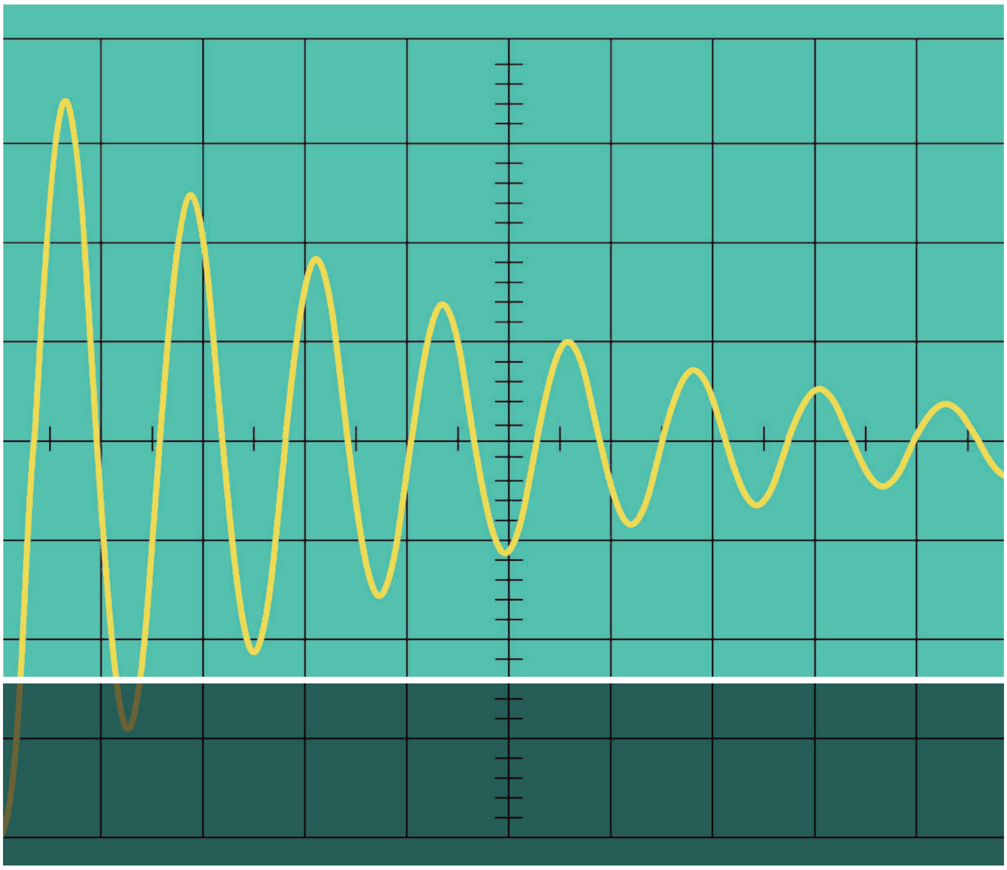
Arnold Führer
Klaus Heidemann
Wolfgang Nerreter

Grundgebiete der Elektrotechnik 2

Zeitabhängige Vorgänge



10., neu bearbeitete Auflage

HANSER

Führer / Heidemann / Nerreter

Grundgebiete der Elektrotechnik

Band 2: Zeitabhängige Vorgänge

Grundgebiete der Elektrotechnik

Band 1: Stationäre Vorgänge
Band 2: Zeitabhängige Vorgänge
Band 3: Aufgaben

Arnold Führer † (1940-2010)

Klaus Heidemann

Wolfgang Nerreter

Grundgebiete der Elektrotechnik

Band 2: Zeitabhängige Vorgänge

10., neu bearbeitete Auflage

mit 465 Bildern, 122 durchgerechneten Beispielen, 49 Praxisbezügen und 152 Aufgaben mit Lösungen

HANSER

Bearbeitung der 10. Auflage:

Prof. Dr.-Ing. Holger Borcherding, Hessisch-Oldendorf
Prof. Dipl.-Ing. Klaus Heidemann, Lemgo
Prof. Dr.-Ing. Uwe Meier, Lemgo
Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Nerreter, Lemgo

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Einbandrealisierung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-45954-0
E-Book-ISBN 978-3-446-46093-5

Das Wenige verschwindet leicht dem Blick,
der vorwärts sieht, wie viel noch übrig bleibt.

J. W. v. GOETHE: „Iphigenie auf Tauris“

Vorwort zur 10. Auflage

Die Mahnung der klugen Iphigenie zu beherzigen, hatten wir Grund: Auch im Band 2 *sehen* wir immer wieder *vorwärts* und bearbeiteten den Stoff vorbereitend auch für Gebiete, die nach dem Grundstudium des *Wenigen* noch *übrig bleiben*. Deswegen heißt unser Buch auch *Grundgebiete* und nicht *Grundlagen* der Elektrotechnik. Hierzu einige Beispiele:

Bei der Behandlung der *Filternetze* (Abschnitt 5.3) könnte man die grundlegenden Begriffe am Hochpass und am Tiefpass 1. Ordnung erläutern und es damit genug sein lassen. Wir blicken aber *vorwärts* und zeigen, wie man die heute wichtigen Filter 2. Ordnung als passive und als aktive Filter realisiert.

Im 6. Kapitel über *Drehstrom* beschreiben wir die *symmetrischen Komponenten* nichtsymmetrischer Systeme. Ingenieure, die mit Versorgungsnetzen oder mit Einphasenmaschinen zu tun haben, brauchen diese Methode.

Auch im 7. Kapitel, in dem wir uns mit *nichtsinusförmigen Größen* befassen, sehen wir weiter und zeigen, wie mithilfe der FOURIER-Transformation das *kontinuierliche Spektrum* nicht periodischer Größen berechnet wird. Darüber hinaus wenden wir die *diskrete* FOURIER-Transformation auf zeitbeschränkte und -unbeschränkte Funktionen an; dies führt uns ins Gebiet der *digitalen Signalverarbeitung* (s. Praxisbezug 7.6).

Völlig neu ist das Kap. 9, in dem wir uns mit der Stabilität linearer Übertragungssysteme befassen und Tief- und Hochpässe 2. Ordnung beschreiben.

Bei all diesen Ausflügen in die technische Wirklichkeit lässt der begrenzte Umfang des Buches die Erklärung aller Einzelheiten nicht zu. Fragen des Lesers könnte man nur mit den berühmten drei Worten beantworten: „Das ist so!“ Würde ein Ingenieur, den man fragt, warum sich Elektronen um den Atomkern bewegen, nicht genauso antworten? Wenn die Neugier damit nicht zu stillen ist, dann hilft sicher ein Hinweis auf das Verzeichnis der *Literatur* im Anhang.

Bei unseren Vorwärtsblicken ins weite Feld der Elektrotechnik, auch bei den aktualisierten *Praxisbezügen*, haben wir stets an Iphigenies Warnung gedacht, das *Wenige* dabei nicht aus dem Blick zu verlieren: Die grundlegenden Abschnitte besitzen deshalb nicht etwa „wenig“ an Umfang, sondern sie wurden ausführlich und sorgfältig behandelt und mit vielen Beispielen und Aufgaben abgesichert.

In den Text sind *Beispiele* und *Praxisbezüge* eingefügt. Zu den Problemstellungen in den Beispielen wird ein ausführlicher Lösungsweg gezeigt.

Die Lösungen der *Aufgaben*, deren Schwierigkeitsgrad mit 1 … 3 gekennzeichnet ist, findet man im *Anhang*. Dieser enthält außerdem:
- Additionstheoreme,
- Beziehungen zwischen Winkelfunktionen,
- wichtige Konstanten,
- Einführung in die komplexe Rechnung,
- Magnetisierungskurven,
- Tabellen für die LAPLACE-Transformation,
- FOURIER-Koeffizienten wichtiger Funktionen,
- Sachwortverzeichnis,
- Namenverzeichnis.

Das Lehrbuch wendet sich in erster Linie an Studierende der Elektrotechnik an Technischen Hochschulen aller Art als Begleitlektüre zur Vorlesung oder zum Selbststudium. Außerdem hoffen wir, Berufstätigen in der Elektrotechnik beim Auffrischen oder Erweitern ihrer Kenntnisse zu helfen. Wir würden uns auch freuen, wenn wir Lehrenden Anregungen für die Gestaltung ihrer Lehrveranstaltungen geben könnten.

Wir hoffen weiterhin, dass unser Buch gut aufgenommen wird, und wären dankbar für Nachrichten an den Verlag mit Verbesserungsvorschlägen, Kritik oder Fehlermeldungen.

Dem Carl Hanser Verlag danken wir für die vertrauensvolle Zusammenarbeit.

Lemgo, März 2019 Die Verfasser

Inhaltsverzeichnis

1 Zeitabhängige elektrische und magnetische Felder

1.1 Quasistationäre Vorgänge

Ziele: Sie können
- erklären, was man unter einem quasistationären Vorgang versteht.
- die Einschränkungen nennen, welche für solche Vorgänge gelten.
- den Begriff konzentriertes Bauelement erklären.
- die drei Grundeintore nennen.
- die Definition für das ideale OHMsche Eintor angeben.

1.1.1 Konzentrierte Bauelemente

Im Band 1 haben wir im Wesentlichen *stationäre Vorgänge* behandelt. Bei ihnen bleiben die den Vorgang beschreibenden Parameter zeitlich konstant. Nun wollen wir die Gesetzmäßigkeiten untersuchen, die für *zeitabhängige* Größen gelten.

Zur Unterscheidung von den stationären Größen werden zeitabhängige Ströme und Spannungen mit *Kleinbuchstaben i* bzw. *u* bezeichnet. Bei anderen Größen wird die Zeitabhängigkeit durch den Zusatz „(t)" zum Ausdruck gebracht; man schreibt also z. B. $P(t)$, $\Phi(t)$ oder $Q(t)$.

Zur Veranschaulichung stellt man zeitabhängige Größen in einem **Liniendiagramm** grafisch dar (Bild 1.1). Dabei wird die Zeit auf der Abszisse und die zeitabhängige Größe auf der Ordinate abgetragen.

Jedem Zeitwert ist ein **Augenblickswert** *(instantaneous value)* der zeitabhängigen Größe zugeordnet. Hat diese zu einem bestimmten Zeitwert ein *positives Vorzeichen* (z. B. t_1; i_1), so stimmt der Richtungssinn mit dem gewählten Bezugssinn überein. Hat sie zu einem anderen Zeitwert ein *negatives Vorzeichen* (z. B. t_2; i_2), so sind Richtungssinn und Bezugssinn einander entgegengesetzt.

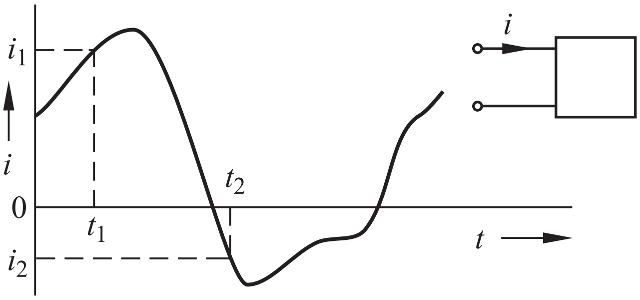


Bild 1.1 Darstellung eines zeitabhängigen Stromes im Liniendiagramm

Um die Wirkung von zeitabhängigen Größen zu verdeutlichen, betrachten wir in der Schaltung 1.2 die Leitung zwischen den Klemmen 1 und 2, durch die ein Verbraucher mit einer Quelle verbunden ist.

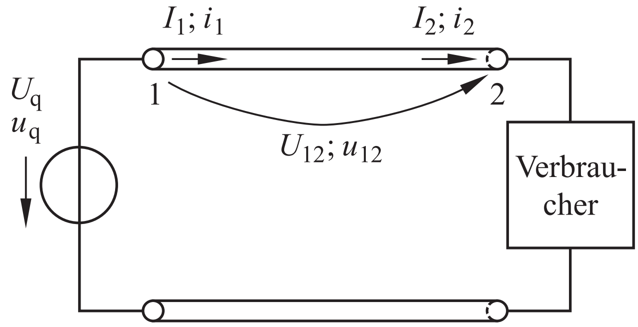


Bild 1.2 Zum Begriff Eintor bei zeitabhängigen Größen

Bei einer idealen Gleichspannungsquelle mit U_q = const. ist auch U_{12} = const. Wir können die Leitung mit dem OHMschen Widerstand R_{12} als *Eintor* betrachten, denn der Gleichstrom I_1, der in die Klemme 1 hineinfließt, fließt zum gleichen Zeitpunkt aus der Klemme 2 heraus; es gilt also $I_1 = I_2 = I$.

Nun nehmen wir an, dass die Spannung der idealen Quelle *zeitabhängig* ist. An ihren Klemmen liegt dabei eine Spannung mit der Zeitfunktion $u_q(t)$.

In diesem Fall können wir das Leitungsstück zwischen den Klemmen 1 und 2 nicht mehr ohne Einschränkung als Eintor ansehen. Dies liegt daran, dass sich alle Änderungen in elektrischen und magnetischen Feldern nur mit der endlichen Geschwindigkeit $\upsilon \le c_0$ im Raum ausbreiten, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Das Gleiche gilt für alle Änderungen von elektrischen Strömen und Spannungen in Schaltungen. So folgt der Strom i_2 in der Schaltung 1.2 einer Änderung des Stromes i_1 um die Zeitspanne Δt verzögert, deren Dauer von den geometrischen

Abmessungen und den Werkstoffen der Leitung abhängt.
Die Leitung zwischen den Klemmen 1 und 2 ist deswegen für zeitabhängige Größen *kein* Eintor, weil i. Allg. für jeden Augenblick $i_1 \neq i_2$ gilt.

In der Praxis kann dieser Effekt bei einer Eintorschaltung vernachlässigt werden, wenn ihre Abmessungen und der Abstand zwischen den Klemmen hinreichend klein sind. In diesem Fall kann die Schaltung auch für zeitabhängige Größen als Eintor und ihr Klemmenpaar als *Tor* angesehen werden.
Bauelemente, bei denen die Verzögerungszeit Δt vernachlässigbar klein ist, bezeichnet man als **konzentrierte Bauelemente** (*lumped element*).

Ändern sich die physikalischen Größen eines Systems so *langsam*, dass demgegenüber alle Ausbreitungserscheinungen im Beobachtungsraum vernachlässigt werden können, so sagt man, dass sich das System in einem **quasistationären Zustand** *(virtual steady state)* befindet.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass ein quasistationärer Zustand besteht und dass die Schaltungen nur konzentrierte Bauelemente enthalten.

Praxisbezug 1.1
Bei sehr großen Abmessungen des Feldmediums, etwa bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (z.B. Rundfunk, Fernsehen), und bei der Signalübertragung über Leitungen werden die Voraussetzungen für konzentrierte Bauelemente und quasistationäre Zustände von Schaltungen in der Regel *nicht* erfüllt.

Dies gilt auch für kleine bedrahtete Bauelemente bei den sehr schnellen Änderungen im Bereich der Höchstfrequenztechnik mit Frequenzen im GHz-Bereich.

Bei Computern wird die Rechengeschwindigkeit u. a. durch die Länge der Signalleitungen zwischen den Schaltkreisen begrenzt. Um die Laufzeit der Signale möglichst kurz zu halten, integriert man immer mehr Schaltkreise auf einem Chip und konzentriert möglichst viele Chips auf engem Raum. ❐

1.1.2 Grundeintore

Verwenden wir in der Schaltung 1.2 eine Gleichspannungsquelle, so ist das Leitungsstück zwischen den Klemmen 1 und 2 ein Eintor mit dem Ohmschen Widerstand R_{12} und der Spannung $U_{12} = R_{12} I$ zwischen den Klemmen.

Nun nehmen wir eine *zeitabhängige* Quellenspannung u_q an, deren zeitliche Änderung so langsam ist, dass wir das Drahtstück als konzentriertes Bauelement ansehen und in der Schaltung quasistationäre Verhältnisse voraussetzen können.

Obwohl das Leitungsstück zwischen den Klemmen 1 und 2 nun als Eintor angesehen werden kann und $i_1 = i_2 = i$ gilt, ist die Beziehung $U_{12} = R_{12} I$ *nicht* ohne weitere Einschränkungen auf zeitabhängige Größen zu übertragen. Dies liegt daran, dass im umgebenden Raum jeder Strom ein Magnetfeld und jede Klemmenspannung ein elektrisches Feld erzeugt.
Beide Felder sind Energiespeicher, die ihren Inhalt grundsätzlich nicht sprunghaft ändern können; hierzu wäre eine unendlich große Leistung erforderlich.

Aus diesem Grund kann der Strom i einer schnellen Änderung der Spannung u_{12} nicht gleich schnell folgen, denn hierbei muss sich auch das umgebende Magnetfeld ändern.
Umgekehrt kann die Spannung u_{12} einer schnellen Änderung des Stromes i nicht gleich schnell folgen, denn hierbei muss sich auch das umgebende elektrische Feld ändern.

Der Strom i und die Spannung u an den Klemmen eines Eintors können also nur dann gleiche Zeitabhängigkeit haben, wenn das Eintor keine elektrischen und magnetischen Energiespeicher besitzt. Da dies eine *Idealisierung* ist, nennt man ein solches Eintor ein **ideales Ohmsches Eintor** *R*; an ihm gilt:

$$\boxed{u = R\, i} \tag{1.1}$$

Das ideale Ohmsche Eintor wird durch seinen Widerstand R = const. oder durch seinen Leitwert

$G = 1/R$ beschrieben. Die Gl. (1.1) gilt für $R > 0$ bei Anwendung des Verbraucher-Pfeilsystems.

Die Leistung $P(t) = u\ i$ am idealen OHMschen Eintor ist stets *positiv*. Dies bedeutet, dass es elektrische Energie lediglich *aufnehmen* und in eine andere Energieform, z. B. in Wärme, umwandeln kann; die Speicherung von Energie ist nicht möglich.

Das ideale OHMsche Eintor erhält in Schaltungen das gleiche Schaltzeichen wie der OHMsche Widerstand.
Mit technischen Bauelementen ist das ideale OHMsche Eintor nur näherungsweise zu realisieren (s. Abschn. 10.2).

Außer dem OHMschen Eintor gibt es noch zwei weitere ideale Eintore: Das **ideale kapazitive Eintor** C ist ein Speicher *elektrischer* Feldenergie und das **ideale induktive Eintor** L ist ein Speicher *magnetischer* Feldenergie.
Eine Umwandlung der Energie, die diesen Eintoren zufließt, in eine andere Energieform, z. B. in Wärme, ist nicht möglich. Auch die idealen Eintore C und L lassen sich mit realen Bauelementen nur näherungsweise realisieren, stellen also *Idealisierungen* dar.

Wir werden die Eigenschaften der beiden Speichereintore C und L später beschreiben; das Bild 1.3 zeigt zunächst nur ihre Schaltzeichen.

Als Oberbegriff für die drei idealen Eintore R, C und L verwenden wir die Bezeichnung **Grundeintor**.

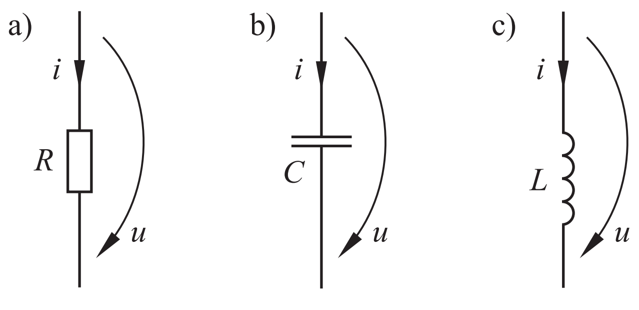


Bild 1.3 Schaltzeichen der Grundeintore: a) ideales OHMsches Eintor, b) ideales kapazitives Eintor, c) ideales induktives Eintor

Für *reale* passive Eintore lassen sich aus den Grundeintoren *Ersatzschaltungen* aufbauen. Mit ihrer Hilfe kann man den Zusammenhang zwischen einem zeitabhängigen Strom i und einer zeitabhängigen Spannung u an den Klemmen des realen Eintors auf übersichtliche Weise beschreiben.

In der Ersatzschaltung 1.4b berücksichtigt jedes Grundeintor nur *einen* physikalischen Effekt:

- Das Grundeintor R stellt die bleibende Umwandlung elektrischer Energie in eine andere Energieform dar.
- Das Grundeintor C stellt den Einfluss des veränderlichen elektrischen Feldes auf den Strom i des realen Eintors dar.
- Das Grundeintor L stellt den Einfluss des veränderlichen magnetischen Feldes auf die Spannung u des realen Eintors dar.

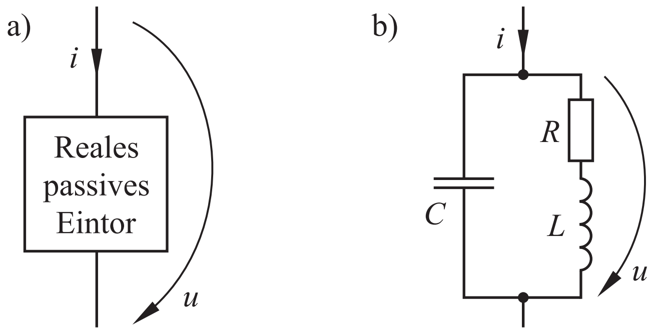


Bild 1.4 Reales passives Eintor (a) und seine Ersatzschaltung mit Grundeintoren (b)

Fragen
- Welches Formelzeichen erhält ein zeitabhängiger Strom?
- Was ist ein quasistationärer Vorgang?
- Unter welchen Bedingungen kann man ein Bauelement zwischen zwei Klemmen als Eintor ansehen?
- Was ist ein konzentriertes Bauelement?
- Wie ist das Grundeintor R definiert?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Größen i und u an einem Grundeintor R?
- Welche Grundeintore sind Ihnen bekannt? Welche physikalischen Effekte stellen sie dar?

Aufgabe 1.1(1)
Durch ein Grundeintor $R = 10\ \Omega$ fließt der Strom $i = 2{,}5\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-t/0{,}2\,\mathrm{s}}$. Berechnen Sie die Spannung am Eintor für den Zeitpunkt $t_1 = 0{,}5$ s.

1.2 Erweiterung des Strombegriffs

Ziele: Sie können
- für einen zeitabhängigen Strom die Beziehung zwischen Stromstärke und bewegter Ladung angeben.
- die Definition für das ideale kapazitive Eintor nennen.
- die Begriffe Verschiebungsstrom und Verschiebungsstromdichte definieren.
- den Zusammenhang zwischen den Feldvektoren der Stromdichte und der Verschiebungsstromdichte an der Grenzfläche Leiter – Dielektrikum beschreiben.
- den Knotensatz in allgemeiner Form für zeitabhängige Ströme formulieren.
- den Zusammenhang zwischen der Verschiebungsstromdichte und der durch sie verursachten magnetischen Feldstärke nennen.

1.2.1 Ideales kapazitives Eintor

Liegt ein idealer Plattenkondensator mit der Kapazität C an der konstanten Spannung U, so bestehen im Raum zwischen seinen Platten homogene Felder der elektrischen Feldstärke $E = U/l$ und der elektrischen Flussdichte $D = \varepsilon E$.

Ist das Dielektrikum ideal, so bewegen sich zwischen den Kondensatorplatten keine Ladungen und in den Leitungen zum Kondensator fließt kein Strom. Auf der einen Platte befinden sich positive Ladungen $Q = C\,U$ und auf der anderen negative Ladungen vom gleichen Betrag.

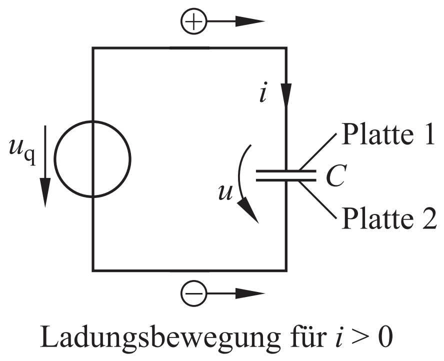


Bild 1.5 Kondensator an zeitabhängiger Spannung

Nun nehmen wir an, dass an den Kondensator eine Quelle mit *zeitabhängiger Spannung* u_q angeschlossen ist. Die Bezugspfeile für den Strom i und die Spannung u zwischen den Platten wählen wir wie üblich nach dem Verbraucher-Pfeilsystem. Auch die Ladungen auf den Kondensatorplatten sind nun zeitabhängige Größen $Q(t)$ bzw. $-Q(t)$. Die Platte 1, von welcher der Bezugspfeil für u ausgeht, trägt dabei in jedem Augenblick eine Ladung mit gleichem Vorzeichen wie die Spannung u und es gilt:

$$Q(t) = C\,u \tag{1.2}$$

Wächst die Spannung u an ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}t > 0$), so zieht die Quelle Elektronen von der Platte 1 ab und verschiebt sie auf die Platte 2; dabei fließt ein Strom im Bezugssinn ($i > 0$). Die negative Ladung auf der Platte 2 nimmt dadurch zu; die Platte 1 wird entsprechend positiv geladen.

Bei sinkender Spannung ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}t < 0$) werden die Ladungen in umgekehrter Richtung verschoben; dabei ist $i < 0$.

Zu einer kleinen Spannungsänderung du gehört die Ladungsänderung dQ:

$$\mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}u \tag{1.3}$$

Während dieser Ladungsänderung im Zeitintervall dt fließt in der Leitung der Strom i. Wir haben im Band 1 mit der Gl. (1.7) den Zusammenhang zwischen der Stromstärke I und der Ladungsmenge ΔQ angegeben, die im Zeitintervall Δt *gleichmäßig* durch einen Querschnitt strömt; die dort genannte Beziehung $I = \Delta Q/\Delta t$ gilt jedoch nur für Gleichstrom.

Ändert sich die Ladung zeitlich beliebig, so verwendet man den Differenzialquotienten:

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

Wir setzen die Gl. (1.3) ein und erhalten die Gleichung des idealen kapazitiven Eintors:

$$\boxed{i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} \tag{1.5}$$

Dieses Grundeintor C besitzt eine konstante Kapazität und wird mit dem Schaltzeichen des

Kondensators dargestellt, wie dies bereits im Bild 1.3 gezeigt ist.

Der Strom durch das Grundeintor C ist ausschließlich von der zeitlichen Änderung der Spannung und damit von der Änderung des *elektrischen* Feldes abhängig; das magnetische Feld hat keinen Einfluss.

Das Grundeintor C ist ein *Energiespeicher*; eine bleibende Umwandlung von elektrischer Energie in eine andere Energieform, z. B. in Wärme, ist nicht möglich.

Ist in der Schaltung 1.5 die Leistung $P(t) = u\,i$ zu einem Zeitpunkt *positiv*, so nimmt das Grundeintor C Energie auf; bei $P(t) < 0$ gibt es dagegen Energie an die Quelle zurück.
Das Grundeintor C wirkt also zeitweise aktiv und zeitweise passiv.

Technische Kondensatoren können die Eigenschaften des Grundeintors C nur annähernd erreichen (s. Kap. 10); es stellt wie die beiden anderen Grundeintore eine *Idealisierung* dar.

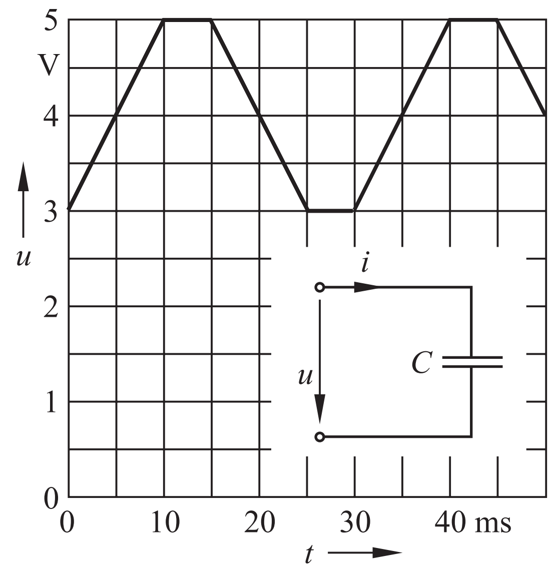
Ist die Kapazität spannungsabhängig (s. Band 1, Abschn. 6.6.2), so lässt sich der Strom mithilfe der *differenziellen Kapazität* C_d berechnen:

$$i = C_d \frac{du}{dt} \tag{1.6}$$

Dabei ist zu beachten, dass auch die differenzielle Kapazität spannungsabhängig ist.

Aus der Gl. (1.5) folgt, dass die Spannung u an einem Grundeintor C sich nicht *sprunghaft ändern* kann, weil dabei der Differenzialquotient du/dt und damit der Strom i unendlich groß werden müssten. Dies gilt auch für die Spannungen an realen Kondensatoren und für *beliebige* Leiteranordnungen, in denen stets Kapazitäten wirksam sind.

Beispiel 1.1
An einem Grundeintor $C = 0{,}2\ \mu F$ liegt die zeitabhängige Spannung u. Wir wollen die Zeitfunktion des Stromes i für das Intervall $0 \le t \le 30$ ms berechnen und feststellen, in welchen Intervallen das Eintor aktiv und in welchen es passiv wirkt.



Da die Funktion $u(t)$ nicht stetig differenzierbar ist, berechnen wir den zeitabhängigen Strom $i(t)$ mit der Gl. (1.5) intervallweise:

$0 \le t < 10$ ms: $i = 0{,}2\ \mu F \cdot \dfrac{2\ V}{10\ ms} = 40\ \mu A$

$10\ ms \le t < 15$ ms: $i = 0$ wegen $\dfrac{du}{dt} = 0$

$15\ ms \le t < 25$ ms: $i = -40\ \mu A$

$25\ ms \le t < 30$ ms: $i = 0$

Im ersten Intervall nimmt das Eintor wegen $P(t) = u\ i > 0$ elektrische Energie auf; im dritten Intervall gibt es wegen $P(t) = u\ i < 0$ die gleiche Energie wieder ab. In den übrigen Intervallen bleibt die im Eintor gespeicherte Energie jeweils konstant.

1.2.2 Verschiebungsstrom

Ändert sich zwischen den Platten des Kondensators im Bild 1.5 die Spannung u, so fließt ein Strom i, obwohl der Stromkreis zwischen den Platten *unterbrochen* ist; die Ladungsträgerbewegung endet an den Platten.

Darin liegt ein *Widerspruch* zu der Aussage im Band 1, dass ein elektrischer Strom nur in einem über Leiter geschlossenen Stromkreis fließen kann. Dies gilt jedoch nur für *stationäre* Verhältnisse; für *zeitabhängige* Ströme müssen wir den Strombegriff *erweitern*.

Jeder Strom in den Zuleitungen des Kondensators ist von einer Ladungsänderung $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ auf den Platten begleitet (s. Gl. 1.4). Mit ihr ändern sich auch der elektrische Fluss Ψ_e und die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ des Kondensatorfeldes (s. Band 1, Abschn. 6.4.3).
Wegen $Q = D\,A$ gilt für ein homogenes Feld:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \cdot A \tag{1.7}$$

Der Ausdruck $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ hat die Einheit der Stromdichte:

$$\left[\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \tag{1.8}$$

Man bezeichnet deshalb die Größe $\mathrm{d}\vec{D}/\mathrm{d}t$ als **Verschiebungsstromdichte** *(displacement current density)* $\vec{J}_\mathrm{v}$:

$$\boxed{\vec{J}_\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}} \tag{1.9}$$

Die Verschiebungsstromdichte ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der augenblicklichen Änderung der elektrischen Flussdichte D ist.

Die Richtung des Vektors $\vec{J}_\mathrm{v}$ der Verschiebungsstromdichte stimmt für $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t > 0$ mit der Richtung des Vektors $\vec{D}$ überein; für $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t < 0$ sind die Richtungen der beiden Vektoren einander entgegengesetzt.

Das Feld der Stromdichte $\vec{J}$ in den Zuleitungen und in den Kondensatorplatten setzt sich als Feld der Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_\mathrm{v}$ im Dielektrikum des Kondensators fort; die Feldlinien gehen an der Oberfläche der Kondensatorplatten ineinander über (Bild 1.6).

Bei der Verschiebungsstromdichte muss man sich von der Vorstellung befreien, dass sich längs der Feldlinien Ladungen bewegen.

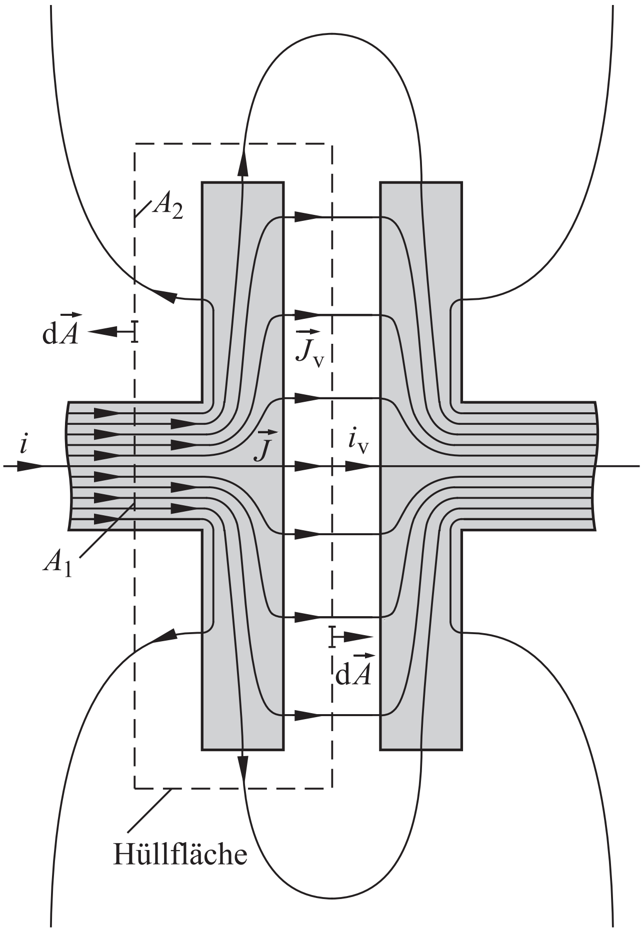


Bild 1.6 Stromdichte und Verschiebungsstromdichte

Der Fluss (d. h. das Flächenintegral) der Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_\mathrm{v}$ ist der **Verschiebungsstrom** *(displacement current)* i_v:

$$\boxed{i_\mathrm{v} = \int_A \vec{J}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A}} \tag{1.10}$$

Bei der Berechnung des Verschiebungsstromes für das Feldbild 1.6 ist das Integral über die Teilfläche A_2 der Hüllfläche um eine der Kondensatorplatten zu bilden; diese Teilfläche wird ausschließlich vom Feld der Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_\mathrm{v}$ durchsetzt.

Durch die Teilfläche A_1 der Hüllfläche fließt der Strom i in der Zuleitung des Kondensators. Er setzt sich im Dielektrikum als ein Verschiebungsstrom i_v mit gleicher Stromstärke fort.

Wird ein Teil der Hüllfläche von einem *homogenen* Feld der Verschiebungsstromdichte durchsetzt, so lässt sich hierfür die Gl. (1.10) vereinfachen:

$$i_\mathrm{v} = \vec{J}_\mathrm{v} \cdot \vec{A} \qquad (1.11)$$

Die Vorstellung von einem Verschiebungsstrom, der ohne Ladungsträgerbewegung z. B. auch im Vakuum auftreten kann, wurde von MAXWELL[1)] begründet. Nach dieser Erweiterung des Strombegriffes gilt auch für zeitabhängige Ströme in Netzwerken mit kapazitiven Eintoren der Satz, dass *jeder* elektrische Strom in sich *geschlossen* ist.

1.2.3 Knotensatz bei zeitabhängigen Strömen

Der Knotensatz sagt aus, dass die Summe aller Ströme, die eine Hüllfläche durchsetzen, stets den Wert null hat (Band 1, Abschn. 3.2). Entsprechend ist auch der Fluss des Stromdichtevektors $\vec{J}$ durch eine Hüllfläche gleich null.
Beide Aussagen gelten nur für den *stationären* Zustand. Bei *zeitabhängigen* Vorgängen müssen auch die *Verschiebungsströme* berücksichtigt werden; wir wollen dies in der Anordnung betrachten, die im Bild 1.6 gezeigt ist.

Um die linke Kondensatorplatte ist im Bild 1.6 eine Hüllfläche gelegt, deren Flächenvektoren $\mathrm{d}\vec{A}$ wie üblich nach außen weisen. Sie besteht aus zwei Teilflächen.

Die Fläche A_1 ist die Querschnittsfläche der Zuleitung, hier ist die Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_\mathrm{v} = 0$. Wir integrieren über die Stromdichte $\vec{J}$ und erhalten:

$$\int_{A_1} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -i \qquad (1.12)$$

Die Fläche A_2 liegt im Dielektrikum, dort ist $J = 0$. Wir integrieren über die Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_\mathrm{v}$ und erhalten:

$$\int_{A_2} \vec{J}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = i_\mathrm{v} \qquad (1.13)$$

Die Feldlinien der beiden Felder gehen ineinander über: Jede in die Hüllfläche eintretende $\vec{J}$-Feldlinie tritt an anderer Stelle als $\vec{J}_\mathrm{v}$-Feldlinie aus der Hüllfläche wieder aus. Hieraus folgt, dass der Wert des Integrals über die Hüllfläche gleich Null sein muss:

$$\oint \left(\vec{J} + \vec{J}_\mathrm{v}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad (1.14)$$

Dies ist die allgemeine Formulierung des Knotensatzes für zeitabhängige Ströme.

Die Verschiebungsströme müssen bei der Aufstellung einer Gleichung nach dem Knotensatz berücksichtigt werden; er lautet für jeden Knoten:

$$\sum (i + i_\mathrm{v}) = 0 \qquad (1.15)$$

Verschiebungsströme treten nicht nur im Inneren von Kondensatoren auf. Liegen in einem Netz mehrere Knoten auf unterschiedlichen, zeitabhängigen Potenzialen, so verursacht die Änderung des elektrischen Feldes zwischen ihnen Verschiebungsströme. Diese werden in der Ersatzschaltung eines solchen Netzes durch ideale kapazitive Eintore beschrieben; man nennt sie **Streukapazitäten**.

Liegt zwischen zwei Knoten (1; 2) eines Netzes die Streukapazität C_s, so gilt für den Verschiebungsstrom von 1 nach 2:

$$i_\mathrm{v} = C_\mathrm{s} \frac{\mathrm{d}u_{12}}{\mathrm{d}t} \qquad (1.16)$$

Die Streukapazitäten sind von der Geometrie der Schaltung und von den verwendeten Materialien abhängig; sie sind i. Allg. sehr klein. Ihre Berechnung, die sich auch mit Computer-Programmen durchführen lässt, ist recht aufwendig; daher begnügt man sich oft mit Schätzungen.

Durch die Streukapazitäten können z. B. schnell veränderliche Spannungen in andere Netzteile übertragen werden und dort Störungen hervorrufen; man spricht dabei von einer störenden **kapazitiven Kopplung**.

Bei langsam veränderlichen Spannungen können die Streukapazitäten i. Allg. vernachlässigt werden.

1) James Clerk Maxwell, 1831 – 1879

1.2.4 Durchflutungsgesetz bei zeitabhängigen Strömen

Das Durchflutungsgesetz, wie wir es bisher kennen, beschreibt den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strömungsfeld $\vec{J}$ und dem von ihm erzeugten magnetischen Wirbelfeld $\vec{H}$:

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \qquad \text{(s. Gl. 7.29, Band 1)}$$

Dieses Gesetz wurde von MAXWELL im Jahr 1873 erweitert: In einem Gedankenexperiment betrachtete er einen geladenen Kondensator, der durch einen Leitungsdraht entladen wird. Während das Feld $\vec{D}$ der elektrischen Flussdichte dabei bis zum Wert $D = 0$ abnimmt, fließt ein Leitungsstrom i, der von den ringförmigen Feldlinien der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ umgeben ist.

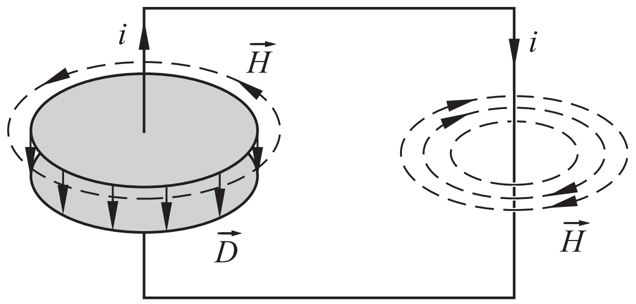


Bild 1.7 Magnetfeld des Entladestromes eines Kondensators

Die $\vec{H}$-Feldlinien umschlingen sämtliche Abschnitte des Leitungsdrahtes und es stellt sich die Frage, ob das magnetische Wirbelfeld im Bereich des Kondensators „unterbrochen" wird.

MAXWELL behauptete: Das magnetische Feld hat keine „Enden", es bildet einen geschlossenen Hohlring. Deswegen muss der Verschiebungsstrom im Dielektrikum des Kondensators in gleicher Weise ein Magnetfeld erzeugen wie der Leitungsstrom.

Einen Beweis für diese Vorstellung konnte MAXWELL nicht angeben. Dennoch erweiterte er das Durchflutungsgesetz um das Feld $\vec{J}_V = d\vec{D}/dt$ der Verschiebungsstromdichte; die **1. MAXWELLsche Gleichung** (1873) lautet damit:

$$\boxed{\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\vec{J} + \vec{J}_V\right) \cdot d\vec{A}} \qquad (1.17)$$

Falls der Integrationsweg, auf dem das Randintegral im Feld der magnetischen Feldstärke gebildet wird, sowohl Ströme in Leitern als auch Verschiebungsströme umfasst (Bild 1.8), so sind *sämtliche* Ströme in die 1. MAXWELLsche Gleichung einzusetzen.

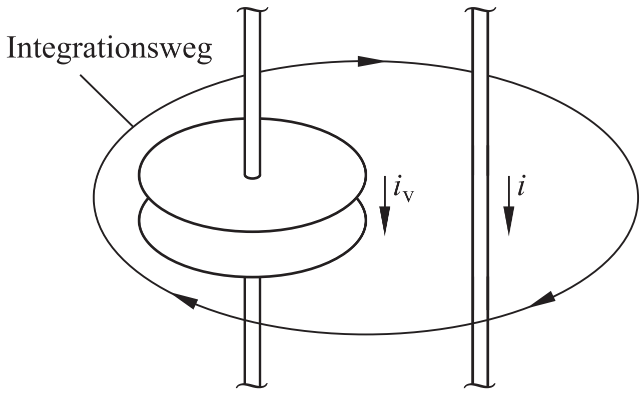


Bild 1.8 Leitungsstrom i und Verschiebungsstrom i_V innerhalb eines geschlossenen Integrationsweges

Praxisbezug 1.2
Die Berliner Akademie der Wissenschaften stellte im Jahr 1879 die Preisaufgabe, das Magnetfeld des Verschiebungsstromes experimentell nachzuweisen, was zunächst niemandem gelang.

Diese Aufgabe wurde erst im Jahr 1886 von HERTZ[1)] an der Technischen Hochschule Karlsruhe gelöst: Er erzeugte als Erster *elektromagnetische Wellen*, die bereits von MAXWELL als Folgerung aus seinem Modell der Verschiebungsstromdichte vorausgesagt worden waren. Die dabei auftretenden schnell veränderlichen, einander wechselseitig bedingenden magnetischen und elektrischen Felder bewiesen eindrucksvoll die physikalische Realität des Verschiebungsstromes und seines Magnetfeldes.

Als Sender verwendete HERTZ einen Induktionsapparat mit Kugelfunkenstrecke. Mit den Kugeln waren in entgegengesetzte Richtungen verlaufende gerade Metallstäbe verbunden. Sie trugen

[1)] Heinrich Hertz, 1857 – 1894

verschiebbare Metallkörper und bildeten so als abstimmbarer, offener Schwingkreis die Sendeantenne. Eine solche Anordnung wird heute als **Hertzscher Oszillator** bezeichnet.

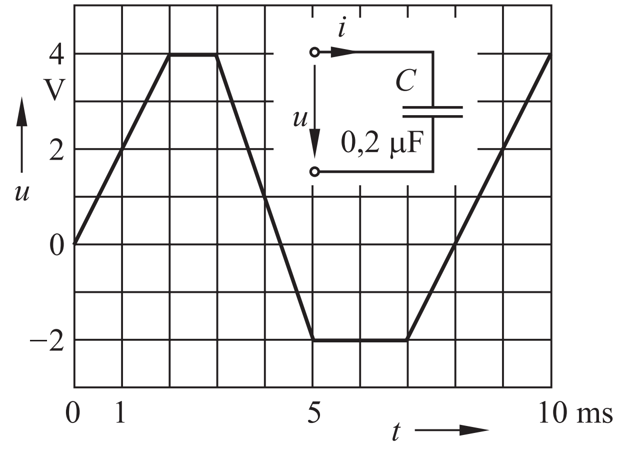
Eine Wand des großen Hörsaals verkleidete Hertz mit Zinkblech. Sie wirkte so als *Reflektor* und erzeugte ein Stehwellenfeld. Darin konnte aus der Entfernung der Knoten und Bäuche mithilfe einfacher Resonatoren aus offenen Drahtvierecken mit Messfunkenstrecken die Wellenlänge $\lambda \approx 10$ m ermittelt werden. Dies entspricht einer Frequenz im Kurzwellenbereich von etwa 30 MHz. ❐

Fragen

- Wie ist das ideale kapazitive Eintor definiert?
- Durch welche Zeitfunktion der Spannung an den Klemmen eines Grundeintors C wird ein konstanter Ladestrom erzeugt?
- Warum kann sich die Spannung an einem Kondensator nicht sprunghaft ändern?
- Was geschieht mit der elektrischen Energie, die einem Grundeintor C zufließt?
- Erläutern Sie die Begriffe Verschiebungsstromdichte und Verschiebungsstrom.
- Warum existiert in einem elektrostatischen Feld kein Verschiebungsstrom?
- Wie lautet der Knotensatz für zeitabhängige Ströme? Verdeutlichen Sie seine Aussage mithilfe einer Skizze.
- Erläutern Sie den Begriff Streukapazität.
- Wie lautet die 1. Maxwellsche Gleichung?

Aufgaben

1.2(1) Das Bild zeigt das Liniendiagramm der Klemmenspannung u an einem idealen kapazitiven Eintor. Berechnen Sie die Zeitfunktion des Stromes i für das Intervall $0 \le t \le 8$ ms.



1.3(1) An den Klemmen eines Grundeintors $C = 47$ nF soll der Ladestrom nach der Funktion $i = 2\ (\mathrm{mA}/\mathrm{s}) \cdot t$ linear ansteigen.

Wie lautet die Zeitfunktion der Klemmenspannung, die zum Zeitpunkt $t_1 = 30$ ms den Wert $u_1 = 3$ V haben soll?

1.4(2) An einem idealen Plattenkondensator ($\varepsilon_r = 2{,}7$; $A = 0{,}6\ \mathrm{m}^2$; $l = 0{,}5$ mm) steigt in der Zeit 1 ms die Spannung zeitlinear um 100 V an.

Berechnen Sie den Verschiebungsstrom und die Verschiebungsstromdichte im Dielektrikum sowie den Strom in der Zuleitung zum Kondensator.

1.5(3) Ein idealer Plattenkondensator mit kreisrunden Metallplatten (Durchmesser $d = 0{,}8$ m; Plattenabstand $l = 0{,}6$ mm; $\varepsilon_r = 8$) wird aufgeladen. Dabei steigt die Klemmenspannung nach einer e-Funktion an:

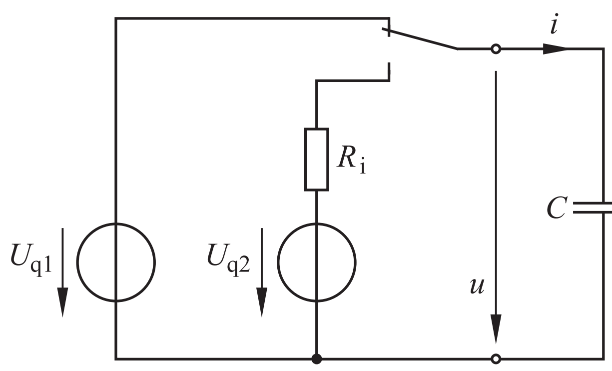
$$u(t) = 3\ \mathrm{kV} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{0{,}3\ \mathrm{s}}}\right)$$

Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $B(t)$ im Dielektrikum ($\mu_r = 1$) beim Radius 0,3 m.

1.6(3) Beim Umschalten eines Grundeintors $C = 10$ nF von einer idealen Spannungsquelle $U_{q1} = 15$ V auf eine lineare Spannungsquelle mit der unbekannten Quellenspannung U_{q2} ändert sich der Strom nach der e-Funktion:

$$i = -40\ \mu\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2{,}5\ \mathrm{ms}}}$$

Berechnen Sie den Zeitverlauf der Spannung u und die Quellenspannung U_{q2}. Zeichnen Sie die Liniendiagramme für u und i.



1.3 Bewegungsinduktion

Ziele: Sie können
– den Begriff Bewegungsinduktion erläutern.
– die zwischen den Enden eines im homogenen Magnetfeld bewegten geraden Leiters erzeugte Spannung aus der LORENTZ-Kraft herleiten.
– einen Ausdruck für die induktive Spannung zwischen den Enden eines beliebig geformten, bewegten Leiters im inhomogenen Magnetfeld formulieren.
– eine zur Messung der induktiven Spannung geeignete Anordnung skizzieren.
– die Flussänderung beschreiben, welche bei der Bewegungsinduktion auftritt.
– die induktive Spannung an einer im homogenen Magnetfeld rotierenden Leiterschleife berechnen.

Die *Induktion* einer elektrischen Spannung in einer Leiteranordnung wurde im Band 1 (s. Abschn. 7.1.5) als wichtige Wirkung des Magnetfeldes beschrieben. Wir zeigten zwei Experimente:
- Leiteranordnung und Magnetfeld bewegen sich gegeneinander; den dabei beobachteten Induktionsvorgang bezeichnet man als **Bewegungsinduktion**.
- Leiteranordnung und Magnetfeld befinden sich zueinander in Ruhe und das Magnetfeld ändert sich zeitlich; den dabei beobachteten Induktionsvorgang bezeichnet man als **Ruheinduktion**.

Laufen beide Vorgänge *gleichzeitig* ab, so überlagern sich die Induktionswirkungen. Wir behandeln sie zunächst getrennt und werden dann zeigen, dass sich die gefundenen Gesetzmäßigkeiten ineinander überführen lassen.

1.3.1 Bewegter Leiter im Magnetfeld

Bewegt sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Feld der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$, so wirkt auf sie die LORENTZ-Kraft:

$$\vec{F} = Q\,\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(s. Gl. 7.13, Band 1)}$$

Die LORENTZ-Kraft bewirkt Ladungsverschiebungen, die im magnetischen Feld elektrische Spannungen erzeugen; damit wollen wir uns im Folgenden befassen.

Wir betrachten einen geraden, leitenden Stab, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt. Die Lage des Stabes im Raum wird durch den Längenvektor $\vec{l}_{12}$ zwischen seinen Grenzflächen 1 und 2 beschrieben.

Wir nehmen zunächst an, dass die Vektoren $\vec{B}$, $\vec{v}$ und $\vec{l}_{12}$ *senkrecht* aufeinander stehen.

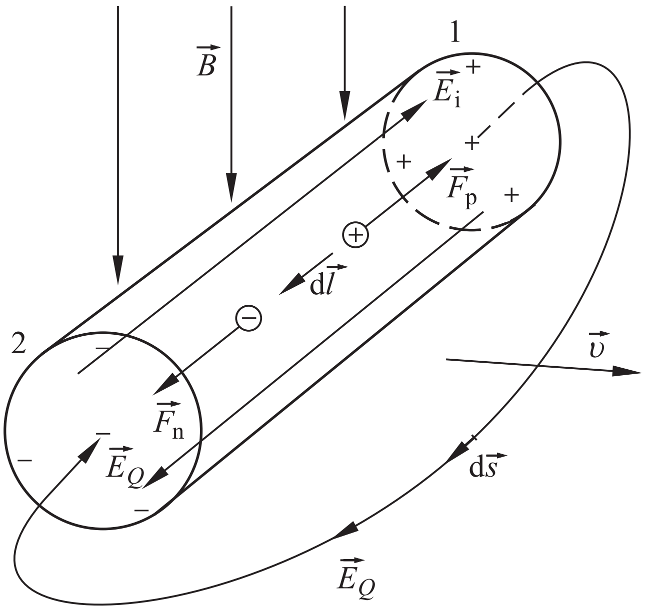


Bild 1.9 Im homogenen Magnetfeld bewegter gerader Leiter

Auf die negativen bzw. positiven beweglichen Ladungsträger im Stab wirkt die LORENTZ-Kraft $\vec{F}_n$ bzw. $\vec{F}_p$. Unter ihrem Einfluss werden die Ladungsträger zu den Enden des Stabes hin verschoben.

Der Quotient aus Kraftvektor und Ladung ist eine *elektrische Feldstärke* (s. Gl. 1.22, Band 1). Wird sie durch die Bewegung von Ladungen im Magnetfeld hervorgerufen, so bezeichnet man sie als **induzierte elektrische Feldstärke** E_i:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad (1.18)$$

Die auf die Grenzflächen des Stabes verschobenen Ladungen erzeugen im Stab und im Außenraum ein elektrisches Quellenfeld $\vec{E}_Q$, das sich im Inneren des Stabes dem induzierten elektrischen Feld $\vec{E}_i$ überlagert.

Die Verschiebung der Ladungen ist beendet, sobald die LORENTZ-Kräfte und die COULOMB-Kräfte auf die Ladungen gleichen Betrag haben. Dabei heben sich die Felder $\vec{E}_Q$ und $\vec{E}_\mathrm{i}$ im Leiterinneren auf. Dort ist in diesem Fall $\vec{E}_Q = -\vec{E}_\mathrm{i}$ und die resultierende elektrische Feldstärke ist $E = 0$.

Ein experimenteller Nachweis der Ladungen an den Stabenden gelingt z. B. dadurch, dass man den zunächst leitenden Stab während der Bewegung durch das Magnetfeld zum *Nichtleiter* werden lässt, etwa durch Abkühlung eines heißleitenden Materials. Nach der Abkühlung ist der Stab ein *Elektret* (s. Band 1) geworden; er bleibt dies auch außerhalb des Magnetfeldes.

Keineswegs kann man die Potenzialdifferenz zwischen den Stabenden mit einem *mitbewegten* Spannungsmesser nachweisen. In seinen Zuleitungen werden ebenfalls Ladungen verschoben, so dass im Messkreis zwei gleich große Spannungen in Gegenreihenschaltung liegen; die Anzeige bleibt 0 V.

Die Spannung u_{12} zwischen den Grenzflächen des Stabes lässt sich durch Integration im Quellenfeld bestimmen:

$$U = \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{(s. Gl. 6.18, Band 1)}$$

Dabei kann der Integrationsweg von der Fläche 1 zur Fläche 2 wegen der Wegunabhängigkeit des Linienintegrals im Quellenfeld entweder über das *äußere* oder über das *innere* Feld erstreckt werden.

Wir wählen den Integrationsweg im *homogenen* Feld innerhalb des Stabes (s. Bild 1.9) und erhalten:

$$u_{12} = \vec{E}_Q \cdot \vec{l}_{12} \tag{1.19}$$

Da im Leiterinnern $\vec{E}_Q = -\vec{E}_\mathrm{i}$ ist, gilt:

$$u_{12} = -\vec{E}_\mathrm{i} \cdot \vec{l}_{12} \tag{1.20}$$

Wir setzen die Gl. (1.18) ein und erhalten:

$$u_{12} = -\left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{l}_{12} = \left(\vec{B} \times \vec{\upsilon}\right) \cdot \vec{l}_{12} \tag{1.21}$$

Die Geschwindigkeit des Stabes kann sich zeitlich ändern; entsprechend ist auch die Spannung u_{12} eine zeitabhängige Größe.

Wir haben zunächst den einfachsten, aber technisch wichtigen Fall betrachtet, dass die Vektoren aufeinander *senkrecht* stehen (Bild 1.9). Aus der Gl. (1.21) erhält man hierfür:

$$\left|u_{12}\right| = B\, \upsilon\, l_{12} \tag{1.22}$$

Der Richtungssinn der Spannung lässt sich mithilfe der Gl. (1.21) ermitteln, die auch für *beliebige Winkel* zwischen den Vektoren gilt.

Die Erzeugung von Spannungen durch die Bewegung von Leitern im Magnetfeld nennt man **Bewegungsinduktion**.
Die aus dem *Quellenfeld* wie oben berechnete Spannung u_{12} bezeichnet man als **induktive Spannung** (*inductive voltage*).

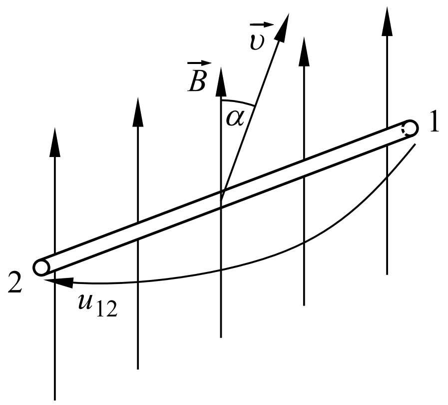
Bildet man das Linienintegral von 2 nach 1 über das induzierte elektrische Feld $\vec{E}_\mathrm{i}$, so erhält man die **induzierte Spannung** (*induced voltage*) u_i:

$$u_\mathrm{i} = -u_{12} \tag{1.23}$$

Beide Spannungen werden in der Technik für Berechnungen verwendet. Wir wollen im Folgenden ausschließlich die *induktive* Spannung verwenden.

Beispiel 1.2
Ein gerader Metallstab der Länge $l_{12} = 0{,}12$ m wird von einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte B = 1,5 T senkrecht durchsetzt. Er bewegt sich relativ zum Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\upsilon = 2$ m/s, wobei die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{\upsilon}$ den Winkel $\alpha = 30°$ einschließen.

Wir wollen die Spannung u_{12} berechnen, die zwischen den Stabenden durch die Bewegungsinduktion entsteht.



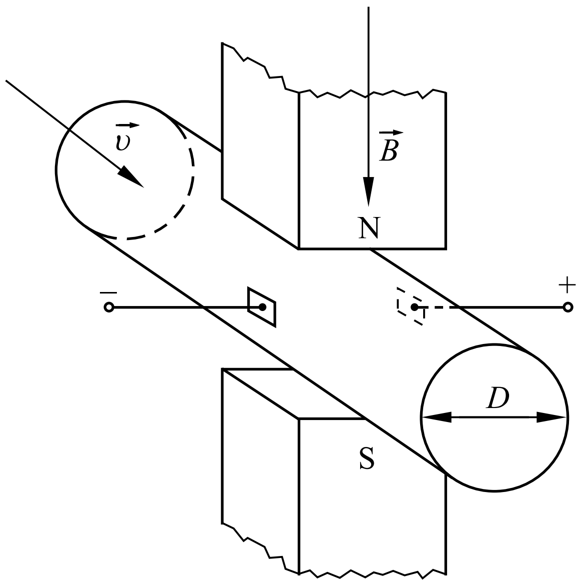
Der Längenvektor $\vec{l}_{12}$ weist von der Fläche 1 zur Fläche 2, liegt also in Richtung des Bezugspfeiles für u_{12}.

Das Vektorprodukt $\vec{B} \times \vec{v}$ liegt in *Gegenrichtung* zu $\vec{l}_{12}$; wir setzen entsprechend in die Gl. (1.21) ein:

$$u_{12} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30° \cdot 0{,}12\ \mathrm{m} \cdot \cos 180°$$

$$u_{12} = -0{,}18\ \mathrm{V}$$

Praxisbezug 1.3
Mit einem **Induktions-Durchflussmesser** kann der Volumendurchfluss einer Flüssigkeitsströmung gemessen werden.
Die Flüssigkeit strömt dabei mit der Geschwindigkeit v durch ein Rohr aus nicht leitendem Material mit dem Durchmesser D. Es wird von einem homogenen Magnetfeld B senkrecht zur Bewegungsrichtung durchsetzt.



Zwischen zwei an der Innenwand des Rohres liegenden Elektroden entsteht eine induktive Spannung $u = B\ v\ l$. Voraussetzung hierfür ist, dass die Flüssigkeit elektrisch leitet, also Ionen enthält. Eine Leitfähigkeit $\gamma > 0{,}1\ \mu\mathrm{S/cm}$ reicht bereits aus; der Wert beeinflusst die Höhe der induktiven Spannung nicht.

Der Abstand l der Elektroden ist gleich dem Durchmesser D. Da der Volumendurchfluss nach der Beziehung $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = v\ \pi\, D^2/4$ mit der Strömungsgeschwindigkeit v zusammenhängt, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{u\,D}{B}$$

Der Innenwiderstand des Sensors hängt von der Elektrodenfläche und der Leitfähigkeit der Flüssigkeit ab; im Allgemeinen ist er sehr groß. Man benötigt in diesem Fall einen Messverstärker mit hohem Eingangswiderstand.

Bleibt die Polarität des Magnetfeldes über längere Zeit gleich, so kann sich eine *Polarisationsspannung* (s. Kap. 11, Band 1) bilden, die das Messergebnis verfälscht. Man vermeidet dies durch *Umpolen* des Feldes in einem festen Zeittakt. Die Taktdauer wird so groß gewählt, dass gerade noch keine Polarisationsspannung auftritt. Gemessen wird jeweils nur in einem Zeitabschnitt, der *kleiner* ist als die Zeit mit konstanter Polarität des Magnetfeldes.

Der Induktions-Durchflussmesser hat den Vorteil, dass der Strömungsquerschnitt zur Messung nicht eingeengt werden muss. Die Messung ist auch bei stark verschmutzten und chemisch aggressiven Medien möglich. Für 10 … 100 % des Messbereichs kann eine maximale relative Messabweichung von etwa 1 % eingehalten werden. ❒

Wir wollen nun noch den *allgemeinen Fall* betrachten, bei dem sich ein *beliebig* gestalteter Leiter mit längs des Leiters nicht konstanter Geschwindigkeit in einem *inhomogenen* Magnetfeld bewegt (Bild 1.10).
Der Leiter wird zwischen den Grenzflächen 1 und 2 in infinitesimal kleine Elemente $\mathrm{d}\vec{l}$ unterteilt und die Spannung als Linienintegral gebildet:

$$u_{12} = \int_1^2 \vec{E}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_1^2 \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (1.24)$$

Wir setzen die Gl. (1.18) ein und erhalten:

$$u_{12} = -\int_1^2 \left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 \left(\vec{B} \times \vec{\upsilon}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (1.25)$$

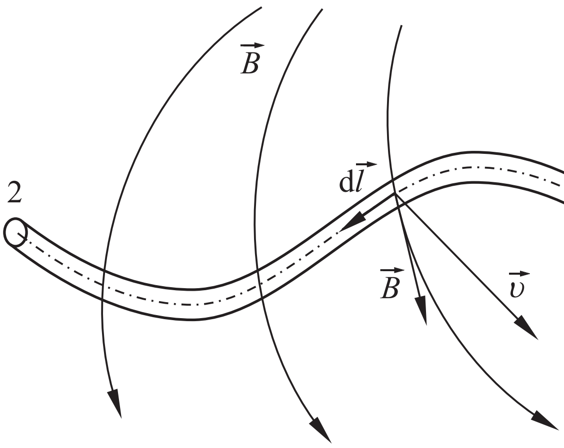
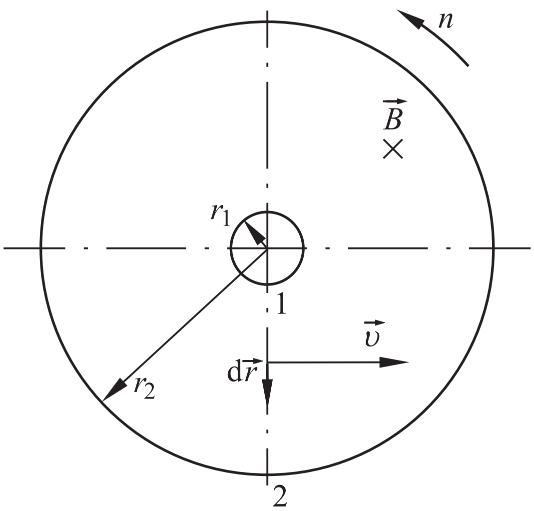


Bild 1.10 Bewegung eines beliebig gestalteten Leiters im inhomogenen Magnetfeld

Beispiel 1.3
Eine Aluminiumscheibe rotiert mit der Drehzahl n = 3600 min^{-1} in einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte B = 0,6 T, das die Scheibenfläche senkrecht durchsetzt.
Wir wollen die Spannung zwischen einem Punkt 1 am Umfang der Scheibenwelle (Radius r_1 = 0,5 cm) und einem Punkt 2 am Rand der Scheibe (r_2 = 20 cm) berechnen.



Wir denken uns die Scheibe zerlegt in viele radial von der Welle zum Scheibenrand verlaufende Leiter. An sämtlichen Leitern wird die gleiche Spannung u_{12} erzeugt; in der Scheibe fließt daher kein Strom.

An dem Längenvektor $\vec{l}_{12}$ von der Welle zum Scheibenrand liegt nach Gl. (1.25) die Spannung:

$$u_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \left(\vec{B} \times \vec{\upsilon}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Auf den Elementen $\mathrm{d}\vec{r}$ des Vektors $\vec{l}_{12}$ stehen die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{\upsilon}$ zueinander senkrecht. Das Vektorprodukt weist in die Richtung des Vektors $\mathrm{d}\vec{r}$; daher gilt:

$$u_{12} = \int_{r_1}^{r_2} B\,\upsilon\,\mathrm{d}r$$

Der Betrag der Geschwindigkeit wächst nach außen an und erreicht beim Radius r den Betrag $\upsilon = \omega\, r$. Wir setzen dies und die konstante Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\,\pi\, n$ in die Gleichung ein und erhalten:

$$u_{12} = B\,\omega \int_{r_1}^{r_2} r\,\mathrm{d}r = 2\,\pi\, n\, B \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = 4{,}52\ \mathrm{V}$$

Diese Spannung kann *nicht* mit einer auf der Scheibe *mitbewegten* Messeinrichtung nachgewiesen werden. Zu ihrer Messung sind z. B. Verbindungen über Schleifkontakte zu einem *ruhenden* Spannungsmesser herzustellen.

Eine Maschine nach dem gezeigten Prinzip bezeichnet man als **Unipolarinduktor**.

1.3.2 Zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der Schleifenfläche

Die induktive Spannung zwischen den Enden eines im Magnetfeld bewegten Stabes (s. Bild 1.9) kann nur mit einer Messanordnung bestimmt werden, die an der Bewegung nicht teilnimmt.

Eine für die Messung der induktiven Spannung geeignete Messanordnung kann z. B. nach Bild 1.11 aufgebaut sein. Dabei ist das Messgerät mit zwei parallelen leitenden Schienen Sch verbunden, auf denen sich der Stab unter ständigem Kontakt bewegt.
Zwischen den Kontaktstellen 1 und 2 hat der Stab die Länge $\vec{l}_{12}$. Wir nehmen ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ an, das den ganzen Beobachtungsraum erfüllt. Die Vektoren $\vec{B}$, $\vec{v}$ und $\vec{l}_{12}$ schließen beliebige Winkel ein.

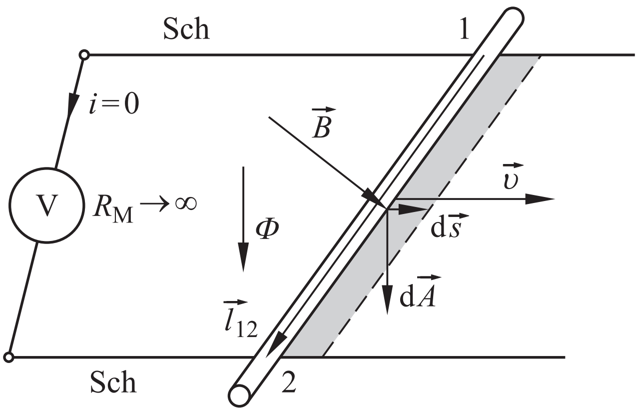


Bild 1.11 Messung der induktiven Spannung u_{12} an einem bewegten Stab

Das an die Schienen Sch angeschlossene Voltmeter zeigt eine Spannung u_{12} nach der Gl. (1.21) an, solange sich der Stab gegenüber der im Magnetfeld ruhenden Messanordnung bewegt.
Dabei verändert sich die *Fläche*, welche von der aus Stab, Schienen und Messgerät gebildeten *Schleife* berandet wird.
Verschiebt sich der Stab im Zeitintervall dt um das Wegelement d$\vec{s}$, so wächst die Fläche um den Wert:

$$\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{l}_{12} \tag{1.26}$$

Aus dem Kreuzprodukt ergibt sich der Flächenvektor d$\vec{A}$ senkrecht zu der Ebene, die von den Vektoren d$\vec{s}$ und $\vec{l}_{12}$ aufgespannt wird. Kehrt sich die Bewegungsrichtung um, so gilt dies auch für die Richtung von d$\vec{A}$.
Die zeitliche Änderung der Fläche können wir mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{s}/\mathrm{d}t$ angeben:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times \vec{l}_{12} \tag{1.27}$$

Mit der Fläche der Schleife verändert sich auch der *magnetische Fluss Φ*, der sie durchsetzt.

Der Richtungssinn des Flusses Φ (s. Band 1, Abschn. 7.2.1) weist in Richtung der Komponente von $\vec{B}$, welche die Schleifenfläche senkrecht durchsetzt (s. Bild 1.11).

Die Flussänderung bei der Bewegung des Leiters ist:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \vec{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{B} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{l}_{12}\right) \tag{1.28}$$

Nach dem *Vertauschungsgesetz* für Vektoren im gemischten Skalar-Vektorprodukt gilt folgende Umformung:

$$\vec{B} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{l}_{12}\right) = \left(\vec{B} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{l}_{12} \tag{1.29}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist der Zusammenhang, den wir bereits im Abschn. 1.3.1 für die induktive Spannung gefunden haben (s. Gl. 1.21); damit gilt:

$$u_{12} = \vec{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1.30}$$

Bei der Bewegungsinduktion lässt sich die induktive Spannung also sowohl mit der LORENTZ-Kraft als auch mit der Änderung des Schleifenflusses berechnen; dabei ist die Flussdichte B *zeitunabhängig*. Die Flussänderung wird nur durch die zeitliche Änderung der Schleifenfläche aufgrund der Bewegung von Leitern bewirkt.

Schließt man in der Schaltung 1.12 statt des Voltmeters mit dem Widerstand $R_M \to \infty$ einen *Verbraucher* mit endlichem Widerstand an, so fließt in der Schleife ein Strom $i > 0$; der bewegte Stab wirkt dabei im Stromkreis als Spannungsquelle.

Auf den stromdurchflossenen Stab wirkt im Magnetfeld eine Kraft (s. Band 1, Abschn. 7.2.2), welche seine Bewegung *hemmt*: Bei der Bewegungsinduktion wird also mechanische in elektrische Energie umgewandelt.

Nun wollen wir noch den allgemeinen Fall betrachten, bei dem sich ein Leiter beliebiger Form in einem zeitunabhängigen, *inhomogenen* Magnetfeld befindet. Seine Wegelemente $\mathrm{d}\vec{l}$ bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten $\vec{\upsilon}$.

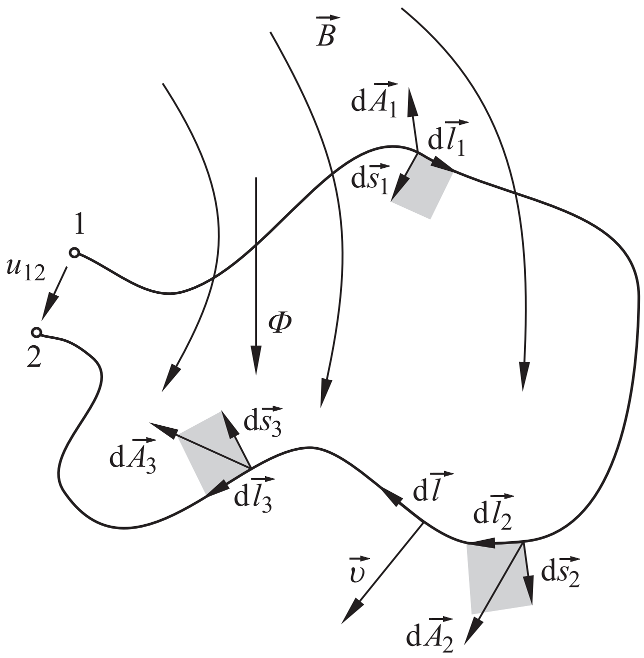


Bild 1.12 Induktive Spannung an einer bewegten Leiterschleife

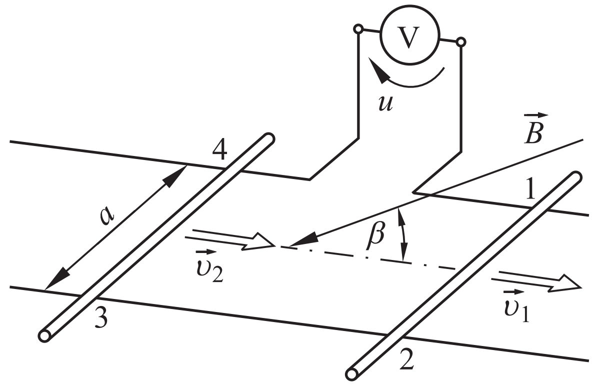
Die Vektoren $\mathrm{d}\vec{s}$ sind die Verschiebungen $\vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t$ der Leiterelemente. Die Produkte $\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{l}_{12}$ ergeben die Flächenelemente $\mathrm{d}\vec{A}$, um welche sich die Schleifenfläche im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ jeweils verändert.
Bei der Bewegung der drei Leiterelemente im Bild 1.12 *verkleinern* $\mathrm{d}\vec{A}_1$ und $\mathrm{d}\vec{A}_3$ die Schleifenfläche, $\mathrm{d}\vec{A}_2$ dagegen *vergrößert* sie.

Die induktive Spannung u_{12} berechnen wir aus der Flussänderung in der Schleife mithilfe der Gln. (1.30 und 1.28). Wir integrieren über den bewegten Schleifenteil, der die Flussänderung in der Schleife hervorruft, und erhalten:

$$u_{12} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \int_1^2 \vec{B} \cdot \left(\vec{\upsilon} \times \mathrm{d}\vec{l}\right) \qquad (1.31)$$

Diese Gleichung liefert dann das richtige Vorzeichen für u_{12}, wenn der Integrationsweg von 1 nach 2, welcher den bewegten Leiterteil enthält, den Richtungssinn des Flusses Φ im *Rechtsschraubensinn* umfasst (s. Bild 1.12).
Vergrößert sich in Bild 1.12 die vom Magnetfeld durchsetzte Schleifenfläche, so ist $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t > 0$ und $u_{12} > 0$. *Verkleinert* sich diese Fläche hingegen, so haben beide Größen ein *negatives* Vorzeichen.
Die Messanordnung zwischen den Klemmen *ruht* und trägt zur Flussänderung nichts bei.

Beispiel 1.4
Ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte $B = 0{,}4$ T ist unter dem Winkel $\beta = 20°$ gegen die Ebene zweier Schienen, die voneinander den Abstand a = 300 mm haben, geneigt. Darauf bewegen sich in ständigem Kontakt mit diesen zwei gerade Stäbe mit den Geschwindigkeiten $\upsilon_1 = 0{,}2$ m/s und $\upsilon_2 = 0{,}5$ m/s.
Wir wollen die Spannung u am Messgerät sowohl mithilfe der LORENTZ-Kraft als auch mit der Flussänderung berechnen.



Mithilfe der LORENTZ-Kraft erhält man die Gl. (1.21), die für die Spannung zwischen den Kontaktstellen 1 und 2 lautet:

$$u_{12} = \left(\vec{B} \times \vec{\upsilon}_1\right) \cdot \vec{l}_{12}$$

Der Vektor $\vec{B} \times \vec{\upsilon}_1$ weist in Richtung des Vektors $\vec{l}_{12}$, also ist $u_{12} > 0$. Wir berechnen:

$$u_{12} = 0{,}4\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 160° \cdot 0{,}3\ \mathrm{m}$$

$$u_{12} = 8{,}2\ \mathrm{mV}$$

Der Vektor $\vec{B} \times \vec{\upsilon}_2$ weist in Gegenrichtung zum Vektor $\vec{l}_{34}$, also ist $u_{34} < 0$. Wir berechnen: $u_{34} = -20{,}5$ mV

Aus dem Maschensatz folgt:

$$u = u_{12} + u_{34} = -12{,}3 \text{ mV}$$

Aus der *Flussänderung* berechnen wir die Spannung u mit der Gl. (1.30):

$$u_{12} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \vec{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

Den Richtungssinn des Flusses Φ legen wir senkrecht zur Schleifenfläche *nach unten* fest, damit ihn der Integrationsweg 1 - 2 - 3 - 4 im Rechtsschraubensinn umfasst.
Die Richtung des Flächenvektors $\vec{A}$ legen wir wie üblich in Richtung der Komponente von $\vec{B}$ fest, welche die Schleifenfläche senkrecht nach unten durchsetzt.
Der mit der Geschwindigkeit υ_1 bewegte Stab 1 - 2 *vergrößert* den Schleifenfluss und der mit der Geschwindigkeit υ_2 bewegte Stab 3 - 4 *verkleinert* ihn. Wegen $\upsilon_2 > \upsilon_1$ *verringert* sich insgesamt der Schleifenfluss.
Mit der Gl. (1.30) berechnen wir:

$$u_{12} = \vec{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = B \cdot \cos(90° - \beta) \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

Mit $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = a\,(\upsilon_1 - \upsilon_2)$ erhalten wir den gleichen Wert $u = -12{,}3$ mV wie oben.

1.3.3 Rotation einer Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

In einem zeitlich konstanten homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω eine beliebig gestaltete, ebene Leiterschleife mit der Windungsfläche $\vec{A}$. Die Enden der Leiterschleife sind an *Schleifringe* SR gelegt, welche die Verbindung zur ruhenden Messanordnung herstellen.
Über die *Schleifkontakte* S kann die induktive Spannung u_{12} abgegriffen und als Funktion der Zeit aufgezeichnet werden (Bild 1.13).

Wir berechnen die induktive Spannung u_{12} mit der Gl. (1.30) aus der Flussänderung $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Diese wird ausschließlich durch den rotierenden Teil der Anordnung bewirkt.

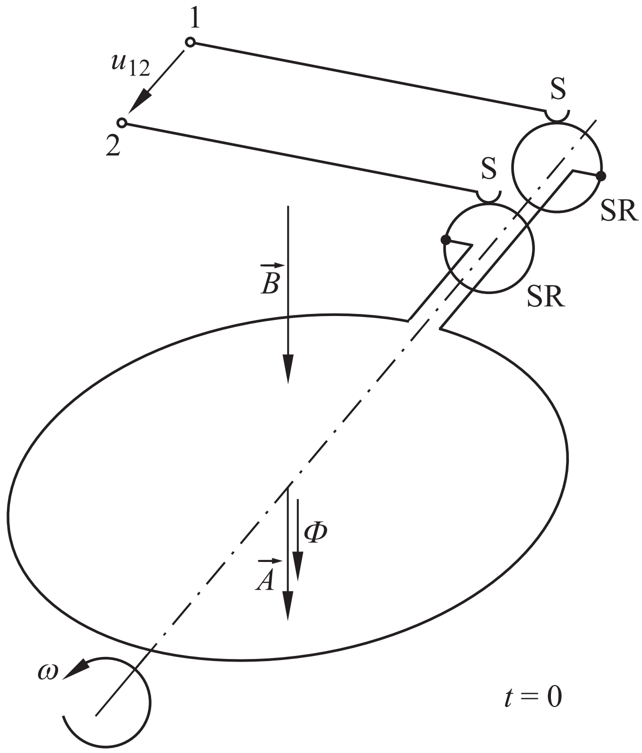


Bild 1.13 Rotation einer Leiterschleife im Magnetfeld

Den Umlaufsinn um die Schleife von der Klemme 1 zur Klemme 2 legen wir so, dass er den Richtungssinn des Flusses Φ im Rechtsschraubensinn umfasst.
Im Augenblick $t = 0$ soll der Flächenvektor $\vec{A}$ der Schleife in Richtung des Flussdichtevektors $\vec{B}$ liegen; damit gehört zu $t = 0$ der Maximalwert des Flusses $\Phi_{max} = B\,A$. Die Zeitfunktion des Flusses, der die Leiterschleife durchsetzt, lautet damit:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = B\,A \cos\alpha(t) = \Phi_{max} \cos\alpha(t) \quad (1.32)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen $\vec{B}$ und $\vec{A}$, der sich zeitlich nach der Funktion $\alpha = \omega\,t$ ändert.

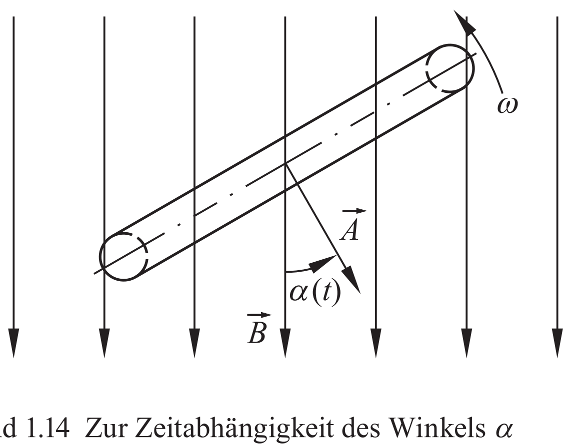


Bild 1.14 Zur Zeitabhängigkeit des Winkels α

Mit dem zeitabhängigen Fluss

$$\Phi(t) = \Phi_{\max} \cos \omega t \tag{1.33}$$

ergibt sich die induktive Spannung:

$$u_{12} = \frac{d\Phi}{dt} = \Phi_{\max} \frac{d(\cos\omega t)}{dt} = \Phi_{\max}\,\omega\,(-\sin\omega t)$$

$$u_{12} = \Phi_{\max}\,\omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.34}$$

Der magnetische Fluss, der sich in der Leiterschleife zeitlich nach einer cos-Funktion ändert, erzeugt also eine sich ebenfalls nach einer cos-Funktion ändernde Spannung, welche gegen die Zeitfunktion des Flusses um $\pi/2$ verschoben ist.

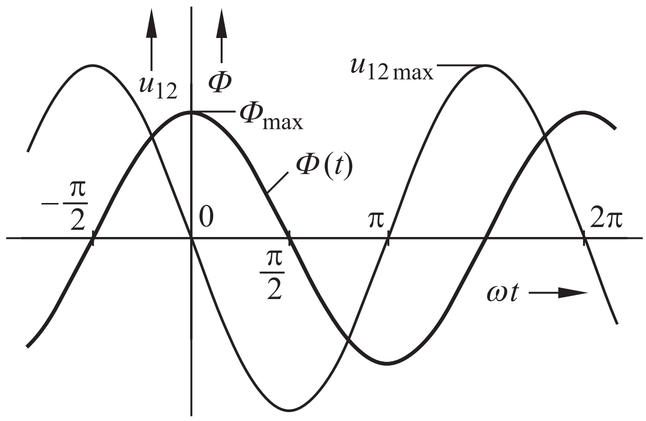


Bild 1.15 Liniendiagramme des Flusses $\Phi(t)$ und der induktiven Spannung u_{12}

Der Maximalwert der induktiven Spannung hängt von der Winkelgeschwindigkeit ω ab:

$$u_{12\max} = \omega\ \Phi_{\max} \tag{1.35}$$

Schließt der Flächenvektor $\vec{A}$ der Leiterschleife zur Zeit $t = 0$ einen Winkel α_0 mit dem Flussdichtevektor $\vec{B}$ ein, so ist die induktive Spannung um den gleichen Winkel verschoben:

$$u_{12} = \Phi_{\max}\,\omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha_0\right) \tag{1.36}$$

Lässt man statt einer einzigen Leiterschleife eine *Spule* mit *N gleichen* Windungen im homogenen Magnetfeld rotieren, so liegen die induktiven Spannungen sämtlicher Windungen in Reihe und die Spannung u_{12} wird N-mal so groß:

$$u_{12} = N \cdot \Phi_{\max}\,\omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha_0\right) \tag{1.37}$$

Schließt man an die Klemmen 1 und 2 im Bild 1.14 einen *Verbraucher* an, so fließt in ihm und in der Leiterschleife ein zeitlich sinusförmiger Strom. Auf die Leiterelemente der rotierenden Schleife werden LORENTZ-Kräfte ausgeübt, die ein *Drehmoment* gegen den Drehsinn erzeugen.

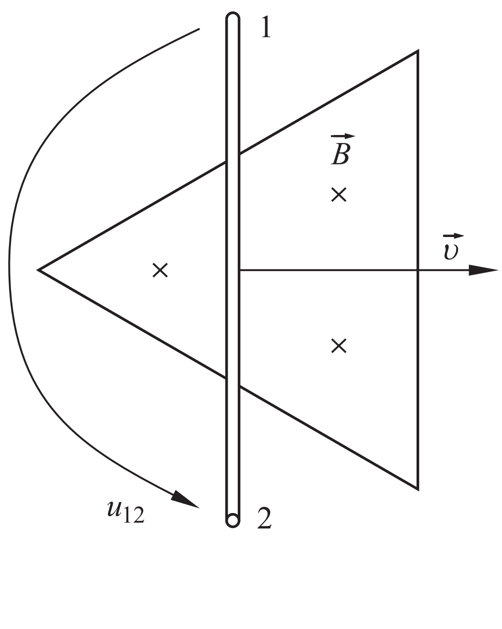
Die Anordnung ist damit ein einfacher Sinusstrom-Generator, der mechanische in elektrische Energie umwandelt.

Fragen

– Erläutern Sie den Begriff Bewegungsinduktion.
– Was versteht man unter der induzierten elektrischen Feldstärke?
– Leiten Sie den Wert der Spannung zwischen den Enden eines geraden Leiters, der sich durch ein homogenes Magnetfeld bewegt, aus der LORENTZ-Kraft ab.
– Skizzieren Sie eine Messanordnung zur Messung dieser Spannung.
– Begründen Sie, warum bei der Bewegungsinduktion stets eine Änderung des magnetischen Flusses in der Messschleife entsteht (Skizze).
– Leiten Sie das Zeitgesetz der Spannung ab, die in einer im homogenen Magnetfeld rotierenden, ebenen Leiterschleife induziert wird.

Aufgaben

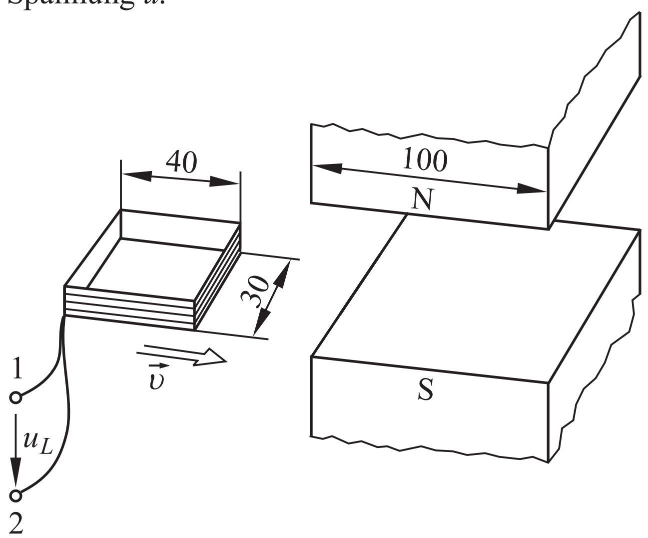
1.7(2) Die Polschuhe eines Eisenkerns haben als Querschnittsfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 5 cm.



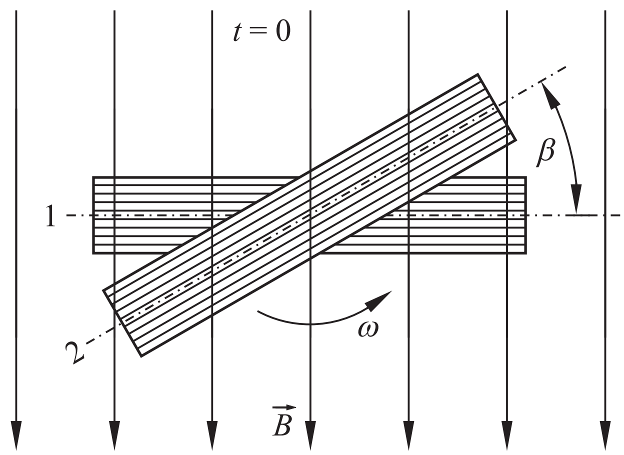
Durch den Luftspalt zwischen den Polschuhen bewegt sich – wie abgebildet – ein Leiterstab mit der konstanten Geschwindigkeit $\upsilon = 0{,}3$ m/s.

Berechnen Sie die Zeitfunktion der am Leiterstab erzeugten induktiven Spannung u_{12} sowie ihren Maximalwert für die Luftspaltflussdichte 0,8 T.

1.8(2) Eine flache Rahmenspule mit der Windungszahl $N = 300$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\upsilon = 1{,}6$ m/s durch das homogene Luftspaltfeld $B = 1{,}2$ T eines Magneten bewegt. Berechnen Sie die Zeitfunktion der induktiven Spannung u.



1.9(2) Zwei zueinander im Winkel $\beta = 30°$ fixierte flache Rahmenspulen ($N_1 = 100$; $N_2 = 250$) mit Windungsflächen von je 10 cm^2 rotieren in einem homogenen Magnetfeld $B = 0{,}15$ T; die Drehzahl ist $n = 600$ min^{-1}. Berechnen Sie die Zeitfunktionen der Spulenflüsse und der Spulenspannungen. Welche Werte haben die Spulenspannungen zum Zeitpunkt $t_1 = 10$ ms?



1.4 Ruheinduktion

Ziele: Sie können
- den Begriff Ruheinduktion erläutern.
- eine Anordnung zur Messung der induktiven Spannung bei Ruheinduktion skizzieren.
- die Flussänderung beschreiben, durch welche die Ruheinduktion erzeugt wird.
- den Zusammenhang zwischen dem Richtungssinn der induktiven Spannung und dem des Flusses angeben.
- den Begriff Spannungsstoß erklären und beschreiben, wie man ihn bestimmen kann.

1.4.1 Induktive Spannung bei zeitabhängigem Magnetfeld

Für die induktive Spannung an einer im Magnetfeld *bewegten* Leiterschleife haben wir für eine *zeitlich konstante* Flussdichte die Gleichung $u_{12} = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ formuliert (s. Gl. 1.30).

Wie das im Folgenden beschriebene Experiment zeigt, gilt diese Gleichung auch für den Fall, dass die Flussänderung *nicht* durch die Bewegung eines Teiles der Messschleife, sondern durch eine *zeitliche Änderung* der Flussdichte $\vec{B}$ erzeugt wird.

Nun das *Experiment*:
Wir erzeugen in einer Kreisringspule ein Feld der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ mit dem Fluss Φ (s. Abschn. 7.4.4 und 7.7.1, Band 1). Um die Kreisringspule legen wir eine Messschleife S, die von diesem Fluss Φ durchsetzt wird.

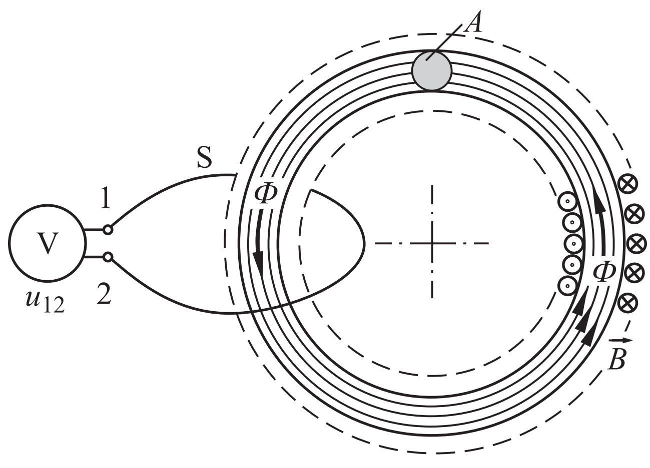


Bild 1.16 Induktion durch zeitliche Änderung der Flussdichte

Erzeugen wir nun eine *zeitliche Änderung* der Flussdichte durch Verstellen des Stromes in der Kreisringspule, so messen wir dabei an den Klemmen der Messschleife eine Spannung u_{12}, die in jedem Augenblick gleich der zeitlichen Änderung des Flusses ist. Die Gl. (1.30) gilt also auch hier.
Man spricht in diesem Fall, bei dem die gesamte Anordnung *ruht*, von **Ruheinduktion**. Bei ihr bleibt die vom Fluss durchsetzte Fläche A innerhalb der Messschleife zeitlich konstant.

Wie bei der Bewegungsinduktion erhält man das richtige Vorzeichen für die induktive Spannung u_{12}, wenn der Umlaufsinn der Messschleife von 1 nach 2 den Richtungssinn des Flusses Φ im *Rechtsschraubensinn* umfasst; im Bild 1.16 ist dies der Fall.

Bei dem Experiment nach Bild 1.16 ist es gleichgültig, in welcher räumlichen Stellung die Messschleife die Kreisringspule umschlingt; auch ihre Größe und Form hat keinerlei Einfluss. Für die induktive Spannung ist lediglich der von der Messschleife umfasste Fluss von Bedeutung.

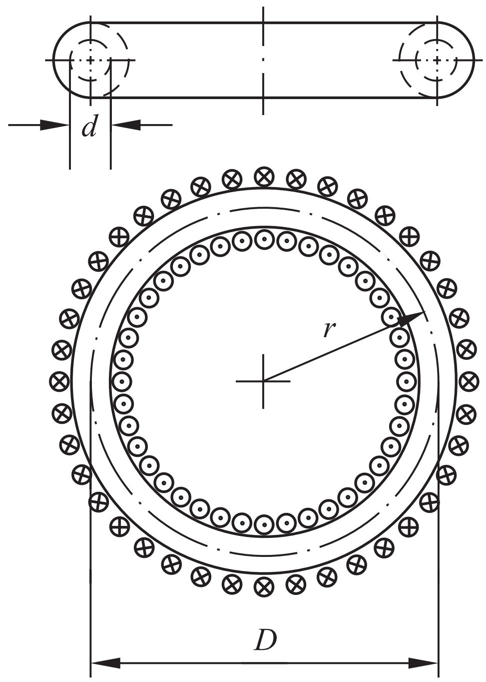
Bemerkenswert ist auch, dass eine induktive Spannung entsteht, obwohl der gesamte Leiterkreis der Messschleife außerhalb des Magnetfeldes liegt, das ausschließlich im Innern der Kreisringspule verläuft. Dies werden wir im Abschn. 1.5.3 an einem Modell erläutern.

Wenn im Experiment nach Bild 1.16 statt einer Schleife eine *Messspule* mit N Windungen verwendet wird, die alle vom gleichen Fluss durchsetzt werden, so wird die Klemmenspannung N-mal so groß. Der Grund ist, dass in jeder Windung eine induktive Spannung erzeugt wird und sämtliche Windungen eine Reihenschaltung bilden. Für eine solche Messspule mit N Windungen gilt:

$$u_{12} = N\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1.38}$$

Auch diese Gleichung liefert nur dann das richtige Vorzeichen für die Spannung, wenn die Spulenwindungen den Fluss im *Rechtsschraubensinn* umschlingen.

Beispiel 1.5
Eine Kreisringspule wird von einem zeitabhängigen Strom $i = i_{\max}\,\sin\omega t$ durchflossen ($i_{\max} = 3$ A; $\omega = 3000\ \mathrm{s}^{-1}$).



Spule: $N_1 = 500$; $D = 0{,}2$ m; $d = 15$ mm; $\mu_r = 1$
Statt von der Messschleife im Bild 1.17 wird die Kreisringspule von einer Messspule mit der Windungszahl $N_2 = 800$ umfasst. Wir wollen die induktive Spannung berechnen.

Mit den Gln. (7.42 und 7.60, Band 1) berechnen wir den Zeitverlauf des Flusses:

$$\Phi(t) = B(t)\cdot A$$

$$\Phi(t) = \frac{\mu_r\,\mu_0\,N_1\,i}{\pi D}\cdot\frac{\pi d^2}{4} = \Phi_{\max}\cdot\sin\omega t$$

Mit der Gl. (1.38) erhalten wir:

$$u_{12} = N_2\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N_2\,\frac{\mathrm{d}\left(\Phi_{\max}\cdot\sin\omega t\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{12} = N_2\,\omega\,\Phi_{\max}\cdot\cos\omega t = 1{,}272\ \mathrm{V}\cdot\cos\omega t$$

Praxisbezug 1.4
Auf der Ruheinduktion beruht die Wirkungsweise des **Transformators** *(transformer)*: Zwei Spulen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 umfassen einen gemeinsamen magnetischen Fluss, der in einem Eisenkern ohne Luftspalt geführt wird.

Die Wicklung an der Spannung U_1, die elektrische Energie aus dem Netz aufnimmt, wird **Primärwicklung** (*primary winding*) genannt. Die Wicklung mit der Windungszahl N_2 speist Energie in ein Netz ein, sie wird **Sekundärwicklung** (*secondary winding*) genannt (s. auch Abschn. 4.9).

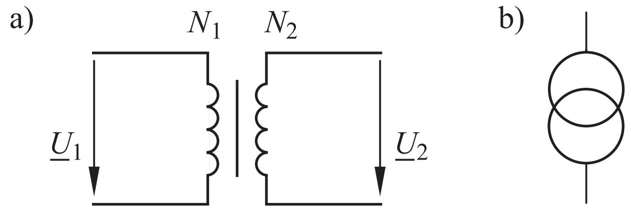


Bild 1.17 Transformator: Schaltzeichen (a) und Schaltkurzzeichen (b)

Transformatorkerne werden stets aus Blechen geschichtet, die durch eine dünne, nicht metallische Schicht gegeneinander isoliert sind. Nach der Ausführung des Kerns unterscheidet man die Bauarten **Kerntyp** und **Manteltyp**.

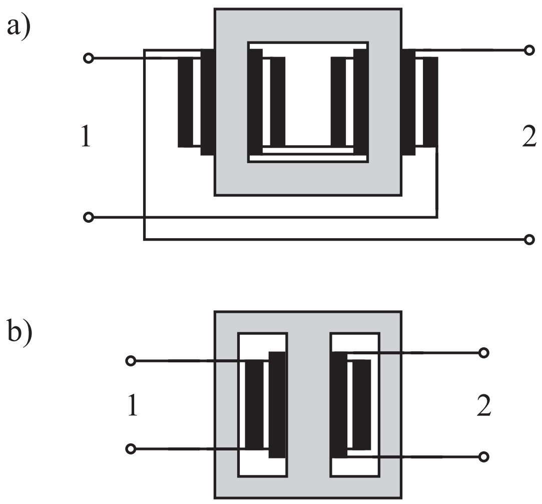


Bild 1.18 Ausführung des Transformators als Kerntyp (a) und als Manteltyp (b)

Während für Transformatoren kleiner Leistung Luftkühlung ausreicht, wird bei den meisten Geräten größerer Leistung Ölkühlung vorgesehen. Die Papierisolation der Wicklungen muss vor dem Einfüllen des Öls im Vakuum getrocknet werden, denn Wasser würde die guten isolierenden Eigenschaften des Öls verschlechtern und Polarisationsverluste hervorrufen. Deshalb werden Öltransformatoren komplett mit Spezialfahrzeugen zum Aufstellungsort transportiert. ❐

1.4.2 Spannungsstoß

Mithilfe der Gl. (1.30) lässt sich aus der induktiven Spannung nach der Umformung $\mathrm{d}\Phi = u\,\mathrm{d}t$ die Zeitfunktion des Flusses berechnen:

$$\Phi(t) = \int u\,\mathrm{d}t \tag{1.39}$$

Bei der Lösung dieses *unbestimmten* Integrals ergibt sich eine additive Konstante. Sie kann meist aus den Anfangs- oder aus den Randbedingungen der Problemstellung bestimmt werden.

Geht man von der Gl. (1.39) auf das *bestimmte* Integral über, so erhält man:

$$\boxed{\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t} \tag{1.40}$$

Hierin sind Φ_1 und Φ_2 die Flüsse, welche die Leiterschleife zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 durchsetzen. Die rechte Seite der Gl. (1.40) ist eine Spannungszeitfläche, die als **Spannungsstoß** (*surge voltage)* bezeichnet wird. Offenbar hängt der Spannungsstoß nicht von der Funktion $\Phi(t)$ ab, die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 bestanden hat.

Die Gl. (1.40) enthält die Aussage:

> Eine Änderung $\Delta\Phi$ des Flusses, der eine Leiterschleife durchsetzt, erzeugt in ihr einen dieser Änderung gleichen Spannungsstoß.

Wird statt einer Leiterschleife eine *Spule* vom Fluss Φ durchsetzt, so ist die linke Seite der Gl. (1.40) mit der *Windungszahl* zu multiplizieren:

$$N(\Phi_1 - \Phi_2) = \int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t \tag{1.41}$$

Einen Spannungsstoß kann man bestimmen, indem man die Spannung oszillografiert und die Kurve $u(t)$ mit einem geeigneten Mathematikprogramm planimetriert.
Der Spannungsstoß kann mit integrierenden Messgeräten auch unmittelbar gemessen und angezeigt werden.

Beispiel 1.6
In einer Zylinderspule 1 (Länge l_1 = 0,5 m; Windungsdurchmesser d_1 = 5 cm; N_1 = 1000) fließt der Gleichstrom I_1. In ihrer Mitte befindet sich koaxial eine kleine Zylinderspule 2 mit 500 Windungen; ihre Windungsfläche ist $A_2 = 2\ \text{cm}^2$. Beim Ausschalten des Stromes I_1 wird an den Klemmen der Spule 2 der Spannungsstoß 0,32 mVs gemessen. Wir wollen hiermit den Strom I_1 berechnen.

Mit der Gl. (7.43, Band 1) berechnen wir die Flussdichte in der Mitte der Spule 1:

$$B = \frac{\mu_0\, N_1\, I_1}{l_1}$$

Beim Ausschalten ändert sich der Fluss in der Spule 2 um den Wert $\Phi_2 = A_2\, B$. Damit ergibt die Gl. (1.41):

$$N_2 \Phi_2 = \int u \,\mathrm{d}t = 0{,}32\ \text{mVs}$$

Wir setzen ein und berechnen:

$$I_1 = \frac{l_1 \int u\,\mathrm{d}t}{\mu_0\, N_1 N_2 A_2} = 1{,}27\ \text{A}$$

Praxisbezug 1.5
Die magnetischen Eigenschaften eines weichmagnetischen Werkstoffes werden durch seine *Magnetisierungskurve* $B = f(H)$ beschrieben, die auch *Kommutierungskurve* genannt wird (Abschn. 7.6.3, Band 1).

Am häufigsten werden **Epstein-Rahmen**[1] *(Epstein square)* nach DIN IEC 60404-2 verwendet. Zu ihrer Herstellung schneidet man aus den zu untersuchenden Blechen *Streifen* aus und stapelt sie zu vier gleichen *Bündeln*. Über diese schiebt man dann die Spulenkörper, die jeweils eine *Erregerspule* (Windungszahl N_1) und eine *Induktionsspule* (Windungszahl N_2) tragen.
Die Blechbündel werden überlappend zusammengefügt, damit der Luftspalt vernachlässigbar ist.

[1] Josef Epstein, 1862 – 1930

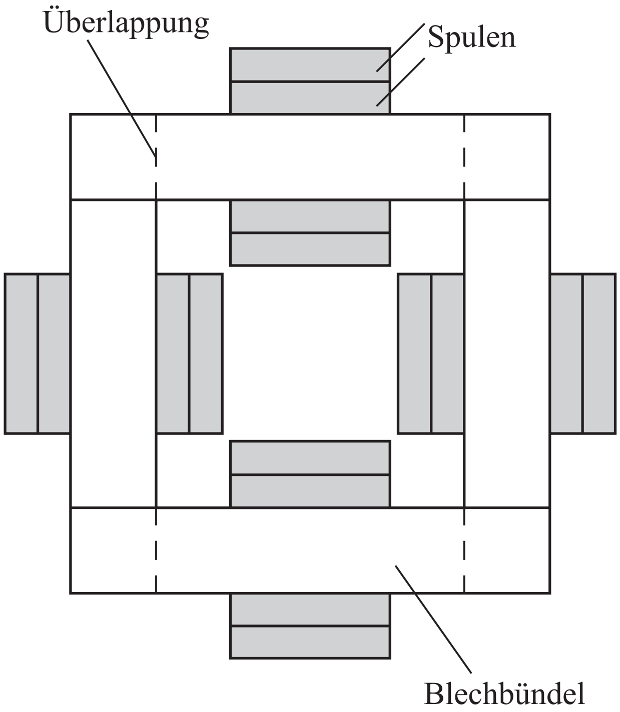


Bild 1.19 Epstein-Rahmen

Der genormte 25-cm-Epstein-Rahmen hat die mittlere Eisenweglänge l_{Fe} = 1 m.

In den in Reihe geschalteten Erregerspulen wird ein Strom I_1 eingestellt und dazu die magnetische Feldstärke $H_1 = 4\ N_1\ I_1\ /\ l_{Fe}$ berechnet. Hierbei herrscht im Eisen die Flussdichte B_1 mit dem Fluss Φ_1.

Der Strom wird nun *kommutiert*, d. h. sein Richtungssinn wird umgekehrt. Danach herrscht im Eisen die Flussdichte $-B_1$ mit dem Fluss $-\Phi_1$.

Während der Kommutierung wird an den vier ebenfalls in Reihe liegenden Induktionsspulen ein *Spannungsstoß* mit dem Betrag

$$\int u \,\mathrm{d}t = 4\ N_2 \cdot 2\Phi_1$$

gemessen, aus dem sich die Flussdichte ergibt:

$$B_1 = \frac{\int u\,\mathrm{d}t}{8\ N_2 \cdot A_{Fe}}$$

Nun wird der Erregerstrom auf einen neuen Wert $|I_2| > |I_1|$ eingestellt, wieder kommutiert usw. Man