Steffen Timmann

Repetitorium der Analysis

Teil 1

3. Auflage

HANSER

Trigonometrische Funktionen

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{aligned}$$

doppelter Winkel

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\ \cot 2x &= \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} \end{aligned}$$

halber Winkel

$$\begin{aligned} \cos\frac{x}{2} &=^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)} \\ \sin\frac{x}{2} &=^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos x)} \\ \tan\frac{x}{2} &= \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \\ &=^* \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \\ \cot\frac{x}{2} &= \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} \\ &=^* \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \end{aligned}$$

Symmetrie

$\cos(-x)$	$= \cos x$	gerade Funktion
$\sin(-x)$	$= -\sin x$	ungerade Funktion
$\tan(-x)$	$= -\tan x$	ungerade Funktion
$\cot(-x)$	$= -\cot x$	ungerade Funktion

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) & \sin x &=^* \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}} \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) & \cos x &=^* \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}} \\ \cos x &= \sin(\tfrac{\pi}{2} \pm x) & \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin x &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) & \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big) \\ \sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big) \end{aligned}$$

* Vorzeichen je nach Quadranten!

Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\ \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \end{aligned}$$

$\cosh 0 = 1,\ \sinh 0 = 0,\ \tanh 0 = 0$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$, $\coth(-x) = -\coth x$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \end{aligned}$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$

$$\sinh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}, \quad \text{für } \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh 2x &= 2\sinh x \cosh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \text{für } x \geq 1 \end{aligned}$$

Überlagerung von Schwingungen

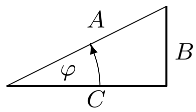
$$\boxed{A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \quad \text{(Quadranten beachten!)}$$

Spezialfall: $\boxed{B \cos\omega t + C \sin\omega t = A \sin(\omega t + \varphi)}$

$$B = A \sin\varphi \qquad C = A \cos\varphi$$



$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{B}{C} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

Quadratische Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

allgemeine Binomialkoeffizienten

$r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, \ldots$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

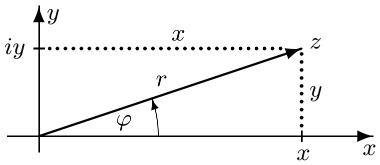
$$\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1, \quad \binom{r}{1} = r$$

Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad dF = r\,dr\,d\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$



Rechnen mit Potenzen und Logarithmen

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

$a^{x+y} = a^x a^y$	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$(a^x)^r = a^{xr}$	$\log_a x^r = r\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

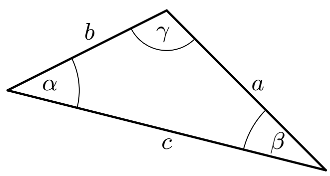
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{speziell:} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ falls } \gamma = 90^0$$

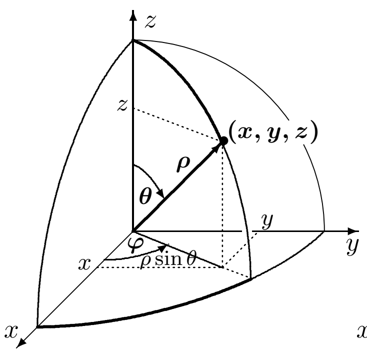


Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kugelkoordinaten

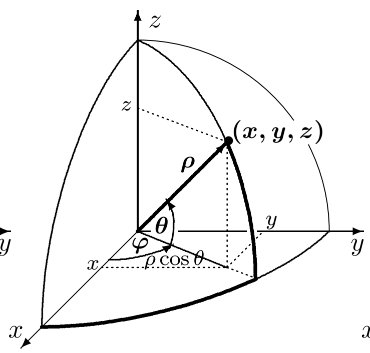
θ : Polabstand



$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta$$
$$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

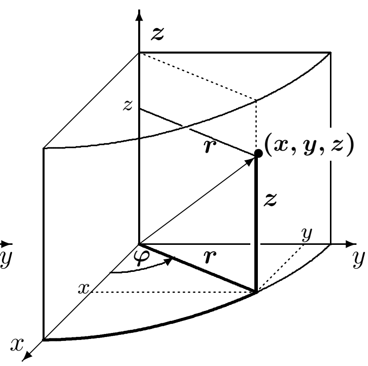
Kugelkoordinaten

θ : geographische Breite



$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\theta$$
$$dV = \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

Zylinderkoordinaten



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \cdots \qquad \text{für } |x| \le 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots \qquad \text{für } -1 < x \le 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots) \qquad \text{für } -1 \le x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots \qquad \text{für } |x| \le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

endliche geom. Reihe

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1$$

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots \qquad \text{konvergent} \iff x > 1$$

binomische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r, \qquad \begin{array}{l} |x| \le 1,\ r > 0 \\ |x| < 1,\ r < 0 \end{array}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots = \frac{1}{e}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

wichtige Grenzwerte

$(n \to \infty,\ a > 0)$

$\sqrt[n]{a} \to 1$	$(\frac{n+1}{n})^n \to e$	$\binom{a}{n} \to 0,\ a > -1$
$\sqrt[n]{n} \to 1$	$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$	$\frac{a^n}{n!} \to 0$
$\sqrt[n]{n!} \to \infty$	$(1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1}$	$\frac{n^n}{n!} \to \infty$
$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$	$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$	$\frac{a^n}{n^k} \to \infty \ \left\{\begin{array}{l} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{array}\right.$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$	$(1 - \frac{x}{n})^n \to e^{-x}$	$a^n n^k \to 0 \ \left\{\begin{array}{l} \lvert a\rvert < 1 \\ k \text{ fest} \end{array}\right.$
		$n(\sqrt[n]{a} - 1) \to \ln a,\ a > 0$

Differentiations– und Integrationsregeln

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

partielle Integration: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Vektorfunktionen

$$\left(\lambda\vec{u}\right)' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}\,'$$

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)' = \vec{u}\,'\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v}\,'$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)' = \vec{u}\,'\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}\,'$$

$$\left(\vec{u}(\lambda(t))\right)' = \vec{u}\,'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)$$

Kettenregel: $\left(y(x(t))\right)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y'(x(t))\cdot x'(t)$

Substitutionsregel: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$, dabei ist $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$
$\int g\,dx$	g

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int x\ln x\,dx = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta = 4ac - b^2$

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right| & \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| < \sqrt{-\Delta} & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arcoth}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| > \sqrt{-\Delta} & \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

A	a	a	J	j	j	S	s	s
B	b	b	K	k	k	T	t	t
C	c	c	L	l	l	U	u	u
D	d	d	M	m	m	V	v	v
E	e	e	N	n	n	W	w	w
F	f	f	O	o	o	X	x	x
G	g	g	P	p	p	Y	y	y
H	h	h	Q	q	q	Z	z	z
I	i	i	R	r	r			

REPETITORIUM

ANALYSIS

TEIL 1

Steffen Timmann

3. Auflage, Ebook

Binomi Verlag , Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon	05105 6624000
E–Mail	verlag@binomi.de
Internet	www.binomi.de

Zu beziehen beim Verlag, www.binomi.de

ISBN **978–3–923 923–75–5**

Hannover 04/21

Vorwort

In den beiden Bänden dieses Repetitoriums der Analysis finden Sie die wichtigsten Definitionen, Sätze und Beispiele einer 'üblichen' zweisemestrigen Einführungsvorlesung. Außerdem enthält es zu jedem Abschnitt zahlreiche Aufgaben mit Lösungen. Es wird fortgesetzt durch Repetitorien zur Funktionentheorie, Differentialgleichungen sowie Topologie und Funktionalanalysis.

Das *Rep* ist für (mindestens) zwei verschiedene Leserkreise geschrieben:

- für Mathematik-, Physik- und Lehramts-Studenten des 1. und 2. Semesters zum Gebrauch neben der Vorlesung

- für Studenten höherer Semester als Leitfaden für Prüfungsvorbereitungen.

Das *Rep* kann weder ein Vorlesungsskript noch Lehrbücher ersetzen. Definitionen und Sätze werden in jeder Vorlesung anders formuliert, Schwerpunkte anders gesetzt. Der Stoff in Vordiplom- und anderen Prüfungen hängt vom Prüfer und seiner Vorlesung ab. Vergleichen Sie also unbedingt die Definitionen und Sprechweisen des *Rep's* mit denen Ihrer Vorlesung.

Natürlich ist das *Rep* knapper gehalten als ein Lehrbuch. Beweise (außer im Aufgabenteil), Motivationen oder historische Bemerkungen fehlen fast völlig.

Im Theorieteil werden die Sätze und Methoden aufgeführt, die beherrscht werden sollten. Er ist nicht gedacht als logisch deduktiver Aufbau der Theorie. Von Anfang an wird auf Begriffe und Fakten verwiesen, die üblicherweise erst später oder in anderen Vorlesungen gebracht werden.

Jeder Band enthält ca 300 Aufgaben, z.T. sehr einfache, aber auch recht schwierige, alle mit vollständigen und relativ ausführlichen Lösungen. Manche sind Muster häufig gestellter Hausaufgaben, manche stellen klassische Beispiele vor. Einige Aufgaben verlangen Beweise, die normalerweise in der Vorlesung gebracht werden. Dies nur dann, wenn es Standardbeweise sind, deren Methoden zum 'Pflichtstoff' gehören.

Fast immer gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten. Es kann sein, dass die hier vorgestellte für Sie nicht in Frage kommt, weil die benutzten Hilfsmittel noch nicht bereitgestellt sind. Das müssen Sie kontrollieren, ebenso, ob die Voraussetzungen der benutzten Sätze erfüllt sind.

Mit diesen Einschränkungen glaube ich, dass das Analysis-Rep eine gute Hilfe für das Mathematik-Studium ist, und zwar sowohl für Anfangs-, als auch für höhere Semester.

Verweise auf Kapitel 6 bis 11 wie z.B. 7.5.3.A beziehen sich auf den 2. Band des Repetitoriums.

Hannover, den 1.9.2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen, Funktionen, reelle Zahlen

1.1.1 Mengen

In der Analysis arbeitet man meist mit einem naiven Mengenbegriff wie z.B.:

'Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen'. (G.Cantor, 1895)

Durch Vereinigungen, Durchschnitte, Paarbildungen, Aussonderungen, Auswahlprozesse usw entstehen neue Mengen. Man muss etwas aufpassen, z.B. darf man die 'Menge aller Mengen' nicht zulassen. Sie würde zu Widersprüchen führen. (Man erhält aus ihr durch Aussondern die Menge A aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Sowohl $A \in A$, als auch $A \notin A$ ist nicht möglich.)

Auf die Grundlagen der Mengenlehre wird in einer Analysis-Vorlesung normalerweise nicht eingegangen. Wir tun dies auch nicht, sondern wiederholen nur kurz die übliche Terminologie und Schreibweisen.

An logischen Symbolen benutzen wir nur die Implikationspfeile $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und die Quantoren $\forall$ und $\exists$.

$A := B$	besagt, dass A durch B definiert wird.
$\{ x \,;\, A(x) \}$	ist die Menge aller x, die die Bedingung $A(x)$ erfüllen,
$\emptyset$	ist die leere Menge.

$$x \in X \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ ist Element von } X$$

$$x \notin X \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ ist nicht Element von } X$$

$$X \subset Y \quad :\Longleftrightarrow \quad X \text{ ist Teilmenge von } Y, \text{ d.h. für alle } x \in X \text{ gilt } x \in Y$$

$$\begin{array}{rcll}
X \cup Y & := & \{\, x \,;\, x \in X \text{ oder } x \in Y \,\} & \textit{Vereinigung} \\
X \cap Y & := & \{\, x \,;\, x \in X \text{ und } x \in Y \,\} & \textit{Durchschnitt} \\
X \setminus Y & := & \{\, x \,;\, x \in X \text{ und } x \notin Y \,\} & \textit{Differenz} \\
\mathcal{P}(X) & := & \{\, Y \,;\, Y \subset X \,\} & \textit{Potenzmenge von } X \\
X \times Y & := & \{\, (x,y) \,;\, x \in X \text{ und } y \in Y \,\} & \textit{cartesisches Produkt}
\end{array}$$

$$\bigcup_{j\in J} X_j := \{\, x \,;\ \text{es gibt ein } j \in J \text{ mit } x \in X_j \,\}$$

Vereinigung des Mengensystems $\{\, X_j \,;\, j \in J \,\}$

$$\bigcap_{j\in J} X_j := \{\, x \,;\ \text{für alle } j \in J \text{ gilt } x \in X_j \,\}$$

Durchschnitt des Mengensystems $\{\, X_j \,;\, j \in J \,\}$

1.1.2 Funktionen

Im folgenden seien X und Y zwei nichtleere Mengen.

Eine *Relation zwischen* X und Y ist eine Teilmenge des cartesischen Produkts $X \times Y$.

Eine *Relation auf* X ist eine Teilmenge des cartesischen Produkts $X^2 = X \times X$.

Eine *Funktion* f von X in Y ist eine spezielle Relation zwischen X und Y, nämlich eine, für die gilt: Für alle $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Dieses eindeutig bestimmte y bezeichnet man mit $f(x)$ und schreibt die Funktion f in der Form $f\colon X \to Y,\ x \mapsto y = f(x)$.

X heißt *Definitionsbereich*, Y *Zielbereich* und $f(X)$ *Wertebereich* von f.

Für $A \subset X$ heißt $f(A) := \{\, f(a) \,;\, a \in A \,\}$ das *Bild* von A unter f.
Die *Einschränkung* von f auf $A \subset X$ bezeichnen wir mit $f\big|_A$.

Für $B \subset Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{\, a \,;\, f(a) \in B \,\}$ das *Urbild* von B unter f, also ist der Definitionsbereich $X = f^{-1}(Y)$ das Urbild des Zielbereichs Y.
Für einelementige Mengen $\{y\}$ schreibt man $f^{-1}(y)$ statt $f^{-1}(\{y\})$.
Jedes $x \in f^{-1}(y)$ heißt auch *ein* Urbild von y.

Der *Graph* von f ist die Menge aller Paare $(x, f(x))$ (also im strengen Sinne die Funktion f selbst).

Die Funktion $\mathrm{id}\colon X \to X,\ \mathrm{id}(x) := x$ heißt *Identität* auf X.

$f \equiv g$ ist eine suggestive Schreibweise für $f(x) = g(x)$ für alle x.

Sind X, Y, Z nichtleere Mengen und $g\colon X \to Y,\ f\colon Y \to Z$ Funktionen, dann heißt die durch $f \circ g(x) := f(g(x))$ definierte Funktion $f \circ g\colon X \to Z$ die *Verknüpfung* von f und g. Die Verknüpfung von Funktionen ist assoziativ, d.h. es ist $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, wenn diese Verknüpfungen definiert sind.

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt *injektiv*, wenn verschiedene Argumente unter f

auch verschiedene Bilder haben, also wenn für alle $a, b \in X$ gilt

$$a \neq b \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(b) \quad \text{bzw.} \quad f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b\,.$$

Ist f injektiv und $y \in f(X) \subset Y$, so gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dies eindeutig bestimmte Urbild wird mit $f^{-1}(y)$ bezeichnet. und die dadurch definierte Funktion $f^{-1}\colon f(X) \to X$ heißt *Umkehrfunktion* von f.

$f\colon X \to Y$ heißt *surjektiv*, wenn jedes $y \in Y$ ein Bild unter f ist, also:

$$\begin{aligned} f\colon X \to Y \;\text{ surjektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, y \in Y \;\exists\, x \in X \;:\; f(x) = y \\ &\Longleftrightarrow \quad f(X) = Y\,. \end{aligned}$$

f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Achtung: In manchen Vorlesungen wird die *Umkehrfunktion* nur für bijektive Funktionen definiert. Dies führt kaum zu Mißverständnissen. Jede injektive Funktion wird durch eine Verkleinerung des Zielbereichs bijektiv.

1.1.3 Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist ‘der’ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte vollständige angeordnete Körper.

Die Verwendung des bestimmten Artikels *‘der’* in dieser Definition ist ein Widerspruch in sich, denn gleichzeitig wird gesagt, dass der Körper nur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Es gibt viele verschiedene ‘Modelle’ von $\mathbb{R}$. Wir nehmen an, wir hätten uns auf ein Modell geeinigt.

Auf algebraische Strukturen wie z.B. Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume etc gehen wir nicht ein. Wir stellen nur ein Axiomensystem für den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen vor, auf das wir uns im folgenden beziehen.
Die üblichen Schreibweisen wie z.B. $x - y := x + (-y)$ und $xy := x \cdot y$ werden stillschweigend benutzt.

1.1.4 Körper

Ein *Körper* K ist eine Menge mit mindestens zwei Elementen und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, für die die folgenden Axiome erfüllt sind:

K1 *Assoziativgesetz der Addition*
Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$.

K2 *Existenz der Null*
Es gibt ein Element $0 \in K$ derart, dass $x + 0 = x$ für alle $x \in K$.

K3 *Existenz von additiv inversen (negativen) Elementen*
Für alle $x \in K$ existiert ein Element $-x \in K$ derart, dass $x + (-x) = 0$.

K4 *Kommutativgesetz der Addition*
Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.

K5 *Assoziativgesetz der Multiplikation*
Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

K6 *Existenz der Eins*
Es gibt ein Element $1 \in K$ derart, dass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in K$.

K7 *Existenz von multiplikativ Inversen*
Für alle $x \in K,\ x \neq 0$ existiert ein $x^{-1} \in K$ derart, dass $x \cdot x^{-1} = 1$.

K8 *Kommutativgesetz der Multiplikation*
Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.

K9 *Distributivgesetz*
Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Beispiele

1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper.
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\, r + s\sqrt{2}\,;\ r, s \in \mathbb{Q} \,\}$ ist ein Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 1.2.1).

2) $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ ist mit der üblichen Multiplikation und der durch $0 + x := x$ und $1 + 1 := 0$ definierten Addition ein endlicher Körper.
Da jeder Körper nach Definition mindestens zwei Elemente enthält, ist dies 'der kleinste Körper'.

3) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_{>0} := \{\, r \in \mathbb{Q}\,;\ r > 0 \,\}$ sind mit den üblichen Verknüpfungen keine Körper.

1.1.5 Angeordnete Körper

Eine Relation '$<$' auf einer Menge M heißt (totale oder lineare) *Ordnung* auf M, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

O1 *Transitivität*
Für alle $x, y, z \in M$ gilt $x < y,\ y < z \ \Rightarrow\ x < z$.

O2 *Trichotomie*
Für alle $x, y \in M$ gilt genau eine der drei Aussagen
$x < y$, $y < x$ oder $x = y$.

Eine Menge zusammen mit einer Ordnung auf ihr heißt (total oder linear) *geordnete Menge*.

Ein *angeordneter* oder *geordneter* Körper K ist ein Körper zusammen mit einer Ordnung '$<$', die den folgenden Axiomen genügt:

A1 *Monotonie der Addition*
Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x < y \ \Rightarrow\ x + z < y + z$.

A2 *Monotonie der Multiplikation*
Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x < y,\ z > 0 \ \Rightarrow\ xz < yz$.

Achtung: Der Faktor z wurde positiv vorausgesetzt. Multiplikation mit negativen Faktoren dreht die Ungleichungen um.

Häufig wird ein angeordneter Körper mit Hilfe eines sog. Positivitätsbereichs P statt mit einer Ordnung $<$ definiert. Siehe Aufgabe 1.2.3.A.

Es ist klar, wie die Relationen '$\leq$', '$>$', '$\geq$', sowie die Bezeichnungen 'positiv' und 'negativ' definiert werden.

In jedem angeordneten Körper K gilt $1 > 0,\ -1 < 0$ und $x^2 := x \cdot x \geq 0$ für alle $x \in K$. Also kann $\mathbb{C}$ wegen $i \cdot i = -1 < 0$ nicht angeordnet werden.

Endliche Körper können ebenfalls nicht angeordnet werden.
In angeordneten Körpern gilt nämlich $0 < 1 < 2 := 1 + 1 < 3 := 2 + 1 < \ldots$. In einem endlichen Körper muss in dieser Kette ein Element zweimal auftreten und das ergibt einen Widerspruch zur Transitivität und Trichotomie.

Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch* angeordnet, wenn es zu jedem $x \in K$ und jedem positiven $b \in K$ eine natürliche Zahl n gibt mit $nb > x$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die 'natürlichen Zahlen in K' (siehe Abschnitt 1.3.1) nicht beschränkt sind. Siehe Aufgabe 1.2.3.C für ein Beispiel eines nicht-archimedisch angeordneten Körpers.

Absolutbetrag

Der *(Absolut-) Betrag* einer Zahl x in einem angeordneten Körper K ist definiert als

$$|x| := x \ \text{ für } \ x \geq 0 \quad \text{ und } \quad |x| := -x \ \text{ für } \ x < 0 \ .$$

Es gilt für alle $x, y \in K$:

(1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $|x| = |-x|$ und $|x\,y| = |x|\,|y|$

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecksungleichung*

(4) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$ *Dreiecksungleichung nach unten* (siehe 1.2.5).

1.1.6 Schranken

Sei A Teilmenge eines geordneten Körpers K.
(In diesem Abschnitt kommt es allerdings nur auf die Ordnung an und nicht auf die Körpereigenschaften.)

A heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein Element $b \in K$ gibt, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A$. Jedes solche b heißt *obere Schranke* von A.

A heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein Element $b \in K$ gibt, so dass $b \leq a$ für alle $a \in A$. Jedes solche b heißt *untere Schranke* von A.

A heißt *beschränkt*, wenn A sowohl eine obere, als auch eine untere Schranke besitzt.

Eine obere Schranke b von A, die in A enthalten ist, heißt *Maximum* oder *größtes Element* von A, geschrieben $b = \max A$.

Eine untere Schranke b von A, die in A enthalten ist, heißt *Minimum* oder *kleinstes Element* von A, geschrieben $b = \min A$.

Infimum und Supremum

Sei A Teilmenge eines geordneten Körpers K. Ein Element $\beta \in K$ heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum* von A, geschrieben $\beta = \inf A$, wenn β eine untere Schranke von A ist und jede andere untere Schranke kleiner oder gleich β ist.

$$\beta = \inf A \iff \begin{array}{rl} (i) & \beta \text{ ist untere Schranke von } A \quad \underline{\text{und}} \\ (ii) & \text{es gibt keine größere untere Schranke von } A. \end{array}$$

Ein Element $\beta \in K$ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A, geschrieben $\beta = \sup A$, wenn β eine obere Schranke von A ist und jede andere obere Schranke größer oder gleich β ist.

$$\beta = \sup A \iff \begin{array}{rl} (i) & \beta \text{ ist obere Schranke von } A \quad \underline{\text{und}} \\ (ii) & \text{es gibt keine kleinere obere Schranke von } A. \end{array}$$

Folgerungen und Rechenregeln

1) Jede Menge A hat höchstens ein Infimum bzw Supremum.

2) Das Maximum einer Menge A ist auch das Supremum von A,
das Minimum einer Menge auch ihr Infimum.

3) Es ist $\sup A = \max A \iff \sup A \in A$ und analog für Infimum und Minimum.

4) Ist $\beta = \sup A \notin A$, so liegen für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Elemente von A zwischen $\beta - \varepsilon$ und β. Analog für das Infimum.

5) $\beta = \sup A \iff \begin{array}{rl} (i) & \text{Für alle } a \in A \text{ ist } \beta \geq a \quad \underline{\text{und}} \\ (ii) & \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } a \in A \text{ mit } \beta - \varepsilon < a. \end{array}$

6) $\beta = \inf A \iff \begin{array}{rl} (i) & \text{Für alle } a \in A \text{ ist } \beta \leq a \quad \underline{\text{und}} \\ (ii) & \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } a \in A \text{ mit } a < \beta + \varepsilon. \end{array}$

7) Ist $A \subset B \subset K$, so ist $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

8) $\inf A \cup B \;=\; \min\{\inf A, \inf B\} \;\leq\; \inf A \cap B$
$\leq\; \sup A \cap B \;\leq\; \max\{\sup A, \sup B\} \;=\; \sup A \cup B.$

9) Seien $A, B \subset K$ und $A{+}B := \{\, a{+}b\,;\, a \in A,\, b \in B\,\}$. Dann gilt
$\inf(A{+}B) \;=\; \inf A + \inf B \;\leq\; \sup A + \sup B \;=\; \sup(A{+}B)$.
Zum Beweis siehe Aufgabe 1.2.6.A .

10) Sind $A, B \subset K_{\geq 0} := \{ x \in K ; x \geq 0 \}$ und $A \cdot B := \{ ab ; a \in A, b \in B \}$, so gilt $\inf(A \cdot B) = (\inf A)(\inf B) \leq (\sup A)(\sup B) = \sup(A \cdot B)$.

(jeweils vorausgesetzt, dass die erwähnten Infima und Suprema existieren.)

1.1.7 Vollständigkeitsaxiom

Für angeordnete Körper K sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1) Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum in K.

2) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge aus K besitzt einen Grenzwert in K.

3) K ist archimedisch und jede Cauchy-Folge aus K besitzt einen Grenzwert in K.

4) K ist archimedisch und im Durchschnitt jeder Intervallschachtelung liegt genau ein Element von K. Dabei ist eine *Intervallschachtelung* eine Folge abgeschlossener, ineinander geschachtelter Intervalle, deren Länge gegen Null geht.

5) In jedem Dedekind-Schnitt $K = U \cup O$ von K besitzt entweder die Obermenge O ein kleinstes, oder die Untermenge U ein größtes Element.
Dabei heißt eine Zerlegung $K = U \cup O$ von K in zwei disjunkte, nicht-leere Teilmengen $U, O \subset K$ ein *Dedekind-Schnitt* von K, wenn $x < y$ für alle $x \in U,\ y \in O$.

Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig*, wenn er eine dieser Bedingungen (und damit alle) erfüllt.
Achtung: In der Topologie heißt ein metrischer Raum vollständig, wenn in ihm alle Cauchy Folgen konvergieren.
Dabei heißt eine Folge (x_n) aus dem metrischen Raum (X, d) mit der Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Cauchy-Folge, wenn es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ einen Index n_0 derart gibt, dass für alle $n, m > n_0$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Eine Folge (x_n) aus dem angeordneten Körper K mit dem wie oben definierten Absolutbetrag $|\cdot| : K \to K_{\geq 0}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es für alle $\varepsilon \in K,\ \varepsilon > 0$ einen Index n_0 derart gibt, dass für alle $n, m > n_0$ gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$.
Es gibt nicht-archimedisch angeordnete Körper, in denen jede Cauchy Folge konvergiert. Z.B. ist dies in der 'Vervollständigung' des nicht-archimedisch angeordneten Körpers aus Aufgabe 1.2.3.C der Fall.

1.2 Aufgaben

1.2.1 Körper

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \left\{ a + b\sqrt{2}\,;\ a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$ mit der in $\mathbb{R}$ üblichen Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

($\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist einer der (unendlich) vielen Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Ein weiterer ist der Körper aller algebraischen reellen Zahlen. Alle diese Zwischenkörper sind nicht vollständig.)

Lösung:

'+' und '$\cdot$' sind in der Tat Operationen auf $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, d.h. mit $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sind auch $x + y$ und $x \cdot y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
(Man sagt $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist *abgeschlossen* bzgl '+' und '$\cdot$' .)

Die Körperaxiome in $\mathbb{R}$ werden vorausgesetzt. Insbesondere gelten die beiden Assoziativgesetze (K1 und K5), die beiden Kommutativgesetze (K4 und K8) und das Distributivgesetz K9 in der Obermenge $\mathbb{R}$, also erst recht in der kleineren Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Das Nullelement $0 \in \mathbb{R}$ ist von der Form $a+b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ (wähle $a = b = 0$), also ist $0 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Es gilt auch $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, da dies sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist das Axiom K2 erfüllt (Existenz eines Nullelementes).

Sei $x := a + b\sqrt{2}$, $(a, b \in \mathbb{Q})$ ein beliebiges Element aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Dann sind auch $-a, -b \in \mathbb{Q}$, also auch $(-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Wegen $[a + b\sqrt{2}] + [(-a) + (-b)\sqrt{2}] = 0$ besitzt das beliebig vorgegebene Element $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Negatives, d.h. das Axiom K3 ist ebenfalls erfüllt.

Das Einselement $1 \in \mathbb{R}$ ist von der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ (wähle $a = 1$ und $b = 0$), also ist $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Es gilt auch $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, da dies sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist das Axiom K6 erfüllt (Existenz eines Einselementes).

Bleibt als Letztes die Existenz der multiplikativ inversen Elemente zu zeigen:
Seien also a, b beliebig aus $\mathbb{Q}$ und $a + b\sqrt{2} \neq 0$. Dann ist auch $a^2 - 2b^2 \neq 0$.

Beweis indirekt! Angenommen $a^2 - 2b^2 = (a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = 0$.
Wegen $a + b\sqrt{2} \neq 0$ folgt $a - b\sqrt{2} = 0$ (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$).
Es ist $b \neq 0$, denn sonst folgt $a = 0$ und damit $a + b\sqrt{2} = 0$.
Also $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ und das ist ein Widerspruch zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
(Dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist, ist hoffentlich aus der Schule bekannt. Sonst kann man es leicht indirekt beweisen.)

Das Element $\dfrac{a}{a^2-2b^2} + \dfrac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$ liegt in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, denn sowohl $\dfrac{a}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$, als auch $\dfrac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$. (Hier wird die Körpereigenschaft von $\mathbb{Q}$ benutzt.)

Man rechnet sofort nach, dass

$$(a+b\sqrt{2})\left[\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right] \;=\; 1 \;.$$

Also hat jedes Element $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ ein multiplikativ inverses Element in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

1.2.2 Rechnen in Körpern

$\boxed{\text{A}}$ Sei K irgendein Körper. Dann gilt für alle $x, y \in K$:

$$xy = 0 \iff x = 0 \;\text{ oder }\; y = 0 \;.$$

$\boxed{\text{B}}$ Sei K ein beliebiger Körper. Beweisen Sie für $x, y \in K$ die Vorzeichenregeln

1) $(-1)x \;=\; -x$
2) $(-x)(-y) \;=\; xy$.

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Es ist etwas für <u>alle</u> $x, y \in K$ behauptet worden.
Seien also x und y zwei <u>beliebige</u> Elemente von K.
Behauptet wurde eine Äquivalenz, also sind zwei Richtungen zu zeigen:

$\underline{\Leftarrow}$: Sei $x = 0$ oder $y = 0$. Wir nehmen o.B.d.A. (*ohne Beschränkung der Allgemeinheit*) an, dass $x = 0$. Zu zeigen: $xy = 0y = 0$.

Zunächst gilt $0y = (0+0)y = 0y + 0y$ wegen des Distributivgesetzes K9 und weil 0 neutrales Element der Addition ist.

Nach Axiom K3 existiert zu 0y ein negatives (additiv inverses) Element $-0y$. Es gilt $0y + (-0y) = 0$. Also folgt

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& 0y+(-0y) \;=\; (0y+0y)+(-0y) & \\ &=& 0y+(0y+(-0y)) & \text{nach dem Assoziativgesetz K1,} \\ &=& 0y+0 \;=\; 0y & \text{da 0 neutrales Element ist.} \end{array}$$

$\underline{\Rightarrow}$: (Diese Richtung ist die sog. *Nullteilerfreiheit* von Körpern.)
Sei also $xy = 0$. Zu zeigen: $x = 0$ oder $y = 0$.

Ist $x = 0$, so sind wir fertig. Sei also $x \neq 0$. Dann ist zu zeigen: $y = 0$.

Nach Axiom K7 (Existenz des multiplikativ Inversen) existiert zu $x \neq 0$ ein Element $x^{-1} \in K$ mit $xx^{-1} = 1$. Dann folgt

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& x^{-1}0 \;=\; x^{-1}(xy) & \text{nach der bereits gezeigten Implikation '}\Leftarrow\text{'} \\ &=& (x^{-1}x)y & \text{nach Axiom K5 (Assoziativgesetz)} \\ &=& 1y & \text{nach Definition von } x^{-1} \\ &=& y & \text{weil 1 neutrales Element der Multiplikation ist.} \end{array}$$

B **(1)** Benutzt wird, dass das Negative eines Elementes eindeutig bestimmt ist. Sei x beliebig aus K. Es gilt

$$\begin{array}{rcll} x+(-1)x & = & 1x+(-1)x & \text{da 1 neutrales Element der Multiplikation ist} \\ & = & (1+(-1))x & \text{nach dem Distributivgesetz K9} \\ & = & 0x & \text{da } -1 \text{ das Negative von 1 ist} \\ & = & 0 & \text{nach Aufgabe 1.2.2.A .} \end{array}$$

Da es zu jedem $x \in K$ nur ein Negatives gibt, folgt $(-1)x = -x$.

(2) Seien x und y zwei beliebige Elemente aus K. Es gilt

$$\begin{array}{rcll} (-x)(-y) & = & (-x)((-1)y) & \text{nach Teil } \mathbf{(1)} \\ & = & ((-1)(-x))y & \text{nach Kommutativ- und Assoziativgesetz} \\ & = & (-(-x))y & \text{nach Teil } \mathbf{(1)} \\ & = & xy\ . & \end{array}$$

Dabei wurde zum Schluss benutzt, dass $-(-x) = x$ ist.
Dies folgt aus $x + (-x) = 0 = -(-x) + (-x)$ und der Eindeutigkeit des negativen Elementes von $(-x)$.

1.2.3 Angeordnete Körper

A *Positivitätsbereiche*
Sei K ein Körper und $P \subset K$ ein sog. *Positivitätsbereich* in K, d.h. eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen
$x \in P$, $-x \in P$ oder $x = 0$.

(ii) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Die Relation '$<$' auf K sei definiert durch $x < y \;:\Longleftrightarrow\; y - x \in P$.
Zeigen Sie, dass dann $(K, <)$ ein angeordneter Körper ist.

(Es gilt auch die umgekehrte Aussage, d.h.: Ist $(K, <)$ ein angeordneter Körper, so ist $\{x \in K; 0 < x\}$ ein Positivitätsbereich.)

B *Zu Dedekind Schnitten*
Sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $U \neq \emptyset$ (2) $x \in U, y < x \Rightarrow y \in U$

(3) $U \neq \mathbb{R}$ (4) $x \in U \Rightarrow$ es gibt $z \in U$ mit $x < z$.

Zeigen Sie, dass es dann eine reelle Zahl a gibt derart, dass

$$U \;=]-\infty, a[\;=\; \{\, x\, ;\, x < a \,\}\ .$$

$\boxed{\text{C}}$ *Ein nicht archimedisch angeordneter Körper*

Sei $\mathbb{R}(x)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$. Die von Null verschiedenen Elemente von $\mathbb{R}(x)$ sind also von der Form $\quad r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

mit Polynomen $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \quad q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k \quad$ und Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}(x)$ durch

$$r(x) > 0 \ :\Longleftrightarrow \ a_n b_m \in \mathbb{R}_{>0} \ , \quad r(x) > s(x) \ :\Longleftrightarrow \ r(x) - s(x) > 0$$

nicht-archimedisch angeordnet wird.

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Die Ordnungsaxiome [O1] und [O2], sowie die Axiome [A1] und [A2] eines angeordneten Körpers müssen nachgewiesen werden.

Zu [O1]: (Transitivität)

Zu zeigen ist: Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$.

Seien also $x, y, z \in K$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} x < y,\ y < z & \Longrightarrow & y - x \in P,\ z - y \in P & \text{(Definition von `$<$')} \\ & \Longrightarrow & (y - x) + (z - y) = z - x \in P & \text{(Eigenschaft (ii) von } P) \\ & \Longrightarrow & x < z & \text{( Definition von `$<$').} \end{array}$$

Zu [O2]: (Trichotomie) Seien $x, y \in K$ beliebig. Zu zeigen ist, dass genau eine der drei Aussagen $x < y,\ x = y$ oder $y < x$ gilt.

Nach Eigenschaft (i) von P gilt genau eine der drei Aussagen $y - x \in P$, $x - y = -(y - x) \in P$ oder $y - x = 0$. Daraus folgt die Behauptung durch Fallunterscheidung.

Zu [A1]: (Monotonie der Addition) Zu zeigen ist:

Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$.

Seien also $x, y, z \in K$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} x < y & \Longrightarrow & y - x \in P & \text{nach Definition von `$<$'} \\ & \Longrightarrow & y - x = (y + z) - (x + z) \in P & \\ & \Longrightarrow & x + z < y + z & \text{nach Definition von `$<$'.} \end{array}$$

Zu [A2]: (Monotonie der Multiplikation) Zu zeigen ist:

Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x < y,\ 0 < z \Rightarrow xz < yz$.

Seien also x, y, z beliebig aus K. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} x < y,\ 0 < z & \Longrightarrow & y - x \in P,\ z = z - 0 \in P & \text{(Definition von `$<$')} \\ & \Longrightarrow & z(y-x) = zy - zx \in P & \text{(Eigenschaft (ii) von } P) \\ & \Longrightarrow & xz < yz & \text{(Definition von `$<$').} \end{array}$$

B Beh. 1: U ist nach oben beschränkt.

Nach Eigenschaft (3) existiert ein $b \in \mathbb{R} \setminus U$. Dann ist b eine obere Schranke von U. Denn angenommen, es gibt ein $x \in U$ mit $x > b$, dann folgt aus Eigenschaft (2), dass $b \in U$. Widerspruch!

U ist also nicht leer (Eigenschaft (1)) und nach oben beschränkt. Also existiert $a := \sup U$. Wir zeigen nun: Mit diesem a gilt $U =]-\infty, a[$.

Beh. 2: $U \subset]-\infty, a[$.

Annahme, es existiert ein $x \in U$ mit $x \geq a$. Dann existiert nach Eigenschaft (4) ein $z \in U$ mit $a \leq x < z$. Widerspruch zu $a = \sup U$. Also sind alle $x \in U$ kleiner als a.

Beh. 3: $U \supset]-\infty, a[$.

Sei $y < a$ beliebig. Zu zeigen: $y \in U$. Da $a = \sup U$ existiert zu $y < a$ ein $x \in U$ mit $y < x \leq a$. Nach Eigenschaft (2) folgt $y \in U$.

C *Ein nicht archimedisch angeordneter Körper*

Zunächst zeigen wir, dass die Menge $P := \{ r \in \mathbb{R}(x)\,;\, r > 0 \}$ einen Positivitätsbereich im Sinne von Aufgabe 1.2.3.A bildet. Daraus folgt, dass $(\mathbb{R}(x), <)$ ein angeordneter Körper ist. Dabei wird die Körpereigenschaft von $\mathbb{R}(x)$ vorausgesetzt.

Das Nullelement in $\mathbb{R}(x)$ ist die Nullfunktion 0. Eine rationale Funktion $r \in \mathbb{R}(x),\ r \neq 0$, ist von der Form

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad \text{mit } a_i, b_j \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0\ .$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig (Brüche können schließlich erweitert werden), aber das Vorzeichen von $a_n b_m$ hängt nicht von der gewählten Darstellung ab. Die Definition $r > 0 :\Leftrightarrow a_n b_m > 0$ ist daher sinnvoll.
Man prüft auch sofort nach, dass für die oben definierte Menge P und jedes $r \in \mathbb{R}(x)$ genau eine der drei Aussagen $r \in P,\ -r \in P$ oder $r = 0$ gilt.

Für $r(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$ und $s(x) = \dfrac{c_k x^k + \ldots + c_0}{d_l x^l + \ldots + d_0}$ gilt

$$\begin{aligned} (r+s)(x) &= r(x) + s(x) = \frac{(a_n d_l x^{n+l} + \ldots + a_0 d_0) + (c_k b_m x^{k+m} + \ldots + c_0 b_0)}{b_m d_l x^{m+l} + \ldots + b_0 d_0} \\ (r \cdot s)(x) &= r(x)\, s(x) = \frac{a_n c_k x^{n+k} + \ldots + a_0 c_0}{b_m d_l x^{m+l} + \ldots + b_0 d_0}\ . \end{aligned}$$

Dabei sind die angegebenen führenden Koeffizienten $a_n c_k$ und $b_m d_l$ von rs wieder $\neq 0$. Aus $a_n b_m > 0,\ c_k d_l > 0$ folgt $(a_n c_k)(b_m d_l) = (a_n b_m)(c_k d_l) > 0$, also $r, s \in P \Rightarrow rs \in P$.

Für $r + s$ machen wir eine Fallunterscheidung:
1. Fall: $n + l > k + m$
Dann sind $a_n d_l$ und $b_m d_l$ die führenden Koeffizienten von $r + s$ und mit $a_n b_m > 0,\ c_k d_l > 0$ folgt $(a_n d_l)(b_m d_l) = a_n b_m d_l^2 > 0$, also $r, s \in P \Rightarrow r{+}s \in P$.

Im 2. Fall $n + l < k + m$ schließt man analog.

3. Fall: $n + l = k + m$:
Dann sind $(a_n d_l + c_k b_m)$ und $b_m d_l$ die führenden Koeffizienten von $r + s$ und mit $a_n b_m > 0,\ c_k d_l > 0$ folgt $(a_n d_l + c_k b_m)(b_m d_l) = a_n b_m d_l^2 + c_k d_l b_m^2 > 0$, also $r, s \in P \Rightarrow r + s \in P$.

Bleibt noch zu zeigen, dass der so angeordnete Körper $\mathbb{R}(x)$ nicht archimedisch ist, d.h. dass in ihm die natürlichen Zahlen nach oben beschränkt sind.
Die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}(x)$ sind die konstanten Funktionen $1, 2, 3, \ldots$. Für die Identität x gilt $x > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $x - n = \frac{1x-n}{1} > 0$. Fertig!

1.2.4 Rechnen mit Ungleichungen

Ein Tip: Multiplizieren von Ungleichungen mit unbekannten Größen erfordert häufig umständliche Fallunterscheidungen, Addieren nicht. Deshalb ist es häufig zweckmäßig, die Ungleichung durch Additionen in ein reines Vorzeichenproblem der Form $F(x, y, \ldots) > 0$ zu bringen. Dieses wiederum kann evtl. durch eine Faktorzerlegung von $F(x, y, \ldots)$ vereinfacht werden.

$\boxed{\text{A}}$ Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y, z gilt:

1) $xy > 0 \iff x, y > 0$ oder $x, y < 0$,
2) $4xy \leq (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$,
3) $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$.

$\boxed{\text{B}}$ Für welche reellen Zahlen x, y gilt

1) $x^3 - x < 0$?
2) $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$?

$\boxed{\text{C}}$ Seien $y_1, \ldots, y_n$ positive und $x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$\min\left\{ \frac{x_i}{y_i}\,;\, i = 1, \ldots, n \right\} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} \leq \max\left\{ \frac{x_i}{y_i}\,;\, i = 1, \ldots, n \right\} .$$

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ **(1)** $\underline{\Leftarrow}$: Sei ($x > 0$ und $y > 0$) oder ($x < 0$ und $y < 0$) .

Dann gilt $xy > 0$. Falls $x, y > 0$ sind, folgt dies aus dem Monotoniegesetz der Multiplikation A2. Sind $x, y < 0$, so sind $-x, -y > 0$ (folgt mit A1 durch Addition von $-x$ bzw $-y$ auf beiden Seiten). Nach Aufgabe 1.2.2.B.2 und wieder nach A2 folgt $xy = (-x)(-y) > 0$.

$\underline{\Rightarrow}$: Beweis indirekt:

Angenommen, es gilt nicht ($x > 0$ und $y > 0$) oder ($x < 0$ und $y < 0$) .
Dann liegt nach Axiom O2 (Trichotomie) einer der folgenden Fälle vor:

1) $x = 0$ oder $y = 0$
2) ($x > 0$ und $y < 0$) oder ($x < 0$ und $y > 0$)

Im 1. Fall gilt $xy = 0$ (siehe Aufgabe 1.2.2.A).
Im 2. Fall folgt $xy < 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation.
Beides gibt einen Widerspruch zur Voraussetzung $xy > 0$.

(2) Es ist nach Axiom A1 (Monotonie der Addition) :

$$\begin{aligned} (x+y)^2 \ \geq \ 4xy \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \ \geq \ 4xy \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 \ \geq \ 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-y)^2 \ \geq \ 0 \ . \end{aligned}$$

Nach Teil **(1)** gilt die letzte Aussage. Da alle Schlüsse umkehrbar sind, gilt auch die erste.

Die zweite Ungleichung folgt analog aus der Äquivalenz

$$\begin{aligned} (x+y)^2 \ \leq \ 2(x^2+y^2) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \ \leq \ 2x^2 + 2y^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \ \leq \ x^2 - 2xy + y^2 \ = \ (x-y)^2 \ . \end{aligned}$$

(3) Nach Teil **(2)** gilt

$$2xy \leq x^2 + y^2 \ , \quad 2yz \leq y^2 + z^2 \quad \text{und} \quad 2zx \leq z^2 + x^2 \ .$$

Wegen $a \leq b,\ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$ liefert die Addition dieser drei Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2zx \quad &\leq \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \quad \text{und damit} \\ xy + yz + zx \quad &\leq \quad x^2 + y^2 + z^2 \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$ **(1)** Es ist $x^3 - x = x(x-1)(x+1) < 0$ genau dann, wenn einer der drei Faktoren negativ und die anderen beiden positiv sind, oder wenn alle drei negativ sind. Also

$$x^3 - x \ = \ x(x-1)(x+1) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -1 \ \text{ oder } \ 0 < x < 1 \ .$$

(2) Es gilt

$$x^3+y^3 \;=\; (x+y)(x^2-xy+y^2) \;\geq\; xy(x+y) \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad (x+y)(x^2-2xy+y^2) \;=\; (x+y)(x-y)^2 \;\geq\; 0\ .$$

Da $(x-y)^2$ stets ≥ 0 ist, gilt die letzte Ungleichung genau dann, wenn $(x-y)=0$ oder $(x+y)\geq 0$, also genau dann, wenn $x=y$ oder $x\geq -y$ ist.

C Sei etwa $\frac{x_1}{y_1}=\min\left\{\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_n}{y_n}\right\}$, also $\frac{x_1}{y_1}\leq\frac{x_k}{y_k}$ bzw $x_1y_k\leq x_ky_1$ für alle $k=1,\ldots,n$. (Hier wurde das Monotoniegesetz A2 und $y_k>0$ benutzt.)

Addition der n Ungleichungen liefert $x_1(y_1+\ldots+y_n)\leq(x_1+\ldots+x_n)y_1$ bzw nach Division durch $y_1(y_1+\ldots+y_n)>0$:

$$\frac{x_1}{y_1} \;=\; \min\left\{\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_n}{y_n}\right\} \;\leq\; \frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}\ .$$

Analog wird für das Maximum geschlossen: Sei etwa $\frac{x_n}{y_n}=\max\left\{\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_n}{y_n}\right\}$, also $\frac{x_n}{y_n}\geq\frac{x_k}{y_k}$ bzw $x_ny_k\geq x_ky_n$ für alle $k=1,\ldots,n$.

Addition dieser n Ungleichungen liefert $x_n(y_1+\ldots+y_n)\geq(x_1+\ldots+x_n)y_n$ bzw nach Division durch $y_n(y_1+\ldots+y_n)>0$:

$$\frac{x_n}{y_n} \;=\; \max\left\{\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_n}{y_n}\right\} \;\geq\; \frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}\ .$$

1.2.5 Rechnen mit Absolutbeträgen

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x,y gilt:

A $\big||x|-|y|\big| \;\leq\; |x+y| \;\leq\; |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung) ,

B $|x+y|+|x-y| \;\geq\; |x|+|y|$,

C $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \;\leq\; \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$.

D Für welche $x\in\mathbb{R},\ x\neq 2$, gilt $\frac{1}{|x-2|}>\frac{1}{1+|x-1|}$?

Lösungen:

A Ein Tip: Die Rechenregel $a^2<b^2 \iff |a|<|b|$ hilft manchmal, Fallunterscheidungen zu vermeiden. Dieser Trick liefert hier (beide Seiten sind ≥ 0) :

$$|x+y|\leq|x|+|y| \iff |x+y|^2=(x+y)^2\leq(|x|+|y|)^2$$
$$\iff x^2+2xy+y^2\leq|x|^2+2|x||y|+|y|^2=x^2+2|xy|+y^2$$
$$\iff 2xy\leq 2|xy|$$

und das ist offensichtlich richtig.

Insbesondere gilt die Gleichheit genau dann, wenn $xy \geq 0$ ist.

Eine andere Beweismöglichkeit ist die folgende:

$$\begin{aligned} x \leq |x|,\ y \leq |y| \quad &\Longrightarrow \quad x + y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x|,\ -y \leq |y| \quad &\Longrightarrow \quad -(x+y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung mit dem allgemeinen Schluss

$$a \ \leq\ b\ , \quad -a\ \leq\ b \quad \Longrightarrow \quad |a|\ \leq\ b\ .$$

Bleibt die 'Dreiecksungleichung nach unten' zu beweisen: Aus der gerade bewiesenen 'Dreiecksungleichung nach oben' folgt

$$\begin{aligned} |x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |y| \quad &\Longrightarrow \quad |x| - |y| \leq |x+y| \quad \text{und} \\ |y| = |(x+y) - x| \leq |x+y| + |x| \quad &\Longrightarrow \quad |y| - |x| = -(|x| - |y|) \leq |x+y| \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt mit demselben allgemeinen Schluss wie eben.

B Beweis mit Hilfe der Dreiecksungleichung: Es gilt

$$\begin{aligned} 2|x| = |(x+y) + (x-y)| \quad &\leq \quad |x+y| + |x-y| \quad \text{und} \\ 2|y| = |(x+y) + (y-x)| \quad &\leq \quad |x+y| + |y-x| \ = \ |x+y| + |x-y| \end{aligned}$$

Addition der beiden Ungleichungen liefert

$$2|x| + 2|y| \ \leq\ 2(|x+y| + |x-y|)\ ,$$

und daraus folgt die Behauptung.

C Der Hauptnenner $(1+|x|)(1+|y|)(1+|x+y|)$ ist positiv. Man kann ohne Fallunterscheidung mit ihm multiplizieren und erhält:

$$\begin{aligned} &\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \ \leq\ \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \\ &\Longleftrightarrow \quad (1+|x|)(1+|y|)|x+y| \\ &\qquad\qquad \leq\ |x|(1+|y|)(1+|x+y|) + |y|(1+|x|)(1+|x+y|) \\ &\Longleftrightarrow \quad |x+y| + |x||x+y| + |y||x+y| + |x||y||x+y| \\ &\qquad\qquad \leq\ \big(|x| + |x||y| + |x||x+y| + |x||y||x+y|\big) \\ &\qquad\qquad\qquad + \ \big(|y| + |x||y| + |y||x+y| + |x||y||x+y|\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \ \leq\ |x+y| \ \leq\ |x| + |y| + 2|x||y| + |x||y||x+y|\ . \end{aligned}$$

Wegen $|x+y| \leq |x| + |y|$ und $0 \leq 2|x||y| + |x||y||x+y|$ ist die letzte Aussage richtig und aus ihr folgt rückwärts (bis dahin wurden nur Äquivalenzumformungen durchgeführt) die Behauptung.