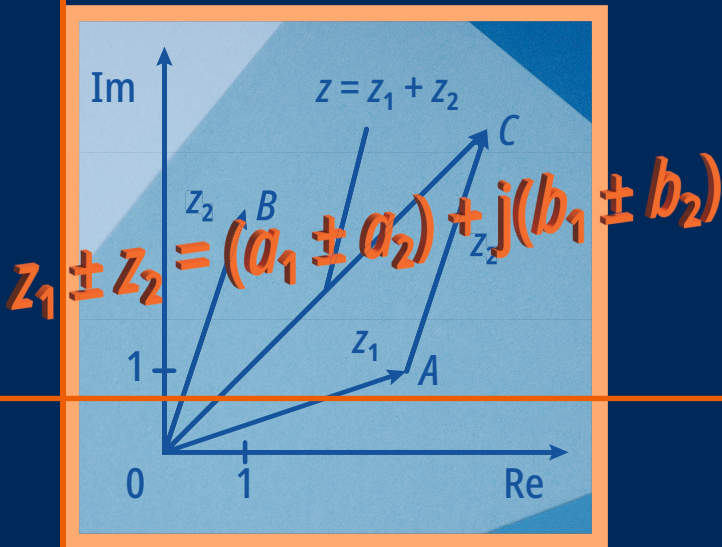


Hans-Jochen Bartsch

Kleine Formelsammlung Mathematik



8., überarbeitete Auflage

HANSER

1	Logik, Arithmetik, Algebra	15
2	Lineare Algebra	48
3	Elementare und analytische Geometrie	79
4	Funktionen	123
5	Analysis	151
6	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	203
7	Reihen, Integral-Transformationen	220
8	Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung	243
9	Integraltabelle	275
S	Sachwortverzeichnis	281



Blieben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Hans-Jochen Bartsch

Kleine Formelsammlung Mathematik

8., überarbeitete Auflage
bearbeitet von Michael Sachs

HANSER

Autor:

Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

Bearbeiter:

Prof. Dr. Michael Sachs, Hochschule München

Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik

sci.hm.edu



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en), Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor(en), Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2023 Carl Hanser Verlag München;

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Frauke Schafft, Chunyan Chen

Satz: Dr. Steffen Naake, Limbach-Oberfrohna

Titelbild: Prof. Dr. Michael Sachs

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Druck und Binden: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-47649-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-47736-0

Vorwort

■ Vorwort zur 8. Auflage

Gegenüber der 7. Auflage wurde die Integraltabelle komplett überarbeitet und übersichtlicher strukturiert. Die trigonometrischen Funktionen habe ich um die für die Integration wichtigen Produkt-Formeln ergänzt. In die beschreibende Statistik wurden die in letzter Zeit immer häufiger anzutreffenden Box-Plots neu aufgenommen. Bei den inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 2. Ordnung habe ich die schwer lesbare Grafik zum Auffinden einer partikulären Lösung durch eine übersichtliche Tabelle ersetzt. Bei den Mehrfach-Integralen wurden die am häufigsten vorkommenden Flächen- und Volumenelemente in einer Tabelle zusammengestellt.

Druckfehler der Vorgängerauflagen habe ich wie immer korrigiert, dafür sei allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern gedankt, die mir Hinweise geschickt haben.

Mein Dank geht an Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die Betreuung und an Herrn Dr. Steffen Naake für die sorgfältige Arbeit des Umbruches und die Gestaltung der endgültigen Fassung.

München, im November 2022

Michael Sachs

■ Aus dem Vorwort zur 6. Auflage

Mit Wissen des im Frühjahr 2008 verstorbenen Verfassers der ersten vier Auflagen dieser Formelsammlung, Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch, wurde mir vom Verlag die Fortführung des Werkes anvertraut. Nachdem ich in der fünften Auflage im Wesentlichen nur bekannte Druckfehler verbessert hatte, lege ich nun eine völlige Neubearbeitung der Formelsammlung vor. Dabei sind die Auswahl und Grobgliederung des Stoffes weitgehend gleich geblieben, ebenso habe ich die meisten Bilder und Tabellen aus den Vorgängerauflagen übernommen. Bei der Gestaltung der einzelnen Kapitel war mir ein Hauptanliegen, dass diese in sich logisch aufgebaut und weitgehend unabhängig von anderen Kapiteln lesbar sind. Erforderliche Querverweise habe ich ergänzt.

Das Buch enthält keine Beweise und auch keine Beispiele, sondern nur mathematische Definitionen, Sätze und Verfahren. Dadurch konnten Umfang und Preis niedrig gehalten werden, außerdem wird die Zulassung als Hilfsmittel in Prüfungen erleichtert, wenn keine durchgerechneten Aufgaben enthalten sind. Das Buch kann daher als Kompaktskript zur Mathematik eingesetzt werden, welches die Studierenden vom lästigen Mitschreiben von Definitionen und Sätzen befreit. Aufgaben können und sollen der einschlägigen und reichhaltigen Fachliteratur entnommen und hinzugezogen werden.

München, im März 2015

Michael Sachs

Inhalt

1	Logik, Arithmetik, Algebra	15
1.1	Mathematische Logik	15
1.1.1	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen	15
1.1.2	Rechengesetze (BOOLEsche Algebra)	17
1.2	Mengen	17
1.2.1	Grundlagen	17
1.2.2	Mengenoperationen	18
1.2.3	Rechenregeln für Mengen	19
1.2.4	Relationen	20
1.2.5	Zahlensysteme	20
1.3	Menge der reellen Zahlen	21
1.3.1	Standard-Zahlenmengen	21
1.3.2	Grundoperationen für reelle Zahlen	23
1.3.3	Potenzen, Wurzeln	26
1.3.4	Logarithmen	27
1.3.5	Binomischer Satz	28
1.4	Menge der komplexen Zahlen	30
1.4.1	Grundlagen	30
1.4.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen	31
1.4.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	32
1.4.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	33
1.5	Kombinatorik	33
1.6	Folgen	35
1.6.1	Grundlagen	35
1.6.2	Schranken, Grenzwert und Monotonie einer Folge	35
1.6.3	Arithmetische und geometrische Folgen	36
1.6.4	Zins-, Zinseszins-, Renten- und Tilgungs- rechnung	38

1.7	Gleichungen und Ungleichungen, Algebra	40
1.7.1	Grundlagen.....	40
1.7.2	Lineare Gleichungen.....	41
1.7.3	Nichtlineare Gleichungen, Polynome	42
1.7.4	Wurzelgleichungen, transzendente Gleichungen .	45
1.7.5	Numerische Verfahren für Gleichungen	45

2	Lineare Algebra	48
2.1	Vektoren	48
2.1.1	Grundbegriffe.....	48
2.1.2	Skalarprodukt im \mathbb{R}^n	52
2.1.3	Vektoren im \mathbb{R}^3	54
2.2	Matrizen	57
2.2.1	Grundlagen.....	57
2.2.2	Matrizengesetze	58
2.2.3	n -reihige quadratische Matrizen.....	59
2.2.4	Rang, Normen	62
2.2.5	Determinanten	63
2.2.6	Eigenwerte und Eigenvektoren.....	65
2.3	Lineare Gleichungssysteme	67
2.3.1	Bezeichnungen	67
2.3.2	Lösbarkeitsbedingungen	68
2.3.3	Lösungsverfahren	69
2.4	Lineare Abbildungen.....	71
2.4.1	Grundlagen.....	71
2.4.2	Spezielle lineare Abbildungen in der Ebene	72
2.5	Koordinatensysteme	73
2.5.1	Kartesische Koordinaten	73
2.5.2	Zylinderkoordinaten	74
2.5.3	Kugelkoordinaten	74
2.6	Koordinatentransformationen.....	75
2.6.1	Koordinatentransformationen in der Ebene	76
2.6.2	Koordinatentransformationen im Raum	77

3	Elementare und analytische Geometrie	79
3.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie	79
3.1.1	Winkel	79
3.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz	81
3.1.3	Dreiecke	82
3.1.4	Vierecke	84
3.1.5	Vielecke	86
3.1.6	Kreis	87
3.2	Geometrische Körper (Stereometrie)	89
3.2.1	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielfache)	90
3.2.2	Krummflächig begrenzte Körper	91
3.3	Punkt, Gerade, Ebene	94
3.3.1	Punkt, Strecke	94
3.3.2	Gerade in der Ebene	95
3.3.3	Gerade im Raum	97
3.3.4	Mehrere Geraden	99
3.3.5	Ebene	101
3.3.6	Flächeninhalt, Volumen	104
3.4	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	104
3.4.1	Gemeinsame Charakterisierungen aller Kegelschnitte	104
3.4.2	Kreis	106
3.4.3	Ellipse	107
3.4.4	Parabel	111
3.4.5	Hyperbel	113
3.5	Flächen 2. Ordnung	116
3.6	Hauptachsentransformation	121

4	Funktionen	123
4.1	Grundlagen	123
4.2	Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke	126
4.2.1	Grenzwerte einer Funktion	126
4.2.2	Unbestimmte Ausdrücke	127
4.3	Eigenschaften reeller Funktionen	128

4.4	Rationale Funktionen	129
4.4.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	129
4.4.2	Interpolation	131
4.4.3	Gebrochenrationale Funktionen	132
4.5	Nichtrationale Funktionen	133
4.5.1	Elementare Funktionen	133
4.5.2	Wurzelfunktionen	134
4.5.3	Exponentialfunktionen	135
4.5.4	Logarithmusfunktionen	135
4.5.5	Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen	136
4.5.6	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) ...	142
4.5.7	Hyperbelfunktionen	143
4.5.8	Areafunktionen	146
4.6	Ausgewählte ebene Kurven.....	148
4.7	Kurvendiskussion.....	150

5 Analysis **151**

5.1	Differenzialrechnung	151
5.1.1	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen....	151
5.1.2	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	156
5.1.3	Extrema und Wendepunkte.....	158
5.1.4	Differenzialgeometrie ebener Kurven	161
5.1.5	Differenzialgeometrie von Raumkurven und Raumflächen	165
5.2	Integralrechnung	169
5.2.1	Unbestimmtes und bestimmtes Integral	169
5.2.2	Grundintegrale und Integrationsregeln.....	172
5.2.3	Integrationstechniken	174
5.2.4	Numerische Integration	177
5.2.5	Gebietsintegrale, Mehrfachintegrale	179
5.2.6	Anwendungen der Integralrechnung	182
5.3	Vektoranalysis.....	189
5.3.1	Vektorwertige Funktionen, Felder	189
5.3.2	Gradient eines skalaren Feldes	192
5.3.3	Divergenz eines Vektorfeldes	192
5.3.4	LAPLACE-Operator eines skalaren Feldes	193

5.3.5	Rotation eines Vektorfeldes	194
5.3.6	Kurvenintegrale	195
5.3.7	Oberflächenintegrale	198
5.3.8	Integralsätze von GREEN, GAUSS und STOKES	201

6 Gewöhnliche Differenzialgleichungen 203

6.1	Grundlagen	203
6.2	Ausgewählte Differenzialgleichungen 1. Ordnung.....	205
6.3	Ausgewählte Differenzialgleichungen 2. Ordnung.....	209
6.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung	209
6.3.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung	212
6.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	214
6.5	Numerische Verfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	216
6.5.1	Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY	216
6.5.2	Verfahren 4. Ordnung von RUNGE-KUTTA.....	217
6.6	Lineare Differenzialgleichungssysteme	218

7 Reihen, Integral-Transformationen 220

7.1	Unendliche Reihen	220
7.1.1	Zahlenreihen.....	220
7.1.2	Konvergenzkriterien für Reihen.....	222
7.1.3	Potenzreihen.....	224
7.1.4	TAYLOR-Formel und TAYLOR-Reihen.....	225
7.1.5	Zusammenstellung fertig entwickelter TAYLOR- Reihen	227
7.1.6	FOURIER-Reihen.....	230
7.2	FOURIER-Transformation	233
7.3	LAPLACE-Transformation.....	236
7.3.1	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation	237
7.3.2	Lösung von gewöhnlichen linearen Differenzial- gleichungen	239
7.3.3	Korrespondenztabelle der LAPLACE- Transformation	240

8	Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung	243
8.1	Beschreibende (deskriptive) Statistik	243
8.1.1	Grundbegriffe, Darstellungsarten	243
8.1.2	Lagemaße (Mittelwerte)	245
8.1.3	Streuungsmaße	247
8.1.4	Korrelationsmaße	249
8.1.5	Regressionsrechnung	250
8.1.6	Fehlerrechnung	251
8.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	253
8.2.1	Grundbegriffe	253
8.2.2	Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung	255
8.2.3	Zufällige Variable	257
8.2.4	Diskrete zufällige Variable	261
8.2.5	Stetige zufällige Variable	263
8.3	Schließende (induktive) Statistik	267
8.3.1	Schätzfunktionen	267
8.3.2	Intervallschätzung	268
8.3.3	Signifikanztests	269
8.4	Tabellen	272
8.4.1	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normal- verteilung	272
8.4.2	Quantile der t -Verteilung (STUDENT-Verteilung)	273
8.4.3	Quantile der χ^2 -Verteilung	274
9	Integraltafel	275
9.1	Rationale Funktionen	275
9.2	Wurzelfunktionen	275
9.3	Trigonometrische Funktionen	277
9.4	Exponential- und Hyperbelfunktionen	279
9.5	Exponential- und trigonometrische Funktionen	279
9.6	Logarithmusfunktionen	280
9.7	Arcusfunktionen	280
	Sachwortverzeichnis	281

1

Logik, Arithmetik, Algebra

■ 1.1 Mathematische Logik

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde mit dem Wahrheitswert *wahr* oder *falsch*.

Ein *aussagenlogischer Ausdruck* (eine *Aussageform*) ist eine Aussage, bestehend aus

- *BOOLEschen Variablen* (*Aussagenvariablen*): $\varphi, \psi, \vartheta, \varphi_1, \dots$
- *Junktoren* (*logischen Zeichen*): $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- technischen Zeichen

Er ist bei jeder Belegung der Variablen entweder wahr (w, 1) oder falsch (f, 0).

Eine *Wahrheitsfunktion* (BOOLEsche Funktion) F ordnet jeder Belegung der k Variablen x_1 bis x_k mit 0 oder 1 einen Wahrheitswert zu.

Allquantor (*Generalisator*): $\forall x: A(x)$ „Für alle x gilt $A(x)$.“

Existenzquantor: $\exists x: A(x)$ „Es gibt (wenigstens) ein x mit $A(x)$.“

1.1.1 Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen

(φ, ψ Aussageformen)

Negation, Komplement (nicht, NOT)

$$\overline{\varphi} = \neg\varphi = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = 0$$

häufig auch Durchstreichen des Zeichens gebräuchlich, z. B. $a \neq b$ für $\neg(a = b)$

Konjunktion (*logisches Produkt*, und zugleich, AND)

$$(\varphi \wedge \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = 1 \text{ und zugleich } \psi = 1$$

auch $\varphi\psi$, $\varphi \cdot \psi$, $\varphi\&\psi$

NAND (SHEFFERSche Funktion), negiertes AND: $\neg(\varphi \wedge \psi)$

Disjunktion (*logische Summe*, oder, OR)

$$(\varphi \vee \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = 1 \text{ oder } \psi = 1 \quad \text{auch } \varphi + \psi$$

NOR (NICODSche Funktion), negiertes OR: $\varphi\bar{\vee}\psi = \overline{\varphi \vee \psi} = \varphi \downarrow \psi$

Implikation (*logische Folgerung*, wenn-dann)

$$(\varphi \Rightarrow \psi) = 0 \text{ genau dann wenn } \varphi = 1 \text{ und zugleich } \psi = 0$$

Äquivalenz

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi = \psi$$

Antivalenz (*ausschließliches Entweder-Oder*, exclusive-or, EXOR, XOR)

$$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1 \text{ genau dann wenn } \varphi \neq \psi$$

Ein- und zweiwertige Wahrheitstafel

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi)$
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0

Notwendige und hinreichende Bedingung

Gilt für zwei Aussagen φ und ψ die Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$, so heißt φ *hinreichende Bedingung* für ψ und ψ *notwendige Bedingung* für φ .

Im Falle $\varphi \Leftrightarrow \psi$ heißt φ *hinreichende* und *notwendige Bedingung* für ψ .

1.1.2 Rechengesetze (BOOLESCHE Algebra)

kommutativ: $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$ $\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi$ $\varphi \Leftrightarrow \psi = \psi \Leftrightarrow \varphi$

assoziativ: $\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta = \varphi \wedge \psi \wedge \vartheta$ (analog mit \vee und \Leftrightarrow)

distributiv: $\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$ (bzw. \wedge und \vee vertauschen)

DE MORGANSche Regeln

$$\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi} \quad \overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$$

Die Regeln können auf mehr als zwei Variable verallgemeinert werden.

Involutionsregel (doppelte Verneinung): $\neg(\neg\varphi) = \overline{\overline{\varphi}} = \varphi$

Tautologie (ausgeschlossenes Drittes): $\varphi \vee \neg\varphi = \varphi \vee \overline{\varphi} = 1$

Kontradiktion (Widerspruch): $\varphi \wedge \neg\varphi = \varphi \wedge \overline{\varphi} = 0$

Idempotenz: $\varphi \wedge \varphi = \varphi$

$$\varphi \vee \varphi = \varphi$$

neutrale Elemente 0 und 1: $\varphi \vee 0 = \varphi$ $\varphi \wedge 1 = \varphi$ $0 = \neg 1$

Kontraposition: $(\varphi \Rightarrow \psi) = (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

■ 1.2 Mengen

1.2.1 Grundlagen

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Sammlung von inhaltlich zusammengehörigen Objekten (*Elementen*).

Mengenbezeichnung: A, B, M, \dots $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ (aufzählende Form)

Elementebezeichnung: a, b, x_1, \dots

Zuordnung zur Menge: $x \in M$ („ x Element M “) bzw. $x_i \notin M$ („ x kein Element M “)

Mengenbildungsoperator: $\{x \in G \mid A(x)\}$

„Menge aller x Element G , für die gilt: $A(x)$.“

Angabe einer charakteristischen Eigenschaft: $B = \{x \mid x = k^3 \wedge k \in \mathbb{N}\}$

Zweiermenge (ungeordnete Reihenfolge): $\{a, b\}$

Paar (geordnete Reihenfolge): (a, b)

Stets gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$, für $a \neq b$ ist jedoch $(a, b) \neq (b, a)$.

Geordnetes Tripel: (x, y, z) *geordnetes n -Tupel:* (x_1, x_2, \dots, x_n)
Leere Menge: $\emptyset, \{\}$ (enthält kein Element, auch nicht die Null)
Endliche Menge: $\{a_1, a_2, a_3\}$ *unendliche Menge:* $\{a_1, a_2, \dots\}$

Ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ nach unten (oben) beschränkt, so hat sie mindestens eine untere (obere) *Schranke* S .

Supremum: $\sup X$, kleinste obere Schranke, *obere Grenze* der Menge X

Infimum: $\inf X$, größte untere Schranke, *untere Grenze* der Menge X

1.2.2 Mengenoperationen

Inklusion, A ist Teilmenge (Untermenge) von B (Obermenge)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{echte Teilmenge: } A \subset B$$

Gleichheit

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B \quad A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

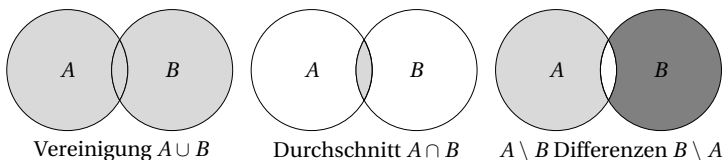
Vereinigung, Disjunktion

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Durchschnitt, Konjunktion

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

A und B sind *disjunkt* (elementefremd): $A \cap B = \emptyset$



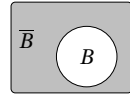
Differenz zweier Mengen

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$A \setminus B \neq B \setminus A \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$

Komplement einer Menge B in Bezug auf Grundmenge G (Bild)

$$\overline{B} := G \setminus B = \{x \in G \mid x \notin B\}$$



1

Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von A

$$\mathbf{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\} \quad A, \emptyset \in \mathbf{P}(A)$$

kartesisches Produkt zweier Mengen (Menge von geordneten Paaren)

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \quad \text{für } A \neq B \text{ gilt } A \times B \neq B \times A$$

Produktmenge, Menge aller n -Tupel $(x_1, \dots, x_n) : M_1 \times \dots \times M_n \quad x_i \in M_i$

$$\text{Mengenpotenz: } M^n := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_n \quad n \geq 1$$

1.2.3 Rechenregeln für Mengen

(G Grundmenge)

Reflexive Beziehung: $A \subseteq A \quad \overline{\overline{A}} = A$

Komplementgesetze: $\overline{\overline{G}} = \emptyset \quad \overline{\emptyset} = G \quad \overline{A \cap A} = \emptyset \quad \overline{A} \cup A = G$

Transitive Beziehung: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Teilmengenbeziehung: $A \cap B \subseteq A \cup B, \quad A \setminus B \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq G$

Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$

Assoziativgesetze: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{desgl. mit } \cup$

Absorptionsgesetze: $A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$

Distributivgesetze: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

DE MORGANSche Regeln: $\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2} \quad \overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$

Produktbeziehungen

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B) \quad C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$$

Es gilt: $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \quad A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

1.2.4 Relationen

Eine *Relation* R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$: $R \subseteq A \times B$

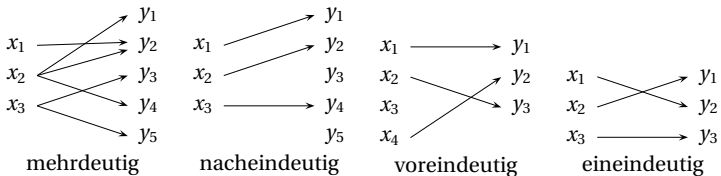
Infix-Schreibweise: xRy für $(x, y) \in R$

Definitionsbereich sind alle Elemente x , für die ein y mit xRy existiert.

Mächtigkeit

Die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* einer Menge ist ihre Elementanzahl. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive (eindeutige) Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

Eine Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich* oder kurz *abzählbar*.



1.2.5 Zahlensysteme

Heute gebräuchliche *Zahlensysteme* sind *polyadische* oder *Positionssysteme*.

Dualsystem (Zweiersystem, dyadisches System)

Grundziffern: $a_k \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$

Stellenwert: Potenzen von 2

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 2^k = \pm (a_n 2^n + \dots + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + \dots)$$

Dezimalsystem (dekadisches System)

Grundziffern: $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Stellenwert: Potenzen von 10

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 10^k = \pm (a_n 10^n + \dots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \dots)$$

Endlicher Dezimalbruch: $\exists a_k \neq 0$ für $k < 0$, alle folgenden Ziffern sind Null

Periodischer Dezimalbruch: unendliche Wiederholung einer Ziffernfolge

Normalisierte Gleitkomma-Darstellung einer reellen Zahl

$$a = \mp m \cdot 10^k \quad a \in \mathbb{R}$$

Mantisse: $1 \leq m < 10$ (auch $0,1 \leq m < 1$ ist üblich), *Exponent:* $k \in \mathbb{Z}$

Hat die Mantisse t tragende Ziffern, heißt sie t -stellig.

Übersicht über häufig verwendete Zahlensysteme

(BCD-Code: Jede Ziffer einer Dezimalzahl wird einzeln binär codiert)

dezimal	dual	BCD	oktal	hexadezimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F
16	10000	0001 0110	20	10
usw.	⋮	⋮	⋮	⋮

1.3 Menge der reellen Zahlen**1.3.1 Standard-Zahlenmengen****Menge der nichtnegativen ganzen (natürlichen) Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Herausnahme der Zahl 0 durch Anfügen des Sternchens:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Kardinalzahlen: Anzahl der Elemente einer abzählbaren Menge

Ordinalzahlen: Stelle eines Elements in einer geordneten Menge

Menge der Primzahlen

Eine *Primzahl* p ist eine natürliche Zahl ≥ 2 , die ohne Rest nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar ist:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Sind a und b *teilerfremde ganze Zahlen*, d. h. ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1, so spricht man von der *Normaldarstellung*.

\mathbb{Q} ist *abzählbar*, d. h. es gibt genauso viele rationale Zahlen wie natürliche. *Rationale Zahlen* liegen überall dicht auf der *Zahlengeraden*. Rationale Zahlen sind

- *Brüche von ganzen Zahlen*
- *endliche Dezimalbrüche*
- *unendliche periodische Dezimalbrüche*

Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Menge der irrationalen Zahlen}$$

Irrationale Zahlen sind nichtperiodische, nicht abbrechende Dezimalbrüche, z. B. π , $\sqrt{2}$, e . Als Näherungswerte benutzt man endliche Dezimalbrüche, etwa $\pi \approx 3,1415927$.

Menge der *positiven* reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

\mathbb{R} ist nicht abzählbar (*überabzählbar*). Die reelle Zahlengerade und \mathbb{R} sind *gleichmächtig*.

Anordnungsaxiome für reelle Zahlen ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Stets gilt eine der drei Beziehungen zwischen zwei reellen Zahlen a und b :

$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a > b$$

Für $a, b > 0$ gilt

$$a + b > 0 \quad \text{und} \quad ab > 0$$

Daraus: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)
 $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (Monotonie der Addition)
 $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonie der Multiplikation)

Intervalle

Offenes Intervall: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Halboffene Intervalle: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Statt (a, b) ist auch die Schreibweise $]a, b[$ gebräuchlich.

1.3.2 Grundoperationen für reelle Zahlen

Klammern auflösen, Ausklammern, Produkte von Summen

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \quad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

$$ac + bc = c(a + b) \quad ac - bc = c(a - b) \quad -ac - bc = -c(a + b)$$

$$a(b - c) = ab - ac \quad \text{„Punkt vor Strich“}$$

Bruchrechnung

Echter Bruch: $\frac{a}{b} < 1$ mit $0 < a < b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ Gemeiner Bruch: für $b \neq 10^n$

Stammbruch: $\frac{1}{a}$ (Kehrwert von a) Kehrwert von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$ $a, b \neq 0$

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$ $b, c \neq 0$

Addieren/Subtrahieren: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ $b, d \neq 0$
 (Hauptnenner bd)

Multiplizieren: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$$\text{Dividieren: } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad b, c, d \neq 0$$

$$\text{Nullsetzen: } \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Produkt der Potenzen der *Primfaktoren* mit den *höchsten* Exponenten der beteiligten Zahlen bzw. Variablen (z. B. bei Hauptnennerbestimmung).

Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Größte natürliche Zahl, die gemeinsamer Teiler aller beteiligten Zahlen ist.

Polynomdivision

- Ordnen von Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen der Variablen
- 1. Glied Dividend durch 1. Glied Divisor ergibt 1. Glied Quotient
- Rückmultiplikation mit Divisor
- Subtraktion, bis die Differenz null wird bzw. ein Rest bleibt

Proportionen, Verhältnisgleichungen ($b, d \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad \text{„über Kreuz multiplizieren“}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a = k \cdot c \wedge b = k \cdot d$$

k Proportionalitätsfaktor, $k \in \mathbb{R}$

Direkte Proportionalität (Graph: *Gerade*): $y \sim x \Leftrightarrow y = kx$

Indirekte Proportionalität (Graph: *Hyperbel*): $y \sim \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = k \frac{1}{x}$

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel

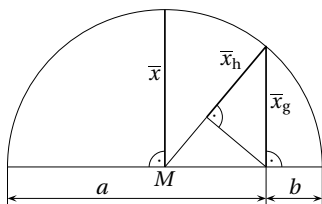
$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

Mittlere Proportionale, geometrisches Mittel ($a, b \geq 0$)

$$\bar{x}_g = \sqrt{ab}$$

Harmonisches Mittel

$$\bar{x}_h = \frac{2ab}{a+b}$$



Ungleichung der Mittelwerte:

Für $a, b > 0$ gilt $\bar{x}_h \leq \bar{x}_g \leq \bar{x}$. Gleichheit herrscht genau dann, wenn $a = b$ ist.

Näherung, Rundungsregeln

Abrunden: Ziffer a_i bleibt, wenn die folgende Ziffer $a_{i+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Aufrunden: Ziffer a_i wird um 1 erhöht, wenn $a_{i+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

absoluter Fehler $\varepsilon: |\varepsilon| \leq 0,5 \cdot 10^{-i}$, i sichere (gültige) Stellen/Dezimalen

Betrag einer reellen Zahl

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln: $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Signum einer reellen Zahl

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln: $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$

$$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$$

Summen- und Produktzeichen ($i, m, n \in \mathbb{Z}$)

$$m \leq n: \quad \sum_{i=m}^n x_i := x_m + x_{m+1} + \dots + x_n \quad \prod_{i=m}^n x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n$$

i Laufvariable, Index

$$m > n: \sum_{i=m}^n x_i := 0 \text{ (leere Summe)} \qquad \prod_{i=m}^n x_i := 1 \text{ (leeres Produkt)}$$

$$\begin{aligned} \text{Regeln: } \sum_{i=m}^n (x_i + y_i) &= \sum_{i=m}^n x_i + \sum_{i=m}^n y_i & \prod_{i=m}^n (x_i \cdot y_i) &= \prod_{i=m}^n x_i \cdot \prod_{i=m}^n y_i \\ \sum_{i=m}^n cx_i &= c \sum_{i=m}^n x_i & \prod_{i=1}^n cx_i &= c^n \prod_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n c &= n \cdot c & \prod_{i=1}^n c &= c^n \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist aber $\sum_{i=m}^n a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=m}^n a_i \cdot \sum_{i=m}^n b_i$.

1.3.3 Potenzen, Wurzeln

Natürliche Exponenten ($a \in \mathbb{R}$)

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

a Basis, n Exponent

Speziell $0^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}^*$, aber 0^0 ist nicht definiert.

Gebrochene Exponenten ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} &:= \sqrt[n]{a}, \text{ wobei } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \\ a^{\frac{m}{n}} &:= (\sqrt[n]{a})^m \end{aligned}$$

a Radikand, n Ordnung der Wurzel

Negative Exponenten ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{-x} := \frac{1}{a^x} \quad \text{speziell Kehrwert: } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Wurzelgesetze ($m, n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{0} &= 0 & \sqrt[n]{1} &= 1 & \sqrt[n]{a} &> 1 \text{ falls } a > 1 \\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Statt $\sqrt[k]{a}$ schreibt man kurz \sqrt{a} .

Beachte: \sqrt{a} ist stets nichtnegativ, also z. B. $\sqrt{4} = 2$, und nicht -2 oder gar ± 2 .

Potenzgesetze ($x, y \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$$

1.3.4 Logarithmen

b Basis, $b \in \mathbb{R}_{>0}, b \neq 1$

a Numerus, Logarithmand, $a \in \mathbb{R}_{>0}$

x Exponent, $x \in \mathbb{R}$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

In Worten: Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige reelle Zahl x , mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

Regeln:

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b b^x = x$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

Logarithmengesetze ($u, v \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = -\log_b \frac{v}{u}$$

$$\log_b \frac{1}{v} = -\log_b v$$

$$\log_b u^c = c \log_b u, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_b u \quad n \geq 2$$

Dekadische (gemeine, BRIGGSsche) Logarithmen

$$\lg a := \log_{10} a$$

$$\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a \quad \lg 10^x = x \quad 10^{\lg a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Gleitkommadarstellung einer reellen Zahl: $a = m \cdot 10^k$ mit $m \in [1; 10)$,
 daraus $\lg a = \lg m + k$ mit $\lg m \in [0; 1)$, $a > 0$
 m Mantisse, $k \in \mathbb{Z}$ Kennzahl

Natürliche Logarithmen

$\ln a := \log_e a$

$$\ln a = x \Leftrightarrow e^x = a \quad \ln e^x = x \quad e^{\ln a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$a^z = e^{z \ln a} \quad a > 0, z \in \mathbb{R}$$

Basis: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 2,718281828459\dots$ EULERSche Zahl

Zweierlogarithmen, binäre Logarithmen

$\text{lb } a := \log_2 a$

$$\text{lb } a = x \Leftrightarrow 2^x = a \quad \text{lb } 2^x = x \quad 2^{\text{lb } a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Basiswechsel der Logarithmensysteme ($b, c \in \mathbb{R}_{>0}, b, c \neq 1$)

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad \text{speziell } c = 10: \log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$$

1.3.5 Binomischer Satz

Fakultät (rekursive Definition, $n \in \mathbb{N}$)

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Für $n \geq 1$ ist $n!$ (lies: „n-Fakultät“) also gleich dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Speziell: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ usw.

Binomialkoeffizient ($n, k \in \mathbb{N}$)

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases} \quad (\text{lies: „}n \text{ über } k\text{“ oder „}k \text{ aus } n\text{“})$$

Für $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ effiziente Berechnung möglich durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 1},$$

für $\frac{n}{2} < k \leq n$ verwende man zunächst den *Symmetriesatz*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{speziell } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Rekursionsformel zur Berechnung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

Additionssatz:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

PASCALSCHES DREIECK zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

$n = 0$	1	Zeilensumme 2^0
$n = 1$	1 1	2^1
$n = 2$	1 <u>2</u> 1	2^2
$n = 3$	1 <u>3</u> 3 1	2^3
$n = 4$	1 <u>4</u> 6 4 1	2^4

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Allgemeiner binomischer Satz für natürliche Exponenten

$(n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R})$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$