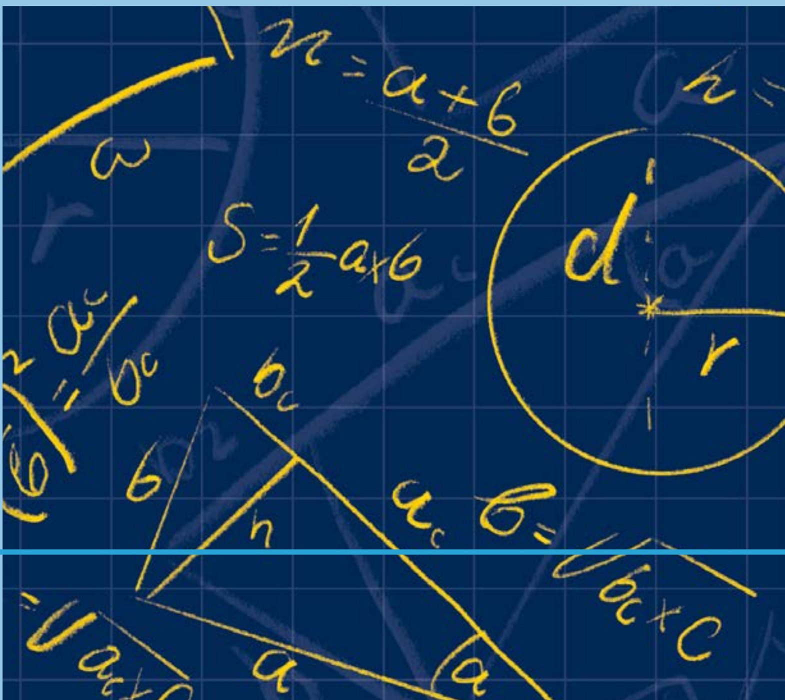
Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik für das Ingenieurstudium

Aufgaben und Lösungen



HANSER

Koch / Stämpfle

Mathematik für das Ingenieurstudium

Aufgaben und Lösungen

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik für das Ingenieurstudium

Aufgaben und Lösungen

HANSER

Über die Autoren:
Prof. Dr. Jürgen Koch hält Vorlesungen zur Mathematik an der Hochschule Esslingen.
Prof. Dr. Martin Stämpfle hält Vorlesungen zur Mathematik an der Hochschule Esslingen.

MIX
Papier | Fördert gute Waldnutzung
FSC® C016368

Print-ISBN: 978-3-446-47863-3
E-Book-ISBN: 978-3-446-47885-5

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Kolbergerstraße 22 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © adobe.stock.com/Who is Danny
Satz: Martin Stämpfle
Druck: Elanders Waiblingen GmbH, Waiblingen
Printed in Germany

Vorwort

Die Lösungen der Aufgaben aus unserem Lehrbuch Mathematik für das Ingenieurstudium stellen wir Ihnen mit diesem Aufgabenbuch separat zur Verfügung. Der Umfang und die Qualität der Lösungswege ist seit dem Erscheinen des Lehrbuchs stetig gewachsen. Sowohl das Lehrbuch als auch das Aufgabenbuch gibt es nun in gedruckter und in elektronischer Form. Damit möchten wir die Nutzerfreundlichkeit weiter erhöhen.

Die Aufgaben sind in die Kategorien Verständnis und Kompetenz, Rechnung und Training sowie Anwendung unterteilt. Insbesondere zwischen Verständnis- und Rechenaufgaben ist der Übergang teilweise fließend. Wir haben uns dennoch bemüht, jede Aufgabe entsprechend ihrem Hauptcharakter einzuordnen. Bei den Anwendungsaufgaben haben wir versucht, ein möglichst breites Spektrum abzudecken.

Die Anzahl der Sterne beschreibt den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe: Aufgaben mit einem oder zwei Sternen sind eher leicht. Die Lösungen sollten ohne größeren Aufwand selbstständig zu finden sein. Die Komplexität ist niedrig und der Rechenaufwand gering. Aufgaben mit drei Sternen sind mittelschwer. Zur Lösung ist unter Umständen das Heranziehen von weiteren Lernmaterialien erforderlich. Aufgaben mit vier oder fünf Sternen sind relativ schwer. Zur Lösung ist mehr Zeit, Ausdauer oder Kreativität erforderlich. Uns ist bewusst, dass diese Einschätzung teilweise subjektiv sein kann. Dennoch soll sie den Studierenden als Orientierung und Möglichkeit zur Selbsteinschätzung dienen. Die Anordnung der Aufgaben ist themenbezogen, daher sind die Schwierigkeitsgrade bunt gemischt und nicht aufsteigend sortiert.

Die allermeisten Aufgaben sind ohne Taschenrechner lösbar und sollen ausdrücklich auch ohne Taschenrechner gelöst werden. Es gibt jedoch einige wenige Aufgaben, bei denen der Einsatz eines Taschenrechners sinnvoll ist. Dies betrifft insbesondere numerische Berechnungen.

Auch bei diesem Buch richtet sich unser Dank in erster Linie an unsere Studierenden. Gute didaktische Darstellung kann nur in einem iterativen Feedback-Prozess entstehen. Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei unserem Kollegen Herrn Prof. Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko, der uns kontinuierlich auf Tippfehler aufmerksam macht und jede Menge inspirierende Ideen einbringt. Ein Dank geht auch an das Team vom Carl Hanser Verlag für die Möglichkeit, dieses Buchprojekt zu realisieren. Unser besonderer Dank gilt unseren Familien, die uns wertvolle Zeit zur Erstellung dieses Buchs zugestanden haben.

Wir wünschen viel Spaß mit den Aufgaben und einen nachhaltigen Lernerfolg!

Esslingen, im März 2025

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Dieses Kapitel adressiert grundlegende mathematische Kompetenzen und Fertigkeiten. Viele der Themen sollten aus der Schulmathematik bekannt sein. Erfahrungsgemäß bereiten gerade diese Grundkenntnisse Studierenden oft Schwierigkeiten. Die weiteren Kapitel bauen auf dieses Kapitel auf. Möchte man etwa eine komplizierte Differenzialgleichung lösen und kennt im Prinzip auch den Lösungsweg, so scheitert man dann möglicherweise aber bei der elementaren Teilaufgabe, die Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen.

Aufgaben zur Logik machen den Unterschied zwischen Implikation und Äquivalenz deutlich. Was in der Alltagssprache oft ähnlich klingt oder vermischt wird muss mathematisch getrennt und mit Präzision formuliert werden. In der Mathematik hat man es oft mit sogenannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu tun. Auch diese Begriffe müssen sauber unterschieden weden.

Im Bereich der Zahlen sollen die Aufgaben den Umgang mit Zahlen unterschiedlicher Art und Darstellungsform festigen. Brüche und Dezimalzahlen kommen in der Praxis gleichermaßen vor und müssen häufig ineinander umgerechnet werden.

Algebraische Umformungen sind gewissermaßen die Fingerübungen der Mathematik. Um fortgeschrittene Methoden der Mathematik anwenden zu können, ist ein sicherer Umgang mit mathematischen Ausdrücken und Termen unumgänglich. Zu den Kernthemen zählen Potenzgesetze, Wurzeln und die binomischen Formeln.

Elementare Aufgaben zur Trigonometrie enthalten die Umrechnung zwischen dem Grad- und dem Bogenmaß. Die Kenntnis von Sinus- und Kosinuswerten zu einigen wichtigen Winkeln sind ein absolutes Muss. Ingenieurinnen und Ingenieure sollten diese Werte zu jeder Zeit auswendig parat haben.

Das Lösen von Gleichungen ist eine zentrale Aufgabenstellung in der Mathematik. Hierbei sind sowohl Kompetenz als auch Rechenfertigkeit gefragt. Eine gegeben Gleichung muss zunächst klassifiziert werden. Elementar sind etwa lineare, quadratische oder biquadratische Gleichungen. Auch Gleichungen mit höheren Potenzen oder Wurzelgleichungen treten häufig auf. Bei Wurzelgleichungen wird manchmal quadriert und dabei übersehen, dass so zusätzliche Lösungen entstehen können. Stolpersteine sind Gleichungen mit Beträgen. Hier sind Fallunterscheidungen notwendig, die den Lösungsweg häufig beschwerlich machen. Große Schwierigkeiten bereiten meist auch jede Art von Ungleichungen.

Dieses Kapitel enthält auch ein paar Aufgaben zur Beweistechnik. Auch wenn Beweise nicht zu den zentralen Themen der angewandten Mathematik zählen, so schulen sie doch das logische Denken und das Verallgemeinern von Zusammenhängen.

1.1 Aufgaben

1.1.1 Verständnis und Kompetenz

Aufgabe 1.1 (Zahlenmengen) ★☆☆☆☆

Welche der Zahlen 0, -2, 0.815, $\sqrt{2}$, $\frac{51}{17}$, $-\frac{47}{11}$ gehören zu folgenden Mengen?

a) Reelle Zahlen b) Rationale Zahlen c) Ganze Zahlen d) Natürliche Zahlen

Aufgabe 1.2 (Ordnung) ★★☆☆☆

Ordnen Sie die Zahlen $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{23}{70}$, $\frac{34}{105}$ der Größe nach, ohne Taschenrechner.

Aufgabe 1.3 (Dezimalzahlen) ★★★☆☆

Stellen Sie die rationalen Zahlen $\frac{1}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{4711}{9999}$ als Dezimalzahlen dar. Verwenden Sie dabei keinen Taschenrechner.

Aufgabe 1.4 (Intervallschreibweise) ★★☆☆☆

Geben Sie die Zahlenmenge mit folgender Beschreibung in Intervallschreibweise an.

a) Alle reellen Zahlen außer der 7.
b) Alle reellen Zahlen, aber nicht die Zahlen zwischen -3 und 2 einschließlich.
c) Alle reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 6 oder größer als 8 sind.
d) Alle reellen Zahlen größer gleich -3, aber nicht zwischen 3 und 4 ausschließlich.

Aufgabe 1.5 (Einfache Ausdrücke) ★★☆☆☆

Berechnen Sie den Wert der folgenden Ausdrücke.

a) $2 \cdot (-3)$ b) $-2 \cdot (-3)$ c) $(-2) \cdot (-3)$
d) -3^2 e) $(-3)^2$ f) $-(3^2)$
g) $(-2) + (-5) \cdot (-1)$ h) $3 \cdot (-5) - 6 \cdot (-4)$ i) $(-5)^2 - 2^3 + (-2)^3 + 12$

Aufgabe 1.6 (Wurzelumformungen) ★★★☆☆

Richtig oder falsch? Der Wurzelausdruck $\sqrt{a^2 - b^2}$

a) ist nicht definiert, b) kann zu $a - b$ vereinfacht werden,
c) kann zu $|a - b|$ vereinfacht werden, d) kann zu $|a| - |b|$ vereinfacht werden,
e) kann zu $\pm|a - b|$ vereinfacht werden, f) wird niemals negativ.

Aufgabe 1.7 (Lösungen einer Wurzelgleichung) ★★★☆☆

Richtig oder falsch? Die Gleichung $\sqrt{(-x)^2} = 2$

a) ist nicht definiert, b) besitzt keine reelle Lösung,
c) hat die Lösung $x = -2$, d) hat nur eine Lösung, nämlich $x = -2$,
e) besitzt die Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$, f) ist nicht eindeutig lösbar.

1.1.2 Rechnung und Training

Aufgabe 1.8 (Zusammengesetzte Zahlenmengen) ★☆☆☆☆

Gegeben sind die folgenden Zahlenmengen:

$$A = (-2, 1], \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}, \quad C = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}.$$

Bestimmen Sie die folgenden zusammengesetzten Mengen.

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cap C$ c) $A \cup D$

Aufgabe 1.9 (Faktorisierung) ★★☆☆☆

Klammern Sie möglichst viele gemeinsame Faktoren aus.

a) $8\,x - 4\,z$
b) $6\,x + 12\,y - 3\,z$
c) $10\,x^2\,y + 5\,x\,y^2$
d) $12\,x^3\,y^4 - 3\,x\,y^2$
e) $9\,x^3\,y\,z^2 - 12\,x^2\,y^3\,z + 3\,x\,y^2\,z^3$
f) $6\,x^5\,z^4 - 12\,x^2\,y^2\,z^3 + 72\,x^2\,y^2\,z^2$

Aufgabe 1.10 (Summenschreibweise und binomischen Formeln) ★★★☆☆

Multiplizieren Sie mithilfe der binomischen Formeln aus und fassen Sie zusammen.

a) $\left(x - y^3\right)^2$
b) $\left(x^2 + 2\,y\right)^2$
c) $(x + y)^2 - (x - y)^2$
d) $(4\,x + 2\,y)^2 - (4\,x - 2\,y)^2$
e) $\left(2\,y - x^2\right)^2 - \left(x^2 + y\right)^2$
f) $\left(x^3 - y^2\right)^2 + \left(x^2 - 2\,y^3\right)^2$

Aufgabe 1.11 (Faktorisierung und binomische Formeln) ★★★☆☆

Formen Sie die Terme mithilfe der binomischen Formeln um.

a) $x^2 + 2\,x + 1$
b) $9\,y^2 + 6\,y + 1$
c) $4\,x^2 - 8\,x + 4$
d) $9\,x^2 - 24\,x\,y + 16\,y^2$
e) $16\,x^2 - 4\,y^2$
f) $-\left(x^2 - 1\right)\left(4\,x - 9\,x^3\right)$

Aufgabe 1.12 (Mehrfache Potenzen) ★★☆☆☆

Welche rationalen Zahlen werden durch die folgenden Terme dargestellt?

a) $(2^2)^3$ b) $(-2^2)^3$ c) $((-2)^2)^3$
d) $(2^{-2})^3$ e) $(-2^{-2})^3$ f) $(2^2)^{-3}$

Aufgabe 1.13 (Potenzen und Brüche) ★★★☆☆

Vereinfachen Sie folgende Brüche mit Potenzen.

a) $\dfrac{x^5}{x^2}$ b) $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$ c) $\dfrac{x^{-5}}{x^2}$
d) $\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)}$ e) $\dfrac{(a+b)}{(a+b)^3}$ f) $\dfrac{(a+b)^{-2}}{(a+b)}$
g) $\dfrac{x^{n+2}}{x^{n-2}}$ h) $\dfrac{x^{2n}}{x^n}$ i) $\dfrac{x^n}{x^{3n-3}}$

Aufgabe 1.14 (Potenzgesetze) ★★★★☆

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Ausklammern und anschließendes Anwenden der Potenzgesetze.

a) $\dfrac{26 \cdot 5^n - 5^n}{5^{n+2}}$ b) $\dfrac{x^n + 2x^{n-1}}{x^{n-2} + 2x^{n-3}}$ c) $\left(\dfrac{a^2\, b}{c\, d^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{c^2\, d^2}{a\, b^2}\right)^4$

Aufgabe 1.15 (Wurzeln) ★★☆☆☆

Berechnen Sie folgende Wurzeln.

a) $\sqrt{7^2}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ c) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$

Aufgabe 1.16 (Teilweises Wurzelziehen) ★★★☆☆

Vereinfachen Sie folgende Wurzelterme durch teilweises Wurzelziehen.

a) $\sqrt{4\, x^2\, y}$ b) $\sqrt{\dfrac{2x^2}{36}}$ c) $\sqrt{x(4x^2 - 4x + 1)y}$

Aufgabe 1.17 (Winkelmaße umrechnen) ★☆☆☆☆

Rechnen Sie folgende Winkel vom Gradmaß in das Bogenmaß um.

a) $\alpha = 30\,°$ b) $\alpha = -150\,°$ c) $\alpha = 270\,°$

Aufgabe 1.18 (Trigonometrische Werte) ★★☆☆☆

Bestimmen Sie die Werte der trigonometrischen Ausdrücke für die gegebenen Winkel.

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(\dfrac{5\,\pi}{6}\right)$ d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ g) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ h) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Aufgabe 1.19 (Winkelwerte) ★★☆☆☆

Bestimmen Sie die Winkel α zwischen $0\,°$ und $90\,°$ für die gegebenen Werte.

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ c) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\tan\alpha = \sqrt{3}$

e) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ f) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Aufgabe 1.20 (Quadratische Gleichungen) ★☆☆☆☆

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $2\,x^2 - 12\,x + 18 = 0$ c) $-3\,x^2 + 12\,x - 15 = 0$

Aufgabe 1.21 (Biquadratische Gleichungen) ★★☆☆☆

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden biquadratischen Gleichungen.

a) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$ b) $-2\,x^4 - 6\,x^2 + 8 = 0$ c) $3\,x^4 - 24\,x^2 + 48 = 0$

Aufgabe 1.22 (Wurzelgleichungen) ★★★☆☆

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Wurzelgleichungen.

a) $1-\sqrt{2\,x+3}=x$ b) $\sqrt{3\,x\,(x-2)}+2=x$ c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-3\,x}=2$

Aufgabe 1.23 (Betragsfreie Darstellung) ★★☆☆☆

Schreiben Sie den Term $\left|-3x^2+3x+6\right|$ durch Fallunterscheidung ohne Betragszeichen.

Aufgabe 1.24 (Betragsgleichungen) ★★☆☆☆

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $|2-5\,x|=3$ b) $|2+x|=4\,x-1$ c) $|x^2-4|=5$

Aufgabe 1.25 (Lineare Ungleichungen) ★★★☆☆

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Ungleichungen.

a) $3x<5$ b) $-4x>2x-2$ c) $8(x-2)>-3(x+1)$

Aufgabe 1.26 (Quadratische Ungleichungen) ★★★★★

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Ungleichungen.

a) $3x^2<12$ b) $-4x^2\geq 2x-2$ c) $8(x-2)>-2(x+1)^2$
d) $x^2-x<20$ e) $x^2+8x\leq -16$ f) $10x^2+21<41x$

Aufgabe 1.27 (Verschachtelte Beträge) ★★★☆☆

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\big||x|-1\big|<x$.

Aufgabe 1.28 (Summen) ★★★☆☆

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum\limits_{k=1}^{5} k^2$ b) $\sum\limits_{k=-1}^{3} 2^{k-1}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{3} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{(k+1)}{k^2}$

Aufgabe 1.29 (Beweise für Summenformel) ★★★★☆

Wir betrachten die Summen der geraden Zahlen

$$2+4=6,\quad 2+4+6=12,\quad 2+4+6+8=20,\quad 2+4+6+8+10=30,\quad \ldots$$

Ermitteln Sie eine einfache Formel für die Summe der geraden Zahlen und beweisen Sie diese Formel auf möglichst viele unterschiedliche Arten.

Aufgabe 1.30 (Beweis für Teilbarkeit) ★★★★☆

Wenn man eine natürliche Zahl hoch drei nimmt und davon diese natürliche Zahl abzieht,

$$2^3-2=6,\quad 3^3-3=24,\quad 4^3-4=60,\quad 5^3-5=120,\quad \ldots$$

dann fällt auf, dass das Ergebnis durch 3 teilbar ist. Beweisen Sie auf möglichst viele unterschiedliche Arten, dass das für alle natürlichen Zahlen richtig ist.

1.1.3 Anwendung

Aufgabe 1.31 (Parallelschaltung von Widerständen) ★★☆☆☆

Bei der Parallelschaltung der Widerstände R_1 und R_2 gilt für den Gesamtwiderstand R_{ges}

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Lösen Sie die Formel nach R_{ges} auf. Welchen Gesamtwiderstand erzeugt eine Parallelschaltung mit den beiden Widerständen $R_1 = 2\,\Omega$ und $R_2 = 3\,\Omega$?

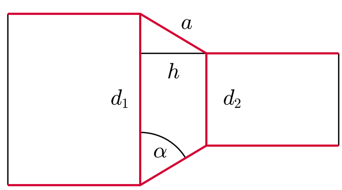
Aufgabe 1.32 (Oldtimer) ★★★☆☆

Drei Oldtimerfans fahren bei einer Ausfahrt hintereinander, sie schauen nur nach vorn. Alle drei wissen nur, dass sie einen Oldtimer fahren, von dem noch genau 5 Fahrzeuge existieren: Zwei mit einer silbernen und drei mit einer schwarzen Heckklappe. Nun wird der hintere Fahrer gefragt, ob er die Farbe seiner Heckklappe kenne. Er antwortet „Nein“. Dann wird der mittlere Fahrer dasselbe gefragt. Auch er sagt „Nein“. Schließlich wird der vordere Fahrer gefragt. Was antwortet er?

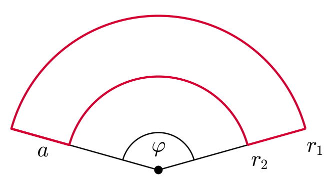
Aufgabe 1.33 (Parkpilot) ★★★☆☆

Ein Parkassistenzsystem eines Fahrzeugs besteht aus zwei Ultraschallsensoren im vorderen Stoßfänger, die einen Abstand d zueinander haben. Ultraschallsensoren bestimmen aufgrund ihres Messprinzips nur den radialen Abstand, also die Entfernung zu einem Hindernis, nicht aber die Richtung. Wie groß ist der Abstand a zwischen einem punktförmigen Hindernis, das sich vor dem Fahrzeug befindet und dem vorderen Stoßfänger, wenn die beiden Sensoren die radialen Abstände a_1 und a_2 messen?

Aufgabe 1.34 (Rohr) ★★★★☆



Zwischen zwei zylindrische Rohre mit den Durchmessern $d_1 = 30\,\text{cm}$ und $d_2 = 20\,\text{cm}$ wird ein Reduzierstück in Form einer Kegelstumpfoberfläche mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ eingesetzt. Das Reduzierstück wird aus einem ebenen Stück Blech geschnitten und anschließend geformt. Der Blechzuschnitt hat die Form eines Kreisringsegments. Die Blechdicke wird für den Zuschnitt vernachlässigt.



a) Bestimmen Sie den äußeren Radius r_1, den inneren Radius r_2, die Höhe a und den Winkel φ des Kreisringsegments.

b) Bestimmen Sie den Winkel α, der die Steigung des Reduzierstücks beschreibt.

c) Für welchen Grenzwinkel α_0 hat das Kreisringsegment den Öffnungswinkel $\varphi_0 = \pi$?

d) Welche Oberfläche hat das Reduzierstück?

1.2 Lösungen

1.2.1 Verständnis und Kompetenz

Lösung 1.1 (Zahlenmengen)

Die Zuordnung zu den Zahlenmengen ergibt folgendes Ergebnis:

a) Alle angegebenen Zahlen sind reelle Zahlen: 0, -2, 0.815, $\sqrt{2}$, $\frac{51}{17}$, $-\frac{47}{11}$.

b) Alle Zahlen, außer $\sqrt{2}$, sind rationale Zahlen: 0, -2, 0.815, $\frac{51}{17}$, $-\frac{47}{11}$. Die Dezimalzahl 0.815 kann als Bruch $\frac{815}{1000}$ geschrieben werden und ist deshalb eine rationale Zahl.

c) Da sich der Bruch $\frac{51}{17} = 3$ kürzen lässt, stellt er auch eine ganze Zahl dar: 0, -2, $\frac{51}{17}$.

d) Unter den angegebenen Zahlen sind 0 und $\frac{51}{17} = 3$ natürliche Zahlen.

Lösung 1.2 (Ordnung)

Der Trick besteht darin, alle Brüche auf denselben Nenner zu erweitern. Der kleinste passende Nenner ist 210, da die Zahlen 3, 14, 30, 35, 70 und 105 Teiler von 210 sind:

$$\frac{34}{105} = \frac{68}{210} < \frac{23}{70} = \frac{69}{210} < \frac{1}{3} = \frac{70}{210} < \frac{12}{35} = \frac{72}{210} < \frac{5}{14} = \frac{75}{210} < \frac{11}{30} = \frac{77}{210}.$$

Damit ist der Vergleich und die Anordnung der Zahlen einfach.

Lösung 1.3 (Dezimalzahlen)

Durch Überlegen oder auch durch eine kurze schriftliche Division erhält man

$$\frac{1}{9} = 0.11111111\ldots.$$

Daraus lassen sich die Darstellung

$$\frac{7}{9} = 7 \cdot \frac{1}{9} = 7 \cdot 0.11111111\ldots = 0.77777777\ldots$$

und auch die Darstellung

$$\frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot 0.11111111\ldots = 0.33333333\ldots$$

erzeugen. Ganz analog erhalten wir die Dezimalzahl

$$\frac{1}{99} = 0.01010101\ldots$$

und damit die Dezimalzahldarstellung

$$\frac{5}{11} = \frac{45}{99} = 45 \cdot \frac{1}{99} = 45 \cdot 0.01010101\ldots = 0.45454545\ldots.$$

Dieses Prinzip lässt sich auf größere Nenner verallgemeinern:

$$\frac{4711}{9999} = 4711 \cdot \frac{1}{99999} = 4711 \cdot 0.00010001\ldots = 0.47114711\ldots.$$

Wegen der speziellen Gestalt der Nenner ist die Umwandlung hier relativ einfach.

Lösung 1.4 (Intervallschreibweise)

Wir formulieren einzelne Beschreibungsteile der Lösungsmenge mit Intervallen und verknüpfen diese anschließend. Einzelne, disjunkte Intervalle können vereinigt werden, oder aber man schließt Teilintervalle von einer Gesamtmenge wieder aus.

a) $\mathbb{L} = (-\infty, 7) \cup (7, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$
b) $\mathbb{L} = (-\infty, -3) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-3, 2]$
c) $\mathbb{L} = (-\infty, 6] \cup (8, \infty) = \mathbb{R} \setminus (6, 8]$
d) $\mathbb{L} = [-3, 3] \cup [4, \infty) = [-3, \infty) \setminus (3, 4)$

Lösung 1.5 (Einfache Ausdrücke)

Wir beachten die Reihenfolge der Operationen: Klammern binden am stärksten, danach kommen Potenzen, danach Produkte und schließlich Summen.

a) $2 \cdot (-3) = -6$
b) $-2 \cdot (-3) = 6$
c) $(-2) \cdot (-3) = 6$
d) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$
e) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
f) $-(3^2) = -(3 \cdot 3) = -9$
g) $(-2) + (-5) \cdot (-1) = -2 + 5 = 3$
h) $3 \cdot (-5) - 6 \cdot (-4) = -15 + 24 = 9$
i) $(-5)^2 - 2^3 + (-2)^3 + 12 = 25 - 8 - 8 + 12 = 21$

Lösung 1.6 (Wurzelumformungen)

Der Wurzelausdruck ist definiert, falls $a^2 - b^2$ nicht negativ ist. Wenn der Wurzelausdruck definiert ist, dann wird er niemals negativ. Steht unter der Wurzel eine Summe, so kann niemals die Wurzel aus den einzelnen Summanden gezogen werden.

a) falsch
b) falsch
c) falsch
d) falsch
e) falsch
f) richtig

Lösung 1.7 (Lösungen einer Wurzelgleichung)

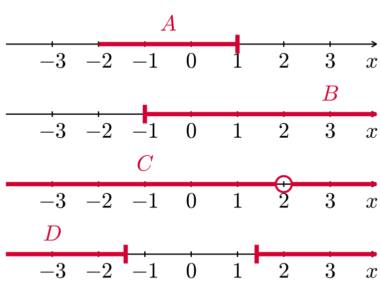
Die Wurzelgleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, deshalb gilt:

a) falsch
b) falsch
c) richtig
d) falsch
e) falsch
f) richtig

1.2.2 Rechnung und Training

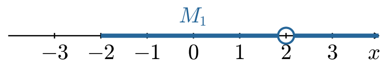
Lösung 1.8 (Zusammengesetzte Zahlenmengen)

Zur Veranschaulichung können wir die gegebenen Mengen auf der Zahlengeraden skizzieren. Wir unterscheiden dabei, ob die Intervallgrenzen jeweils zur Menge gehören oder nicht. Dies kann man durch einen kurzen senkrechten Strich andeuten. Sind einzelne Zahlen ausgenommen, so verwendet man dazu gern einen kleinen Kreis. Wir bilden dann die angegebene Vereinigung bzw. den angegebenen Durchschnitt.



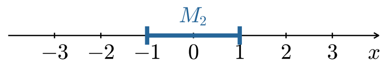
a) Die Mengen A und B überlappen sich. Die Zahl 2 wird ausgenommen:

$$M_1 = (A \cup B) \cap C = (-2, \infty) \setminus \{2\}$$



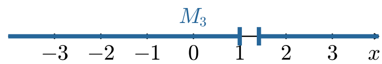
b) Der Schnitt von A und B ist das Intervall $[-1, 1]$. Der Schnitt mit C ändert nichts:

$$M_2 = (A \cap B) \cap C = [-1, 1]$$



c) Durch die Vereinigung von A mit D ist nur das Intervall zwischen 1 und $\sqrt{2}$ ausgenommen:

$$M_3 = A \cup D = \mathbb{R} \setminus (1, \sqrt{2})$$



Lösung 1.9 (Faktorisierung)

Wir suchen nach gleichen Teilen in der einzelnen Summanden. Bei Zahlen wird nach dem größten gemeinsamen Teiler gesucht. Bei Variablen wird nach Variablenkombinationen gesucht, die in allen Termen vorkommen.

a) $4\,(2\,x - z)$

b) $3\,(2\,x + 4\,y - z)$

c) $5\,x\,y\,(2\,x + y)$

d) $3\,x\,y^2\,(2\,x\,y - 1)\,(2\,x\,y + 1)$

e) $3\,x\,y\,z\,\left(3\,x^2\,z - 4\,x\,y^2 + y\,z^2\right)$

f) $6\,x^2\,z^2\,\left(x^3\,z^2 - 2\,y^2\,z + 12\,y^2\right)$

Lösung 1.10 (Summenschreibweise und binomischen Formeln)

Wir wenden einmal oder mehrfach die binomischen Formeln an. Außerdem verwenden wir zum Zusammenfassen der Hochzahlen die Potenzgesetze.

a) $\left(x - y^3\right)^2 = x^2 - 2\,x\,y^3 + y^6$

b) $\left(x^2 + 2\,y\right)^2 = x^4 + 4\,x^2\,y + 4\,y^2$

c) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + 2\,x\,y + y^2) - (x^2 - 2\,x\,y + y^2) = 4\,x\,y$

d) $(4\,x + 2\,y)^2 - (4\,x - 2\,y)^2 = (16\,x^2 + 16\,x\,y + 4\,y^2) - (16\,x^2 - 16\,x\,y + 4\,y^2) = 32\,x\,y$

e) $\left(2\,y - x^2\right)^2 - \left(x^2 + y\right)^2 = (4\,y^2 - 4\,x^2\,y + x^4) - (x^4 + 2\,x^2\,y + y^2) = 3\,y^2 - 6\,x^2\,y$

f) $$\begin{aligned}\left(x^3 - y^2\right)^2 + \left(x^2 - 2y^3\right)^2 &= (x^6 - 2\,x^3\,y^2 + y^4) + (x^4 - 4\,x^2\,y^3 + 4\,y^6)\\ &= x^6 + x^4 - 2\,x^3\,y^2 - 4\,x^2\,y^3 + 4\,y^6 + y^4\end{aligned}$$

Lösung 1.11 (Faktorisierung und binomische Formeln)

Man kann die binomischen Formeln rückwärts von rechts nach links anwenden.

a) Wir wenden das erste Binom rückwärts an und erhalten $(x + 1)^2$.

b) Wir wenden das erste Binom rückwärts an und erhalten $(3\,y + 1)^2$.

c) Wir wenden das zweite Binom rückwärts an und erhalten $4\,(x - 1)^2$.

d) Wir wenden das zweite Binom rückwärts an und erhalten $(3\,x - 4\,y)^2$.

e) Wir wenden das dritte Binom rückwärts an und klammern zweimal 2 aus und erhalten

$$16\,x^2 - 4\,y^2 = (4\,x)^2 - (2\,y)^2 = (4\,x - 2\,y)\;(4\,x + 2\,y) = 4\;(2\,x - y)\;(2\,x + y)\;.$$

f) Wir klammern zunächst aus der zweiten Klammer x aus und wenden dann zweimal das dritte Binom rückwärts an. Wir erhalten

$$-\left(x^2 - 1\right)\left(4\,x - 9\,x^3\right) = (x - 1)\;(x + 1)\;x\;(3\,x - 2)\;(3\,x + 2)\;.$$

Nach dem Erstellen des Klammerausdrucks machen wir die Probe durch Ausmultiplizieren. Es muss sich wieder der ursprüngliche Ausdruck ergeben.

Lösung 1.12 (Mehrfache Potenzen)

Wir berechnen zunächst die Potenz in der Klammer und berücksichtigen danach den zweiten Exponenten. Alternativ können wir den Ausdruck mit den Potenzgesetzen vereinfachen und danach den Zahlenwert berechnen.

a) $(2^2)^3 = 4^3 = 64$ b) $(-2^2)^3 = (-4)^3 = -64$ c) $((-2)^2)^3 = 4^3 = 64$

d) $(2^{-2})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ e) $(-2^{-2})^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$ f) $(2^2)^{-3} = 4^{-3} = \frac{1}{64}$

Lösung 1.13 (Potenzen und Brüche)

Der Kehrwert einer Potenz wird gebildet, in dem man das Vorzeichen des Exponenten ändert. Mithilfe der Potenzgesetze können wir die Ausdrücke zusammenfassen.

a) $\dfrac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$ b) $\dfrac{x^5}{x^{-2}} = x^{5-(-2)} = x^7$ c) $\dfrac{x^{-5}}{x^2} = x^{-5-2} = \dfrac{1}{x^7}$

d) $\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)} = a + b$ e) $\dfrac{(a+b)}{(a+b)^3} = \dfrac{1}{(a+b)^2}$ f) $\dfrac{(a+b)^{-2}}{(a+b)} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

g) $\dfrac{x^{n+2}}{x^{n-2}} = \dfrac{x^n \cdot x^2}{x^n \cdot x^{-2}} = x^4$ h) $\dfrac{x^{2n}}{x^n} = \dfrac{x^n \cdot x^n}{x^n} = x^n$ i) $\dfrac{x^n}{x^{3n-3}} = \dfrac{x^n}{x^n \cdot x^{2n-3}} = x^{3-2\,n}$

Lösung 1.14 (Potenzgesetze)

Wir suchen nach gemeinsamen Teilausdrücken, klammern diese anschließend aus und können dann gegebenenfalls kürzen.

a) $\dfrac{26 \cdot 5^n - 5^n}{5^{n+2}} = \dfrac{5^n\,(26-1)}{5^n \cdot 5^2} = 1$ b) $\dfrac{x^n + 2x^{n-1}}{x^{n-2} + 2x^{n-3}} = \dfrac{x^{n-3}\,x^2}{x^{n-3}} = x^2$

c) $\left(\dfrac{a^2\,b}{c\,d^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{c^2\,d^2}{a\,b^2}\right)^4 = \dfrac{a^6\,b^3}{c^3\,d^9} \cdot \dfrac{c^8\,d^8}{a^4\,b^8} = \dfrac{a^6\,b^3\,c^8\,d^8}{c^3\,d^9\,a^4\,b^8} = \dfrac{a^2\,c^5}{b^5\,d}$

Lösung 1.15 (Wurzeln)

Wir fassen die Audrücke zunächst zusammen und ziehen anschließend die Wurzel ganz oder auch nur teilweise.

a) $\sqrt{7^2} = 7$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$

c) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 - 2 = 5$

Lösung 1.16 (Teilweises Wurzelziehen)

Wir suchen nach quadratischen Teilausdrücken unter der Wurzel. Diese können geeignet vor die Wurzel gezogen werden. Dabei ist $\sqrt{x^2} = |x|$ zu beachten!

a) $\sqrt{4\,x^2\,y} = 2\,|x|\,\sqrt{y}$ b) $\sqrt{\dfrac{2x^2}{36}} = \dfrac{\sqrt{2}\,|x|}{6}$

c) $\sqrt{x(4x^2-4x+1)y} = \sqrt{x\,y\,(4x^2-4x+1)} = \sqrt{x\,y}\,\sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{xy}\,|2x-1|$

Lösung 1.17 (Winkelmaße umrechnen)

Wir benutzen die Umrechnungsformel vom Gradmaß in das Bogenmaß.

a) $x = 30\,°\cdot\dfrac{\pi}{180\,°} = \dfrac{\pi}{6}$ b) $x = -150\,°\cdot\dfrac{\pi}{180\,°} = -\dfrac{5\,\pi}{6}$ c) $x = 270\,°\cdot\dfrac{\pi}{180\,°} = \dfrac{3\,\pi}{2}$

Lösung 1.18 (Trigonometrische Werte)

Wir können in einer Tabelle mit speziellen trigonometrischen Werten nachsehen. Diese Werte werden sehr häufig gebraucht. Am besten, man kennt sie auswendig!

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ c) $\sin\left(\dfrac{5\,\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ g) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Lösung 1.19 (Winkelwerte)

Eine Tabelle mit speziellen trigonometrischen Werten ist hier hilfreich. Diese Winkelwerte werden sehr häufig gebraucht. Deshalb prägen wir uns diese gut ein!

a) $\alpha = 60\,°$ b) $\alpha = 30\,°$ c) $\alpha = 45\,°$ d) $\alpha = 60\,°$

e) $\alpha = 60\,°$ f) $\alpha = 30\,°$ g) $\alpha = 45\,°$ h) $\alpha = 30\,°$

Lösung 1.20 (Quadratische Gleichungen)

Wir verwenden die Mitternachtsformel zur Lösung der Gleichungen und achten dabei darauf, dass die Terme in der Gleichung richtig angeordnet sind. Abhängig von der Diskriminante gibt es keine, eine oder zwei Lösungen.

a) Mit der Mitternachtsformel gilt

$$x^2 + x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1, -2\,.$$

Die quadratische Gleichung hat also die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.

b) Wir teilen die Gleichung zunächst durch 2. Dann gilt

$$x^2 - 6\,x + 9 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3\,.$$

Die quadratische Gleichung hat also nur $x_1 = 3$ als (doppelte) Lösung.

c) Wir teilen die Gleichung zunächst durch -3. Dann gilt

$$x^2 - 4\,x + 5 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}\,.$$

Die quadratische Gleichung hat also keine (reelle) Lösung.

Lösung 1.21 (Biquadratische Gleichungen)

Bei einer biquadratischen Gleichung führen wir zunächst immer die Substitution $u = x^2$ durch. Danach lösen wir die resultierende quadratische Gleichungen mit der Variablen u. Schließlich bestimmen wir alle Lösungen x aus der Substitution $x^2 = u$. Ist eine Lösung u negativ, so gibt es dazu keine reellen Lösungen x.

a) Mit der Substitution $x^2 = u$ gilt

$$x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0 \quad\Longrightarrow\quad u^2 - 13\,u + 36 = 0\,.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$u_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = 9, 4\,.$$

Schließlich substituieren wir zurück:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3\,, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2\,.$$

Diese Gleichung hat also die vier Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$.

b) Um kleinere Zahlenwerte zu bekommen, teilen wir die Gleichung zunächst durch -2 und substituieren anschließend mit $x^2 = u$:

$$-2\,x^4 - 6\,x^2 + 8 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^4 + 3\,x^2 - 4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad u^2 + 3\,u - 4 = 0\,.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = 1, -4\,.$$

Nur $u_1 = 1$ können wir zurück substituieren:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1\,.$$

Diese Gleichung hat also die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

c) Auch hier enthalten alle Koeffizienten einen gemeinsamen Faktor. Wir teilen die Gleichung daher durch 3 und substituieren mit $x^2 = u$:

$$3\,x^4 - 24\,x^2 + 48 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^4 - 8\,x^2 + 16 = 0 \quad\Longrightarrow\quad u^2 - 8\,u + 16 = 0\,.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$u_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4\,.$$

Schließlich substituieren wir u_1 zurück:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2\,.$$

Diese Gleichung hat also die beiden (doppelten) Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Lösung 1.22 (Wurzelgleichungen)

a) Wir isolieren die Wurzel und quadrieren:

$$1 - \sqrt{2\,x+3} = x \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{2\,x+3} = 1 - x \quad\Longrightarrow\quad 2\,x + 3 = (1-x)^2\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen:

$$x^2 - 4\,x - 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}\,.$$

Wir machen die Probe und setzen $x = 2 - \sqrt{6}$ ein:

$$1 - \sqrt{2\,(2-\sqrt{6}) + 3} = 2 - \sqrt{6} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{7 - 2\sqrt{6})} = \sqrt{6} - 1\,.$$

Beide Seiten der Gleichung sind positiv. Wir quadrieren und bestätigen $x = 2 - \sqrt{6}$ als Lösung. Für $x = 2 + \sqrt{6}$ wird die rechte Seite negativ und wir erhalten einen Widerspruch. Es ist also $\mathbb{L} = \left\{2 - \sqrt{6}\right\}$.

b) Wir isolieren die Wurzel und quadrieren:

$$\sqrt{3\,x\,(x-2)} + 2 = x \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{3\,x\,(x-2)} = x - 2 \quad\Longrightarrow\quad 3\,x\,(x-2) = (x-2)^2\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen:

$$2\,x^2 - 2\,x - 4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} = 2, -1\,.$$

Wir machen die Probe. Nur $x = 2$ erfüllt die Gleichung. Es ist $\mathbb{L} = \{2\}$.

c) Wir isolieren zunächst eine Wurzel und quadrieren:

$$\sqrt{1 - 3\,x} = 2 - \sqrt{x+1} \quad\Longrightarrow\quad 1 - 3\,x = 4 - 4\sqrt{x+1} + (x+1)\,.$$

Hierbei ist Vorsicht geboten. Es wäre falsch, die beiden Summanden 2 und $\sqrt{x+1}$ einzeln zu quadrieren! Stattdessen wenden wir die zweite binomische Formel an. Nun isolieren wir die zweite Wurzel und quadrieren erneut:

$$4\sqrt{x+1} = 4\,x + 4 \quad\Longrightarrow\quad 16(x+1) = 16\,x^2 + 32\,x + 16\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen:

$$16\,x^2 + 16\,x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x(x+1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = 0, -1\,.$$

Wir machen die Probe. Beide Werte erfüllen die Gleichung. Es ist $\mathbb{L} = \{0, -1\}$.

Lösung 1.23 (Betragsfreie Darstellung)

Entscheidend für die betragsfreie Darstellung sind die Lösungen der Gleichung

$$-3\,x^2 + 3\,x + 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-6} = -1, 2\,.$$

Damit erhalten wir zwei Fälle:

$$\left|-3\,x^2 + 3\,x + 6\right| = \begin{cases} -3x^2 + 3x + 6 & \text{für } -1 \le x \le 2 \\ 3x^2 - 3x - 6 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dabei haben wir beachtet, dass der Ausdruck für x-Werte im Intervall zwischen -1 und 2 nicht negativ ist. Dort können wir die Betragsstriche weglassen.

Lösung 1.24 (Betragsgleichungen)

a) Alle Lösungen erhält man aus den beiden Fällen

$$\begin{aligned} 2-5x \geq 0 &\iff x \leq \frac{2}{5}: \quad 2-5x = 3 &&\implies -1 = 5x &&\implies x = -\frac{1}{5} \\ 2-5x < 0 &\iff x > \frac{2}{5}: \quad 2-5x = -3 &&\implies 5 = 5x &&\implies x = 1. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Fallbedingungen lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$.

b) Durch Fallunterscheidung ergibt sich

$$\begin{aligned} 2+x \geq 0 &\iff x \geq -2: \quad 2+x = 4x-1 &&\implies 3 = 3x &&\implies x = 1 \\ 2+x < 0 &\iff x < -2: \quad 2+x = -4x+1 &&\implies 5x = -1 &&\implies x = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Fallbedingungen lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1\}$.

c) Auflösen des Betrags ergibt

$$\begin{aligned} x^2-4 \geq 0 &\iff |x| \geq 2: \quad x^2-4 = 5 &&\implies x^2 = 9 &&\implies x = \pm 3 \\ x^2-4 < 0 &\iff |x| < 2: \quad x^2-4 = -5 &&\implies x^2 = -1. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat keine reellen Lösungen. Unter Berücksichtigung der Fallbedingungen lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-3, 3\}$.

Lösung 1.25 (Lineare Ungleichungen)

Wir bringen alle Terme mit x auf die linke Seite und alle anderen Terme auf die rechte Seite. Anschließend fassen wir die Terme zusammen.

a) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{5}{3}\right\}$ b) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{1}{3}\right\}$ c) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{13}{11}\right\}$

Lösung 1.26 (Quadratische Ungleichungen)

Wir betrachten zunächst anstelle der Ungleichung die entsprechende quadratische Gleichung und lösen diese. Anschließend entscheiden wir, welche Intervalle zwischen diesen Lösungen zur Lösungsmenge der Ungleichung gehören und welche nicht. Bei quadratischen Ungleichungen genügt dazu eine einzige Punktprobe.

a) Durch eine Punktprobe zwischen -2 und 2, etwa bei 0, ergibt sich die Lösungsmenge:

$$3x^2 = 12 \implies x = -2, 2, \quad 3 \cdot 0^2 < 12 \implies \mathbb{L} = (-2, 2)\ .$$

b) Durch eine Punktprobe etwa bei 0 können wir die Lösungsmenge festlegen:

$$-4x^2 = 2x - 2 \implies x = -1, \frac{1}{2}, \quad -4 \cdot 0^2 > 2 \cdot 0 - 2 \implies \mathbb{L} = \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

c) Eine Punktprobe zwischen -1 und 7, etwa bei 0, ergibt $8(0-2) < -2(x+1)^2$:

$$8(x-2) = -2(x+1)^2 \implies x = -1, 7 \implies \mathbb{L} = (-\infty, -7) \cup (1, \infty)\ .$$

d) Eine Punktprobe etwa bei 0 ergibt, dass 0 in der Lösungsmenge liegt:

$$x^2 - x = 20 \implies x = -4, 5, \quad 0^2 - 0 < 20 \implies \mathbb{L} = (-4, 5)\ .$$

e) Diese Gleichung hat nur eine Lösung, die Lösungsmenge besteht aus einem Punkt:

$$x^2 + 8x = -16 \implies x = -4\,, \quad 0^2 + 8 \cdot 0 > -16 \implies \mathbb{L} = \{-4\}\,.$$

f) Eine Punktprobe etwa bei 1 ergibt, dass 1 in der Lösungsmenge liegt:

$$10x^2 + 21 = 41x \implies x = \frac{3}{5}, \frac{7}{2}, \quad 10 \cdot 1^2 + 21 < 41 \cdot 1 \implies \mathbb{L} = \left(\frac{3}{5}, \frac{7}{2}\right).$$

Lösung 1.27 (Verschachtelte Beträge)

Jeder Betrag kann durch eine Fallunterscheidung aufgelöst werden. Da die Ungleichung zwei Beträge enthält, ergeben sich insgesamt vier Fälle. Innerhalb eines Falls werden alle auftretenden Bedingungen mit einem logischen Und verknüpft. Die einzelnen Fälle werden dann mit einem logischen Oder verknüpft. Wir beziehen im Folgenden die erste Bedingung auf den inneren Betrag und die zweite auf den äußeren:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Für } x \geq 0 \text{ und } x \geq 1 : & x - 1 < x & \iff & x \text{ beliebig} & \implies \mathbb{L}_1 = [1, \infty) \\
\text{Für } x \geq 0 \text{ und } x < 1 : & -(x-1) < x & \iff & x > \frac{1}{2} & \implies \mathbb{L}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\
\text{Für } x < 0 \text{ und } x \leq -1 : & -x - 1 < x & \iff & x > -\frac{1}{2} & \implies \mathbb{L}_3 = \varnothing \\
\text{Für } x < 0 \text{ und } x > -1 : & -(-x-1) < x & \iff & \text{kein } x & \implies \mathbb{L}_4 = \varnothing
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist schließlich $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Lösung 1.28 (Summen)

a) Es werden 5 Quadratzahlen addiert:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

Das Ergebnis ist 55.

b) Wir setzen für k der Reihe nach die Werte $-1, 0, 1, 2, 3$ ein:

$$\sum_{k=-1}^{3} 2^{k-1} = 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = \frac{31}{4}.$$

Anschließend schreiben wir die Summanden als Brüche mit dem gemeinsamen Nenner 4 und fassen diese dann zusammen.

c) Die Summe läuft für k von 0 bis 3:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \frac{(-1)^2}{3} + \frac{(-1)^3}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Durch Addieren der Brüche mit wechselndem Vorzeichen erhalten wir das Ergebnis.

d) Die Summe besteht aus 3 Summanden:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{(k+1)}{k^2} = \frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} = 2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} = \frac{115}{36}.$$

Bei dieser Summe wachsen die Zähler linear und die Nenner quadratisch.

Lösung 1.29 (Beweise für Summenformel)

Die folgende Formel ist zu beweisen:

$$2+4+6+8+10+12+\ldots+2n=n(n+1)\,.$$

Wir führen den Beweis auf zwei unterschiedliche Arten:

1) Ein direkter Beweis ergibt sich aus der Summenformel von Gauß

$$2\big(1+2+3+4+5+6+\ldots+n\big)=2\,\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)\,.$$

Durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors 2 entsteht die Summe der natürlichen Zahlen. Darauf können wir die Summenformel anwenden.

2) Die Behauptung lässt sich auch durch vollständige Induktion beweisen. Für $n=0$ ist der Induktionsanfang erfüllt:

$$2\cdot 0=0\,(0+1)\,.$$

Beim Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass die Behauptung für n gilt und betrachten die Behauptung für $n+1$:

$$\underbrace{2+4+6+8+10+12+\ldots+2n}_{\text{Behauptung für } n}+2(n+1)=\underbrace{n(n+1)}_{\text{Behauptung für } n}+2(n+1)=(n+2)(n+1).$$

Durch Einsetzen der Behauptung für n und anschließendes Zusammenfassen haben wir den Induktionsschritt durchgeführt.

Lösung 1.30 (Beweis für Teilbarkeit)

Die Behauptung lautet, dass n^3-n für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar ist. Wir führen den Beweis auf zwei unterschiedliche Arten:

1) Wenn wir geschickt umformen

$$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1),$$

dann sieht man, dass man die Behauptung direkt beweisen kann. Denn

$$(n-1)n(n+1)$$

ist ein Produkt von drei direkt aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Mindestens eine dieser Zahlen ist ein Vielfaches von 3. Somit ist auch das Produkt durch 3 teilbar.

2) Die Behauptung lässt sich auch durch vollständige Induktion beweisen. Für $n=0$ ist der Induktionsanfang

$$0^3-0=0$$

erfüllt, denn 0 ist auch ein Vielfaches von 3. Beim Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass die Behauptung für n gilt und betrachten die Behauptung für $n+1$:

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=\underbrace{n^3-n}_{\text{Vielfaches von } 3}+\underbrace{3(n^2+n)}_{\text{Vielfaches von } 3}\,.$$

Dabei haben wir die binomische Formel für die Hochzahl 3 angewendet.

1.2.3 Anwendung

Lösung 1.31 (Parallelschaltung von Widerständen)

Zunächst bringt man die rechte Seite der Formel auf den gemeinsamen Nenner $R_1\,R_2$ und bildet anschließend den Kehrwert:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1\,R_2} \quad\Longrightarrow\quad R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{\text{ges}} = \frac{2\,\Omega \cdot 3\,\Omega}{2\,\Omega + 3\,\Omega} = \frac{6\,\Omega^2}{5\,\Omega} = \frac{6}{5}\,\Omega\,.$$

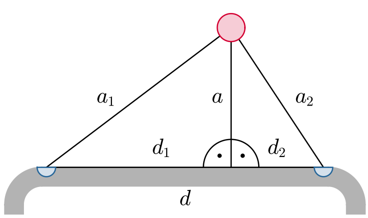
Durch Einsetzen der konkreten Zahlenwerte ergibt sich der gesuchte Gesamtwiderstand. Bei Formeln mit physikalischen Größen kann man die Richtigkeit einer Formel auch anhand der Einheiten plausibilisieren.

Lösung 1.32 (Oldtimer)

Wenn der hintere Fahrer mit Nein antwortet, muss eines der beiden vorderen Fahrzeuge eine schwarze Heckklappe haben. Ansonsten wären die beiden vorderen Heckklappen silber und der hintere Fahrer könnte mit Ja antworten. Wenn der mittlere Fahrer mit Nein antwortet, muss das vordere Fahrzeug eine schwarze Heckklappe haben. Ansonsten wäre die vordere Heckklappe silber und der mittlere Fahrer könnte mit Ja antworten. Die Antwort lautet also: „schwarz“.

Lösung 1.33 (Parkpilot)

Wir teilen den Abstand $d = d_1 + d_2$ der beiden Sensoren, wie in der Abbildung dargestellt, in zwei Abschnitte d_1 und d_2 auf. Mit dem Satz des Pythagoras erhält man in den beiden rechtwinkligen Dreiecken



$$a^2 + d_1^2 = a_1^2\,, \quad a^2 + d_2^2 = a_2^2\,.$$

Durch Auflösen der beiden Gleichungen nach a^2 und Gleichsetzen ergibt sich:

$$a_1^2 - d_1^2 = a_2^2 - d_2^2\,.$$

Mit $d_2 = d - d_1$ folgt dann

$$a_1^2 - d_1^2 = a_2^2 - d^2 + 2dd_1 - d_1^2 \quad\Longleftrightarrow\quad a_1^2 = a_2^2 - d^2 + 2dd_1\,.$$

Wir lösen nach d_1 auf und erhalten

$$d_1 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + d^2}{2d}\,.$$

Daraus folgt wegen $a = \sqrt{a_1^2 - d_1^2}$ aus dem Satz des Pythagoras die Formel

$$a = \sqrt{a_1^2 - \frac{(a_1^2 - a_2^2 + d^2)^2}{4d^2}} = \sqrt{a_2^2 - \frac{(a_2^2 - a_1^2 + d^2)^2}{4d^2}}\,.$$

Den zweiten Ausdruck erhalten wir aus Symmetriegründen ganz analog.

Lösung 1.34 (Rohr)

Das Reduzierstück hat die Form eines Kegelstumpfes.

a) Zunächst gilt

$$r_1 = r_2 + a\,, \quad a^2 = h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad a = 5\sqrt{5} \approx 11.18\,.$$

Der Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Radius ist gegeben durch

$$\pi d_1 = \varphi r_1\,, \quad \pi d_2 = \varphi r_2 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = \frac{d_1}{d_2}\, r_2 \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{d_2}{d_1}\, r_1\,.$$

Durch Einsetzen von $r_2 = r_1 - a$ bzw. $r_1 = r_2 + a$ erhält man

$$r_1 = \frac{a d_1}{d_1 - d_2} = 15\sqrt{5} \approx 33.54 \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{a d_2}{d_1 - d_2} = 10\sqrt{5} \approx 22.36\,.$$

Wir lösen $\pi d_1 = \varphi r_1$ nach φ auf und erhalten

$$\varphi = \frac{\pi d_1}{r_1} = \frac{\pi(d_1 - d_2)}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.81 \approx 161^\circ$$

für den Winkel des Kreisringsegments.

b) Im rechtwinkligen Dreick mit den Katheten h und $\frac{d_1 - d_2}{2}$ gilt

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2h}{d_1 - d_2}\right) = \arctan(2) \approx 1.11 \approx 63^\circ\,.$$

Damit ist der Steigungswinkel α bestimmt.

c) Soll speziell $\varphi_0 = \pi$ gelten, so folgt mit der Formel aus Aufgabenteil a)

$$\pi = \frac{\pi\,(d_1 - d_2)}{a} \quad \Longrightarrow \quad d_1 - d_2 = a\,.$$

Damit ergibt sich dann aus dem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypothenuse a und der Kathete $\frac{d_1 - d_2}{2}$ der Wert

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{d_1 - d_2}{2a}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

für den gesuchten Grenzwinkel.

d) Für den Flächeninhalt eines Kreissektors gilt $\frac{\varphi r^2}{2}$. Damit erhalten wir

$$A = \frac{\varphi r_1^2}{2} - \frac{\varphi r_2^2}{2} = \frac{\varphi(r_1^2 - r_2^2)}{2} = 125\sqrt{5}\,\pi \approx 878\,.$$

Dies ist die Oberfläche des Reduzierstücks.

2 Lineare Gleichungssysteme

Die Aufgaben in diesem Kapitel beziehen sich auf den Umgang mit linearen Gleichungssystemen. Verständnis und Rechenfertigkeiten sind hier gleichermaßen wichtig. Das Lösen von linearen Gleichungssystemen geht heute mit Taschenrechnern oder Computern schnell und einfach. Und dennoch: Das handschriftliche Lösen von kleinen Gleichungssystemen steigert das Verständnis über die Struktur der Gleichungen enorm.

Bei den Kompetenzaufgaben geht es meist um das Erkennen und Einordnen des Typs eines Gleichungssystems. Das beginnt bei der Größe eines linearen Gleichungssystems, die durch die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der Gleichungen festgelegt wird. Unterbestimmte, überbestimmte und redundante Gleichungssysteme sollen unterschieden werden können. Zu den Kompetenzen gehört auch, herauszufinden, welche Dimension die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems hat.

Bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten kann man sich der Lösung auch grafisch nähern. Jede Gleichung lässt sich anschaulich als Gerade in der Ebene skizzieren. Gesucht sind dann die Schnittpunkte der Geraden. Ganz analog lässt sich jede Gleichung eines linearen Gleichungssystemens mit drei Unbekannten als Ebene im Raum interpretieren. Ebenenschnitte sind dann Geraden. Nur wenn sich alle Schnittgeraden in einem gemeinsamen Schnittpunkt treffen, gibt es eine eindeutige Lösung.

Zu den handwerklichen Fertigkeiten in diesem Kapitel gehört in erster Linie das Durchführen des Gauß-Algorithmus in seiner Basisversion. Drei Äquivalenzumformungen von linearen Gleichungssystemen sind dazu notwendig und sollten beherrscht werden. Didaktisch sehr wertvoll ist dabei, dass im Laufe der Vorwärtselimination der jeweilige Typ des Gleichungssystems sichtbar wird. Ein großer Vorteil ist die immer gleiche systematische Vorgehensweise. Bei den Rechenbeispielen in diesem Kapitel wird darauf geachtet, dass die Zahlen einfach bleiben, dass also im Lauf der Rechnung keine komplizierten Brüche oder Dezimalzahlen entstehen.

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Parametern gehört zu den fortgeschrittenen Rechenaufgaben. Dabei treten häufig Fallunterscheidungen auf. Äquivalente Zeilenumforungen mit Ausdrücken, in denen Parameter enthalten sind, werden als abstrakt empfunden. Außerdem sind die damit verbundenen Rechenschritte relativ aufwendig.

Da beim Gauß-Algorithmus viele Berechnungen hintereinander ausgeführt werden und aufeinander aufbauen, wirken sich kleine Rechenfehler oft ungünstig aus. Oftmals verschlimmert sich die Situation, wenn krumme Zahlen entstehen. Nur mit Sorgfalt und Konzentration ergeben sich zuverlässig die richtigen Lösungen.

2.1 Aufgaben

2.1.1 Verständnis und Kompetenz

Aufgabe 2.1 (Grafische Lösung mit zwei Gleichungen)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems. Bestimmen Sie die Lösung außerdem auch grafisch in der Ebene.

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -1 \\ 3x & + & y & = & 7 \end{array}$$

Aufgabe 2.2 (Grafische Lösung mit drei Gleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme rechnerisch und grafisch.

a) $$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 6 \\ 3x & + & y & = & 3 \\ 4x & + & 4y & = & 3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 9 \\ x & + & 2y & = & 4 \\ x & - & 5y & = & 5 \end{array}$$

2.1.2 Rechnung und Training

Aufgabe 2.3 (Fallunterscheidung mit Parameter)

Für welche Werte des reellen Parameters b besitzt das lineare Gleichungssystem Lösungen? Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungsmenge.

$$\begin{array}{rcrcr} 9x & - & 6y & = & b \\ -6x & + & 4y & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 2.4 (Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten)

Berechnen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2.5 (Lineares Gleichungssystem mit drei Parametern)

Unter welchen Bedingungen ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & p \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & q \\ x_1 & + & 4x_2 & & & = & r \end{array}$$

Aufgabe 2.6 (Lineare Gleichungssysteme mit Parameter)

Für welche Parameterwerte p haben die linearen Gleichungssysteme genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung?

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} p\,x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & p\,x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & & p\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & p\,x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & p\,x_2 & + & x_3 & = & p \\ p\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & p^2 \end{array}$$

Aufgabe 2.7 (Lineares Gleichungssystem mit vier Unbekannten) ★★★★☆

Berechnen Sie die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & 2\,x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2.8 (Homogene lineare Gleichungssysteme) ★★★☆☆

Lösen Sie folgende homogene lineare Gleichungssysteme:

a) $$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

2.1.3 Anwendung

Aufgabe 2.9 (Vater und Sohn) ★★☆☆☆

Vater und Sohn sind zusammen 62 Jahre alt. Vor sechs Jahren war der Vater viermal so alt wie damals der Sohn. Wie alt ist jeder? Verwenden Sie für das Alter von Vater und Sohn zwei Unbekannte x und y und lösen Sie das Problem mithilfe eines linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 2.10 (Interpolationsparabel) ★★★☆☆

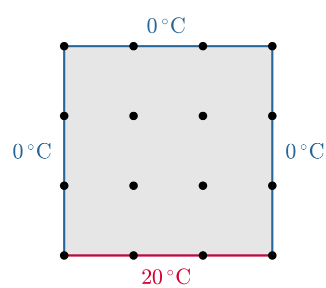
Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, kann man eine Parabel $y = a\,x^2 + b\,x + c$ legen. Bestimmen Sie a, b und c so, dass die Parabel durch folgende Punkte geht und skizzieren Sie die Parabel:

$$P_1(-1\,|\,2)\,, \quad P_2(1\,|-2)\,, \quad P_3(2\,|-1)$$

Durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten a, b und c.

Aufgabe 2.11 (Temperaturverteilung) ★★★★☆

Die Temperatur einer quadratischen Metallplatte beträgt am unteren Rand $20\ °\mathrm{C}$ und an den anderen Rändern $0\ °\mathrm{C}$. Zur näherungsweisen Bestimmung der Temperaturverteilung gibt es 12 Messpunkte am Rand und 4 im Inneren der Platte. Für jeden inneren Messpunkt gilt, dass sein Temperaturwert gleich dem Mittelwert der Temperaturwerte der 4 Nachbarpunkte links, rechts, unten und oben ist. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Temperaturwerte T_k der 4 inneren Punkte auf und lösen Sie es.



2.2 Lösungen

2.2.1 Verständnis und Kompetenz

Lösung 2.1 (Grafische Lösung mit zwei Gleichungen)

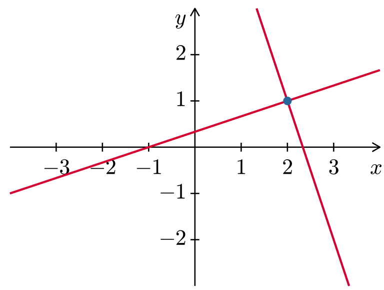
Mit dem Rechenschema ergibt sich

$$\begin{array}{rr|rl} 1 & -3 & -1 & \mid(-3) \\ 3 & 1 & 7 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & 10 \end{array}$$

und daraus die Lösung $x = 2$, $y = 1$. Löst man die Gleichungen nach y auf

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x \\ y &= 7 - 3x \end{aligned}$$

und bestimmt den Schnittpunkt der beiden Geraden, so erhält man die Lösung grafisch.



Lösung 2.2 (Grafische Lösung mit drei Gleichungen)

a) Mit der Schreibweise als Rechenschema liefert der Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{rr|rl} 2 & -3 & 6 & \\ 3 & 1 & 3 & \mid(2) \\ 4 & 4 & 3 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rr|rl} 2 & -3 & 6 & \mid(-3)(-2) \\ 6 & 2 & 6 & \\ 4 & 4 & 3 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rr|rl} 2 & -3 & 6 & \\ 0 & 11 & -12 & \\ 0 & 10 & -9 & \mid(11) \end{array}$$

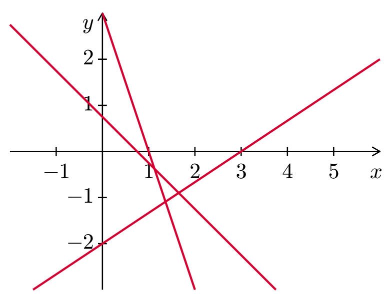
und weiter

$$\begin{array}{rr|rl} 2 & -3 & 6 & \\ 0 & 11 & -12 & \mid(-10) \\ 0 & 110 & -99 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 21 \end{array} .$$

An der untersten Zeile ist ablesbar, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Für die grafische Bestimmung der Lösungsmenge lösen wir die Gleichungen nach y auf:

$$\begin{aligned} y &= -2 + \frac{2}{3}x \\ y &= 3 - 3x \\ y &= \frac{3}{4} - x\,. \end{aligned}$$

Die drei Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.



b) Mit dem Rechenschema ergibt sich

$$\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 5 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rr|rl} 1 & 2 & 4 & \mid(-2)(-1) \\ 2 & -3 & 9 & \\ 1 & -5 & 5 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rr|rl} 1 & 2 & 4 & \\ 0 & -7 & 1 & \mid(-1) \\ 0 & -7 & 1 & \end{array} .$$

Dabei haben wir zunächst die erste und zweite Zeile vertauscht.