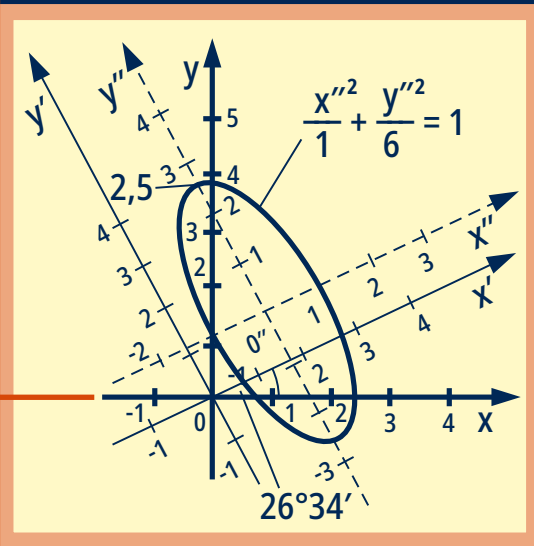


Hans-Jochen Bartsch
Michael Sachs

Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieur- und Naturwissenschaften



26., aktualisierte Auflage

HANSER

Disclaimer zur Barrierefreiheit

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Aufgrund der komplexen Strukturen der vorliegenden Inhalte, war es dem Verlag mit wirtschaftlich vertretbarem Aufwand nicht möglich, den Inhalt in barrierefreier Form zur Verfügung zu stellen.

Sollten Sie Bedarf an den Inhalten in barrierefreier Form haben, wenden Sie sich bitte an den Verlag.

1	Logik, Mengen, Zahlensysteme	21
2	Arithmetik	46
3	Algebra (Gleichungen)	91
4	Elementare Geometrie	124
5	Lineare Algebra	168
6	Vektoren, Analytische Geometrie	244
7	Funktionen	334
8	Differenzialrechnung	420
9	Integralrechnung	466
10	Vektoranalysis	510
11	Differenzialgleichungen	534
12	Reihen, F- und L-Transformation	593
13	Statistik, Stochastik	641
14	Integraltabellen	717
A	Anhang	770
S	Sachwortverzeichnis	781

Bartsch
**Taschenbuch mathematischer Formeln für
Ingenieur- und Naturwissenschaften**



bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Hans-Jochen Bartsch

Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieur- und Naturwissenschaften

bearbeitet von Michael Sachs

26., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor:

Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

Bearbeiter:

Prof. Dr. Michael Sachs, Hochschule München
Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik
sci.hm.edu



Print-ISBN: 978-3-446-48504-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-48507-5

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2025 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Prof. Dr. Michael Sachs

Satz: Dr. Steffen Naake, Limbach-Oberfrohna

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Vorwort zur 26. Auflage

In der aktualisierten Auflage habe ich wie immer Hinweise und Vorschläge berücksichtigt und Druckfehler ausgebessert sowie kleine Ergänzungen vorgenommen. Allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Ihre Kommentare zeigen, dass das *Taschenbuch mathematischer Formeln* auch nach über 60 Jahren seit seinem ersten Erscheinen noch lebendig ist und an Hochschulen und in der beruflichen Praxis seinen festen Platz hat.

Mein besonderer Dank geht an Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag für die Betreuung und Herrn Dr. Steffen Naake für die Gestaltung des Satzes mit \LaTeX .

München, im Juli 2025

Michael Sachs
Bearbeiter

Aus dem Vorwort zur 23. Auflage

Das *Taschenbuch mathematischer Formeln* soll vornehmlich Studierenden von Ingenieurstudiengängen an Hochschulen für Angewandte Wissenschaften (ehemals Fachhochschulen) und an Universitäten ein nützliches Hilfsmittel zur Bewältigung des Mathematikstoffes eines technischen oder naturwissenschaftlichen Studiums sein. Darüber hinaus will es auch Praktikern im Beruf helfen, ihre benötigten Kenntnisse aufzufrischen.

Seit über 50 Jahren ist dieses Buch auf dem Markt und Generationen von Studierenden und Anwendern der Mathematik ein Begriff geworden. Im Januar 2008 ist der Verfasser, Dr.-Ing. Hans-Jochen BARTSCH, nachdem er noch die 21. Auflage besorgt hatte, am Beginn der Vorbereitungen zur 22. Auflage verstorben. Gerne habe ich die mir vom Fachbuchverlag Leipzig angebotene Aufgabe, das Werk zu bearbeiten und weiterzuführen, wahrgenommen, und betreue nun seinen Fortgang seit der 22. Auflage.

Das *Sachwortverzeichnis* wurde bewusst redundant und sehr umfangreich gestaltet, um dem Leser die Möglichkeit eines raschen Quereinstiegs zu

einem gewählten Thema oder Begriff zu gewähren. Wohl kaum jemand wird so ein Buch linear von vorne nach hinten durchlesen. Das Sachwortverzeichnis soll daher auch zum „Stöbern“ und Diagonallese einladen und Interesse an der Materie erwecken.

Zahlreiche *Beispiele*, eingeleitet und beendet mit \blacklozenge , zeigen die abstrakten mathematischen Formeln in ihrer Anwendung, wobei Wert gelegt wurde auf Einfachheit der Rechnung, um das Verständnis der Grundsätze nicht zu erschweren.

Kapitel 14 enthält *Integraltabellen* mit fast 600 unbestimmten und bestimmten Integralen. Eine zusätzliche Übersicht am Kapitelanfang ermöglicht einen raschen Zugriff auf das gesuchte Integral. Ein *Daumenregister* erleichtert das Auffinden der einzelnen Kapitel.

Dem Wesen einer Formelsammlung gemäß kann und will das Buch kein Lehrbuch ersetzen, schon gar nicht in der Mathematik, wo die Herleitung neuen Wissens aus bereits vorhandenem nach den strengen Regeln des logischen Schließens oberstes Gebot ist. In diesem Buch sind Herleitungen nur in Ausnahmefällen angedeutet, es soll in erster Linie ein Nachschlagewerk für Studierende technischer Fachrichtungen sein. Gleichwohl ist die Stofffülle so in Kapitel gegliedert und sind diese Kapitel so aufgebaut, dass sie auch einzeln zur Wiederholung eines schon einmal gelernten Stoffes gelesen werden können.

Möge der BARTSCH auch nach dem Tode seines Verfassers weiterhin ein treuer und zuverlässiger Begleiter in Studium und Beruf bleiben.

München, im November 2013

Michael Sachs
Bearbeiter

Inhaltsverzeichnis

1	Logik, Mengen, Zahlensysteme	21
1.1	Aussagenlogik	21
1.1.1	Allgemeines	21
1.1.2	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen	23
1.1.3	BOOLEsche Algebra	25
1.1.4	Normalformen	27
1.2	Prädikatenlogik	29
1.3	Mengen	30
1.3.1	Allgemeines	30
1.3.2	Mengenoperationen	33
1.3.3	Beziehungen, Gesetze, Rechenregeln	35
1.3.4	Relationen	36
1.3.5	Intervalle	38
1.3.6	Unscharfe Mengen	38
1.4	Zahlensysteme	40
1.4.1	Polyadische Zahlensysteme	40
1.4.2	Römisches Zahlensystem	45
2	Arithmetik	46
2.1	Menge der reellen Zahlen	46
2.1.1	Standard-Zahlenmengen	46
2.1.2	Grundoperationen an reellen Zahlen	48
2.1.2.1	Die vier Grundrechenarten	48
2.1.2.2	Proportionen, Verhältnisgleichungen	52
2.1.2.3	Prozentrechnung	53
2.1.2.4	Näherung	54
2.1.2.5	Fehlerrechnung	55
2.1.2.6	Betrag und Signum	56
2.1.2.7	Summen- und Produktzeichen	57
2.1.3	Potenzen und Wurzeln	59
2.1.4	Logarithmen	61
2.1.5	Fakultät und Binomialkoeffizient	63
2.2	Menge der komplexen Zahlen	66
2.2.1	Grundbegriffe	66
2.2.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen	69
2.2.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	70
2.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	71
2.2.5	Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen	73
2.3	Kombinatorik	74
2.3.1	Permutationen	74

2.3.2	Variationen	76
2.3.3	Kombinationen	77
2.4	Folgen	79
2.4.1	Allgemeines	79
2.4.2	Schranken, Grenzen, Grenzwert einer Folge	80
2.4.3	Arithmetische und geometrische Folgen	83
2.4.4	Finanzmathematik	86
2.4.4.1	Zinsrechnung	86
2.4.4.2	Zinseszinsrechnung	87
2.4.4.3	Rentenrechnung	88
2.4.4.4	Schuldentilgung, Annuität	89
3	Gleichungen und Ungleichungen	91
3.1	Allgemeines	91
3.2	Lineare algebraische Gleichungen und Ungleichungen	96
3.2.1	Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen	96
3.2.2	Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit mehreren Variablen	98
3.3	Nichtlineare Gleichungen	101
3.3.1	Nichtlineare algebraische Gleichungen	101
3.3.1.1	Quadratische Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen	101
3.3.1.2	Quadratisches Gleichungssystem mit zwei Variablen	103
3.3.1.3	Kubische Gleichungen	104
3.3.1.4	Gleichungen 4. Grades	106
3.3.1.5	Symmetrische Gleichungen	106
3.3.1.6	Algebraische Gleichungen n -ten Grades	107
3.3.1.7	HORNER-Schema	108
3.3.1.8	Wurzelgleichungen mit einer Variablen	111
3.3.2	Transzendente Gleichungen	111
3.3.2.1	Exponentialgleichungen	111
3.3.2.2	Logarithmische Gleichungen	112
3.3.2.3	Goniometrische Gleichungen	113
3.3.2.4	Betragsgleichungen und -ungleichungen	114
3.4	Numerische Verfahren	114
3.4.1	Bisektionsverfahren	115
3.4.2	Fixpunktiteration	116
3.4.3	NEWTONSches (Tangenten-)Näherungsverfahren	118
3.4.4	Sekantenmethode (Regula falsi)	119
3.5	Nichtlineare Gleichungssysteme	120
3.6	Grafische Lösung von Gleichungen	123

4	Elementare Geometrie	124
4.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie	124
4.1.1	Winkel	124
4.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz, Symmetrie	126
4.1.3	Dreieck	129
4.1.3.1	Schiefwinkliges Dreieck	130
4.1.3.2	Gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck	135
4.1.3.3	Rechtwinkliges Dreieck	136
4.1.4	Vierecke	138
4.1.4.1	Trapez	138
4.1.4.2	Parallelogramme	139
4.1.4.3	Unregelmäßige Vierecke mit Umkreis bzw. Inkreis	140
4.1.5	Vielecke (Polygone)	141
4.1.5.1	Ebene sternförmige n -Ecke	141
4.1.5.2	Regelmäßige (reguläre) Vielecke	141
4.1.5.3	Einige bestimmte regelmäßige Vielecke	142
4.1.5.4	Konstruktion der einfachen regelmäßigen Vielecke	143
4.1.6	Der Kreis	144
4.1.6.1	Sätze zum Kreis	144
4.1.6.2	Kreisberechnungen	145
4.2	Geometrische Körper (Stereometrie)	147
4.2.1	Allgemeines	147
4.2.2	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielfläche)	149
4.2.2.1	Prismatische Körper	149
4.2.2.2	Pyramide, Pyramidenstumpf	150
4.2.2.3	Prismoid	151
4.2.2.4	Die fünf regelmäßigen Polyeder	152
4.2.3	Krummflächig begrenzte Körper	154
4.2.3.1	Zylinder, Zylinderabschnitt	154
4.2.3.2	Kegel, Kegelstumpf	155
4.2.3.3	Kugel	156
4.2.3.4	Tonne, Torus	158
4.2.3.5	Fraktale Geometrie	158
4.3	Sphärische Trigonometrie	160
4.3.1	Allgemeines	160
4.3.2	Rechtwinkliges sphärisches Dreieck	161
4.3.3	Schiefwinkliges sphärisches Dreieck	162
4.3.4	Berechnung sphärischer Dreiecke	164
4.3.5	Mathematische Geografie	165
5	Lineare Algebra	168
5.1	Vektorraum	168

5.2	Matrizen	172
5.2.1	Matrizenarten, Definitionen	172
5.2.1.1	Allgemeines	172
5.2.1.2	Quadratische Matrizen	174
5.2.1.3	Inverse Matrix, (Um)kehrmatrix A^{-1}	180
5.2.1.4	Rang einer Matrix	181
5.2.1.5	Matrizennormen	182
5.2.1.6	Grenzwert, Differenzialquotient, Integral	183
5.2.2	Matrizengesetze	183
5.2.2.1	Gleichheit und Summe zweier Matrizen	183
5.2.2.2	Multiplikation von Matrizen	183
5.2.3	Matrizengleichungen	186
5.2.4	Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen	187
5.2.5	Numerische Verfahren	190
5.2.5.1	HOUSEHOLDER-Orthogonalisierung (-Transformation)	190
5.2.5.2	QR-Verfahren	192
5.2.5.3	Vektoriteration (Potenzmethode, v.-MISES- Verfahren)	192
5.3	Determinanten	193
5.3.1	Determinante einer quadratischen Matrix	193
5.3.2	Berechnung von Determinanten	194
5.3.3	Rechenregeln für Determinanten	196
5.3.4	Praktische Berechnung einer Determinante	197
5.4	Lineare Gleichungssysteme	198
5.4.1	Allgemeines	198
5.4.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	199
5.4.3	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	201
5.4.3.1	Einfacher und verketteter GAUSSscher Algorithmus	202
5.4.3.2	GAUSSscher Algorithmus für Systeme mit gleicher Matrix A und m rechten Seiten	206
5.4.3.3	GAUSS-JORDAN-Verfahren zur Matrixinversion	207
5.4.3.4	GAUSSscher Algorithmus für symmetrische, positiv definite Koeffizientenmatrix, CHOLE- SKY-Verfahren	208
5.4.3.5	Gleichungssysteme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix	209
5.4.3.6	GAUSS-SEIDELsches Iterationsverfahren	209
5.4.3.7	Austauschverfahren	213
5.4.4	CRAMERsche Regel	213
5.4.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	214
5.5	Lineare Optimierung	216
5.5.1	Allgemeines	216

5.5.2	Grafische Lösung für zwei Variable	218
5.5.3	Simplexalgorithmus	219
5.6	Abbildungen	223
5.6.1	Lineare Abbildungen	223
5.6.2	Affine Abbildungen	226
5.6.2.1	Allgemeines	226
5.6.2.2	Allgemeine, nicht winkeltreue affine Abbildungen	231
5.6.2.3	Ähnlichkeitsabbildungen	234
5.6.2.4	Kongruenzabbildungen	235
5.7	Koordinatentransformation	238
5.7.1	Allgemeines	238
5.7.2	Orthogonale Koordinatentransformation in der Ebene . .	239
5.7.3	Orthogonale Koordinatentransformation im Raum	240
6	Vektoren, Analytische Geometrie	244
6.1	Vektoren, Grundlagen	244
6.2	Vektoralgebra	249
6.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	249
6.2.2	Multiplikation von Vektoren	251
6.2.2.1	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	251
6.2.2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt)	251
6.2.2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzpro- dukt)	253
6.2.2.4	Mehrfache Produkte von Vektoren	255
6.3	Koordinatensysteme	256
6.3.1	Allgemeines	256
6.3.2	Ebene (2D-)Koordinatensysteme	257
6.3.3	Räumliche (3D-)Koordinatensysteme	258
6.4	Punkte, Kurven 1. Ordnung	261
6.4.1	Punkte	261
6.4.2	Gerade, Strahl, Strecke	262
6.4.2.1	Punktmengen, Teilung einer Strecke	262
6.4.2.2	Gleichungen einer Geraden in der (x, y)-Ebene	264
6.4.2.3	Gleichungen einer Geraden im Raum	266
6.4.2.4	Abstand eines Punktes von einer Geraden	269
6.4.3	Mehrere Geraden	270
6.4.3.1	Schnittpunkt zweier Geraden	270
6.4.3.2	Schnittwinkel zweier Geraden	272
6.4.3.3	Abstand zweier Geraden	274
6.4.3.4	Drei und mehr Geraden	275
6.5	Ebenen	275
6.5.1	Eine Ebene	276
6.5.1.1	Gleichungen einer Ebene im Raum	276

	6.5.1.2	Richtungskosinus der Normalen einer Ebene	280
	6.5.1.3	Abstand eines Punktes P_1 von einer Ebene	280
	6.5.1.4	Durchstoßpunkt D einer Geraden durch eine Ebene	281
	6.5.1.5	Winkel φ zwischen Gerade und Ebene	282
	6.5.2	Zwei Ebenen	283
	6.5.3	Drei und mehr Ebenen	284
	6.5.4	Flächeninhalt, Schwerpunkt, Volumen	285
6.6		Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	286
	6.6.1	Allgemeines	286
	6.6.2	Kreis	288
	6.6.2.1	Gleichungen des Kreises	288
	6.6.2.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis	290
	6.6.2.3	Tangente und Normale eines Kreises	291
	6.6.2.4	Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis	291
	6.6.2.5	Potenz p eines Punktes in Bezug auf einen Kreis	292
	6.6.2.6	Kreisbüschel	293
	6.6.3	Ellipse	293
	6.6.3.1	Gleichungen der Ellipse	293
	6.6.3.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse	295
	6.6.3.3	Tangente, Normale und Durchmesser einer Ellipse	296
	6.6.3.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Ellipse	297
	6.6.3.5	Krümmung einer Ellipse	297
	6.6.3.6	Haupt- und Nebenkreis einer Ellipse	298
	6.6.3.7	Flächeninhalt und Umfang von Ellipse, Ellipsensegment und Ellipsensektor	298
	6.6.3.8	Ellipsenkonstruktionen	299
	6.6.4	Parabel	301
	6.6.4.1	Gleichungen der Parabel	301
	6.6.4.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel	303
	6.6.4.3	Tangente und Normale einer Parabel	304
	6.6.4.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Parabel	304
	6.6.4.5	Krümmung einer Parabel	305
	6.6.4.6	Parabelsegment, Parabelbogen, Brennstrahl	305
	6.6.4.7	Parabelkonstruktionen	306
	6.6.5	Hyperbel	307
	6.6.5.1	Gleichungen der Hyperbel	308
	6.6.5.2	Schnittpunkt einer Geraden mit einer Hyperbel	310
	6.6.5.3	Tangente und Normale einer Hyperbel	311
	6.6.5.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Hyperbel	312

6.6.5.5	Krümmung einer Hyperbel	313
6.6.5.6	Hyperbelsegment und Hyperbelsektor	314
6.6.5.7	Hyperbelkonstruktionen	314
6.7	Flächen 2. Ordnung	316
6.7.1	Allgemeines	316
6.7.2	Kugel	317
6.7.3	Ellipsoid	318
6.7.4	Hyperboloid	319
6.7.5	Kegel	321
6.7.6	Zylinder	322
6.7.7	Paraboloid	323
6.8	Hauptachsentransformation	325
7	Funktionen und Kurven	334
7.1	Allgemeines	334
7.1.1	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	334
7.1.2	Funktionen mit mehreren Variablen	338
7.2	Rationale Operationen mit Funktionen	340
7.3	Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke	341
7.3.1	Grenzwert einer Funktion	341
7.3.2	Unbestimmte Ausdrücke	344
7.4	Eigenschaften reeller Funktionen	346
7.4.1	Ausgewählte Eigenschaften	346
7.4.2	Nullstellen einer Funktion	349
7.4.3	Stetigkeit einer Funktion	350
7.5	Ausgewählte Funktionen	353
7.6	Rationale Funktionen	355
7.6.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	355
7.6.2	Interpolation	358
7.6.2.1	Allgemeines	358
7.6.2.2	Interpolationsformel von LAGRANGE	359
7.6.2.3	Interpolationsformel von NEWTON	360
7.6.2.4	Interpolation durch kubische Splines	362
7.6.3	Gebrochenrationale Funktionen	365
7.7	Nichtrationale Funktionen	367
7.7.1	Allgemeine Potenzfunktionen	367
7.7.2	Exponentialfunktionen	368
7.7.3	Logarithmusfunktionen	371
7.7.4	Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen	372
7.7.4.1	Allgemeines	372
7.7.4.2	Goniometrische Beziehungen	376
7.7.4.3	Allgemeine Sinusfunktion (harmonische Schwingung)	380
7.7.4.4	Modulation	381

7.7.4.5	Überlagerung (Superposition) von Schwingungen	383
7.7.4.6	Komplexe Zeigerdarstellung von Sinusgrößen	387
7.7.5	Zyklometrische Funktionen, Arkusfunktionen	389
7.7.6	Hyperbelfunktionen	393
7.7.7	Areafunktionen	398
7.8	Algebraische Kurven höherer Ordnung	400
7.8.1	Kurven 3. Ordnung	401
7.8.2	Kurven 4. Ordnung	402
7.9	Zykloiden (Rollkurven)	404
7.9.1	Gewöhnliche (gespitzte) Zykloide	404
7.9.2	Epizykloiden	405
7.9.3	Hypozykloiden	407
7.10	Spirallinien	409
7.10.1	Logarithmische Spirale	409
7.10.2	ARCHIMEDische Spirale	410
7.10.3	Hyperbolische Spirale	410
7.11	Weitere ebene Kurven	411
7.11.1	Kettenlinie	411
7.11.2	Traktrix	412
7.12	Komplexe Funktionen	412
7.12.1	Allgemeines	412
7.12.2	Konforme Abbildungen	415
7.12.2.1	Lineare und quadratische konforme Abbildungen	415
7.12.2.2	MÖBIUS-Abbildung und Inversion	416
8	Differenzialrechnung	420
8.1	Funktionen einer Variablen	420
8.1.1	Allgemeines	420
8.1.2	Erste Ableitungen der elementaren Funktionen	422
8.1.3	Differenziationsregeln, Ableitungsregeln	423
8.1.3.1	Grundregeln	423
8.1.3.2	Höhere Ableitungen und Differenziale	425
8.1.3.3	Differenziation impliziter Funktionen $F(x, y) = 0$	426
8.1.3.4	Differenziation von Funktionen in Parameterform	427
8.1.3.5	Differenziation von Funktionen in Polarkoordinaten	427
8.1.4	Grafische Differenziation	428
8.1.5	Numerische Differenziation	428
8.1.6	Logarithmische Differenziation	429
8.1.7	Mittelwertsätze	430

8.2	Funktionen mehrerer Variablen	431
8.2.1	Partielle Ableitung 1. Ordnung	431
8.2.2	Höhere partielle Ableitungen	432
8.2.3	Totale Ableitungen für zwei Variable	433
8.3	Anwendungen	435
8.3.1	Monotonie und Krümmungsverhalten	435
8.3.2	Extrema von Funktionen einer Variablen	439
8.3.3	Wendepunkte und singuläre Punkte	443
8.3.4	Asymptoten	445
8.3.5	Hüllkurven	446
8.3.6	Kurvendiskussion	447
8.3.7	Extrema von Funktionen mehrerer Variablen	447
8.4	Differenzialgeometrie	450
8.4.1	Ebene Kurven	450
8.4.1.1	Bogenelement einer ebenen Kurve	450
8.4.1.2	Tangente und Normale einer ebenen Kurve	450
8.4.1.3	Zwei ebene Kurven	452
8.4.2	Raumkurven	453
8.4.2.1	Darstellungen im kartesischen Koordinaten- system	453
8.4.2.2	Bogenelement einer Raumkurve	453
8.4.2.3	Tangente und Normale einer Raumkurve	453
8.4.2.4	Krümmung einer Raumkurve	457
8.4.2.5	Windung (Torsion) einer Raumkurve	458
8.4.3	Flächen im Raum	459
9	Integralrechnung	466
9.1	Allgemeines	466
9.1.1	Unbestimmtes Integral	466
9.1.2	Bestimmtes Integral (RIEMANNsches Integral)	467
9.1.3	Uneigentliche Integrale	470
9.2	Grundintegrale, Stammintegrale	472
9.3	Integrationsregeln und -verfahren	473
9.3.1	Grundregeln der Integralrechnung	473
9.3.2	Integration durch Substitution	473
9.3.3	Partielle Integration (Produktintegration)	477
9.3.4	Integration nach Partialbruchzerlegung	477
9.3.5	Integration nach Reihenentwicklung	480
9.3.6	Grafische Integration	482
9.4	Numerische Integration	483
9.4.1	Allgemeines	483
9.4.2	NEWTON-COTES-Formeln	484
9.4.2.1	Rechteckformel	486
9.4.2.2	Sehnentrapezformel	487

9.4.2.3	SIMPSONSche Formel, KEPLERSche Fassformel	487
9.4.2.4	NEWTONSche 3/8-Formel	488
9.4.2.5	Tangententrapezformel	489
9.4.3	GAUSSSches Quadraturverfahren	490
9.4.4	ROMBERG-Quadraturverfahren	491
9.5	Bereichsintegrale, Gebietsintegrale	493
9.5.1	Zweidimensionales Bereichsintegral, Doppelintegral . . .	493
9.5.2	Raumintegral, Volumenintegral, Dreifachintegral	496
9.6	Anwendungen der Integralrechnung	498
9.6.1	Geometrische Anwendungen	498
9.6.1.1	Flächeninhalte (Quadratur)	498
9.6.1.2	Bogenlänge (Rektifikation)	500
9.6.1.3	Mantelflächen von Rotationskörpern (Komplanation)	500
9.6.1.4	Volumen von Rotationskörpern (Kubatur)	501
9.6.1.5	Volumen eines Körpers	501
9.6.2	Technisch-physikalische Anwendungen	502
9.6.2.1	Bewegungen, Kinematik	502
9.6.2.2	Arbeit	503
9.6.2.3	Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen	503
9.6.2.4	Momente 1. Grades	503
9.6.2.5	Schwerpunkte	505
9.6.2.6	Momente 2. Grades (Festigkeitslehre)	507
9.6.2.7	Massenmomente 2. Grades (Dynamik)	509
10	Vektoranalysis	510
10.1	Vektorfunktionen	510
10.2	Felder	511
10.3	Gradient eines skalaren Feldes	514
10.4	Divergenz eines Vektorfeldes	516
10.5	Rotation eines Vektorfeldes	518
10.6	Kurvenintegrale (Linienintegrale)	520
10.6.1	Kurvenintegral erster Art	520
10.6.2	Kurvenintegral (zweiter Art)	521
10.7	Flächenintegrale (Oberflächenintegrale)	526
10.7.1	Flächenintegral erster Art	526
10.7.2	Flächenintegral zweiter Art	527
10.8	Integralsätze	529
10.8.1	GAUSSScher Integralsatz	529
10.8.2	STOKESScher Integralsatz	531

11	Differenzialgleichungen	534
11.1	Allgemeines	534
11.1.1	Differenzialgleichungen, Arten	534
11.1.2	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	535
11.2	Differenzialgleichungen 1. Ordnung	540
11.2.1	Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen	540
11.2.2	Gleichgradige Differenzialgleichungen 1. Ordnung	542
11.2.3	Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	543
11.2.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	543
11.2.3.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	544
11.2.4	Totale Differenzialgleichungen	546
11.2.5	Integrierender Faktor	547
11.2.6	BERNOULLISCHE Differenzialgleichung	548
11.2.7	RICCATISCHE Differenzialgleichung	548
11.2.8	CLAIRAUTSCHE Differenzialgleichung	549
11.3	Differenzialgleichungen 2. Ordnung	550
11.3.1	Sonderfälle, Erniedrigung der Ordnung	550
11.3.2	Homogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	552
11.3.3	Homogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten	553
11.3.4	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	554
11.3.5	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten	558
11.3.6	BESSELSche Differenzialgleichung	560
11.3.7	Anwendungsfall Schwingungen	562
11.4	Differenzialgleichungen n -ter Ordnung	565
11.5	Lineare Differenzialgleichungssysteme	569
11.6	Näherungslösungen für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	571
11.6.1	Verfahren unbestimmter Koeffizienten	571
11.6.2	Iterationsverfahren	573
11.7	Anfangswertprobleme	574
11.7.1	Allgemeines	574
11.7.2	Explizite Einschrittverfahren	577
11.7.2.1	Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY	577
11.7.2.2	HEUN-Verfahren	579
11.7.2.3	Klassisches Verfahren von RUNGE-KUTTA	579
11.7.2.4	Einbettungsformeln	580

13.1.5.2	Ausgleichende Gerade	656
13.1.5.3	Ausgleichende Parabel	657
13.1.5.4	Multiple Regression	658
13.1.6	Fehlerfortpflanzung	659
13.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	663
13.2.1	Zufallsexperiment und Ereignis	663
13.2.2	Definition der Wahrscheinlichkeit	665
13.2.3	Sätze über Wahrscheinlichkeiten	666
13.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse	668
13.2.5	Zufällige Variable	671
13.2.6	Kenngößen von zufälligen Variablen	674
13.2.6.1	Erwartungswert	674
13.2.6.2	Varianz und Standardabweichung	676
13.2.6.3	Schiefe und Exzess	678
13.2.7	Ausgewählte diskrete Verteilungen	679
13.2.7.1	Diskrete Gleichverteilung	679
13.2.7.2	BERNOULLI-Verteilung	680
13.2.7.3	Binomialverteilung	680
13.2.7.4	POISSON-Verteilung	683
13.2.7.5	Hypergeometrische Verteilung	685
13.2.7.6	Geometrische Verteilung	686
13.2.8	Ausgewählte stetige Verteilungen	687
13.2.8.1	Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)	687
13.2.8.2	Normalverteilung	687
13.2.8.3	Exponentialverteilung	693
13.2.8.4	χ^2 -Verteilung	694
13.2.8.5	t -Verteilung (STUDENT-Verteilung)	695
13.3	Schließende (induktive) Statistik	696
13.3.1	Grundbegriffe	696
13.3.2	Punktschätzungen	697
13.3.3	Intervallschätzungen	699
13.3.3.1	Konfidenzintervall für den Anteil p	700
13.3.3.2	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ	701
13.3.3.3	Konfidenzintervall für die Varianz σ^2	704
13.3.4	Hypothesentests	705
13.3.4.1	Allgemeines über Tests	705
13.3.4.2	Test über den Anteil p	707
13.3.4.3	Tests über den Erwartungswert μ	710
13.3.4.4	Test über die Varianz σ^2	713
13.3.4.5	χ^2 -Anpassungstest	714
14	Integraltabellen	717
14.1	Integrale rationaler Funktionen	718
14.1.1	Integrale mit $ax + b$	718

14.1.2	Integrale mit $ax + b, cx + d$	721
14.1.3	Integrale mit $ax^2 + bx + c$	722
14.1.4	Integrale mit $a^2 \pm x^2$	724
14.1.5	Integrale mit $a^3 \pm x^3$	727
14.1.6	Integrale mit $a^4 + x^4, a^4 - x^4$	728
14.2	Integrale nichtrationaler Funktionen	728
14.2.1	Integrale mit $\sqrt{x^n}$ und $(a^2 \pm b^2x)^m$	728
14.2.2	Integrale mit $\sqrt{(ax + b)^n}$	729
14.2.3	Integrale mit $\sqrt{(ax + b)^n}, \sqrt{(cx + d)^m}$	731
14.2.4	Integrale mit $\sqrt{(a^2 + x^2)^n}$	733
14.2.5	Integrale mit $\sqrt{(a^2 - x^2)^n}$	736
14.2.6	Integrale mit $\sqrt{(x^2 - a^2)^n}$	738
14.2.7	Integrale mit $\sqrt{(ax^2 + bx + c)^n}$	741
14.3	Integrale transzendenter Funktionen	744
14.3.1	Integrale mit e^{ax} (Exponentialfunktionen)	744
14.3.2	Integrale der Hyberbelfunktionen	745
14.3.3	Integrale mit $\ln x$ (logarithmische Funktion)	747
14.3.4	Integrale mit $\sin ax$	748
14.3.5	Integrale mit $\cos ax$	751
14.3.6	Integrale mit $\sin ax$ und $\cos ax$ bzw. $\cos bx$	754
14.3.7	Integrale mit $\tan ax$ bzw. $\cot ax$	758
14.3.8	Integrale der Arkusfunktionen	760
14.3.9	Integrale der Areafunktionen	761
14.4	Bestimmte und uneigentliche Integrale	762
Anhang	770
Sachwortverzeichnis	781

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Allgemeines

Aussage, Aussageform

Die *Aussagenlogik* betrachtet die Verknüpfungen elementarer Aussagen, wobei die Aussagen nicht inhaltlich analysiert werden.

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

In der Aussagenlogik gelten zwei Grundprinzipien:

- Jede Aussage hat genau einen *Wahrheitswert* „wahr“ (kurz: w oder 1), „falsch“ (kurz: f oder 0).
(Satz der *Zweiwertigkeit*, der den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* und den *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch* beinhaltet, s. 1.1.3)
- Der Wahrheitswert einer Aussagenverknüpfung hängt nur von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile ab, nicht aber von deren Inhalt (*Extensionalitätsprinzip*).

Primaussage (Literal): Formel ohne logische Verknüpfung (nur p oder \bar{p}).

Zusammengesetzte Aussage (aussagenlogische *Formel*, *Ausdruck*, *Aussageform*): enthält Primaussagen und Aussagenverknüpfungen und ist eine endliche Zeichenfolge (*Wort*), bestehend aus aussagenlogischen *Variablen*, *Junktoren* und technischen Zeichen.

Binäre (zweiwertige, BOOLEsche) *Variablen* $p, q, r, x_i, \varphi, \dots$ sind Platzhalter für konkrete Aussagen und sind selbst Formeln.

$A \models \varphi$ heißt: „ A erfüllt φ “, „ A ist Modell für φ “.

Durch Belegung der Variablen wird eine Aussageform zur Aussage.

◆ Beispiele

Die *einfache, einstellige* Aussage „19 ist eine Primzahl“ ist wahr.

Die *dreistellige* Aussage „ $8 - 3 = 4$ “ ist falsch.

„ $4x - 3 = 5$ “ ist nur für $x = 2$ eine wahre Aussage.

„Es regnet.“ ist eine Aussage φ , die vom betrachteten Ort und der Zeit (Interpretation A) abhängt: $A \models \varphi$.

„Es gibt außerhalb der Erde intelligente Lebewesen.“ ist eine Aussage, deren Wahrheitswert nicht bekannt ist.

„Wenn eine natürliche Zahl die Endziffer 0 oder 5 hat, ist sie durch 5 teilbar.“ ist eine wahre, zusammengesetzte Aussage.

„Fischers Fritz“, „Der hohe Berg“ und „Wann kommst du?“ sind keine Aussagen; sie haben keinen Wahrheitswert. \blacklozenge

Wahrheits(wert)funktion

Eine *Wahrheits(wert)funktion* F_n^k (BOOLEsche Funktion) ordnet jedem k -Tupel von Wahrheitswerten der Argumente einen Wahrheitswert zu. n ist dabei die dezimale Äquivalente der Bitfolge der Werte von F_n^k .

◆ Beispiel

NAND := $\bar{p} \vee \bar{q} = F_7^2$, denn $(0111)_2 = (7)_{10}$, siehe 1.1.2 und 1.1.4. \blacklozenge

Bei k Variablen sind 2^k Belegungen möglich, für jede kann der Funktionswert wahr oder falsch sein. Es gibt also genau 2^{2^k} BOOLEsche Funktionen von k Argumenten.

Junktoren

Junktoren sind logische Zeichen, die Variablen oder Ausdrücke zu neuen Ausdrücken verbinden. Sie sind durch eine *Wahrheitstafel* (*Wahrheitstabelle*) charakterisiert.

Nullstellige Junktoren:	\top	Verum, 1-Element
(Aussagenkonstanten)	\perp	Falsum, 0-Element
Einstelliger Junktor:	\neg	Negation
		(auch \sim oder Überstrich)
Zweistellige Junktoren:	\wedge	Und
	\vee	Oder
	\Rightarrow	Implikation
	\Leftrightarrow	Äquivalenz

Bindungen bei zusammengesetzten Ausdrücken gestatten das Weglassen von Klammern:

- (1) \neg bindet stärker als zweistellige Junktoren.
- (2) \wedge bindet stärker als \vee („Punkt vor Strich“).
- (3) \Rightarrow , \Leftarrow und \Leftrightarrow binden untereinander gleich stark, aber \wedge und \vee binden stärker als \Rightarrow , \Leftarrow und \Leftrightarrow .

1.1.2 Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen

Negation, Komplement (einstellig)

Die Wahrheitswerte von p und $\neg p$ ($\sim p$, \bar{p}) sind immer verschieden.

Wahrheitstafel der zweistelligen Grundfunktionen

Name		<i>Konjunktion</i> UND <i>logisches Produkt</i>	<i>Disjunktion</i> ODER <i>Alternative</i>	<i>Implikation</i> <i>Subjunktion</i>	<i>Äquivalenz</i> <i>Äquijunktion</i>
lies		„ p und q “	„ p oder q “	„wenn p dann q “	„ p genau dann, wenn q “
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Wahrheitstafel der erweiterten Funktionen der Informatik

Name		NAND negiertes UND SHEFFER-Fkt.	NOR „weder p noch q “ NICOD-Fkt.	<i>Replikation</i> „falls“	<i>Antivalenz</i> „entweder p oder q “
p	q	$\neg(p \wedge q) = p \uparrow q$	$\neg(p \vee q) = p \downarrow q$	$p \Leftarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

Bemerkungen zu beiden Tabellen

Konjunktion, logisches Produkt (UND, AND): auch $p q$, $p \cdot q$, $p \& q$.

Disjunktion, Alternative (einschließendes ODER, OR): auch $p + q$.

Die Disjunktion schließt $p = q = 1$ nicht aus.

Implikation, Subjunktion (logische Folgerung): $(p \Rightarrow q) = \bar{p} \vee q$.

Kontraposition: $(p \Rightarrow q) = (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$.

Sprechweisen für $p \Rightarrow q$: „ p impliziert q “, „ p ist hinreichend für q “, „ q ist notwendig für p “.

Äquivalenz, Adjunktion: $(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

Antivalenz (ausschließendes Entweder-Oder, XOR):

$\neg(p \Leftrightarrow q) = p\bar{q} \vee \bar{p}q = \neg(q \Leftrightarrow p)$.

Tautologie, Erfüllbarkeit

Tautologien (Identitäten, universell gültige Formeln) sind unabhängig von der Belegung der Variablen immer wahr, *Kontradiktionen* immer falsch.

Eine Formel ist *erfüllbar*, wenn es mindestens eine Belegung ihrer Variablen gibt, für die die Formel wahr wird.

◆ Beispiele für Tautologien

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p), \quad p \Rightarrow (p \vee q), \quad (p \wedge (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})) \Rightarrow q. \quad \blacklozenge$$

Funktionelle Vollständigkeit

Eine Menge von Junktoren und BOOLEschen Funktionen heißt *funktionell vollständig*, wenn jede andere BOOLEsche Funktion mit ihr ausgedrückt werden kann. Es sind dies

$$\{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \text{NAND, NOR.}$$

Direkte Beweisführung

V Voraussetzung (*Prämisse*, wahr), B die zu beweisende Behauptung.

$V \Rightarrow B$, V ist *hinreichende Bedingung* für B , B ist Folgerung (*Konklusion*). Behauptung B ist bewiesen, wenn sie aus $V = w$ folgt.

$V \Leftrightarrow B$, V ist *hinreichende und notwendige Bedingung* für B .

Im Falle $B \Rightarrow V$ ist V nur notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung für B und damit kein Beweis für B , selbst wenn $V = w$ ist.

◆ Beispiel

Man beweise direkt den Satz: Für $a, b \geq 0$ gilt $B: \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist stets mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel).

Eine geeignete wahre Aussage ist $V: (a-b)^2 \geq 0$.

$$V \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow B \quad \text{q. e. d.} \quad \blacklozenge$$

Indirekte Beweisführung, Widerspruchsbeweis

B ist bewiesen, wenn man aus der negierten Annahme \bar{B} einen Widerspruch zu \bar{B} oder zu einer anderen bereits bewiesenen Aussage herleiten kann.

◆ **Beispiel**

Man beweise indirekt die Behauptung B : „Es gibt keine größte natürliche Zahl.“

Annahme \bar{B} : „Es gibt eine größte natürliche Zahl.“ Diese sei etwa N . Dann ist auch $N + 1$ eine natürliche Zahl und größer als N im Widerspruch zu der Annahme, N sei die größte. ◆

Beweis durch vollständige Induktion

Zu beweisen ist eine Aussage der Gestalt: „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $B(n)$.“

Beweis-Schema:

- (1) *Induktionsanfang*: Beweise Behauptung $B(n_0)$, meist $n_0 = 0$ oder 1 .
- (2) *Induktionsvoraussetzung*: Nimm an, $B(n)$ sei wahr für ein $n \geq n_0$.
- (3) *Induktionsschritt*: Beweise: aus $B(n)$ folgt $B(n + 1)$.

◆ **Beispiel**

Man beweise die Summenformel: Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

- (1) $n = 1$: $1 = 1 \cdot 2/2 = 1$, die Behauptung ist wahr für $n = 1$.
- (2) Annahme:
Die Behauptung ist wahr für n , also $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.
- (3) Unter der Voraussetzung (2) ist nun zu zeigen, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt, dass also $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$ ist:

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \quad \text{q. e. d.} \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

1.1.3 BOOLESCHE ALGEBRA

Ein *Axiom* ist eine grundlegende Aussage, die als in sich einsichtig angesehen wird und daher keines Beweises bedarf. Axiome stehen am Anfang deduktiver mathematischer Theorien und dienen als Ausgangspunkt zur Ableitung weiterführender Ergebnisse.

Deduktiv: Ableitung des Besonderen aus dem Allgemeinen (Gegensatz: *induktiv*)

Sei M eine Menge von BOOLEschen Variablen, versehen mit den beiden Junktoren \wedge und \vee . Das Tripel $\langle M, \wedge, \vee \rangle$ heißt dann BOOLEsche Algebra (BOOLEscher Verband). Für sie gelten folgende Axiome ($p, q, r, \bar{p} \in M$):

Kommutativgesetz: $p \wedge q = q \wedge p, \quad p \vee q = q \vee p$

Assoziativgesetz: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r = pqr$
 $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r$

Distributivgesetz: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) = pq \vee pr$
 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Idempotenz: $p \wedge p = p, \quad p \vee p = p$

Neutrale Elemente: $p \wedge 1 = p, \quad p \wedge 0 = 0, \quad p \vee 1 = 1, \quad p \vee 0 = p$

Komplementäres Element: Zu jedem p existiert ein komplementäres \bar{p} .

$$p \wedge \bar{p} = 0 \text{ (Widerspruch, Kontradiktion)}$$

$$p \vee \bar{p} = 1 \text{ (ausgeschlossenes Drittes)}$$

$$\neg 1 = 0 \quad \neg 0 = 1$$

DE MORGANSche Regeln:

$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}, \quad \overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

◆ Beispiele

(1) Man negiere den Ausdruck $A = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3$:

$$\bar{A} = \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3} = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} \vee \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_3.$$

(2) Man negiere den Ausdruck $B = „x < 1 \text{ oder } x \geq 5“$:

$$\bar{B} = \neg B = „x \geq 1 \text{ und zugleich } x < 5“ \text{ (nach DE MORGAN).}$$

◆

Rechenregeln

$\bar{\bar{p}} = p$ (*Involutionsregel, doppelte Verneinung*)

$$p \wedge (p \vee q) = p$$

$$p \vee (p \wedge q) = p$$

$$p \wedge (q \vee \bar{q}) = p$$

$$p \vee (q \wedge \bar{q}) = p$$

$$p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$$

$$p \vee (\bar{p} \wedge q) = p \vee q$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) = p$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) = p$$

(*Reduktionsregeln*)

$$(p \vee \bar{r}) \wedge (q \vee r) = (p \wedge r)(q \wedge \bar{r})$$

$$(p \Rightarrow q) = \bar{p} \vee q$$

$$\overline{p \Rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$$

$$(p \Rightarrow q) = (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \text{ (Kontraposition)}$$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

$$\overline{p \Leftrightarrow q} = (p \Leftrightarrow \bar{q}) = (\bar{p} \Leftrightarrow q)$$

$$(p \Leftrightarrow q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

◆ **Beispiel**

$$\begin{aligned}
 (p \vee q)(\bar{p} \vee r)(q \vee r) &= (p\bar{p} \vee pr \vee q\bar{p} \vee qr)(q \vee r) = (pr \vee \bar{p}q \vee qr)(q \vee r) \\
 &= prq \vee prr \vee q\bar{p}q \vee q\bar{p}r \vee qrq \vee qrr = pqr \vee pr \vee \bar{p}q \vee \bar{p}qr \vee qr \\
 &= (p \vee \bar{p})qr \vee pr \vee \bar{p}q \vee qr = pr \vee \bar{p}q \vee qr. \quad \blacklozenge
 \end{aligned}$$

Schaltalgebra

Die *Schaltalgebra* ist eine besondere BOOLEsche Algebra zur Kennzeichnung von Schaltzuständen. Die BOOLEsche Funktion wird zur *Schaltfunktion*. Schaltalgebra und Aussagenalgebra sind *isomorph* durch die Korrespondenz:

Schalter offen (kein Strom) $\hat{=}$ 0, Schalter geschlossen (Strom) $\hat{=}$ 1.

1.1.4 Normalformen

Der Term K_n^k heißt *Elementarkonjunktion* oder *Min-Term*, wenn er die konjunktive Bindung (d. h. mit \wedge) aller k Variablen (negiert oder nicht) enthält:

$$K_n^k = \bigwedge_{v=1}^k x_v^{\varepsilon_v} = x_1^{\varepsilon_1} \wedge x_2^{\varepsilon_2} \wedge \dots \wedge x_k^{\varepsilon_k}, \quad n = 0, 1, \dots, 2^k - 1.$$

Dabei sind die $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ und x_v^1 bezeichnet das positive Literal x_v , x_v^0 dagegen das negative \bar{x}_v . Ein Min-Term wird nur für eine einzige Variablenbelegung wahr.

Der Term D_n^k heißt *Elementardisjunktion* oder *Max-Term*, wenn er die disjunktive Bindung (d. h. mit \vee) aller k Variablen (negiert oder nicht) enthält:

$$D_n^k = \bigvee_{v=1}^k x_v^{\varepsilon_v} = x_1^{\varepsilon_1} \vee x_2^{\varepsilon_2} \vee \dots \vee x_k^{\varepsilon_k}, \quad n = 0, 1, \dots, 2^k - 1.$$

Ein Max-Term wird nur für eine einzige Variablenbelegung falsch. Die Anzahl der möglichen Elementarterme beträgt jeweils 2^k .

Die Interpretation der Bitfolge $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k)_2$ als Binärzahl liefert die dezimale Äquivalente n .

◆ **Beispiele**

- (1) Alle acht 3-stelligen Min-Terme: $pqr, pq\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}qr, \bar{p}q\bar{r}, \bar{p}\bar{q}r, \bar{p}\bar{q}\bar{r}$.
- (2) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6 \hat{=} (100110)_2 = (38)_{10}$, also $K_{38}^6 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6$.
- (3) $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \hat{=} (1001)_2 = (9)_{10}$, also $D_9^4 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$. ◆

Disjunktive Normalform (DNF) einer BOOLEschen Funktion

Eine disjunktive Verknüpfung von Elementarkonjunktionen heißt *disjunktive Normalform (Summenform, Reihen-Parallelschaltung)* der BOOLEschen Funktion F , wenn in ihr genau die Elementarkonjunktionen auftreten, für die $K_n^k = 1$, F also wahr ist.

Konjunktive Normalform (KNF) einer BOOLEschen Funktion

Eine konjunktive Verknüpfung von Elementardisjunktionen heißt *konjunktive Normalform (Produktform, Parallel-Reihenschaltung)* der BOOLEschen Funktion F , wenn in ihr genau die Elementardisjunktionen auftreten, für die $D_n^k = 0$, F also falsch ist.

◆ Beispiel

Eine BOOLEsche Funktion F ordnet den drei Eingangsvariablen x_1, x_2, x_3 die Ausgangsvariable y zu gemäß nachfolgender Tabelle:

n	x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Man berechne die DNF von F und vereinfache sie soweit wie möglich:

$$\begin{aligned}
 y &= K_0^3 \vee K_1^3 \vee K_2^3 \vee K_3^3 \vee K_4^3 \vee K_5^3 \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \\
 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.
 \end{aligned}$$

Da in nur zwei Zeilen $K_n^3 = 0$ auftritt, ist es günstiger, die DNF von \bar{y} zu berechnen und das Ergebnis zu invertieren:

$$\bar{y} = K_6^3 \vee K_7^3 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1 x_2.$$

Invertiert: $y = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (DE MORGAN) wie oben. ◆

Terme, die sich nicht weiter vereinfachen lassen, heißen *Primimplikanten*.

1.2 Prädikatenlogik

Die *Prädikatenlogik* (auch *Prädikatenkalkül*) berücksichtigt Eigenschaften von und Beziehungen zwischen (meist) mathematischen Objekten (*Individuen*) und ermöglicht es, kompliziertere logische Beziehungen zu erfassen. Eine *Aussage* entsteht, indem man den *Individuenvariablen* bestimmte Bezeichnungen (Werte) zuweist (Interpretation) bzw. sie durch *Quantifizierung* bindet.

Ein k -stelliges Prädikat über dem Individuenbereich I ist eine Abbildung $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$, die jedem k -Tupel von Individuen aus I eindeutig einen Wert aus $\{0, 1\}$ bzw. {„falsch“, „wahr“} zuordnet.

◆ Beispiele

- (1) Einstelliges Prädikat $P(x) = 1$ genau dann, wenn x prim ($I = \mathbb{N}$).
 (2) Zweistelliges Prädikat $P(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x < y$ ($I = \mathbb{N}$). ◆

Quantoren

Quantoren vereinigen eine Variable und eine Formel zu einer neuen Formel. Eine Aussageform lässt sich durch Quantifizierung in eine Aussage überführen.

Allquantor (Generalisator) \forall

$\forall x P(x)$ oder $\forall x : P(x)$ „Für alle x gilt $P(x)$.“
 „ $P(x)$ ist für jeden Wert von x erfüllt.“

relativiert:

$\forall x \in A P(x)$ „Für alle x aus A gilt $P(x)$.“

Existenzquantor (Partikularisator) \exists

$\exists x P(x)$ „Es gibt (mindestens) ein x mit $P(x)$.“

Wirkungsbereich der Quantoren

\forall und \exists beziehen sich auf die unmittelbar folgende Individuenvariable. Eine an einer Stelle eines Ausdrucks vorkommende Individuenvariable x heißt *frei* an dieser Stelle, wenn sie dort nicht im Wirkungsbereich eines Quantors vorkommt, andernfalls heißt sie *gebunden*.

◆ Beispiel

$\forall x \exists y (x < y)$, Individuenbereich $I = \mathbb{R}$.

Lies: „Zu jedem reellen x gibt es ein reelles y , welches größer als x ist.“ ◆

Allgemeingültiger Ausdruck, Tautologie

Ein Ausdruck H heißt *allgemeingültig*, wenn für jede Belegung seiner freien Variablen über I gilt: $H = 1$ (wahr). H heißt *erfüllbar*, wenn eine Belegung über I existiert, für die $H = 1$ wird.

Gegensatz: *Kontradiktion*, wenn für jede Belegung gilt $H = 0$.

Austausch von Quantoren durch Negation ($P(x)$ beliebig)

$$\exists x P(x) = \neg \forall x \neg P(x) \qquad \forall x P(x) = \neg \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x) \qquad \neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$$

Verteilungssätze ($P_1(x), P_2(x)$ beliebig)

$$\exists x (P_1(x) \vee P_2(x)) = \exists x P_1(x) \vee \exists x P_2(x) \quad (\text{gilt nicht für } \wedge !)$$

$$\forall x (P_1(x) \wedge P_2(x)) = \forall x P_1(x) \wedge \forall x P_2(x) \quad (\text{gilt nicht für } \vee !)$$

Verschiebungssätze (x in $P(x)$ frei, P^* ohne x)

$$\exists x (P(x) \wedge P^*) = \exists x P(x) \wedge P^* \quad (\text{gilt auch für } \vee)$$

$$\forall x (P(x) \wedge P^*) = \forall x P(x) \wedge P^* \quad (\text{gilt auch für } \vee)$$

Austauschsätze für zwei Quantoren ($P(x, y)$ beliebig)

$$\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y) \qquad \forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$$

Implikationen ($P(x, y)$ beliebig)

$$\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$$

$$\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$$

1.3 Mengen

1.3.1 Allgemeines

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten (Individuen), den *Elementen* der Menge, zu einer Gesamtheit.

Für jedes Objekt x muss eindeutig entscheidbar sein, ob es Element der Menge M ist ($x \in M$) oder nicht ($x \notin M$). Eine Menge ist durch ihre Elemente vollständig beschrieben, d. h. die Reihenfolge der Elemente ist beliebig, Duplikate kommen nicht vor.

Bezeichnung: Mengen: A, B, M, \dots Elemente: a, b, m_1, \dots

Darstellung und Beschreibung von Mengen

VENN-Diagramm: Grafik mit Umrandung der zur Menge gehörenden Elemente (siehe Bilder in 1.3.2).

Verbal: „Menge der natürlichen Zahlen“, „Menge der eingeschriebenen Studierenden eines Studienganges“ usw.

Beschreibung durch Nennung einer *Grund-* oder *Universalmenge* und einer für die Elemente von M charakteristischen Eigenschaft $A(x)$ (einstelliges Prädikat)

$$M := \{x \in G \mid A(x)\}$$

Aufzählungen:

$$\text{endliche Mengen:} \quad A := \{a_1, a_2, a_3\}, \quad B := \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$

$$\text{unendliche Mengen:} \quad M := \{x_1, x_2, \dots\}$$

Leere Menge: $\emptyset, \{\}$. Sie enthält kein Element (auch nicht die Null). Die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge: $\emptyset \subseteq A$.

Man unterscheidet eine *Zweiermenge* $\{a, b\}$ (ungeordnet, d. h. $\{a, b\} = \{b, a\}$) von einem *geordneten Paar* (a, b) (geordnet, d. h. $(a, b) \neq (b, a)$ für $a \neq b$).

Geordnetes Tripel: (x, y, z) .

Geordnetes n -Tupel: (x_1, x_2, \dots, x_n) , wobei x_i das i -te Element (die i -te Koordinate) ist.

Punktmengen sind Mengen, deren Elemente Punkte einer Kurve, einer Fläche oder eines noch höherdimensionalen Raumes sind. Punktmengen sind Teilmengen des \mathbb{R}^n .

Konventionen für Bezeichnungen von Elementen

Koeffizienten: Beliebige wählbare, aber innerhalb der Betrachtung dann konstante Zahlen a, b, a_1, b_1, \dots (erste Buchstaben des Alphabets).

Diskrete, ganzzahlige Variablen: $i, j, k, l, m, n, p, q, \dots$ (mittlere Buchstaben).

Freie Variablen: Größen, die beliebige Werte eines Definitionsbereiches annehmen können $t, u, v, w, x, y, z, \dots$ (letzte Buchstaben).

Schranken einer Menge

Eine nicht-leere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls eine reelle Zahl S_o existiert (*obere Schranke*), für die gilt: $\forall x \in M S_o \geq x$.

Analog gilt für die *untere Schranke* S_u : $\forall x \in M S_u \leq x$.

M heißt *beschränkt*, wenn $\forall x \in M S_u \leq x \leq S_o$.

Die kleinste obere Schranke von M heißt *Supremum* von M

($G = \sup M = \sup_{x \in M} x$).

Analog heißt die größte untere Schranke von M *Infimum* von M

($g = \inf M = \inf_{x \in M} x$).

Das größte (kleinste) Element einer Menge M heißt *Maximum* (*Minimum*) von M ($\max M$ bzw. $\min M$).

Es gilt:

- Nicht jede nicht-leere Menge muss ein Maximum, Minimum, Supremum oder Infimum besitzen, wenn sie aber eine der genannten Schranken besitzt, so ist diese eindeutig bestimmt.
- Ein Maximum ist stets zugleich Supremum, ein Minimum ist stets zugleich Infimum, aber nicht umgekehrt.
- G ist Supremum von M , wenn (i) $\forall x \in M x \leq G$ (d. h. G ist eine obere Schranke von M) und (ii) zu jedem noch so kleinen, aber positiven $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x_1 \in M$ existiert mit $x_1 > G - \varepsilon$ (d. h. $G - \varepsilon$ ist keine obere Schranke mehr von M , G ist also die kleinste).

◆ Beispiele

- (1) Die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ aller positiven reellen Zahlen hat kein Maximum, kein Supremum, kein Minimum, wohl aber ein Infimum, nämlich 0.
- (2) Das Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ hat 0 als Infimum und zugleich Minimum, und 1 als Supremum, aber kein Maximum.
- (3) Selbst eine nach oben beschränkte Zahlenmenge muss kein Supremum besitzen: So ist $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ nach oben beschränkt (z. B. durch 1,5), besitzt aber kein Supremum. ◆

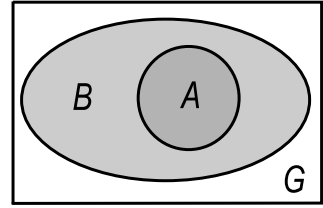
Inklusion

A ist *Teilmenge* (*Untermenge*) einer *Obermenge* B ($A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$), wenn $\forall x \in A : x \in B$.

A ist *echte Teilmenge* von B ($A \subsetneq B$ oder $B \supsetneq A$), wenn $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Darstellung im VENN-Diagramm: Grafik mit Umrandung der Mengen.

Zwei Mengen sind *gleich* ($A = B$), wenn $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.



Inklusion $A \subseteq B$
im VENN-Diagramm

1.3.2 Mengenoperationen

G ist stets die Grundmenge.

Vereinigung zweier Mengen $A \cup B$

Alle Elemente, die zu A oder zu B (oder zu allen beiden) gehören:

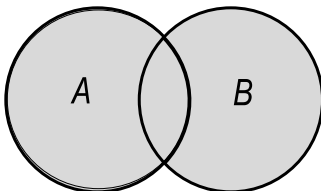
$$A \cup B := \{x \in G \mid x \in A \vee x \in B\}, \quad \text{„A vereinigt mit B“}$$

Durchschnitt zweier Mengen $A \cap B$

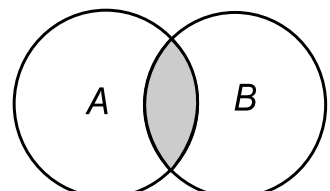
Alle Elemente, die zu A und zugleich zu B gehören:

$$A \cap B := \{x \in G \mid x \in A \wedge x \in B\}, \quad \text{„A geschnitten mit B“}$$

Gilt $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B *disjunkt* (*elementfremd*).



Vereinigung $A \cup B$

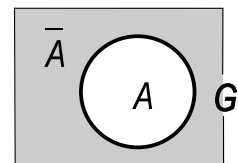


Durchschnitt $A \cap B$

(Absolutes) Komplement von A

Alle Elemente von G , die nicht in A liegen:

$$\bar{A} := \{x \in G \mid x \notin A\}, \quad \text{auch } \complement A.$$



Absolutes Komplement

Differenz zweier Mengen $A \setminus B$

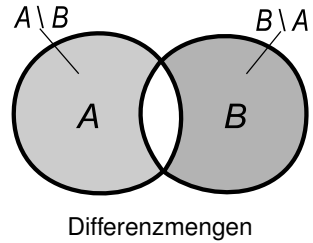
Alle Elemente, die zu A , aber nicht zu B gehören (*Differenz* von A und B , *relatives Komplement* von B bezüglich A):

$$A \setminus B := \{x \in G \mid x \in A \wedge x \notin B\}, \quad \text{„A ohne B“, auch } \complement_A B$$

Es ist nicht erforderlich, dass B Teilmenge von A ist.

Es gilt $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, die Operation „Differenz“ ist also entbehrlich.

Die Differenz zweier Mengen ist weder kommutativ noch assoziativ, d. h. es gelten $A \setminus B \neq B \setminus A$ und $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.



Potenzmenge $\mathbb{P}(A)$

Die *Potenzmenge* von A ist die Menge aller Teilmengen von A . Sie enthält insbesondere stets \emptyset und A selbst als Elemente:

$$\mathbb{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

Ist A eine endliche Menge mit k Elementen, so besteht $\mathbb{P}(A)$ aus 2^k Elementen.

◆ Beispiel

Für die zweielementige Menge $A = \{a, b\}$ ist $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. ◆

Mächtigkeit einer endlichen Menge

Die *Mächtigkeit* (*Kardinalität*) einer endlichen Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente. Sie wird mit $|A|$ oder mit $\text{card } A$ bezeichnet.

Zwei Mengen von gleicher Mächtigkeit sind eineindeutig aufeinander abbildbar.

Ist $A \subsetneq B$ (A echte Teilmenge von B), so folgt $\text{card } A < \text{card } B$.

Eine unendliche Menge, die eine eineindeutige Zuordnung zur Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen zulässt, heißt *abzählbar*.

Kartesisches Produkt zweier Mengen $A \times B$

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen (*Produktmenge*) $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$:

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \quad \text{lies: „A kreuz B“}$$

Für geordnete Paare gilt: $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

Ist $A \neq B$, so folgt $A \times B \neq B \times A$.

Sind A und B endliche Mengen, so ist auch $A \times B$ endlich und es ist $\text{card}(A \times B) = (\text{card} A) \cdot (\text{card} B)$.

Es gilt:

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$

$$(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D) \Rightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$$

1.3.3 Beziehungen, Gesetze, Rechenregeln

G bezeichnet stets die Grundmenge, alle anderen vorkommenden Mengen sind Teilmengen von G .

Reflexivität: $A \subseteq A$

Komplementgesetze: $\bar{\bar{A}} = A, \bar{G} = \emptyset, \bar{\emptyset} = G,$
 $\bar{A} \cap A = \emptyset, \bar{A} \cup A = G$

Transitivität: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
 (Überführungsgesetz)

Teilmengenbeziehungen: $A \cap B \subseteq A \cup B$ $A \setminus B \subseteq A$
 (Inklusionen) $\emptyset \subseteq A$ $A \subseteq G$

Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
 (Vertauschungsgesetze)

Assoziativgesetze: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 (Zusammenfassungsgesetze) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Absorptionsgesetze: $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$

Distributivgesetze: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 (Verteilungsgesetze) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

DE MORGANSche Formeln: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Die DE MORGANSchen Formeln gelten analog für mehr als zwei Mengen.

Weiterhin gilt:

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cup A = A \quad A \cup G = G$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap A = A \quad A \cap G = A$$

$$A \setminus A = \emptyset \quad A \setminus \emptyset = A$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

sowie

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Aus einer der nachstehenden Beziehungen folgen die anderen:

$$A \subseteq B \quad A \cup B = B \quad A \cap B = A \quad \bar{B} \subseteq \bar{A} \quad A \setminus B = \emptyset$$

Produktbeziehungen

In den folgenden Formeln steht \circ für jeweils einen der Operatoren \cap , \cup oder \setminus :

Multiplikation von rechts: $(A \circ B) \times C = (A \times C) \circ (B \times C)$

Multiplikation von links: $C \times (A \circ B) = (C \times A) \circ (C \times B)$

1.3.4 Relationen

Eine (*binäre*) *Relation* R ist eine Beziehung zwischen den Elementen zweier Mengen A und B . Sie ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$ aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$, $y \in B$.

Jede Teilmenge $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$ heißt *k-stellige Relation* zwischen den Mengen M_1, M_2, \dots, M_k .

Infix-Notation für binäre Relationen

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \subseteq A \times B$$

gelesen: „Zwischen A und B besteht die Relation R .“

Bezeichnungen

A *Vorbereich*, Quelle von R

B *Nachbereich*, Ziel von R

Definitionsbereich $D_R := \{x \in A \mid \exists y : xRy\}$

Wertebereich $W_R := \{y \in B \mid \exists x : xRy\}$

Für $A = B = M$ heißt R eine Relation *auf* der Menge M .

◆ Beispiele

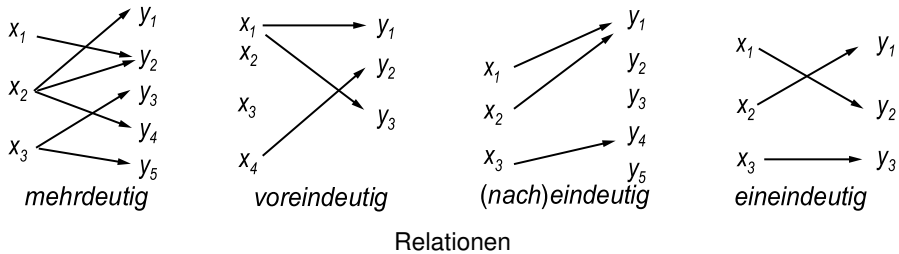
- (1) Für $x, y \in A$ sei $xRy : \Leftrightarrow x = y$ (*Gleichheitsrelation*, *identische Relation* id_A).
- (2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $xRy : \Leftrightarrow x \leq y$ (*Kleiner-gleich-Relation*).
- (3) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und festes $n \in \mathbb{N}^*$ sei $aRb : \Leftrightarrow n$ teilt $(a - b)$ (*Kongruenzrelation modulo* n). a und b haben denselben Rest bei Division durch n . Man schreibt hierfür auch $n \mid (a - b)$ (lies: „ n teilt $(a - b)$ “) oder $a \equiv b \pmod{n}$ (lies: „ a kongruent b modulo n “). ◆

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

- *voreindeutig*, wenn jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ entspricht,
- (*nach*)*eindeutig*, wenn jedem $x \in A$ höchstens ein $y \in B$ entspricht (*Funktion*, siehe 7.1),
- *eineindeutig*, wenn sie sowohl vor- als auch nacheindeutig ist,
- *mehrdeutig*, wenn sie weder vor- noch nacheindeutig ist.

Grafische Darstellung

Relationsgraphen mit Relationspfeilen (*Digraphen*), s. Bild.



Relationen

◆ Beispiel

Zwischen den Mengen $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2, 3\}$ seien folgende Relationen definiert:

$$R_1 = A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\} \quad (\text{mehrdeutig})$$

$$R_2 = \{(0, 2), (0, 3)\} \quad (\text{vor-, aber nicht nacheindeutig})$$

$$R_3 = \{(0, 2), (1, 2)\} \quad (\text{nach-, aber nicht voreindeutig})$$

$$R_4 = \{(0, 2), (1, 3)\} \quad (\text{eineindeutig}) \quad \blacklozenge$$

Eigenschaften binärer Relationen

R sei eine binäre Relation auf M . R heißt

- *reflexiv*, falls $\forall x \in M \ xRx$
- *irreflexiv*, falls $\forall x \in M \ \neg xRx$
- *symmetrisch*, falls $\forall x, y \in M \ (xRy \Rightarrow yRx)$
- *antisymmetrisch*, falls $\forall x, y \in M \ (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
- *transitiv*, falls $\forall x, y, z \in M \ (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
- *linear* (auch *total* oder *konnex*), falls $\forall x, y \in M \ (xRy \vee yRx)$

◆ Beispiele

- (1) Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(G) = \{A \mid A \subseteq G\}$ einer Menge G sei die Relation $ARB : \Leftrightarrow A \subseteq B$ definiert (Inklusion). R ist

reflexiv: $A \subseteq A$

transitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

antisymmetrisch: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

R ist dagegen nicht linear, z. B. gilt für $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$ weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$.

Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation heißt *Halbordnung*.

- (2) Auf \mathbb{R} sei die Relation $xRy :\Leftrightarrow x \leq y$ definiert (Kleiner-gleich). R ist

reflexiv: $x \leq x$

transitiv: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

antisymmetrisch: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

linear: $x \leq y$ oder $y \leq x$

(zwei reelle Zahlen sind stets vergleichbar)

Eine Halbordnung, die zusätzlich linear ist, heißt *Ordnung*.

- (3) Sei $n \in \mathbb{N}^*$ eine feste Zahl. Auf \mathbb{Z} sei $aRb :\Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$ (a und b haben denselben Rest bei Division durch n). R ist

reflexiv: $a \equiv a \pmod{n}$

transitiv: $a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

symmetrisch: $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$.

Eine reflexive, transitive und symmetrische Relation heißt *Äquivalenzrelation*. ♦

1.3.5 Intervalle

Ein *endliches Intervall* ist eine zusammenhängende Teilmenge reeller Zahlen, die auf der reellen Zahlengeraden von zwei Randpunkten a und b begrenzt wird ($a < b$). Unendliche Intervalle sind einseitig oder zweiseitig unbegrenzte zusammenhängende Teilmengen reeller Zahlen.

offen: $(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$

abgeschlossen: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

halboffen: $[a, b) = [a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] =]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

unendlich: $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$

$(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$ $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R} = \{x \mid |x| < \infty\}$

$(-\infty, 0) = \mathbb{R}_{<0} = \{x \mid x < 0\}$

$(0, \infty) = \mathbb{R}_{>0} = \{x \mid x > 0\}$

Bei konkreten Zahlen schreibt man statt $[0, 1]$ auch $[0; 1]$, um Verwechslung mit Kommazahlen (hier $0,1$) auszuschließen.

1.3.6 Unscharfe Mengen

Eine *unscharfe Menge* (engl. *Fuzzy-Set*) weist gleitende Übergänge für die Zugehörigkeit eines Elementes zu der Menge mit Wahrheitswerten aus dem Intervall $[0; 1]$ auf.

Charakteristische Funktion, Zugehörigkeitsfunktion

$$m_A : X \rightarrow [0; 1] \quad (\text{auch Zugehörigkeitsgrad})$$

m_A ordnet jedem Element x einer Grundmenge $X \supseteq A$ den Wahrheitswert der Aussage „ $x \in A$ “ zu, gibt also an, „wie sehr“ x in A enthalten ist. Die klassische Mengenlehre ist der Spezialfall mit $m_A(x) = 0$, falls $x \notin A$ bzw. $m_A(x) = 1$, falls $x \in A$.

Mithilfe unscharfer Mengen können Probleme der realen Welt modelliert werden, bei denen es aufgrund mangelnder Informationen oder ungenauer Definitionen nicht möglich ist, eindeutig festzulegen, ob ein Element zu einer Menge gehört oder nicht.

◆ Beispiele unscharfer Mengen

ausreichende Zimmertemperatur, gefährvoller Zustand eines chemischen Prozesses, hohe Lärmbelästigung, kleine Kinder, ältere Damen, vertrauenswürdige Personen, reiche Ernte, abgenutzte Werkzeuge u. v. m. ◆

Die in den Beispielen vorkommenden Adjektive heißen *linguistische Variablen*. Oft ist das Vorliegen einer solchen Eigenschaft nicht eindeutig wahr oder falsch.

Darstellung bei Einzelbeobachtungen

- als Tabelle, z. B.

Elemente von X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$m_A(x_i)$	0,3	0,7	0,0	0,9	...

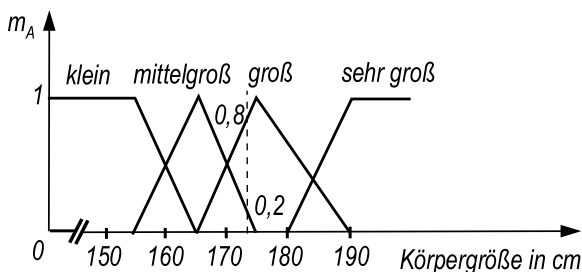
- als Vektor (bei geordneten Indizes): $\mathbf{m}_A = (m_A(x_1), m_A(x_2), \dots)$.

◆ Beispiele

- (1) Leere Menge: $A = \emptyset \Rightarrow \forall x \in X : m_A(x) = 0$.

Universalmenge: $A = G \Rightarrow \forall x \in X : m_A(x) = 1$.

- (2) Das Bild zeigt eine Möglichkeit, den Grundbereich „Körpergröße“ mit den Untermengen der linguistischen Variablen „klein“, „mittelgroß“, „groß“ und „sehr groß“ gemäß den üblichen Gepflogenheiten einzuteilen. Man bestimme die Zugehörigkeitsgrade bei 1,73 m Größe!



Man liest ab:

$$m_{\text{kl.}}(173) = 0; m_{\text{mit.}}(173) = 0,2; m_{\text{gr.}}(173) = 0,8; m_{\text{s.gr.}}(173) = 0.$$

- (3) Man gebe eine Zugehörigkeitsfunktion für die unscharfe Menge A aller reellen Zahlen an, die nahezu gleich 10 sind:

$$m_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 8 \vee x \geq 12, \\ \frac{x-8}{2} & \text{für } 8 \leq x \leq 10, \\ \frac{12-x}{2} & \text{für } 10 \leq x \leq 12. \end{cases}$$

◆

Kenngrößen und Beziehungen unscharfer Mengen

Träger: $\text{supp}(A) := \{x \in X \mid m_A(x) > 0\}$

Höhe: $\text{hgt}(A) := \sup_{x \in X} m_A(x)$

Kardinalität: $\text{card}(A) := \sum_{x \in X} m_A(x)$

Teilmengen: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X m_A(x) \leq m_B(x)$

Es gilt $A \subseteq B \Rightarrow \text{supp}(A) \subseteq \text{supp}(B)$ und $A \subseteq B \Rightarrow \text{hgt}(A) \leq \text{hgt}(B)$.

1.4 Zahlensysteme

1.4.1 Polyadische Zahlensysteme

Polyadische Zahlensysteme sind Positions- oder Stellenwertsysteme. Der Wert einer Ziffer hängt ab von ihrer Stellung innerhalb der Ziffernfolge.

Polyadische Darstellung einer natürlichen Zahl

Sei B eine natürliche Zahl größer 1 (*Basis*). Jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}^*$ hat eine eindeutige polyadische Darstellung

$$a = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k \cdot B^k$$

a_k sind die *Ziffern* von a , $a_k \in \{0, 1, \dots, (p-1)\}$ für $k = 0, \dots, n$.

BCD (engl. „binary coded decimal“) stellt jede Ziffer des Dezimalsystems als vierstellige Binärziffer dar.

Gebräuchliche Zahlensysteme für natürliche Zahlen

dezimal	dual	<i>BCD</i>	oktal	hexadezimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F
16	10000	0001 0110	20	10
17	10001	0001 0111	21	11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Zur Kennzeichnung des Zahlensystems kann bei Verwechslungsgefahr die Zahl mit der gültigen Basis als Index versehen werden, z. B. $(125)_8$ für eine Oktalzahl.

Festkommadarstellung einer reellen Zahl

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot B^k$$

Stellenzahl: $n + 1$.

Kommen keine negativen Exponenten k vor, handelt es sich um eine *ganze Zahl* (engl. „integer“).

Dualsystem (Zweiersystem, dyadisches, binäres System)

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 2^k$$

Basis $B = 2$, Ziffern $a_k \in \{0, 1\}$, in der Technik auch $\{O, L\}$. Eine Ziffer im Dualsystem heißt *Bit* (engl. „binary digit“) oder *Binärstelle*. Sie ist die Einheit des Informationsgehaltes.

Abgeleitete Einheiten:

1 Byte = 8 Bit

1 KB = 1 Kilo-Byte = 2^{10} Byte = 1 024 Byte

1 MB = 1 Mega-Byte = 2^{20} Byte = 1 024 KB = 1 048 576 Byte

1 GB = 1 Giga-Byte = 2^{30} Byte = 1 024 MB = 1 073 741 824 Byte

1 TB = 1 Tera-Byte = 2^{40} Byte = 1 024 GB = 1 099 511 627 776 Byte

Dezimalsystem (dekadisches System)

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 10^k$$

Basis $B = 10$, Ziffern $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Schreibweisen:

Ganze Zahl: $a = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

Dezimalbruch: $a = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$

Die $(n + 1)$ Ziffern links vom Komma heißen *Stellen*, die Ziffern rechts vom Komma *Dezimalstellen* oder *Dezimalen*.

Endlicher oder *abbrechender Dezimalbruch:* Ab einer Stelle sind alle Dezimalen gleich 0. Ansonsten *unendlicher* oder *nicht-abbrechender Dezimalbruch*.

Echter Dezimalbruch: $0, a_{-1} a_{-2} \dots$

Tragende Ziffern einer Dezimaldarstellung sind alle Ziffern, links beginnend mit der ersten von 0 verschiedenen Ziffer ($a_n \neq 0$).

Basiskonvertierung von Basis B in Basis 10

Man verwendet das HORNER-Schema (siehe 3.3.1.7):

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_0
B	0	$a_n \cdot B$	$(a_n \cdot B + a_{n-1}) \cdot B$	\dots	$(\dots) \cdot B$
	a_n	$a_n \cdot B + a_{n-1}$	$(a_n \cdot B + a_{n-1}) \cdot B + a_{n-2}$	\dots	Ergebnis

◆ Beispiel

Man konvertiere die Oktalzahl $(7\ 301)_8$ in ihr dezimales Äquivalent:

	7	3	0	1
$B = 8$	0	$7 \cdot 8$	$59 \cdot 8$	$472 \cdot 8$
	7	59	472	3 777

Ergebnis: $(7\ 301)_8 = (3\ 777)_{10}$.



Basiskonvertierung von Basis 10 in Basis B

Ganzzahliger Anteil: Fortgesetzte Division durch B ergibt die Ziffern a_0, a_1, \dots als jeweiligen Divisionsrest (1. Rest ist a_0). Die letzte Zeile ist erreicht, wenn erstmals der Divisor $< B$ ist.

Gebrochener Anteil: Fortgesetzte Multiplikation mit B ergibt die Ziffern a_{-1}, a_{-2}, \dots als jeweiligen ganzzahligen Anteil des Multiplikationsergebnisses. Ergibt die Multiplikation eine ganze Zahl oder ist die gewünschte Genauigkeit erreicht, wird abgebrochen.

◆ Beispiel

Man konvertiere die Dezimalzahl $(43,375)_{10}$ in ihr duales Äquivalent:

$$\begin{array}{ll} \text{Ganzzahliger Anteil: } 43/2 = 21 \text{ Rest } \mathbf{1} & (a_0 = 1) \\ & 21/2 = 10 \text{ Rest } \mathbf{1} \quad (a_1 = 1) \\ & 10/2 = 5 \text{ Rest } \mathbf{0} \quad (a_2 = 0) \\ & 5/2 = 2 \text{ Rest } \mathbf{1} \quad (a_3 = 1) \\ & 2/2 = 1 \text{ Rest } \mathbf{0} \quad (a_4 = 0) \\ & 1/2 = 0 \text{ Rest } \mathbf{1} \quad (a_5 = 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Gebrochener Anteil: } 0,375 \cdot 2 = \mathbf{0,75} & (a_{-1} = 0) \\ & 0,75 \cdot 2 = \mathbf{1,5} \quad (a_{-2} = 1) \\ & 0,5 \cdot 2 = \mathbf{1,0} \quad (a_{-3} = 1) \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } (43,375)_{10} = (101011,011)_2 \quad \blacklozenge$$

Gleitpunktzahlen, Maschinenzahlen, Computerzahlen

(engl. „floating point numbers“)

$$M = \pm m \cdot B^E = (-1)^v \cdot m \cdot B^E$$

Schreibweise: $M = m(E)$

Bezeichnungen

v Vorzeichenbit, $v \in \{0, 1\}$

m Mantisse, normiert zu

$$m = 0.m_1m_2m_3 \dots m_n \text{ mit } m_1 \neq 0, \text{ daher } \frac{1}{B} \leq m < 1$$

(Statt des Kommas steht bei Maschinenzahlen ein Punkt.)

m_i Mantissenziffern, $m_i \in \{0, 1, \dots, (B-1)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($m_1 \neq 0$)

n Mantissenlänge

B Basis der Zahldarstellung, vorzugsweise $B = 2$, aber auch $B = 8, 10, 16$

E Exponent, $E \in \mathbb{Z}$ als Dezimalzahl

E bestimmt bei Computerzahlen den *zulässigen Zahlenbereich*, m und B dagegen die *innere Genauigkeit* (den *Rundungsfehler*).

Da die in einem Computer darstellbare Zahlenmenge endlich, aber bereits die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ unendlich ist, müssen viele reellen Zahlen auf die vorhandene Mantissenlänge n gerundet werden:

$\text{rd}(x)$ ist die zu $x \in \mathbb{R}$ nächstgelegene Maschinenzahl, d. h. man erhöht die letzte Mantissenziffer m_n um 1, falls die $(n + 1)$ -te Ziffer $m_{n+1} \geq B/2$ ist, ansonsten schneidet man nach der n -ten Ziffer ab.

Die *Maschinengenauigkeit* eps ist die kleinste positive Maschinenzahl, die auf 1 addiert eine Maschinenzahl größer 1 liefert:

$$\text{eps} = \min\{x > 0 \mid \text{rd}(1 + x) > 1\}$$

eps ist zugleich der maximale relative Fehler bei Rundungen:

$$\left| \frac{\text{rd}(x) - x}{x} \right| \leq \frac{B}{2} B^{-n} = \text{eps}$$

oder gleichbedeutend:

$$\text{rd}(x) = x \cdot (1 + \varepsilon) \text{ mit } |\varepsilon| \leq \text{eps}.$$

◆ Beispiel

Bei Gleitpunktzahlen in einem Rechner mit 4-stelliger Mantisse zur Basis 10 beträgt der maximale relative Rundungsfehler $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-4} = 0.0005$. Die Nicht-Maschinenzahl $a := 0.12347(1)$ wird abgebildet auf die Maschinenzahl $\text{rd}(a) = 0.1235(1)$, der relative Fehler ist

$$\left| \frac{0.1235(1) - 0.12347(1)}{0.12347(1)} \right| = 0.00024 \dots < \text{eps}.$$

Gleichzeitig ist eps die kleinste positive Maschinenzahl x mit $\text{rd}(1 + x) > 1$: Es ist $\text{rd}(1 + \text{eps}) = \text{rd}(1.0005) = \text{rd}(0.10005)(1) = 0.1001(1) = 1.001 > 1$, dagegen $\text{rd}(1 + 0.0004) = \text{rd}(1.0004) = \text{rd}(0.10004)(1) = 0.1000(1) = 1$. ◆

Für Gleitpunktzahlen M gelten folgende absoluten Grenzen:

$$B^{E_{\min} - 1} \leq |M| \leq (1 - B^{-n}) \cdot B^{E_{\max}}.$$

Warnung

Viele der für reelle Zahlen geltenden Rechengesetze sind falsch für Gleitpunktoperationen, so kann z. B. $x + y = x$ sein, obwohl y eine Maschinenzahl ungleich 0 ist! Außerdem gelten die Assoziativ- und Distributivgesetze *nicht*.

◆ **Beispiel**

(Mantissenlänge $n = 4$, Basis $B = 10$).

Für die Maschinenzahlen $x := 10 = 0.1000(2)$ und $y := 0.004 = 0.4000(-2)$ gilt $x + y = 10.004 = 0.10004(2)$, die Summe ist also keine Maschinenzahl mehr und wird zu $\text{rd}(0.10004(2)) = 0.1000(2) = 10 = x$, also $x + y = x$. ◆

1.4.2 Römisches Zahlensystem

Das römische Zahlensystem ist ein *Additionssystem*. Grundsymbole mit ihrer dezimalen Bedeutung sind

$$I \cong 1, V \cong 5, X \cong 10, L \cong 50, C \cong 100, D \cong 500, M \cong 1\,000$$

Schreibweise

Man beginnt links mit dem Symbol der größten Zahl. Die Symbole I, X und C werden normalerweise nur bis zu dreimal geschrieben (bisweilen auch viermal, insbesondere bei Uhren aus Symmetriegründen).

Steht ein Symbol einer kleineren Zahl vor dem einer größeren, wird sein Wert von dem der größeren subtrahiert. Es gilt also

$$IV \cong 4, IX \cong 9, XL \cong 40, XC \cong 90, CD \cong 400, CM \cong 900$$

Alle anderen Kombinationen einer kleineren Zahl vor einer größeren sind unzulässig.

◆ **Beispiel**

1999 entspricht MCMXCIX ($1\,000 + 900 + 90 + 9$). Falsch wäre MIM.
2011 entspricht MMXI. ◆

2

Arithmetik

2.1 Menge der reellen Zahlen

2.1.1 Standard-Zahlenmengen

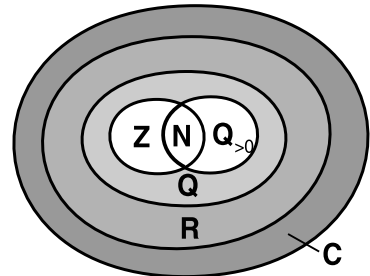
In (*Standard-*)Zahlenmengen ist eine Ordnung erklärt und gewisse mathematische Operationen sind *uneingeschränkt* ausführbar. Bei Erweiterungen von Zahlenmengen ist die Ausgangsmenge echte Teilmenge der neuen: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

Darstellung

Doppelstrich- oder fette Normalbuchstaben.

Herausnahme der 0 durch *.

Einschränkungen auf Teilbereiche durch Indizes, z. B. $\mathbb{R}_{>0}$ für positive reelle Zahlen, oft auch mit angehängtem +: \mathbb{R}^+



Standard-Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

Menge der *nicht-negativen ganzen Zahlen*¹⁾: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Menge der *positiven ganzen Zahlen*: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

Uneingeschränkt ausführbar sind: Addition, Multiplikation, Kleiner-als-Relation.

Die Gleichung $m + x = n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist in \mathbb{N} nicht immer nach x lösbar.

Jede natürliche Zahl n hat einen unmittelbaren Nachfolger ($n + 1$) als isolierten Punkt auf dem *Zahlenstrahl* (PEANOSches Axiomensystem).

Kardinalzahl: Anzahl der Elemente einer Menge (*Mächtigkeit*)

Ordinalzahl: Stelle eines Elements in einer geordneten Menge

¹⁾ nach DIN 1302 und 5473, daneben auch (aber nicht DIN-gerecht) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, dann mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Primzahlen

Eine *Primzahl* p , $p \geq 2$, ist eine natürliche Zahl, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ...

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist entweder selbst Primzahl oder lässt sich als Produkt von Primfaktoren ausdrücken. Die Primfaktoren sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch n bestimmt.

Ganze Zahlen

Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Menge der *ganzen Zahlen ohne Null*: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$

Zusätzlich ausführbar in \mathbb{Z} : Subtraktion

Jede ganze Zahl hat genau einen Vorgänger und genau einen Nachfolger.

Rationale Zahlen

Menge (*Körper*) der *rationalen Zahlen*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Die Darstellung ist nicht eindeutig, z.B. $1/3 = 2/6 = \dots$. Durch die Forderung $\text{ggT}(p, q) = 1$ (p und q *teilerfremd*) wird Eindeutigkeit erreicht (*Normaldarstellung*).

Zusätzlich ausführbar: Division (außer durch 0).

Die rationalen Zahlen liegen überall *dicht* auf der Zahlengeraden, d. h., zwischen zwei rationalen Zahlen liegen beliebig viele weitere. Eine rationale Zahl hat daher keinen direkten Nachfolger oder Vorgänger.

\mathbb{Q} ist ein (algebraischer) *Körper* (siehe 2.1.2.1). \mathbb{Q} ist *abzählbar*, d. h., es gibt eine eindeutige Zuordnung von \mathbb{Q} zu \mathbb{N} .

Einteilung der rationalen Zahlen

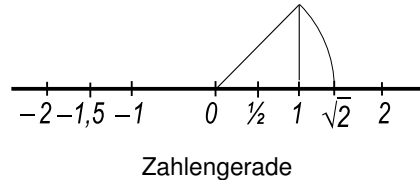
- *Gemeine Brüche, Bruchzahlen*, z. B. $4/7$, siehe 2.1.2.1
- *Endliche Dezimalbrüche*, z. B. 0,25
- *Unendliche periodische Dezimalbrüche*, bei der Division gemeiner Brüche tritt periodische Wiederholung einer Ziffernfolge ein:
Reinperiodisch: $7/13 = 0,538\,461\,538\,461\dots = 0,538\,46\overline{1}$
Gemischtpperiodisch (mit Vorperiode): $1/6 = 0,166\,666\dots = 0,1\overline{6}$
(spricht „0,1 Periode 6“)

Reelle Zahlen

Menge (Körper) der reellen Zahlen: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Zusätzlich ausführbar: Grenzwertbildung

Reelle Zahlen kann man eineindeutig auf Punkte der *reellen Zahlengeraden* abbilden: \mathbb{R} und Zahlengerade sind *gleichmächtig*. \mathbb{R} ist nicht abzählbar.



Einteilung der reellen Zahlen

- *Rationale Zahlen* \mathbb{Q}
- *Irrationale Zahlen* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: nicht periodische, unendliche Dezimalbrüche, z. B. $\sin 10^\circ$, π , e , $\sqrt{2}$, $\log 3$
- *Algebraische Zahlen*: Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten, z. B. $\sqrt{2}$
- *Transzendente Zahlen*: reelle Zahlen, die nicht Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten sind, z. B. π , e

Als Näherungswerte benutzt man endliche Dezimalbrüche, z. B. $\sqrt{2} \approx 1,41421$.

Menge der positiven reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$, auch \mathbb{R}^+ .

2.1.2 Grundoperationen an reellen Zahlen

2.1.2.1 Die vier Grundrechenarten

Rechenoperationen höherer Stufe binden stärker als die niederer Stufe.

Stufe	Operation	a	b	c
1. Stufe	<i>Addition</i> $a + b = c$	<i>Summand</i>	<i>Summand</i>	<i>Summe</i>
	<i>Subtraktion</i> $a - b = c$	<i>Minuend</i>	<i>Subtrahend</i>	<i>Differenz</i>
2. Stufe	<i>Multiplikation</i> $ab = a \cdot b = c$	<i>Faktor,</i> <i>Multiplikand</i>	<i>Faktor,</i> <i>Multiplikator</i>	<i>Produkt</i>
	<i>Division</i> $\frac{a}{b} = c, (b \neq 0)$	<i>Dividend,</i> <i>Zähler</i>	<i>Divisor,</i> <i>Nenner</i>	<i>Quotient,</i> <i>Bruch</i>

Axiomensystem der reellen Zahlen

(Zum Begriff *Axiom* siehe 1.1.3)

Eine Menge $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit zwei Rechenoperationen heißt *algebraischer Körper*, *Zahlenkörper* oder kurz *Körper*, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

Körperaxiome ($a, b, c \in \mathbb{K}$)

<i>Abgeschlossenheit:</i>	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
<i>Kommutativgesetz:</i>	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
<i>Assoziativgesetz:</i>	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
<i>Neutrale Elemente:</i>	$a + 0 = a$ (<i>Null</i>)	$a \cdot 1 = a$ (<i>Eins</i>)
<i>Inverse Elemente:</i>	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$)
<i>Distributivgesetz:</i>	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Für $a + (-b)$ schreibt man kurz $a - b$, für $a \cdot \frac{1}{b}$ kurz $\frac{a}{b}$ und für $a \cdot b$ kurz ab .

Von den Standardmengen sind \mathbb{Q} und \mathbb{R} Körper, \mathbb{N} und \mathbb{Z} dagegen nicht (keine multiplikativen Inversen).

Folgerungen

<i>Differenz:</i>	$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$	$-(-a) = a$
<i>Null:</i>	$a - 0 = a$	$-0 = 0$
	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	
	$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ (Körper sind <i>nullteilerfrei</i> .)	
<i>Quotient:</i>	$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$	
	$\frac{0}{a} = 0$ ($a \neq 0$)	Achtung: $\frac{a}{0}$ nicht definiert

Anordnungsaxiome ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Trichotomie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen
 $a > 0$, $a = 0$, $-a > 0$.

Summe: Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a + b > 0$.

Produkt: Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a \cdot b > 0$.

Man vereinbart $a > b$, falls $a - b > 0$ ist, und $a \geq b$, falls $a > b$ oder $a = b$ ist. Statt $a > b$ kann man auch $b < a$ schreiben.

Folgerungen

Transitivität: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Monotonie der Addition: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Monotonie der Multiplikation: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Zahlenmengen, in denen die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome erfüllt sind, heißen *angeordnete Körper*. \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind angeordnete Körper.

Vorzeichenregeln ($a, b > 0$)

$$a - (-b) = a + b$$

$$a + (-b) = a - b$$

$$-a - b = -(a + b)$$

$$a - b = -(b - a)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Klammern auflösen, Ausklammern

Empfehlung: Vorzugsweise *runde Klammern* auch bei geschachtelten Ausdrücken verwenden, da andere Klammerformen z. T. gesonderte Bedeutungen haben und in Programmiersprachen ohnehin nur runde Klammern vorkommen. Geschachtelte Klammern sind von innen nach außen aufzulösen.

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$a \cdot b + c = (ab) + c \quad \text{„Punkt vor Strich“}$$

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

$$-a(b \pm c) = -ab \mp ac$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) und kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Seien $m, n \in \mathbb{Z}^*$.

Der *größte gemeinsame Teiler* $\text{ggT}(m, n)$ ist die größte natürliche Zahl, die m und n teilt.

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* $\text{kgV}(m, n)$ ist die kleinste natürliche Zahl, die m und n als Teiler enthält.

Zur Berechnung *faktorisieren* man die Zahlen, d. h. man zerlege sie in ihre *Primfaktoren*.

◆ **Beispiel**

$$\begin{array}{r}
 12 = 2^2 \cdot 3^1 \\
 40 = 2^3 \cdot 5^1 \\
 \hline
 \text{ggT}(12, 40) = 2^2 = 4 \\
 \text{kgV}(12, 40) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120
 \end{array}$$

Bruchrechnung ($a, b, c \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$)

Echter Bruch: $\frac{a}{b}$ mit $|a| < |b|$, sonst *unecht*

Gemeiner Bruch: echter Bruch mit $b \neq 10^n$

Gemischte Zahl: $n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$, z. B. $7\frac{1}{9} = 7 + \frac{1}{9}$

Gemischte Zahlen möglichst vermeiden!

Stammbruch: $\frac{1}{a}$ mit $a \in \mathbb{N}^*$

Gleichnamige Brüche: Brüche mit gleichen Nennern

Kehrwert von $\frac{a}{b}$: $\frac{b}{a}$

Erweitern mit c : $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Kürzen mit c : $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} = \frac{a/c}{b/c}$

Kürzen mit dem $\text{ggT}(a, b)$ liefert *Normaldarstellung*.

Grundrechenarten mit Brüchen

- *Addition, Subtraktion:* $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ (gleichnamige Brüche)
Ungleichnamige Brüche werden vor der Addition/Subtraktion auf den *Hauptnenner*, z. B. das kgV der Nenner, gebracht (siehe Beispiel).

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \text{ falls } b \text{ und } d \text{ teilerfremd sind.}$$

- *Multiplikation:* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- *Division:* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (zweiten Bruch *stürzen*)

◆ **Beispiel**

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{14} - \frac{11}{12} = \frac{3 \cdot 21 + 5 \cdot 6 - 11 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$$

Polynomdivision (*Partialdivision*)

1. Ordnen von Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen von x
2. Nächstes Glied Dividend durch nächstes Glied Divisor ergibt nächstes Glied Quotient
3. Rückmultiplikation mit Divisor
4. Subtraktion
5. Wiederhole Schritte 2–4, bis die Differenz 0 wird oder ein Rest bleibt

◆ **Beispiel**

$$\begin{array}{r}
 (3x^3 - 2x^2 + 5x + 1) : (x^2 + 4) = 3x - 2 \\
 \underline{3x^3 + 12x} \\
 -2x^2 - 7x + 1 \\
 \underline{-2x^2 - 8} \\
 -7x + 9 \text{ (Rest)}
 \end{array}$$

Also folgt $\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4} = 3x - 2 \text{ Rest } (-7x + 9)$ oder

$$3x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = (3x - 2) \cdot (x^2 + 4) + (-7x + 9). \quad \blacklozenge$$

2.1.2.2 Proportionen, Verhältnisgleichungen

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

a, d Außenglieder, b, c Innenglieder, a, c Vorderglieder, b, d Hinterglieder. Brüche „über Kreuz multiplizieren“.

Fortlaufende Proportionen lassen sich in Teilproportionen zerlegen:

Aus $a : b : c = x : y : z$ folgen $a : b = x : y$, $a : c = x : z$ und $b : c = y : z$.

Proportionalitätsfaktor k

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \cdot c \\ b = k \cdot d \end{cases} \quad \text{mit } k = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, k \in \mathbb{R}$$

Direkte Proportionalität (Graph: Gerade)

$$y \sim x \Leftrightarrow y = k \cdot x$$

Indirekte Proportionalität (Graph: Hyperbel)

$$y \sim \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$

Erweitern, Kürzen, Vertauschungssätze ($a, b, c, d \neq 0$)

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Leftrightarrow ak : bk = c : d \\ &\Leftrightarrow ak : b = ck : d \\ &\Leftrightarrow d : b = c : a \\ &\Leftrightarrow a : c = b : d \text{ usw.} \end{aligned}$$

Korrespondierende Addition/Subtraktion

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Leftrightarrow (a \pm b) : a = (c \pm d) : c \\ &\Leftrightarrow (a \pm b) : b = (c \pm d) : d \\ &\Leftrightarrow (a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Stetige Proportion: $a : b = b : c$

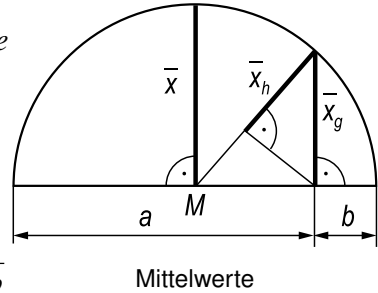
Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{a + b}{2}$

Geometrisches Mittel, mittlere Proportionale

$$a : x = x : b \Leftrightarrow \bar{x}_g = \sqrt{ab} \quad (a, b > 0)$$

Harmonisches Mittel, harmonische Proportion

$$(a - x) : (x - b) = a : b \Leftrightarrow \bar{x}_h = \frac{2ab}{a + b}$$



Allgemein gilt: $\bar{x} \geq \bar{x}_g \geq \bar{x}_h$ (Satz von CAUCHY, siehe 13.1.2)

2.1.2.3 Prozentrechnung

$$P = G_0 \cdot \frac{p}{100} = G_0 \cdot i, \quad 1\% \text{ von } G_0 \text{ sind } \frac{G_0}{100}$$

G_0 Grundwert, Basiswert, Bezugswert

P Prozentwert

p Prozentfuß in %, p von Hundert

$$i = \frac{p}{100} \text{ Prozentsatz}$$

Beim Vergleich von Prozentsätzen zum gleichen Grundwert wird die Differenz in *Prozentpunkten* ausgedrückt.

Die Sprechweise „ p % von G_0 “ meint $P = i \cdot G_0$.

Prozent „auf“ und „in“ Hundert

Auf Hundert sind Aufschläge auf den Grundwert (*Vomhundertsatz*):

$$p' = \frac{100 p}{100 + p} \% \quad (\text{auch Geldentwertung mit Inflationsrate } p)$$

In Hundert sind Abschläge (Verlust) vom Grundwert (*Rabatt*):

$$p' = \frac{100 p}{100 - p} \%$$

◆ Beispiele

- (1) $p = 19\%$ Mehrwertsteuer auf den Nettopreis sind

$$p' = \frac{100 \cdot 19}{100 + 19} \% = 15,97 \% \text{ Steueranteil am Verkaufspreis.}$$

- (2) Einem Materialverlust von 23% von der Einsatzmasse der Rohstoffe bei einer Fertigung entspricht ein höherer Materialeinsatz, vom Fertigprodukt aus betrachtet, von $p' = \frac{100 \cdot 23}{100 - 23} \% = 29,87\%$. ◆

2.1.2.4 Näherung

Abbruch der Grundziffernfolge

Zum Beispiel ergibt $\pi \approx 3,14159$ einen absoluten Fehler $\varepsilon < 10^{-5}$.

Runden (Das Zeichen \doteq heißt „gerundet gleich“)

Abrunden: Die letzte Ziffer a_i bleibt unverändert, wenn die erste weggelassene Ziffer $a_{i+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist.

Aufrunden: Ziffer a_i wird um 1 erhöht, wenn $a_{i+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ist.

Absoluter Fehler beim Runden einer Dezimalzahl a auf t Stellen der gerundeten Zahl \tilde{a} :

$$|\tilde{a} - a| \leq 0,5 \cdot 10^{-t} \quad t \text{ sichere (gültige) Dezimalen von } a$$

Die Formel gilt analog für das Runden ganzer Zahlen, siehe Beispiel (2).

◆ Beispiele

- (1) $\tilde{a} = 4,700$ steht für $4,6995 \leq a < 4,7005$ ($t = 3$), dagegen

$$\tilde{a} = 4,7 \text{ steht für } 4,65 \leq a < 4,75 \text{ (} t = 1 \text{)}$$

- (2) Runden auf Hunderter: $7\,345 \doteq 7\,300$, absoluter Fehler $\leq 0,5 \cdot 10^2$

- (3) Runden auf 10^{-3} : $6,748\,8 \doteq 6,749$, absoluter Fehler $\leq 0,5 \cdot 10^{-3}$

- (4) Runden von $45\,500\,750$ auf Millionen: $46\,000\,000$; auf Hunderttausend: $45\,500\,000$; auf Tausend: $45\,501\,000$, auf Hundert: $45\,500\,800$ ◆

2.1.2.5 Fehlerrechnung

Definition der Fehlergrößen

Bezeichnungen

x Wahrer, aber unbekannter Wert; Sollwert

a Näherungswert, Istwert, Messwert

Wahrer Fehler: $\Delta x = x - a$ (Messtechnik: Abweichung)

Absoluter Fehler: $|\Delta x| = |x - a| \Rightarrow x = a \pm \Delta x$

Fehlerschranke für den absoluten Fehler, *absoluter Höchstfehler*

$$|\Delta x| \leq \varepsilon_x \quad \text{mit } \varepsilon_x > 0, \text{ möglichst klein}$$

d. h. $a - \varepsilon_x \leq x \leq a + \varepsilon_x$ bzw. $x \in [a - \varepsilon_x; a + \varepsilon_x]$

Relativer Fehler

$$\delta_x = \frac{|\Delta x|}{|x|} = \frac{|x - a|}{|x|} \approx \delta_a = \frac{|\Delta x|}{a} = \frac{|x - a|}{|a|} \quad x, a \neq 0$$

Fehlerschranke für den relativen Fehler, *relativer Höchstfehler*

$$\delta_x \leq \rho_x \quad \text{mit } \rho_x > 0, \text{ möglichst klein}$$

$$\text{d. h. } \rho_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|}$$

Prozentualer Fehler: $\delta_x \cdot 100\%$

Fehlerschranke für den prozentualen Fehler, *prozentualer Höchstfehler*

$$\delta_x \cdot 100\% \leq \rho_x \cdot 100\% = \sigma_x \quad \text{mit } \sigma_x > 0, \text{ möglichst klein}$$

◆ Beispiel

Man berechne die relative Fehlerschranke (den relativen Höchstfehler) für den Näherungswert 2,718 der EULERSchen Zahl e .

Ein genauerer Näherungswert ist $e \approx 2,718281$, woraus eine obere Schranke für den absoluten Fehler von z. B. $\varepsilon_e = 0,0003$ resultiert.

Die relative Fehlerschranke von 2,718 ist dann $\rho_e = \frac{0,0003}{2,718} = 0,00011$. ◆

Fehlerarten numerischer Berechnungen

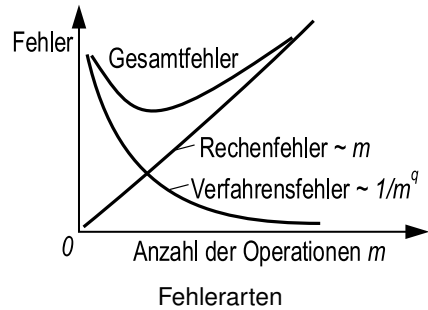
Eingabefehler, Eingangsfehler

$$\Delta x = x - a$$

Verfahrensfehler

Differenz der Lösung eines Näherungsverfahrens $\Phi(x)$ zum exakten Verfahren $f(x)$:

$$\Delta y = \Phi(x) - f(x)$$



Rechenfehler

Durch Rundung oder Abbruch entstandene Fehler.

Fortpflanzungsfehler

Fehler in den Ausgabedaten, die durch Fehler in den Eingabedaten erzeugt wurden.

Bemerkungen

In der numerischen Mathematik werden Eingabe- und Rechenfehler zusammengefasst.

Wird durch kleine Rundungsfehler während eines Algorithmus das Ergebnis stark verändert, ist der Algorithmus *instabil* und für eine Berechnung eher ungeeignet.

Rufen kleine Änderungen der Parameter eines Modells große Änderungen in den Lösungen hervor, so liegt ein *schlecht konditioniertes Modell* vor.

2.1.2.6 Betrag und Signum

(Absolut-)Betrag einer reellen Zahl

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad |-x| = |x| \quad |x| \geq 0$$

Für $a > 0$ gilt:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a \Leftrightarrow x^2 = a^2$$

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a; a) \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a; a] \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-a; a] \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$$

Regeln für Rechnen mit Beträgen

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

Vorzeichen (Signum) einer reellen Zahl

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

$$\operatorname{sgn}(a \cdot b) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} \left(\frac{a}{b} \right) \quad (b \neq 0)$$

2.1.2.7 Summen- und Produktzeichen

Summations- bzw. Multiplikationsindex (Laufvariable) $i \in \mathbb{Z}$

Summenzeichen (rekursive Definition)

$$\sum_{i=m}^n x_i := \begin{cases} 0 & \text{für } m > n \text{ (leere Summe)} \\ \left(\sum_{i=m}^{n-1} x_i \right) + x_n & \text{für } m \leq n \end{cases}$$

Gelesen „Summe über die x_i für i von m bis n “

Für $m \leq n$ gilt $\sum_{i=m}^n x_i = x_m + x_{m+1} + \dots + x_n$, speziell $\sum_{i=m}^m x_i = x_m$.

Andere Schreibweisen: $\sum_{i \in I} x_i, \sum_i x_i, \sum x_i, \sum_{i=m}^n x_i$

Regeln für Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad c \text{ Konstante}$$

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i \quad m < n$$

$$\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1) \cdot c \quad m \leq n, c \text{ Konstante}$$

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m-k}^{n-k} a_{j+k} \quad \text{Indexverschiebung}$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Summe zeilenweise} \\ = \text{Summe spaltenweise} \end{array}$$

Warnung: Im Allgemeinen ist $\sum_{i=m}^n a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=m}^n a_i \cdot \sum_{i=m}^n b_i$.

◆ Beispiel

Man transformiere den Index der Summation $\sum_{i=6}^{10} \frac{1}{4+2i}$ so, dass von $k=1$ an summiert wird. Dazu muss offenbar $k = i - 5$ oder $i = k + 5$ sein:

$$\sum_{i=6}^{10} \frac{1}{4+2i} = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{4+2(k+5)} = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{14+2k} \quad \blacklozenge$$

Produktzeichen (rekursive Definition)

$$\prod_{i=m}^n x_i := \begin{cases} 1 & \text{für } m > n \text{ (leeres Produkt)} \\ \left(\prod_{i=m}^{n-1} x_i \right) \cdot x_n & \text{für } m \leq n \end{cases}$$

Gelesen „Produkt über die x_i für i von m bis n “

Für $m \leq n$ gilt $\prod_{i=m}^n x_i = x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n$, speziell $\prod_{i=m}^m x_i = x_m$ und $\prod_{i=1}^n i = n!$
(n -Fakultät, siehe 2.1.5)

Andere Schreibweisen analog zu denen des Summenzeichens

Regeln für Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^n a_i \cdot b_i = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$$

$$\prod_{i=1}^n c a_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i \quad c \text{ Konstante}$$

$$\prod_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{i=m+1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i \quad m < n$$

$$\prod_{i=m}^n c = c^{n-m+1} \quad m \leq n, c \text{ Konstante}$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = \prod_{j=m-k}^{n-k} a_{j+k} \quad \text{Indexverschiebung}$$

2.1.3 Potenzen und Wurzeln

Potenzieren und *Radizieren* (Wurzelziehen) sind Rechenoperationen der 3. Stufe.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$)

$$a^n := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

n Exponent

a Basis

Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist also $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$.

Spezielle Basen: $0^n = 0$ ($n \neq 0$), $1^n = 1$

0^0 ist nicht definiert! Aber zur Darstellung von Polynomen, binomischem Lehrsatz und Potenzreihen mithilfe des Summenzeichens ist es sinnvoll, $0^0 := 1$ zu setzen. Dann kann auch $x = 0$ im Zusammenhang $x^0 = 1$ zugelassen werden.

$n = 2$: *Quadratzahlen*, $n = 3$: *Kubikzahlen*

Reziproke Zahl, Kehrwert

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \cdot a^{-1} = 1 \quad a \neq 0$$

Vorzeichenregeln ($n \in \mathbb{Z}$)

$$a^n > 0 \quad \text{für } a > 0$$

$$a^{2n} > 0 \quad \text{für } a < 0 \quad \text{speziell } (-1)^{2n} = 1$$

$$a^{2n+1} < 0 \quad \text{für } a < 0 \quad \text{speziell } (-1)^{2n+1} = -1$$

n -te Wurzel (Radizieren)

Die nicht-negative, eindeutige Lösung der Gleichung $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a \geq 0$ heißt n -te Wurzel aus a :

$$x = \sqrt[n]{a}$$

n Wurzelexponent ($n = 2$ nicht extra geschrieben)

a Radikand

x Wurzelwert

Speziell $\sqrt[n]{0} = 0$ $\sqrt[n]{1} = 1$

$n = 2$: *Quadratwurzeln*: $\sqrt{x^2} = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$

$n = 3$: *Kubikwurzeln*: $\sqrt[3]{x^3} = x$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

◆ Beispiele

(1) $\sqrt[5]{32} = 2$, weil $2^5 = 32$

(2) $\sqrt{4} = 2$. Falsch: $\sqrt{4} = -2$ oder $\sqrt{4} = \pm 2$. Dagegen richtig: Die quadratische Gleichung $x^2 = 4$ hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. ◆

Wurzelgesetze ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Dagegen gilt i. Allg.: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Damit ist a^x für $a \geq 0$ und $x \in \mathbb{Q}$ definiert. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $a^x := \lim_{k \rightarrow \infty} a^{x_k}$, wobei (x_k) eine rationale Folge mit Grenzwert x ist (siehe 2.4.2).

Potenzgesetze ($a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ (a^x)^y &= (a^y)^x = a^{x \cdot y} \end{aligned}$$

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sind die Gesetze auch gültig für negative Basen a, b .

◆ **Beispiele**

$$(1) 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 7^1 = 7, \text{ entspricht } \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7$$

$$(2) 32^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{32})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(3) (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81$$

◆

Warnung: *Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind nur für nicht-negative Basen definiert!* Der Ausdruck $(-8)^{1/3}$ ist also nicht definiert. Würde man ihm den (nahe liegenden) Wert -2 zuordnen, würde die Anwendung der üblichen Potenzgesetze zu Widersprüchen führen, z. B.

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2 !$$

Rationalmachen des Nenners

Brüche mit Wurzeln im Nenner kann man so erweitern, dass der Nenner rational wird. In der Numerischen Mathematik evtl. ungünstig wie im folgenden Beispiel (1), falls $a^2 \approx b$ (*Ziffernauslöschung* im Nenner!)

◆ **Beispiele**

$$(1) \frac{m}{a + \sqrt{b}} = \frac{m(a - \sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \frac{m(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

$$(2) \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x}{x^{3/4}} = \frac{x \cdot x^{1/4}}{x^{3/4} \cdot x^{1/4}} = \frac{x \cdot x^{1/4}}{x} = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$$

◆

2.1.4 Logarithmen

Die eindeutige Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \neq 1$ heißt *Logarithmus* von a zur Basis b :

$$x = \log_b a$$

Der Logarithmus von a zur Basis b ist also diejenige reelle Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

a Numerus, *Logarithmand*, $a \in \mathbb{R}_{>0}$

b Basis, $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$

Regeln

$$b^{\log_b x} = x \quad (x \in \mathbb{R}_{>0})$$

$$\log_b b^x = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

◆ **Beispiele**

$$(1) \log_{10} 1000 = 3, \text{ weil } 10^3 = 1000$$

$$(2) \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}, \text{ weil } 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$$

$$(3) \log_3 \frac{1}{9} = -2, \text{ weil } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$



Logarithmengesetze

$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
$\log_b \frac{x}{y} = -\log_b \frac{y}{x}$	$\log_b \frac{1}{y} = -\log_b y$
$\log_b x^c = c \cdot \log_b x \quad (c \in \mathbb{R})$	$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x \quad (n \geq 2)$

Bemerkung: $\log_b(x \pm y)$ lässt sich nicht symbolisch vereinfachen.

Dekadischer (gemeiner, BRIGGSscher) Logarithmus (Basis $b = 10$)

Bilder der Logarithmusfunktionen in [7.7.3](#)

$\lg a := \log_{10} a$			
$\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a$	$\lg 10^x = x$	$10^{\lg a} = a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$

Halblogarithmische Darstellung einer positiven reellen Zahl

$$a = m \cdot 10^k \qquad a > 0$$

$$\lg a = \lg m + k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Mantisse $m \in [1; 10) \Leftrightarrow \lg m \in [0; 1)$

Kennzahl k des Logarithmus gleich Stellenzahl der Mantisse vor dem Komma minus 1 bzw. bei echten Dezimalbrüchen negativ gleich Anzahl der Nullen bis zur ersten gültigen Ziffer.

◆ **Beispiele**

$$(1) 27\,900 = 2,79 \cdot 10^4, \quad \lg 27\,900 = \lg 2,79 + 4 = 4,445\,60$$

$$(2) 0,005\,49 = 5,49 \cdot 10^{-3},$$

$$\lg 0,005\,49 = \lg 5,49 - 3 = 0,739\,57 - 3 = -2,260\,43$$



Natürlicher Logarithmus (logarithmus naturalis, ln)

$$\text{Basis } e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281\,828\,459 \dots \text{EULERSche Zahl}$$

$$\ln a := \log_e a$$

$$x = \ln a \Leftrightarrow e^x = a \quad \ln e^x = x \quad e^{\ln a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus, lb)

$$\text{Basis } b = 2$$

$$\text{lb } a := \log_2 a$$

$$x = \text{lb } a \Leftrightarrow 2^x = a \quad \text{lb } 2^x = x \quad 2^{\text{lb } a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Statt lb ist auch die Bezeichnung ld (*logarithmus dualis*) gebräuchlich.

Basiswechsel der Logarithmensysteme

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\text{Speziell } x = a \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

◆ Beispiele

$$(1) \log_7 12 = \frac{\ln 12}{\ln 7} \approx 1,2770$$

(2) Wechsel binäre in natürliche Logarithmen (Taschenrechner!):

$$\text{lb } x = \frac{\ln x}{\ln 2} \approx 1,442\,695 \cdot \ln x$$

(3) Wechsel natürliche in dekadische Logarithmen:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx 2,302\,585 \cdot \lg x \quad \blacklozenge$$

2.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Fakultät ($n \in \mathbb{N}$) (*rekursive Definition*)

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Gelesen: „*n*-Fakultät“

Für $n \geq 1$ ist also $n!$ das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Interpretation: Gegeben seien n unterscheidbare Objekte. Dann gibt es $n!$ Möglichkeiten, diese Objekte anzuordnen ($n!$ *Permutationen*, siehe 2.3.1).

Binomialkoeffizient ($\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$)

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

Speziell für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Gelesen: „ α über k “, für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ auch „ k aus n “

Interpretation von $\binom{n}{k}$: Gegeben seien n unterscheidbare Objekte. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, daraus k Objekte auszuwählen (siehe 2.3.3).

Rekursionsformel zur Berechnung: $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1} \cdot \frac{\alpha - k + 1}{k}$

Symmetriesatz: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, speziell $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Additionssatz: $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$

◆ Beispiele

$$(1) \quad \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$(2) \quad \binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{5}{16}$$



PASCALSches Dreieck zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

Zeile n							Zeilensumme
$n = 0$	1						2^0
$n = 1$		1		1			2^1
$n = 2$		1	2		1		2^2
$n = 3$		1	3	3		1	2^3
$n = 4$	1	1	4	6	4	1	2^4
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	2^5
	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	
$\binom{n}{k} =$	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	

Jede Zahl ist die Summe der beiden schräg darüber stehenden Zahlen. In Zeile n stehen von links nach rechts die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{n}$.

Additionstheoreme ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$)

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \dots + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}$$

$$\binom{\alpha}{0} \binom{\beta}{k} + \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{k-1} + \dots + \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

Speziell für $\alpha = \beta = k = n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

Daraus durch Addition: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Binomischer Lehrsatz für natürliche Exponenten ($a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + (-1)^n b^n$$

Spezialfälle für kleine Werte von n (*binomische Formeln*):

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

◆ **Beispiel**

Man berechne $(2x - 3)^4$, d. h. $a = 2x$, $b = 3$, $n = 4$:

$$\begin{aligned} (2x - 3)^4 &= (2x)^4 - 4(2x)^3 \cdot 3 + 6(2x)^2 \cdot 3^2 - 4(2x) \cdot 3^3 + 3^4 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81 \end{aligned}$$



Division von Binomen

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b \pm \dots + ab^{n-2} - b^{n-1} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b \pm \dots - ab^{n-2} + b^{n-1} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$\frac{a^n + b^n}{a - b}$ ist dagegen nicht ohne Rest teilbar.

Allgemeiner binomischer Lehrsatz für reelle Exponenten ($a, b, x \in \mathbb{R}$)

$$(a + b)^x = a^x + \binom{x}{1} a^{x-1}b + \binom{x}{2} a^{x-2}b^2 + \dots$$

Für $x \notin \mathbb{N}$ entsteht eine unendliche Reihe, siehe 12.1.5 Binomische Reihe.
Konvergenzbedingung: $|b| < |a|$

2.2 Menge der komplexen Zahlen

2.2.1 Grundbegriffe

Eine komplexe Zahl z ist ein Ausdruck der Form $x + jy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $j^2 = -1$. Die Menge aller komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} = \{z = x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}$$

Imaginäre Einheit: $j = \sqrt{-1}$, auch $i = \sqrt{-1}$

Realteil von z : $\operatorname{Re} z := x$

Imaginärteil von z : $\operatorname{Im} z := y$

Uneingeschränkt ausführbar sind alle Operationen für reelle Zahlen sowie zusätzlich die Erfüllbarkeit der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ durch $x_{1,2} = \pm j$. \mathbb{C} ist ein Körper (siehe 2.1.2.1). In \mathbb{C} gibt es im Gegensatz zu \mathbb{R} aber keine Ordnungsrelation ($>$, $<$).

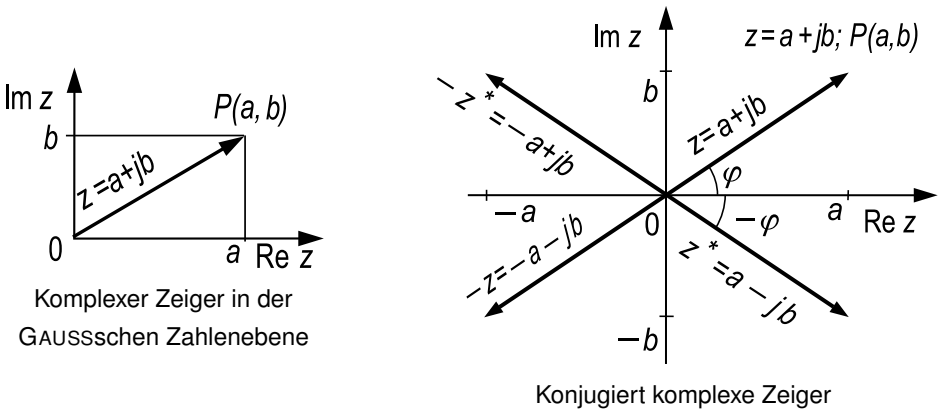
Reelle Zahl: $z = x + j \cdot 0 = x$ $x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
Imaginäre Zahl: $z = 0 + j \cdot y = jy$ $(jy)^2 = -y^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$

Daraus folgt $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen in der GAUSSSchen Zahlenebene

Eineindeutige Abbildung der komplexen Zahlen auf die Punkte P der Ebene \mathbb{R}^2 (GAUSSSche Zahlenebene) durch $z = x + jy \leftrightarrow P(x, y)$. Darstellung durch *komplexen Zeiger* (Vektor von 0 zu $P(x, y)$).

Obwohl hier eine Analogie zur Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 vorliegt, lassen sich nicht alle Konzepte der Vektoralgebra auf \mathbb{C} übertragen, z. B. nicht Skalarprodukt oder Vektorprodukt.



Konjugiert komplexe Zahlen

Zu $z = a + jb$ gehört die *konjugiert komplexe Zahl* $z^* = a - jb$.

Die Zeiger von z und z^* liegen spiegelbildlich zur reellen Achse.

Statt z^* ist (vor allem in der reinen Mathematik) auch die Bezeichnung \bar{z} üblich.

Es gilt

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z - z^*)$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$(z^*)^* = z$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$z \cdot z^* = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z$$

Betrag einer komplexen Zahl ($z = a + jb$)

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z} \quad |z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Der Betrag ist die Länge des Zeigers von z in der GAUSSschen Zahlenebene. Es gilt:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Signum einer komplexen Zahl

$$\operatorname{sgn} z := \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases} \quad z = |z| \cdot \operatorname{sgn} z$$

Argument einer komplexen Zahl (Polarwinkel, Phase)

Das *Argument* von $z = x + jy$ ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Zeiger von z :

$$\varphi = \arg z \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Das Argument ist nur bis auf Vielfache von 360° eindeutig bestimmt, so bedeutet z. B. $\varphi = -40^\circ$ dasselbe wie $\varphi = 320^\circ$. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, wird der *Hauptwert* des Arguments auf $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) festgelegt¹⁾. φ wird dann für $x \neq 0$ nach folgender *Quadrantenregel* berechnet:

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{y}{x} + \begin{cases} \pi & \text{falls } x + jy \text{ im II. Quadranten} \\ -\pi & \text{falls } x + jy \text{ im III. Quadranten} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

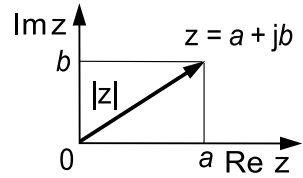
Man skizziere die Lage des Zeigers.

¹⁾ Der Hauptwert wird manchmal auch (aber nicht DIN-gerecht) als $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ definiert.

2.2.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form

$$z = x + jy = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z, \quad x, y \in \mathbb{R}$$



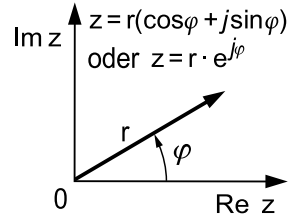
Kartesische Form

Trigonometrische Form

$$z = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Polarform

$$z = r e^{j\varphi}$$



Trigonometrische und Polarform

Den Zusammenhang zwischen den drei Formen liefert die

EULERSche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$$

Die komplexe Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi j$ (siehe 7.12):

$$e^{j\varphi + 2\pi j} = e^{j\varphi}$$

Spezielle Werte von $e^{j\varphi}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$e^{j2k\pi} = 1$$

$$e^{j(2k+1)\pi} = -1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j$$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

◆ Beispiele für Umwandlungen

(1) Man wandle $z = -3 + 4j$ um in die Polarform:

$$r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{4}{-3} + \pi = -0,9273 + \pi = 2,214 \text{ rad} \hat{=} 126,87^\circ$$

(II. Quadrant)

$$z = -3 + 4j = 5e^{2,214j}$$

(2) Man wandle $z = 17e^{j37^\circ 22'}$ um in die trigonometrische und kartesische Form:

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = 17(\cos 37^\circ 22' + j \sin 37^\circ 22') = 13,5 + 10,3j \quad \blacklozenge$$

2.2.3 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Alle Rechenregeln für \mathbb{R} bleiben erhalten (*Permanenzprinzip*).

Im Folgenden sei stets $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$.

Gleichheit zweier komplexer Zahlen

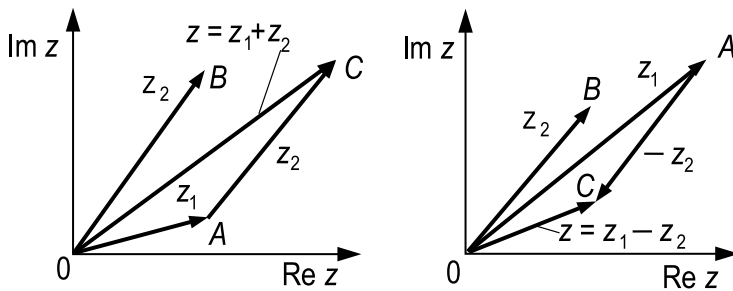
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Addition und Subtraktion sind nur in der kartesischen Form möglich.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

Grafisches Verfahren: Vektoraddition, Zeigeraddition (*Parallelogrammregel*)



Grafische Addition und Subtraktion komplexer Zeiger

Multiplikation komplexer Zahlen

Arithmetische Form: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

Trigonometrische Form: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

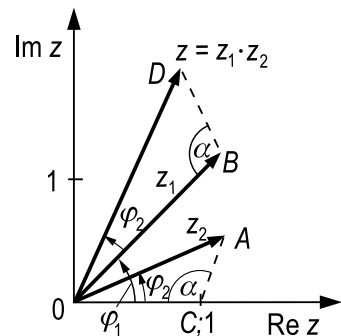
Polarform: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Geometrische Deutung, grafisches Verfahren

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 \cdot z_2$ ist eine Drehstreckung: Der Zeiger von z_1 wird um den Winkel φ_2 gedreht und mit dem Faktor r_2 gestreckt.

Konstruktion: φ_2 an z_1 antragen; $C = (1; 0)$ mit A verbinden; α an z_1 in B antragen.

Begründung: $\triangle OBD \sim \triangle OCA$, daher $r/r_1 = r_2/1$ oder $r = r_1 \cdot r_2$



Grafische Multiplikation

Division komplexer Zahlen

Arithmetische Form:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Trigonometrische Form:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

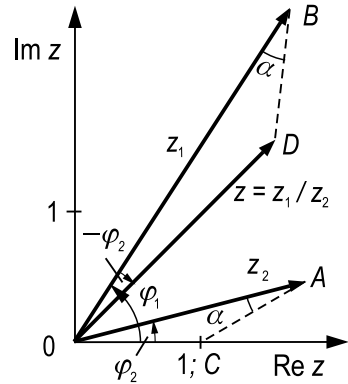
Polarform:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Geometrische Deutung, grafisches Verfahren

Die Division zweier komplexer Zahlen z_1 / z_2 ist eine Drehstreckung: Der Zeiger von z_1 wird um den Winkel $-\varphi_2$ gedreht und mit dem Faktor $1/r_2$ gestreckt.

Konstruktion: $-\varphi_2$ an z_1 antragen; $C = (1; 0)$ mit A verbinden; α an z_1 in B antragen.

Begründung: $\triangle ODB \sim \triangle OCA$, daher $r_1/r = r_2/1$ oder $r = r_1/r_2$



Grafische Division

Multiplikation/Division von z mit -1 entspricht einer Drehung des Zeigers von z um 180° . Multiplikation mit j entspricht einer Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn. Division durch j entspricht einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinn.

◆ Beispiele

(1) $(5 - 3j) - (3 + 5j) = 2 - 8j$

(2) $5j \cdot 7j = 35j^2 = -35$

(3) $(1 + 2j) \cdot (3 - j) = 3 - j + 6j - 2j^2 = 5 + 5j$

(4) $2e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot 3e^{j\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot 3e^{j(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = 6e^{j\frac{\pi}{2}} = 6j$

(5) $\frac{1 + 2j}{3 - 2j} = \frac{(1 + 2j)(3 + 2j)}{(3 - 2j)(3 + 2j)} = \frac{-1 + 8j}{3^2 + (-2)^2} = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}j$ ◆

2.2.4 Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Wie im Reellen definiert man $z^0 := 1$ und $z^{-n} := \frac{1}{z^n}$ für $z \neq 0$.

Für Potenzbildung ist die Polarform besser geeignet als die kartesische:

$$z = re^{j\varphi} \Rightarrow z^n = r^n e^{jn\varphi}$$

Speziell für $r = 1$ in der trigonometrischen Form folgt daraus der

Satz von MOIVRE

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi$$

Potenzen der imaginären Einheit j ($k \in \mathbb{Z}$)

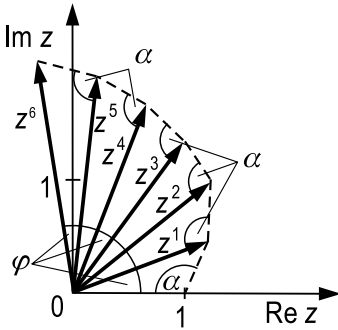
$$j^0 = j^{4k} = 1$$

$$j^1 = j^{4k+1} = j$$

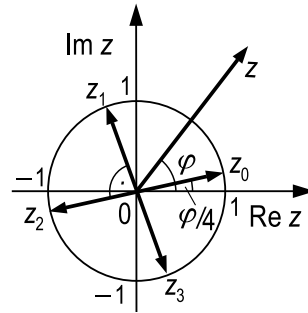
$$j^2 = j^{4k+2} = -1$$

$$j^3 = j^{4k+3} = -j$$

Die n -te Potenz einer komplexen Zahl ist eine n -fache Drehstreckung. Konstruktion durch wiederholte grafische Multiplikation.



Komplexe Potenzen



Komplexe Wurzeln

Komplexe n -te Wurzeln

Die Gleichung $z^n = c = r e^{j\varphi}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ hat für $c \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen in \mathbb{C} . Sie heißen *komplexe n -te Wurzeln* von c :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{j \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right)$$

mit $k = 0, 1, \dots, n-1$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$.

z_0 heißt *Hauptwurzel*, z_k ($k = 1, \dots, n-1$) k -te *Nebenwurzel*.

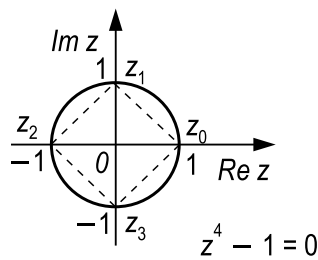
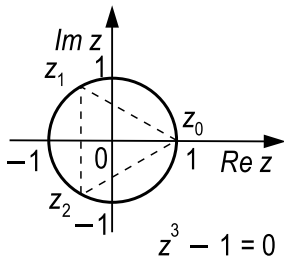
Geometrische Deutung

Die Pfeilspitzen der n -ten komplexen Wurzeln bilden in der GAUSSschen Zahlenebene ein reguläres n -Eck um den Nullpunkt mit Radius $\sqrt[n]{r}$.

Komplexe n -te Einheitswurzeln

Die n verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ heißen *n -te Einheitswurzeln*:

$$z_k = e^{j \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}} = \cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Komplexe 3. und 4. Einheitswurzeln

◆ Beispiele

$$(1) z^3 = 1 \Rightarrow z_0 = 1 \text{ (Hauptwert)}, z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$(2) z^4 = 1 \Rightarrow z_0 = 1 \text{ (Hauptwert)}, z_{1,3} = \pm j, z_2 = -1$$

$$(3) \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = j\sqrt{2} \cdot j\sqrt{8} = -4, \text{ falsch ist } \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = \sqrt{(-2) \cdot (-8)} = 4$$

◆

2.2.5 Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen

Wählt man für $z = re^{j\varphi}$ die Polardarstellung, so ergibt sich als Verallgemeinerung des natürlichen Logarithmus im Reellen der Logarithmus im Komplexen:

$$\ln z = \ln(re^{j\varphi}) = \ln r + j\varphi$$

Das Argument φ ist dabei aber nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, d. h. der komplexe Logarithmus ist nicht eindeutig. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, verlangt man üblicherweise, dass $-\pi < \varphi \leq \pi$ ist (*Hauptwert des Arguments*). Der dann eindeutig definierte komplexe Logarithmus wird ebenfalls mit \ln bezeichnet:

Sei $z = re^{j\varphi} \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

$\ln z = \ln r + j\varphi$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ heißt *Hauptwert des Logarithmus*. Auch die Zahlen $\ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$ sind Logarithmen von z . Sie heißen k -te *Nebenwerte*, kurz $\ln_k z$.

◆ Beispiele

$$(1) \ln(-2) = \ln 2 + j\pi \text{ (Argument von } -2 \text{ ist } \pi)$$

$$(2) \ln(2j) = \ln 2 + j\frac{\pi}{2}$$

$$(3) \ln(2 + 2j) = \ln \sqrt{8} + j\frac{\pi}{4}$$

◆

Warnung: Die im Reellen gültige Funktionalgleichung des Logarithmus $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ gilt im Komplexen nicht!

Beispielsweise ist $\ln(-2) + \ln(-2) = 2 \ln 2 + 2j\pi = \ln 4 + 2j\pi$, dagegen $\ln((-2) \cdot (-2)) = \ln 4 = \ln 4$.

2.3 Kombinatorik

Die *Kombinatorik* befasst sich mit dem systematischen Anordnen und Abzählen einer endlichen Menge von Objekten unter Beachtung vorgegebener Regeln.

Fundamentalprinzip der Kombinatorik (*Zählprinzip*)

Aus k nicht-leeren Mengen M_i , $i = 1, 2, \dots, k$ mit jeweils n_i Elementen kann man $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ verschiedene geordnete k -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_k) , $x_i \in M_i$, bilden.

2.3.1 Permutationen

Eine eineindeutige (*bijektive*) Abbildung der endlichen Menge $G = \{1, 2, \dots, n\}$ in sich selbst heißt *Permutation* (Umordnung).

Darstellung einer Permutation π :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \text{ oder } \pi = j_1 j_2 \dots j_n \text{ mit } j_i = \pi(i)$$

Bei Permutationen wird grundsätzlich die Reihenfolge beachtet, d. h. $123 \neq 132$.

Permutationen ohne Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: n -Tupel verschiedener Elemente

Urnenmodell: Ziehen aller n durchnummerierten Kugeln *ohne Zurücklegen* mit Notierung der Reihenfolge.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen *ohne Wiederholung*:

$$P_n = n!$$

◆ Beispiele

- (1) Sämtliche Permutationen der Elemente 1, 2, 3 *lexikografisch geordnet*:
123, 132, 213, 231, 312, 321
Anzahl der Tripel: $P_3 = 3! = 6$
- (2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Bilder waagrecht anzuordnen?
Anzahl der 4-Tupel: $P_4 = 4! = 24$ ◆

Permutationen mit Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: n -Tupel, in denen das Element $i \in G$ insgesamt n_i -mal vorkommt ($1 \leq i \leq n$).

Urnenmodell: Ziehen von n durchnummerierten Kugeln *mit Zurücklegen* und mit Notieren der Reihenfolge, wobei die i -te Kugel n_i -mal gezogen wurde.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen *mit Wiederholungen* n_1, n_2, \dots, n_r :

$$P_n^{n_1, \dots, n_r} = \binom{n}{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!} \quad (\text{Polynomialkoeffizient})$$

wobei $n = n_1 + \dots + n_r$, $n_i \in \mathbb{N}^*$.

◆ Beispiel

Wie viele verschiedene elf-buchstabile Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

$n = 11$ (Buchstaben insgesamt), $n_1 = 1$ (Wiederholungen von M), $n_2 = 4$ (von I), $n_3 = 4$ (von S), $n_4 = 2$ (von P).

Kontrolle: $n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$.

Anzahl der Permutationen mit Wiederholung:

$$P_{11}^{1,4,4,2} = \binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650 \quad \blacklozenge$$

Inversionen

Stehen zwei Elemente in einer Permutation entgegen ihrer natürlichen Reihenfolge, so bilden sie eine *Inversion*. Vertauschung zweier benachbarter Elemente verändert also die Anzahl der Inversionen um ± 1 .

Eine Permutation heißt *gerade* bzw. *ungerade*, wenn sie eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Inversionen enthält. Es gibt jeweils $n!/2$ gerade und ungerade Inversionen.

◆ **Beispiel**

$\pi = 4132$ enthält die vier Inversionen 41, 43, 42 und 32, ist also eine gerade Permutation. ◆

2.3.2 Variationen

Anordnungen, die aus einer Menge G von n Elementen eine bestimmte Anzahl k mit *Berücksichtigung der Reihenfolge* enthalten, heißen *Variationen* von n Elementen zur k -ten Klasse ($1 \leq k \leq n$).

Variationen ohne Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: k -Tupel verschiedener Elemente

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten *ohne Zurücklegen* und mit Notieren der Reihenfolge (geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

Anzahl der Variationen von n Elementen zur k -ten Klasse *ohne Wiederholung*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k! = [n]_k = \prod_{i=1}^k (n-i+1), \quad 1 \leq k \leq n$$

Faktorielle ($k \in \mathbb{N}^*$)

Steigende Faktorielle: $(n)_k := \prod_{i=1}^k (n+i-1) = n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$

Fallende Faktorielle: $[n]_k := \prod_{i=1}^k (n-i+1) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Daneben findet man auch die Bezeichnungen *obere Faktorielle* $n^{\bar{k}}$ bzw. *untere Faktorielle* $n^{\underline{k}}$.

◆ **Beispiele**

(1) Wie viele Würfe mit verschiedenen Augen sind mit drei Würfeln möglich?

$$V_6^3 = [6]_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

(2) Wie viele und welche zweistelligen Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2 und 3 ohne Wiederholung bilden?

$$V_3^2 = [3]_2 = 3 \cdot 2 = 6. \text{ Die Zahlen lauten } 12, 13, 21, 23, 31, 32. \quad \blacklozenge$$

Variationen mit Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: k -Tupel

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten mit Zurücklegen und mit Notieren der Reihenfolge (geordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

Anzahl der Variationen von n Elementen zur k -ten Klasse mit Wiederholung

$$V_{n,w}^k = n^k$$

Bemerkung: Hier ist auch $k > n$ zulässig.

◆ Beispiele

(1) Wie Beispiel (2) oben, aber mit Wiederholung:

$$V_{3,w}^2 = 3^2 = 9. \text{ Die Zahlen lauten } 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.$$

(2) Wie viele Varianten gibt es beim Ausfüllen eines Fußballtoto-Scheines?

$n = 3$ (gewonnen, unentschieden, verloren)

$k = 11$ (Anzahl der Spiele)

$$V_{3,w}^{11} = 3^{11} = 177\,147$$



2.3.3 Kombinationen

Anordnungen, die aus einer Menge G von n Elementen eine bestimmte Anzahl k ohne Berücksichtigung der Reihenfolge enthalten, heißen *Kombinationen* von n Elementen zur k -ten Klasse ($1 \leq k \leq n$).

„Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“ heißt, dass z. B. die Kombinationen 123, 132, 213 als eine einzige und nicht als drei verschiedene gezählt werden. Man erreicht dies am einfachsten dadurch, dass man jede Kombination der Größe nach ordnet. Die Duplikate werden dann nicht mitgezählt.

Kombinationen ohne Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: Teilmengen von G mit k Elementen

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten ohne Zurücklegen und ohne Notieren der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k -ten Klasse ohne Wiederholung

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{V_n^k}{k!} \quad 1 \leq k \leq n$$

◆ **Beispiel**

Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Ankreuzen von sechs Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 49 (Zahlenlotto „6 aus 49“)?

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$



Kombinationen mit Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: geordnete k -Tupel

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten mit Zurücklegen und ohne Notieren der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k -ten Klasse mit Wiederholung

$$C_{n,w}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

◆ **Beispiel**

Wie viele Ziffernkombinationen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es bei einem Wurf mit zwei Würfeln?

$$C_{6,w}^2 = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Es sind dies: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66.



Übersicht

	<i>Permutationen</i>	<i>Variationen</i>	<i>Kombinationen</i>
beteiligte Elemente	alle n	Auswahl k aus n	Auswahl k aus n
Reihenfolge	beachten	beachten	nicht beachten
Anzahl <i>ohne</i> Wiederholung	$n!$	$[n]_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ mit $1 \leq k \leq n$	$\binom{n}{k}$ mit $1 \leq k \leq n$
Anzahl <i>mit</i> Wiederholung	$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!}$ mit $n_1 + \dots + n_r = n$	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

2.4 Folgen

2.4.1 Allgemeines

Eine *Folge* ist eine Abbildung einer Menge natürlicher Zahlen $D \subseteq \mathbb{N}^*$ (gelegentlich auch $D \subseteq \mathbb{Z}$) in eine Menge M (Wertebereich).

M ist Punktmenge: *Punktfolge*; M ist Zahlenmenge: *Zahlenfolge*, d. h. eine geordnete Menge (*Tupel*) reeller Zahlen.

Eine *reelle Zahlenfolge* ist eine *diskrete Funktion* mit der *Bildungsvorschrift* $a_k := f(k)$, $D(f) = \mathbb{N}^*$, d. h. Gliednummern $k \in \mathbb{N}^*$.

Folgen sind i. Allg. *unendlich*, soweit nichts anderes (*endlich*) erwähnt ist.

Die Elemente $f(k)$ des Wertebereiches (*Funktionswerte*) heißen *Glieder der Folge* und sind ebenfalls Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$ bzw. $a_k \in \mathbb{C}$.

Schreibweisen einer Zahlenfolge

(a_k) , auch $\{a_k\}$, $[a_k]$, $\langle a_k \rangle$ oder nur *Folge* a_k

k : *Index* des Folgengliedes a_k , *Urbild*, $k \in \mathbb{N}^*$

a_k : allgemeines Folgenglied, *Bild*, *Funktionswert*

a_n : *Endglied* einer endlichen Zahlenfolge mit $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$

Definitionen von Folgen

In Worten: „Jeder natürlichen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet.“

Explizite Darstellung: $(a_k) : a_k := f(k)$

- Endliche Folge: $(a_k) := a_1, a_2, \dots, a_n$ oder $a_k := f(k)$ für $k = 1, \dots, n$
- Unendliche Folge: $(a_k) := a_1, a_2, \dots$ oder $a_k := f(k)$ für $k \in \mathbb{N}^*$

Rekursive Definition: $a_k := \varphi(a_{k-1})$ mit Angabe des ersten Gliedes

*Tabellarische Darstellung*¹⁾: Beispiel: $(a_k) := 1, 4, 9, \dots$

Grafische Darstellungen:

- a_k auf der Zahlengeraden (Zahlenfolge)
- (k, a_k) im rechtwinkligen Koordinatensystem (Punktfolge)

¹⁾ Diese Darstellung kann auch dann noch verwendet werden, wenn die analytischen Darstellungen versagen, z. B. Folge der Primzahlen : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ...

Eine Zahlenfolge (a_k) heißt

$$\left. \begin{array}{l} \text{negativ (positiv) definit} \\ \text{(streng) monoton wachsend} \\ \text{(streng) monoton fallend} \\ \text{alternierend} \end{array} \right\} \text{ wenn } \forall k \text{ gilt } \left\{ \begin{array}{l} a_k < 0 \text{ (} a_k > 0 \text{)} \\ (a_k < a_{k+1}) \ a_k \leq a_{k+1} \\ (a_k > a_{k+1}) \ a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \cdot a_{k+1} < 0 \end{array} \right.$$

◆ Beispiele

(1) $a_k := k^2 \Rightarrow (a_k) = 1, 4, 9, 16, \dots$ 12. Glied: $a_{12} = 12^2 = 144$

(2) $a_1 := 2, a_k := a_{k-1} + 2k, k = 1, 2, \dots$ (rekursive Definition) \Rightarrow
 $a_k = k(k+1)$ (explizite Darstellung) ◆

2.4.2 Schranken, Grenzen, Grenzwert einer Folge

Eine Zahlenfolge (a_k) hat eine *untere Schranke* S_u , wenn $\forall k: a_k \geq S_u$,
obere Schranke S_o , wenn $\forall k: a_k \leq S_o$.

Zum Beispiel ist jede monoton wachsende Folge nach unten beschränkt durch das erste Glied ($S_u = a_1$).

Das offene Intervall $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ heißt ε -Umgebung von a , wobei $a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Eine beliebige Zahlenfolge (a_k) hat den *Grenzwert* g genau dann, wenn für jede noch so kleine positive Zahl $\varepsilon > 0$ fast alle (d. h. alle bis auf endlich viele) a_k innerhalb der ε -Umgebung $U_\varepsilon(g)$ von g liegen.

Damit gleichbedeutend ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich ein Index $k_0 = k_0(\varepsilon)$ angeben, sodass gilt:

$$|a_k - g| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq k_0.$$

Schreibweise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = g \quad \text{oder} \quad (a_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g$$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc} | & & | \\ a - \varepsilon & a & a + \varepsilon \end{array} \right)}^{\varepsilon\text{-Umgebung}}$$

Eine Zahlenfolge heißt *konvergent*, wenn der Grenzwert g existiert (d. h. (a_k) konvergiert gegen g), sonst *divergent*.

Jede nach oben (unten) beschränkte, monoton wachsende (fallende) Zahlenfolge konvergiert gegen ihr *Supremum* (*Infimum*), siehe 1.3.1.