\sim$.

Wir gehen wie bei Aufgabe 2 vor:
α) $\sim$ ist **reflexiv:**
Sei $(n, m) \in A$. Es gilt $n+m = m+n$, also gilt nach Definition $(n, m) \sim (n, m)$.
β) $\sim$ ist **symmetrisch:**
Sei $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$. Nach Definition gilt dann
$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, also auch $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Dies heißt nach Definition aber: $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.

γ) $\sim$ ist **transitiv:**
Sei $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ und $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$.
Dann folgt $n_1+m_2 = n_2+m_1$ und $m_1+k_2 = m_2+k_1$. Aus der ersten Gleichung folgt $m_2 - m_1 = n_2 - n_1$, aus der zweiten Gleichung folgt $m_2 - m_1 = k_2 - k_1$. Das ergibt $n_2 - n_1 = k_2 - k_1$ oder $n_1 + k_2 = n_2 + k_1$, also $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$.

In der Äquivalenzklasse $(n, m)/_\sim$ liegen alle Paare aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, für die die Differenz der Komponenten gleich $n - m$ ist, denn $(n, m) \sim (k, l)$ bedeutet ja gerade $n + l = m + k$, oder anders geschrieben $n - m = k - l$. Man kann jede Äquivalenzklasse also als eine ganze Zahl auffassen.
(Mittels dieser Äquivalenzrelation konstruiert man üblicherweise die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.)

1.2.4
R_1, R_2 seien Äquivalenzrelationen auf A.
Man untersuche, ob $R_1 \cap R_2$ und $R_1 \cup R_2$ Äquivalenzrelationen auf A sind.

$R_1 \cap R_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A. Beweis:
α) **Reflexivität:**
Sei $x \in A$. Dann gilt $(x, x) \in R_1$ und $(x, x) \in R_2$, da R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen sind. Also ist auch $(x, x) \in R_1 \cap R_2$.
β) **Symmetrie:**
Sei $(x, y) \in R_1 \cap R_2$. Dann gilt $(x, y) \in R_1$ und $(x, y) \in R_2$. Da R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen sind, folgt $(y, x) \in R_1$ und $(y, x) \in R_2$, also auch $(y, x) \in R_1 \cap R_2$.
γ) **Transitivität:**
Seien $(x, y) \in R_1 \cap R_2$ und $(y, z) \in R_1 \cap R_2$. Dann gilt $(x, y) \in R_1$ und $(x, y) \in R_2$ und $(y, z) \in R_1$ und $(y, z) \in R_2$. Aus der Transitivität von R_1 und R_2 folgt $(x, z) \in R_1$ und $(x, z) \in R_2$, also auch $(x, z) \in R_1 \cap R_2$.

$R_1 \cup R_2$ ist i. a. keine Äquivalenzrelation. Gegenbeispiel:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}, \quad R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$$

$R_1 \cup R_2$ enthält die Elemente $(1, 2)$ und $(2, 3)$, nicht aber $(1, 3)$. Also ist $R_1 \cup R_2$ nicht transitiv und damit keine Äquivalenzrelation.

1.2.5
R sei reflexive Relation auf A. Man zeige:

$$R \text{ ist Äquivalenzrelation auf } A \iff \text{für alle } x, y, z \in A \text{ gilt: } xRz \wedge yRz \implies xRy$$

Wir beweisen zunächst die Richtung “$\Longrightarrow$”:
Es gelte also $xRz \wedge yRz$. Da R eine Äquivalenzrelation ist, gilt dann wegen der Symmetrie auch zRy, und nun folgt mit der Transitivität aus xRz und zRy die Beziehung xRy, die zu zeigen war.
Es folgt der Beweis von “$\Longleftarrow$”:
Wir müssen die Symmetrie und Transitivität von R zeigen und beginnen mit dem Beweis der Symmetrie.
Sei also xRy. Da R nach Voraussetzung reflexiv ist, gilt yRy. Wir wenden nun die Voraussetzung auf $yRy \wedge xRy$ an und können folgern: yRx Damit ist die Symmetrie gezeigt.
Sei nun $xRy \wedge yRz$. Da wir die Symmetrie schon gezeigt haben, gilt dann auch zRy. Wir wenden jetzt die Voraussetzung auf $xRy \wedge zRy$ an und können folgern: xRz Damit ist auch die Transitivität bewiesen.

1.2.6

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und eine Teilmenge P_n von $\mathbb{N}$ definiert durch
$P_n := \{a \mid a \in \mathbb{N}$ *und es gibt ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $n = ka\}$.
Eine Relation $\preceq$ auf P_n sei definiert durch:

$$a \preceq b \iff \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ so daß } b = ka$$

Man zeige: $\preceq$ ist eine Halbordnung auf P_n.
Ist $\preceq$ eine Kette?

$\preceq$ ist **reflexiv:**
Sei $a \in P_n$. Für $1 \in \mathbb{N}$ gilt $a = 1 \cdot a$, also gilt $a \preceq a$.
$\preceq$ ist **transitiv:**
Es sei $a \preceq b$ und $b \preceq c$. Dann gibt es $k, l \in \mathbb{N}$ mit $b = ka$ und $c = lb$. Es folgt $c = lka$ und wegen $lk \in \mathbb{N}$ gilt $a \preceq c$.
$\preceq$ ist **antisymmetrisch:**
Es gelte $a \preceq b$ und $b \preceq a$. Das heißt, es gibt $k, l \in \mathbb{N}$ mit $b = ka$ und $a = lb$. Man erhält $b = (kl) \cdot b$, also $kl = 1$, denn $b \neq 0$ da $b \in P_n$. Wegen $k, l \in \mathbb{N}$ kann nur gelten $k = l = 1$.

Die Halbordnung $\preceq$ ist i. a. keine Kette. Für $n = 6$ gilt z. B. $2 \in P_6$ und $3 \in P_6$, aber 2 und 3 sind bezüglich $\preceq$ nicht vergleichbar, d. h. $\preceq$ ist nicht konnex.

Bemerkung: P_n ist die Menge der natürlichen Teiler von n und $\preceq$ die “Teiler-Relation”:

$$a \preceq b \iff a|b$$

1.2.7

A sei die Menge $\{1,2,3,4,5\}$*, R sei die Teilmenge* $\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(3,5),(4,3),(4,5),(5,5)\}$ *von* $A \times A$.

a) *Warum ist R keine Halbordnung?*

b) *Welche Elemente müssen mindestens zu R hinzugenommen werden, um eine Halbordnung zu erzeugen?*

c) *Ist die unter b) erhaltene Halbordnung eine Kette?*

a) R ist keine Halbordnung, da z. B. die Reflexivität nicht gilt ($(4,4) \notin R$).

b) Man muß nach a) zunächst $(4,4)$ zu R hinzunehmen. Ferner muß R transitiv sein. Daher müssen noch die Elemente $(1,3),(1,5),(2,4),(2,3),(2,5)$ hinzugenommen werden. Die dann entstehende Relation ist auch antisymmetrisch, also eine Halbordnung.

c) Die unter b) erhaltene Halbordnung $\hat{R}$ ist keine Kette, da weder $(2,3)$ noch $(3,2)$ zu $\hat{R}$ gehören.

1.2.8

Ist A eine Menge, so heißt $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *eine* **Partition** *von A, wenn gilt:*

(P1) *Alle Mengen aus* $\mathcal{P}$ *sind nicht-leer.*

(P2) *Je zwei verschiedene Mengen aus* $\mathcal{P}$ *sind disjunkt.*

(P3) *Die Mengen aus* $\mathcal{P}$ *bilden eine Überdeckung von A, d. h. jedes Element aus A liegt in mindestens einer Menge von* $\mathcal{P}$.

$\sim$ *sei eine Äquivalenzrelation auf A,* $A/_\sim$ *sei die Menge der Äquivalenzklassen von* $\sim$*. Man zeige:* $A/_\sim$ *ist eine Partition von A.*

Wir müssen zeigen, daß $A/_\sim = \{a/_\sim \mid a \in A\}$ die Eigenschaften (P1), (P2) und (P3) besitzt.

Zu (P1): Für jedes $a/_\sim \in A/_\sim$ gilt $a \in a/_\sim$, also ist jede Menge aus $A/_\sim$ nicht-leer.

Zu (P2): Seien $a/_\sim, b/_\sim \in A/_\sim$ und $a/_\sim \neq b/_\sim$. Angenommen, es gibt ein c mit $c \in a/_\sim$ und $c \in b/_\sim$. Dann folgt $a \sim c$ und $b \sim c$, also auch $c \sim b$. Wegen der Transitivität von $\sim$ folgt $a \sim b$, d. h. $a/_\sim = b/_\sim$, im Widerspruch zur Annahme.

Zu (P3): Die Mengen aus $A/_\sim$ bilden trivialerweise eine Überdeckung von A, da - wie bei (P1) gezeigt - für jedes $a \in A$ gilt: $a \in a/_\sim$.

1.2.9

$\mathcal{P}$ sei eine Partition von A, $\sim$ sei definiert durch

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{Es gibt ein } P \in \mathcal{P} \textit{ mit } a \in P \textit{ und } b \in P.$$

Man zeige: $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf A.

Wir müssen die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität von $\sim$ zeigen.
Reflexivität: Sei $a \in A$. Da $\mathcal{P}$ eine Partition von A ist, gibt es nach (P3) ein $P \in \mathcal{P}$ mit $a \in P$. Also gilt $a \sim a$.
Symmetrie: Sei $a \sim b$. Dann gibt es $P \in \mathcal{P}$ mit $a \in P \wedge b \in P$. Natürlich ist dann auch $b \in P \wedge a \in P$, also $b \sim a$.
Transitivität: Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann gibt es $P_1 \in \mathcal{P}$ mit $a \in P_1$ und $b \in P_1$ und ferner ein $P_2 \in \mathcal{P}$ mit $b \in P_2$ und $c \in P_2$. Da $\mathcal{P}$ eine Partition von A ist, sind die einzelnen Partitionsmengen disjunkt. Aus $b \in P_1$ und $b \in P_2$ folgt also $P_1 = P_2$. Damit gibt es **eine** Menge $P \in \mathcal{P}$ mit $a \in P \wedge b \in P \wedge c \in P$, insbesondere also eine Menge $P \in \mathcal{P}$ mit $a \in P$ und $c \in P$, d. h. es gilt $a \sim c$.

1.2.10

A sei die Menge $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ und $\mathcal{P}$ sei die Partition $\{\{1\},\{2,3,4\},\{5,6\},\{7\}\}$ von A.

Man bestimme die zu $\mathcal{P}$ gehörige Äquivalenzrelation auf A.

Für die zu $\mathcal{P}$ gehörige Äquivalenzrelation $\sim$ gilt:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists P \in \mathcal{P} \text{ mit } x \in P \wedge y \in P$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \sim \quad = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7), \\ & (2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,4),(4,2),(5,6),(6,5)\} \subseteq A \times A \end{aligned}$$

1.3 Funktionen

Auch **Funktionen** sind mengentheoretisch gesehen spezielle Relationen.

Definition einer Funktion

Eine Relation f zwischen X und Y heißt **Funktion**, wenn gilt:

(i) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.

(ii) Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt stets $y = z$.
(Diese Eigenschaft nennt man **Rechtseindeutigkeit** von f.)

Wegen der Rechtseindeutigkeit schreibt man $(x, y) \in f$ üblicherweise in der Form $y = f(x)$.

Schreibweise für Funktionen: $f : \begin{cases} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{cases}$

Bild von f	$f(X) := \{y \in Y \mid \text{es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$ $= \{f(x) \mid x \in X\}$
Umkehrrelation	$f^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in f\} \subseteq Y \times X$
Seien $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$	
Bildmenge von A	$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$
Urbildmenge von B	$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

f^{-1} ist also eine Relation zwischen Y und X. Da f^{-1} i. a. die Bedingungen (i) und (ii) für Funktionen nicht erfüllt, **braucht f^{-1} keine Funktion zu sein!**

Spezielle Funktionen

Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt

				(2. Bezeichnung)
injektiv	$\Longleftrightarrow$	$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	$\Longleftrightarrow$	f eineindeutig
surjektiv	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X\ \ y = f(x)$	$\Longleftrightarrow$	f ist Funktion auf
bijektiv	$\Longleftrightarrow$	f injektiv und surjektiv	$\Longleftrightarrow$	f eineindeutig auf

Um zu zeigen, daß eine Funktion f **nicht** injektiv ist, reicht es, zwei verschiedene Elemente mit gleichem Funktionswert anzugeben.
Um zu zeigen, daß eine Funktion f **nicht** surjektiv ist, reicht es, ein Element aus Y anzugeben, das nicht als Funktionswert angenommen wird.
Bijektive Funktionen können benutzt werden, um den Begriff

“Zwei **endliche** Mengen haben **gleichviele** Elemente”

auf **unendliche** Mengen zu erweitern.

Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen X und Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Funktion $f: X \longrightarrow Y$ gibt.
X und Y haben dann gleiche **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**).

Zum Schluß noch ein Hinweis: Statt Funktion ist auch das Wort Abbildung gebräuchlich. Funktionen und Abbildungen sind also dasselbe!

1.3.1

Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Funktion.
Man zeige:
Sind A, B Teilmengen von X und C, D Teilmengen von Y, so gilt:

a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
c) $f(X \setminus A) \supseteq f(X) \setminus f(A)$
d) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$
e) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
f) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
g) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
h) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Warum gilt in a) bzw. c) bzw. d) bzw. h) nicht die Gleichheit?

In allen Teilen gehen wir wie üblich beim Beweis von Mengeninklusionen bzw. Mengengleichheiten vor.

a)
$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff \exists x(x \in A \cap B \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x(x \in A \wedge x \in B \wedge y = f(x)) \\ &\implies (\exists x(x \in A \wedge y = f(x))) \wedge (\exists x(x \in B \wedge y = f(x))) \\ &\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x(x \in A \cup B \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x(x \in A \vee x \in B \wedge y = f(x)) \\ &\iff (\exists x(x \in A \wedge y = f(x))) \vee (\exists x(x \in B \wedge y = f(x))) \\ &\iff y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

Man beachte, daß bei a) der dritte Pfeil nur eine Implikation ist, da man von der Aussage $(\exists x(x \in A \wedge y = f(x))) \wedge (\exists x(x \in B \wedge y = f(x)))$ nicht zur Zeile davor zurückschließen kann. Die existierenden $a \in A$ und $b \in B$ mit $y = f(a) = f(b)$ können nämlich verschieden sein und damit existiert kein x mit $y = f(x)$, das in A und B gleichzeitig liegt. Hier in b) ist der rückwärtige Schluß aber durch das $\vee$ möglich!

c) $y \in f(X) \setminus f(A) \Longrightarrow y \in f(X) \wedge y \notin f(A) \Longrightarrow \exists x \;\; x \in X \wedge f(x) = y$
Wäre $x \in A$, so wäre $f(x) = y \in f(A)$, und das wäre ein Widerspruch. Also gibt es ein $x \in X \setminus A$ mit $y = f(x)$, d. h. $y \in f(X \setminus A)$.

d) Sei $x \in A$. Dann ist $f(x) \in f(A)$. Das heißt aber: $x \in f^{-1}(f(A))$

e)
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\Longleftrightarrow f(x) \in C \cap D \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

f) Der Beweis verläuft wie bei e).

g)
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \setminus C) &\Longleftrightarrow f(x) \in Y \setminus C \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in Y \wedge f(x) \notin C \\ &\Longleftrightarrow x \in X \wedge x \notin f^{-1}(C) \\ &\Longleftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(C) \end{aligned}$$

h) Sei $y \in f(f^{-1}(C))$. Nach Definition von $f(A)$ gibt es dann ein $x \in f^{-1}(C)$ mit $f(x) = y$. $x \in f^{-1}(C)$ heißt aber $f(x) \in C$, also gilt $y \in C$.

Es wurde schon erwähnt, daß die Gleichheit in a) nicht gilt. Wir geben noch ein Gegenbeispiel an:

$$X = Y = \{1, 2\}, \;\; A = \{1\}, \;\; B = \{2\}, \;\; f(1) = 1, \;\; f(2) = 1$$

Dies ist gleichzeitig ein Gegenbeispiel dafür, daß die Gleichheit in c) und in d) nicht gilt. Ergänzt man außerdem in diesem Beispiel $C = \{2\}$, so erkennt man, daß in h) die Gleichheit nicht gilt, denn es folgt $f(f^{-1}(C)) = \emptyset$.

Bemerkung: Ist f surjektiv, so gilt in h) die Gleichheit.

1.3.2

Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Man zeige:
a) *Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.*
b) *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.*
c) *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.*
d) *Ist f surjektiv und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.*
e) *Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.*

a) Seien $x, y \in X$ und $x \neq y$. Da f injektiv ist, folgt $f(x) \neq f(y)$. Da g injektiv ist, folgt weiter $g\,(f(x)) \neq g\,(f(y))$. Das bedeutet aber $(g \circ f)\,(x) \neq (g \circ f)\,(y)$, also ist $g \circ f$ injektiv.
b) Seien $x, y \in X$ und $x \neq y$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $g\,(f(x)) \neq g\,(f(y))$. Hieraus folgt aber $f(x) \neq f(y)$, da g eine Funktion ist.

c) Sei $z \in Z$. Zu zeigen ist: $\exists y \in Y \;\; g(y) = z$
Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = z$, d. h. $g(f(x)) = z$. Wir setzen $y = f(x)$ und haben ein $y \in Y$ gefunden mit $g(y) = z$.
d) Seien $x, y \in Y$ und $x \neq y$. Da f surjektiv ist, gibt es zu $x, y \in Y$ Elemente $a, b \in X$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Wegen $x \neq y$ folgt $a \neq b$. Da $g \circ f$ injektiv ist, ist $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(b)$, d.h. $g(f(a)) \neq g(f(b))$, also $g(x) \neq g(y)$.
e) Sei $y \in Y$. Zu zeigen ist: $\exists x \in X \;\; f(x) = y$
Zu $g(y)$ existiert ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(y)$, da $g \circ f$ surjektiv ist. Da g injektiv ist, folgt $y = f(x)$.

1.3.3

Man gebe – falls möglich – zwei bijektive Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, für die gilt: $f \circ g \neq g \circ f$

Die affinen Funktionen f und g, gegeben durch $f(x) = 2x+1$ und $g(x) = 3x+5$, sind bijektiv. Es gilt:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(3x+5) + 1 = 6x + 11$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(2x+1) + 5 = 6x + 8$$

Also ist $f \circ g \neq g \circ f$.

1.3.4

Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Man zeige:
Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Wir zeigen zunächst die **Injektivität** von $g \circ f$.
Seien $x_1, x_2 \in X$ und $x_1 \neq x_2$. Es folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$, da f injektiv und weiter $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, da g injektiv. Also gilt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$, d. h. $g \circ f$ ist injektiv.
Es folgt der Beweis der **Surjektivität** von $g \circ f$.
Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Zu diesem y gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, da f surjektiv ist. Also gibt es ein $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, d. h. $g \circ f$ ist surjektiv.
Insgesamt ist die Bijektivität von $g \circ f$ gezeigt, also existiert $(g \circ f)^{-1}$.
Wir zeigen nun: Für alle $z \in Z$ gilt $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$
Sei $z \in Z$. Dann gibt es $x \in X$ mit $(g \circ f)(x) = z$, also $(g \circ f)^{-1}(z) = x$. Andererseits ist
$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))$, da $g(f(x)) = z$.
Wegen $g^{-1} \circ g = id$ und $f^{-1} \circ f = id$ folgt $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x$, und damit ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gezeigt.

1.3.5
Man gebe eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ an.

Wir betrachten hier z. B. die Funktion $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die durch $f(n) = n + 1$ gegeben ist. Diese Funktion ist injektiv, aber nicht surjektiv, da 1 nicht als Funktionswert angenommen wird.
Das folgende Bild verdeutlicht diese Funktion und deren Nicht–Surjektivität:

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbb{N}: & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \dots \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbb{N}: & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \dots \end{array}$$

Faßt man die angegebene Funktion aber als eine Funktion $\tilde{f}: \mathbb{N} \longrightarrow A$ auf mit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\} \subset \mathbb{N}$, so ist $\tilde{f}$ bijektiv.

1.3.6
$f: X \longrightarrow Y$ sei eine Funktion.
Die Relation $\sim$ auf X sei definiert durch $a \sim b :\Longleftrightarrow f(a) = f(b)$.
Man untersuche, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Wir zeigen, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.
1. Reflexivität: Sei $a \in X$. Es gilt $f(a) = f(a)$, also $a \sim a$.
2. Symmetrie: Es sei $a \sim b$, also $f(a) = f(b)$. Natürlich gilt dann auch $f(b) = f(a)$, also $b \sim a$.
3. Transitivität: Es sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Das heißt $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$. Wegen der Transitivität der Gleichheit folgt auch $f(a) = f(c)$, also $a \sim c$.

1.3.7
Sei X eine Menge. Man zeige:
Es gibt keine surjektive Abbildung von X auf $\mathcal{P}(X)$.

Indirekter Beweis:
Angenommen, es gibt eine Menge X und eine surjektive Abbildung $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Wir definieren $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. (Man beachte hierbei, daß x ein *Element* von X, $f(x)$ aber eine *Teilmenge* von X ist!) Da wir annehmen, f sei surjektiv, gibt es ein $y \in X$ mit $f(y) = Y$. Dies werden wir nun zum Widerspruch führen. Für y unterscheiden wir zwei Fälle:
a) $y \in Y \quad \Longrightarrow \quad y \notin f(y) \quad \Longrightarrow \quad y \notin Y \quad \sharp$
b) $y \in X \setminus Y \quad \Longrightarrow \quad y \in f(y) \quad \Longrightarrow \quad y \in Y \quad \sharp$
y liegt also weder in Y noch in $X \setminus Y$, was nicht möglich ist. Folglich war die Annahme, daß es eine surjektive Funktion von X auf $\mathcal{P}(X)$ gibt, falsch.

(Das Zeichen $\sharp$ benutzen wir als Abkürzung für “Widerspruch”.)