Detlef Wille

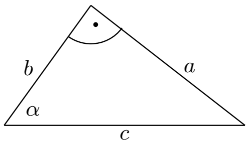
Mathematik-Vorkurs

für Studienanfänger

3. Auflage

HANSER

Trigonometrische Funktionen



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$$\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Additionstheoreme

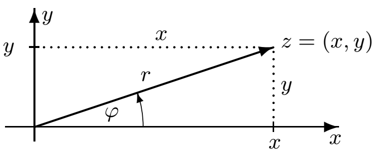
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

doppelter Winkel

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ Quadranten beachten!}$$



Rechnen mit **Potenzen** und **Logarithmen**

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

$a^{r+s} = a^r a^s$	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$(a^r)^s = a^{rs}$	$\log_a x^s = s\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

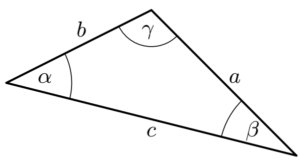
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ speziell: } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

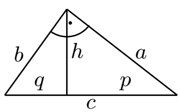
Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ falls } \gamma = 90^0.$$



Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Kathetensatz $a^2 = pc\,,\ \ b^2 = qc$

Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$

Höhensatz $h^2 = pq$

Wurzeln $(m, n, q \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0)$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

Quadratische Gleichung

$\boldsymbol{p, q}$ – **Formel**	$\boldsymbol{a, b, c}$ – **Formel**
$x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Differentiations– und Integrationsregeln

Summenregel	$(u+v)' = u' + v'$
konstanter Faktor	$\big(r \cdot f(x)\big)' = r \cdot f'(x)$
Produktregel	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
partielle Integration	$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$
Kettenregel	$\big(y(x(t))\big)' = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$
Substitutionsregel	$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) g'(t) \, dt$, mit $\begin{array}{r} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt. \end{array}$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \ (n \neq 1) \qquad \int \frac{f'}{f} dx = \ln|f|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \qquad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$$

$$\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x \qquad \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x$$

Differentiation der Umkehrfunktion

Ist $y = f(x)$ eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad \text{oder} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{für } f'(x) \neq 0.$$

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

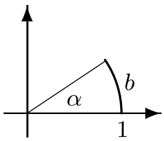
Deutsches Alphabet

A	a	a	J	j	j	S	s	s
B	b	b	K	k	k	T	t	t
C	c	c	L	l	l	U	u	u
D	d	d	M	m	m	V	v	v
E	e	e	N	n	n	W	w	w
F	f	f	O	o	o	X	x	x
G	g	g	P	p	p	Y	y	y
H	h	h	Q	q	q	Z	z	z
I	i	i	R	r	r			

Umrechnung: Gradmaß – Bogenmaß

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem

- ⋆ **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** in Grad und der
- ⋆ **Länge $\boldsymbol{b}$** des zugehörigen Kreisbogens am **Einheitskreis**, bzw. **Verhältnis $\boldsymbol{b}$** der Bogenlänge eines Winkels zu seinem Radius.



$$\boxed{\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{b}{\pi}}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}\, b \qquad b = \frac{\pi}{180^\circ}\, \alpha$$

lies: $\alpha^\circ = b$ rad

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,\text{rad} \approx 0.017\,\text{rad}$$

$$1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.296^\circ$$

Benutzt man einen Taschenrechner, vergewissere man sich, ob er auf Winkel im Gradmaß (DEG) oder im Bogenmaß (RAD) eingestellt ist.

$\boldsymbol{n}$–Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

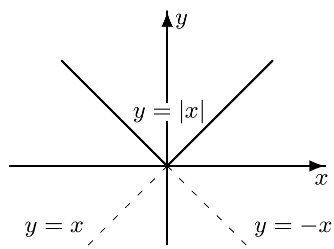
Allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Betrag

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x & \text{, für } x \geq 0 \\ -x & \text{, für } x < 0 \end{cases}}$$



$$|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \text{ und } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ für } y \neq 0.$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad \textbf{Dreiecksungleichung}$$

Auf der Zahlengeraden ist

$|x|$ der **Abstand** der Zahl x vom Nullpunkt,

$|x-a|$ der **Abstand** der Zahl x von der Zahl a.

Merke

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

MATHEMATIK-VORKURS

FÜR

STUDIENANFÄNGER

Dr. Detlef Wille

3. Auflage

Binomi Verlag	**Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**	
	Telefon	**05105 6624000**
	Telefax	**05105 515798**
	E–Mail	**verlag@binomi.de**
	Internet	**www.binomi.de**

Druck	BWH GmbH www.bw-h.de	Die Publishing Company

Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel

ISBN 978–3–923 923–41–0

Hannover 8/14

Vorwort

Viele Studiengänge an Hochschulen aller Art benötigen Mathematik als Grundlagenfach bzw. als Hilfswissenschaft. Mit diesem Vorkurs können Studienanfänger die für ihr Studium wichtigen Grundkenntnisse wiederholen, auffrischen oder sich wieder aneignen.
Der Stoff dieses Vorkurses beschäftigt sich ganz bewusst überwiegend mit grundlegenden Begriffen und Rechentechniken, und geht danach noch kurz auf Differential- und Integralrechnung ein. In vielen Jahren Lehrtätigkeit hat der Autor nämlich festgestellt, dass die Schwierigkeiten, mit denen Studierende in den ersten Klausuren, z.B. in der Mathematik für Ingenieurswissenschaften oder Wirtschaftswissenschaften zu kämpfen haben, meist grundlegender Natur sind – sie beginnen in der Bruchrechnung und Potenzrechnung.
Aus diesen Kenntnissen heraus ist das Buch konzipiert. Es werden kurz die nötigen Begriffe definiert und dann viele Übungen (insgesamt etwa 400 Beispiele) durchgerechnet. Bei der selbständigen Bearbeitung dieser Übungen kann man testen, wie sicher man die Rechentechniken beherrscht und gegebenenfalls die zugehörigen Begriffe und Regeln wiederholen. Das Kapitel über Funktionen dient als kurzer Überblick über die wichtigsten Funktionstypen und stellt, ohne in die Tiefe zu gehen, die Kenntnisse zusammen, die unbedingt nötig sind. In der Differential- und Integralrechnung werden dann nur die angesprochenen Funktionstypen behandelt.
Auf Literaturangaben wird weitgehend verzichtet, da die Bücher, zu denen man greifen wird, fächerspezifisch sind, also vom Studienfach abhängen werden. Gelegentlich tauchen Hinweise auf, und zwar

EM 1, **EM 2**:
Repetitorium der Elementaren Mathematik; G. Merziger, M. Holz, D. Wille
eine ausführliche und erweiterte Darstellung des hier behandelten Stoffes,

F+H: Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik; G. Merziger u.a.
eine Formelsammlung, die im Studium unerlässlich ist und

HM: Repetitorium der Höheren Mathematik; G. Merziger, T. Wirth
ein Buch, das überwiegend in naturwissenschaftlichen Studiengängen sehr beliebt ist. Alle diese Bücher sind im Binomi Verlag (www.binomi.de) erschienen.

Dieses Buch widme ich meinem ehemaligen Kollegen Dr. Thomas Wirth, der an der Überarbeitung der ersten Kapitel noch mitgewirkt hat und dann leider viel zu früh verstorben ist.

Hannover, Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elementares Rechnen

1.1 Rechnen in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Es ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die **Menge der natürlichen Zahlen** und
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die **Menge der ganzen Zahlen**.
$x \in A$ liest man: x ist Element der Menge A,
$x \notin A$ liest man: x ist kein Element der Menge A.
z.B. gilt: $5 \in \mathbb{N}$, $-3 \in \mathbb{Z}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

In $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ beschäftigt man sich mit Teilbarkeitsbegriffen.

Teilbarkeit

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so heißt a ein **Teiler** von b, falls es eine ganze Zahl c gibt mit $a \cdot c = b$.
b heißt dann **Vielfaches** von a.

Schreibweise: $a \mid b$ gelesen: a teilt b, z.B. $4|24$, denn $4 \cdot 6 = 24$.
$a \nmid b$ gelesen: a teilt b nicht, z.B. $3 \nmid 8$.

Schon bei der Definition von Primzahlen braucht man den Begriff der Teilbarkeit, denn:
eine natürliche Zahl p größer gleich 2 heißt **Primzahl**, falls p nur 1 und sich selbst als Teiler besitzt.
Erste Primzahlen: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$
Schon Euklid (300 v.Chr.) hat bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Für die Bruchrechnung wichtig sind die Begriffe **größter gemeinsamer Teiler** (ggT) und **kleinstes gemeinsames Vielfaches** (kgV).