

Dieter Lohse
Detlef Wille

Mathematik für Wirtschafts- wissenschaften

Ein Trainingsbuch
Aufgaben und kommentierte Lösungen

2. Auflage

HANSER

MATHEMATIK
FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

Ein Trainingsbuch:
Definitionen und Sätze
Aufgaben mit kommentierten Lösungen

Dr. Dieter Lohse
Dr. Detlef Wille
unter Mitarbeit von
Katharina Hogrefe
Olesya Uzunova

2. Auflage

Alle Rechte vorbehalten.

Binomi Verlag **Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**

Telefon **05105 6624000**

Telefax **05105 515798**

E-Mail **verlag@binomi.de**

Internet **www.binomi.de**

Druck BWH GmbH Medien Kommunikation

Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel

ISBN 978-3-923 923-22-9

Hannover 10/08

Vorwort

Das vorliegende Buch soll für Studierende der Wirtschaftswissenschaften eine begleitende Hilfe zu Mathematikvorlesungen sein. Darin werden Aufgaben aus allen gängigen Gebieten der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften zu Übungszwecken angeboten.

Es wird empfohlen, Lösungen zunächst selbst zu erarbeiten und diese dann anhand der ausführlichen Lösungen zu kontrollieren. Natürlich können die Aufgaben mit Lösungen auch direkt zum Verständnis der Theorie bzw. mathematischer Verfahren durchgearbeitet werden. Um bei eventuell fehlenden Kenntnissen der zugrundeliegenden mathematischen Begriffe nicht gleich zusätzlich zu einem Lehrbuch greifen zu müssen, wurden fast allen Abschnitten eine kurze und übersichtliche Zusammenstellung der im entsprechenden Abschnitt benötigten Definitionen, sowie wichtiger Sätze vorangestellt. Dadurch ist das Buch auch gut zum Selbststudium geeignet.

Die Aufgaben sind abschnittsweise durchnummeriert worden. Bei Verweisen auf Aufgaben innerhalb des gleichen Abschnitts wird lediglich die laufende Aufgabennummer zitiert, sonst die gesamte Aufgabennummer, also einschließlich Kapitel- und Abschnittnummer.

Die Klausuraufgaben des letzten Kapitels sollen speziell der Vorbereitung und Handhabung von Fragestellungen in Klausuren dienen. Die Aufgaben wurden in den letzten Jahren am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hannover in den Lehrveranstaltungen "Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften" gestellt. Wichtig ist bei der Bearbeitung dieser Aufgaben auch die Beachtung des Zeitaufwands pro Aufgabe.

Hannover, September 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen	7
1.1 Grundlagen	7
1.2 Ungleichungen	15
1.3 Elementare Funktionen	19
1.4 Polynome, binomischer Satz, Binomialkoeffizient	25
1.5 Weitere Funktionen	29
1.6 Präferenzrelationen	38
2 Differentialrechnung einer Veränderlichen	41
2.1 Folgen und Reihen	41
2.2 Grenzwerte	48
2.3 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit	57
2.4 Definition der Ableitung, Differentiationsregeln	64
2.5 Das NEWTONSche Näherungsverfahren	74
2.6 Elastizität, Anwendungen	78
2.7 Höhere Ableitungen, TAYLORScher Satz	84
2.8 Extremwertbestimmung	91
3 Geometrie des \mathbb{R}^n; Matrizenalgebra und lineare Gleichungssysteme	107
3.1 Vektorrechnung im \mathbb{R}^n ; lineare Unabhängigkeit	107
3.2 Matrizenalgebra	119
3.3 Lineare Gleichungssysteme, GAUSSscher Algorithmus	134
3.4 Lineare Optimierung	153
4 Integralrechnung	165
4.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	165
4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; einfache Anwendungen	171
4.3 Anwendungen von Integrationsregeln	179
4.4 Uneigentliche Integrale	186

5	Determinanten und CRAMERsche Regel	193
6	Funktionen mehrerer Veränderlicher	209
6.1	Grundlagen	209
6.2	Partielle Ableitungen, vollständiges Differential	218
6.3	Homogenität	227
6.4	JACOBI-Matrix, Kettenregel, implizite Funktionen	230
6.5	Ableitungen höherer Ordnung	240
6.6	Extremalpunktbestimmung	243
6.7	Extrema unter Nebenbedingungen in Form von Gleichungen . .	252
6.8	Extrema unter Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen	265
7	Eigenwerte von Matrizen	271
7.1	Komplexe Zahlen	271
7.2	Grundlegende Begriffe zum Eigenwertproblem	274
7.3	Einfache Eigenwert-Abschätzungen	285
7.4	Quadratische Formen	288
8	Differentialgleichungen und Differenzgleichungen	295
8.1	Allgemeines über Differentialgleichungen	295
8.2	Lösungsmethoden für spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	299
8.3	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	307
8.4	Systeme linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten	313
8.5	Differenzgleichungen: Grundlagen	317
8.6	Lineare Differenzgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	322
8.7	Homogene Systeme linearer Differenzgleichungen mit konstan- ten Koeffizienten	331
9	Sammlung von Klausuraufgaben	335
	Index	437

Kapitel 1

Funktionen

1.1 Grundlagen

Wir geben eine Zusammenstellung der Definitionen von Mengenbildungen.

Den Term $\{x \in X \mid \dots\}$ lese man stets als:

Menge aller x aus X mit der Eigenschaft

Mengenoperationen

A und B seien Teilmengen von X .

$A \cap B$	$= \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	Durchschnitt von A und B
$A \cup B$	$= \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	Vereinigung von A und B
$A \setminus B$	$= \{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	A vermindert um B
$A \times B$	$= \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$	Kartesisches Produkt von A und B

Besondere Zahlenmengen

\mathbb{N}	$= \{1, 2, 3, 4, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	
\mathbb{Z}		Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}		Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}		Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}		Menge der komplexen Zahlen

Intervalle

$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	(abgeschlossenes Intervall)
$]a, b[$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(offenes Intervall)
	auch (a, b) geschrieben	
$[a, b[$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$]a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

1.1.1

Es seien die folgenden Teilmengen von \mathbb{Z} gegeben:

$$X_1 := \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist eine gerade Zahl}\}$$

$$X_2 := \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } y^2 + z^2 \leq 2\}$$

$$X_3 := \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist teilbar durch } 6\}$$

$$X_4 := \{y \in \mathbb{Z} \mid (y^4 + y^2 - 2)(y^2 - 2y) = 0\}$$

$$X_5 := \{y \in \mathbb{Z} \mid 3y^2 \text{ ist teilbar durch } 4\}$$

a) Man bestimme: $X_1 \cap X_2$, $X_3 \cup X_5$, $X_1 \setminus X_3$ und $X_2 \times X_4$.

b) Man untersuche, für welche $i, j \in \{1, \dots, 5\}, i \neq j$ die Beziehung $X_i \subseteq X_j$ gilt. Welche der Mengen sind gleich?

Alle fünf Mengen lassen sich leicht in aufzählender Schreibweise angeben. Damit kann man dann a) und b) beantworten.

Sofort ersichtlich ist:

$$X_1 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

und

$$X_3 = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \dots\}$$

Für X_2 findet man durch Einsetzen:

$$X_2 = \{-1, 0, 1\}$$

Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist, folgt für X_4 :

$$y \in X_4 \iff y \in \mathbb{Z} \text{ und } (y(y-2) = 0 \text{ oder } y^4 + y^2 - 2 = 0)$$

$$y(y-2) = 0 \iff y = 0 \text{ oder } y = 2$$

$$y^4 + y^2 - 2 = 0 \iff y = 1 \text{ oder } y = -1$$

Damit folgt:

$$X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$$

X_5 kann nur gerade Zahlen enthalten. Ein Quadrat einer ungeraden Zahl und das Produkt ungerader Zahlen sind nämlich ungerade. Ist y aber eine gerade Zahl, so ist y^2 und damit auch $3y^2$ durch 4 teilbar. Also gilt

$$X_5 = X_1.$$

a) Man erhält:

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

$$X_3 \cup X_5 = X_1$$

$$X_1 \setminus X_3 = \{\dots, -8, -4, -2, 2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$$

$$X_2 \times X_4 = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), \dots, (1, 2)\}$$

$$X_2 \times X_4 \text{ hat } 3 \cdot 4 = 12 \text{ Elemente.}$$

b) Durch Vergleich ergeben sich folgende Beziehungen:

$$X_2 \subseteq X_4, \quad X_3 \subseteq X_1, \quad \text{sowie } X_1 = X_5$$

1.1.2

Es seien A, B und C die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} ,

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2x + 1\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\},$$

und

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot (1 - x) \leq x^2\}.$$

Man skizziere die Mengen $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$.

Man verifiziere am Beispiel

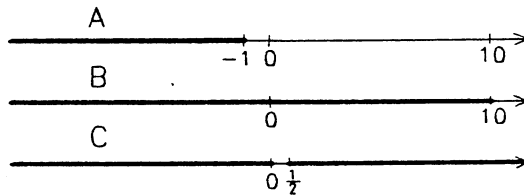
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Wegen $x \geq 2x + 1 \iff x \leq -1$ ist $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$.

Zu C : Wegen $x(1-x) \leq x^2 \iff x - x^2 \leq x^2 \iff \frac{x}{2} \leq x^2$ muß $x \geq \frac{1}{2}$ oder $x \leq 0$ sein. (Bitte veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt auch anhand einer Skizze der Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{x}{2}$ und $g(x) = x^2$.)

Also folgt: $C =]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[$

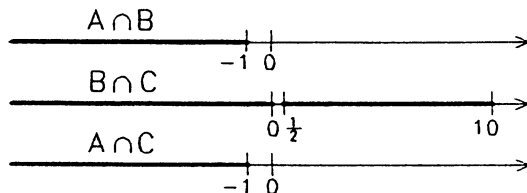
Skizze:



$$A \cap B =]-\infty, -1], \quad B \cap C =]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 10], \quad A \cap C =]-\infty, -1]$$

$$A \cap B \cap C =]-\infty, -1]$$

Skizze:



Es gilt $A \cup B =]-\infty, 10]$. Nun folgt:

$$(A \cup B) \cap C =]-\infty, 10] \cap (]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[)$$

$$=]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 10]$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) =]-\infty, -1] \cup (]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 10])$$

$$=]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 10]$$

$$(A \cap B) \cup C =]-\infty, -1] \cup (]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[)$$

$$=]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[) \cap]-\infty, \infty[$$

$$=]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[$$

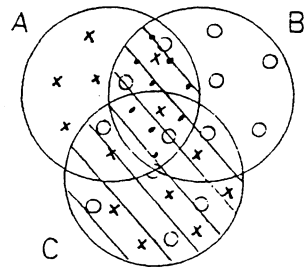
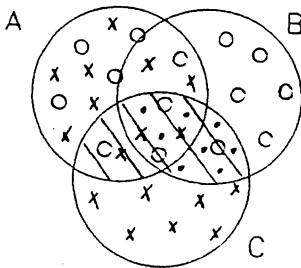
1.1.3

Man mache sich an einem Bild für Mengen A , B und C die folgenden, allgemeinen Regeln klar:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



$$B \cap C \quad \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

$$A \cup B \quad \begin{array}{|c|} \hline \circ \circ \\ \hline \end{array}$$

$$A \cup C \quad \begin{array}{|c|} \hline \times \times \\ \hline \end{array}$$

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{diagonal lines} \\ \hline \end{array}$$

$$A \cap B \quad \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

$$A \cup C \quad \begin{array}{|c|} \hline \times \times \\ \hline \end{array}$$

$$B \cup C \quad \begin{array}{|c|} \hline \circ \circ \\ \hline \end{array}$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{diagonal lines} \\ \hline \end{array}$$

1.1.4

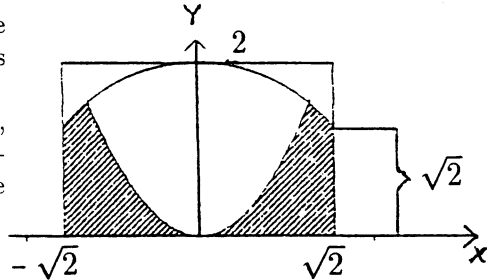
Man skizziere die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } 0 \leq y \leq x^2 \leq 2\}.$$

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.

$\{(x, y) \mid x^2 \geq y \geq 0\}$ beschreibt die Fläche unter der Parabel $y = x^2$ bis zur x -Achse.

Eine zweite Bedingung ist $x^2 \leq 2$, also $x \leq \sqrt{2}$ und $x \geq -\sqrt{2}$. Es ergibt sich die nebenstehend skizzierte Menge.

**1.1.5**

a) Man schreibe ausführlich:

$$\sum_{i=2}^8 (2i + 1) \quad \text{und} \quad \prod_{j=7}^{14} j$$

b) Man schreibe mit dem Summenzeichen:

$$4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$$

c) Man schreibe mit dem Produktzeichen:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

a) Es gilt:

$$\sum_{i=2}^8 (2i + 1) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$$

$$\prod_{j=7}^{14} j = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$$

$$\text{b) } 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = \sum_{k=2}^7 2k$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \prod_{n=1}^4 \frac{n}{n+1}$$

1.1.6

Man berechne die folgenden Summen:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^4 k^2$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^5 (i^2 + 2)$$

$$\text{c) } \sum_{k=2}^5 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

a)

$$\sum_{k=0}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

b)

$$\sum_{i=1}^5 (i^2 + 2) = 3 + 6 + 11 + 18 + 27 = 65$$

c)

$$\sum_{k=2}^5 10 \left(\frac{1}{3}\right)^k = 10 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 10 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 10 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{400}{243}$$

d) Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

Hinweis: In manchen Fällen verwendet man folgende Summen:
Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2} (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n+1) (2n+1)$$

1.1.7

Schreiben Sie unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$

b) $3 + 8 + 15 + 24 + \dots + 99$

c) $a + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^3 + \dots + \frac{1}{128} a^8$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 + 8 + 15 + 24 + \dots + 99 &= (4 - 1) + (9 - 1) + (16 - 1) + \\ &\quad + (25 - 1) + \dots + (100 - 1) \\ &= \sum_{i=2}^{10} (i^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^3 + \dots + \frac{1}{128} a^8 &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 a + \left(\frac{1}{2}\right)^1 a^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^7 a^8 \\ &= \sum_{k=0}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k a^{k+1} \\ \text{oder} &= \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} a^k \end{aligned}$$

1.1.8

Gegeben sind die Summen $\sum_{i=1}^{10} a_i = 3$ und $\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 6$. Wie lautet

$$\sum_{i=1}^{10} (2a_i + 1)(3a_i - 2) \quad ?$$

Wegen $(2a_i + 1)(3a_i - 2) = 6a_i^2 - a_i - 2$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} (2a_i + 1)(3a_i - 2) &= \left(\sum_{i=1}^{10} 6a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} 2\right) = \\ &= 6 \left(\sum_{i=1}^{10} a_i^2\right) - 3 - 10 \cdot 2 = 6 \cdot 6 - 3 - 20 = 13 \end{aligned}$$

1.1.9

Man schreibe die Doppelsumme $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^5 a_{ij}$ ausführlich.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^5 a_{ij} &= a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} \\ &\quad + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} \end{aligned}$$

Man erkennt durch Umordnung der Summanden, daß man die Summationsreihenfolge vertauschen darf.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^5 a_{ij} = \sum_{j=2}^5 \sum_{i=1}^3 a_{ij}$$

1.1.10

Gegeben ist die Summe $\sum_{i=1}^{50} a_i = 400$. Wie lautet

$$\sum_{k=1}^{50} \sum_{i=1}^{50} a_i (a_k + 4) \quad ?$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} \sum_{i=1}^{50} a_i (a_k + 4) &= \sum_{k=1}^{50} (a_k + 4) \left(\sum_{i=1}^{50} a_i \right) = \\ &= 400 \left(\left(\sum_{k=1}^{50} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{50} 4 \right) \right) = 400 (400 + 200) \\ &= 240000 \end{aligned}$$

1.2 Ungleichungen

Für Ungleichungen gelten die folgenden Rechenregeln, mit denen äquivalente Umformungen durchgeführt werden können.

Beachten Sie insbesondere Regel 3.

Rechenregeln für Ungleichungen

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a < b \iff a + c < b + c$
2. $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$: $a < b \iff ac < bc$
3. $a, b, c \in \mathbb{R}, c < 0$: $a < b \iff ac > bc$

Betrag einer Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Merke: **Der Betrag einer Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.**

1.2.1

Welche reellen Zahlen x erfüllen die Ungleichung

$$\frac{1}{x-1} < 1 ?$$

Multipliziert man hier mit dem Nenner $x-1$, so hängt es von x ab, welche der angegebenen Regeln 2 und 3 anzuwenden sind. Es wird also eine **Fallunterscheidung** durchgeführt:

1. Fall: $x-1 > 0$, d. h. $x > 1$

In diesem Fall gilt:

$$\frac{1}{x-1} < 1 \iff 1 < x-1 \iff 2 < x$$

In diesem Fall erhält man also die **Erfüllungsmenge** $L_1 = (2, \infty)$ der Ungleichung.

2. Fall: $x-1 < 0$, d. h. $x < 1$

Hier gilt:

$$\frac{1}{x-1} < 1 \iff 1 > x-1 \iff 2 > x$$

Dies führt auf einen zweiten Teil der Erfüllungsmenge, nämlich $L_2 = (-\infty, 1)$. Insgesamt gilt für die Erfüllungsmenge L :

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

1.2.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

Man gebe äquivalente Umformungen an, und skizziere die entsprechenden Punktengen auf der Zahlengeraden.

a) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} < 1$

b) $\frac{x^2 + x - 2}{|x^2 - 1|} < 1$

Beide Quotienten sind für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definiert.

a) 1. Fall: $x^2 > 1$

Dann ist

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} < 1 \iff x^2 + x - 2 < x^2 - 1 \iff x < 1$$

Also folgt hier $x < -1$ wegen $x^2 > 1$.

2. Fall: $x^2 < 1$

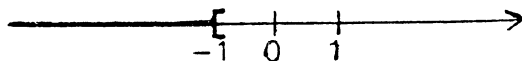
Dann ist

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} < 1 \iff x^2 + x - 2 > x^2 - 1 \iff x > 1$$

In diesem Fall erfüllen keine $x \in \mathbb{R}$ die gegebene Ungleichung, da aus der Voraussetzung $x^2 < 1$ folgt: $-1 < x < 1$

Insgesamt erfüllen genau alle $x \in]-\infty, -1[$ die gegebene Ungleichung.

Skizze:



b)

$$\frac{x^2 + x - 2}{|x^2 - 1|} < 1 \iff x^2 + x - 2 < |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{falls } x^2 > 1 \\ 1 - x^2 & \text{falls } x^2 < 1 \end{cases}$$

Wieder werden Fallunterscheidungen wie unter a) gemacht, wobei der erste Fall sogar identisch mit dem Fall unter a) ist.

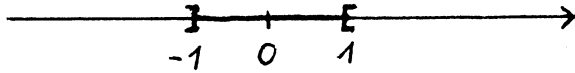
2. Fall: $x^2 < 1$

$$x^2 + x - 2 < 1 - x^2 \iff x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} < 0 \iff (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für alle x mit $-\frac{3}{2} < x < 1$, da ein Produkt aus zwei Faktoren genau dann negativ ist, wenn ein Faktor negativ und der andere

Faktor positiv ist. Unter der Voraussetzung $x^2 < 1$ dieses 2. Falles erfüllen also alle x mit $x \in]-1, 1[$ die Ungleichung.

Skizze:



1.2.3

Welche $x \in \mathbb{R}$ genügen den folgenden Ungleichungen?

a) $\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} < x + 3$

b) $\frac{2x + 3}{|x + 1|} < 1$

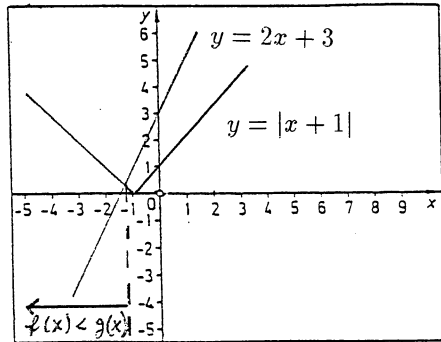
Die Ungleichungen gelten für:

a) $x \in (-2, 2)$

b) $x \in (-\infty, -\frac{4}{3})$

Graphische Interpretation:

$$\frac{2x + 3}{|x + 1|} < 1 \iff \underbrace{2x + 3}_{f(x)} < \underbrace{|x + 1|}_{g(x)}$$



1.2.4

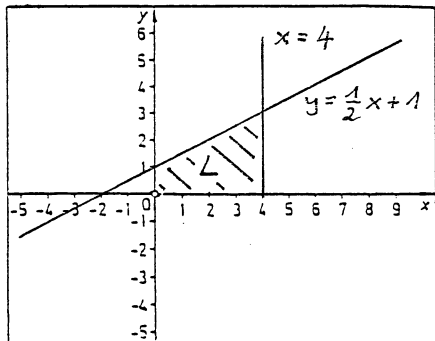
Welche Punkte der (x, y) -Ebene erfüllen die folgenden drei Ungleichungen?

$$\frac{1}{2}x - y + 1 \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 4$$

Wir führen die äquivalente Umformung

$$\frac{1}{2}x - y + 1 \iff y \leq \frac{1}{2}x + 1$$

durch. Man erkennt nun alle Begrenzungsgeraden des Lösungsbereichs, und erhält so die nebenstehende Skizze.



1.2.5

Herr G. Recht möchte jedem seiner Kinder ein Geschenk machen. Dazu stehen ihm höchstens 36 € zur Verfügung. Der Preis für jedes Geschenk soll mindestens 10 € betragen, beide Geschenke sollen sich in ihrem Wert um höchstens 5 € unterscheiden. Man bezeichne die Preise mit x und y und skizziere die möglichen Preiskombinationen in der (x, y) -Ebene.

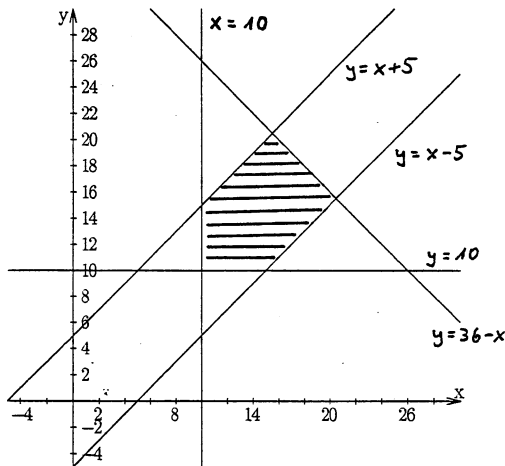
Die nachstehende Skizze ergibt sich aus den folgenden Bedingungen:

$$x \geq 10, \quad y \geq 10, \quad |x - y| \leq 5, \quad x + y \leq 36$$

Dabei führt $|x - y| \leq 5$ wegen

$$|x - y| \leq 5 \iff -5 \leq x - y \leq 5$$

auf die beiden eingezeichneten parallelen Geraden, die durch $y = x - 5$ (rechte Ungleichung) und $y = x + 5$ (linke Ungleichung) gegeben sind.



1.3 Elementare Funktionen

Eine mengentheoretische Schreibweise für Funktionen ist:

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

A heißt **Definitionsbereich**, B heißt **Wertebereich** von f.

Wir geben Funktionen hier meist durch ihre **Funktionsgleichung**

$$f(x) = \dots \quad \text{oder} \quad y = f(x)$$

an.

Verknüpfung von Funktionen

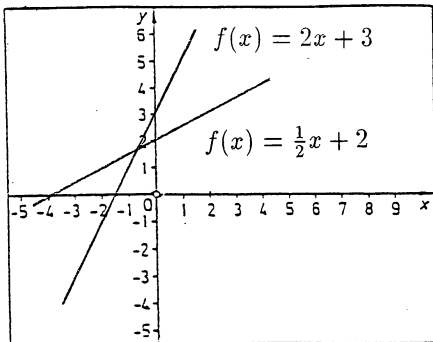
$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$	Summe von f und g
$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$	Produkt von f und g
$(f \circ g)(x) := f(g(x))$	Verkettung von f und g

1.3.1

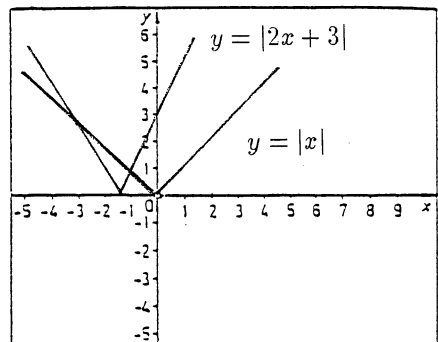
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen mit:

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ b) $f(x) = 2x + 3$ c) $y = |x|$
 d) $y = |2x + 3|$ e) $f(x) = \frac{1}{x}$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, |x| \leq 3$

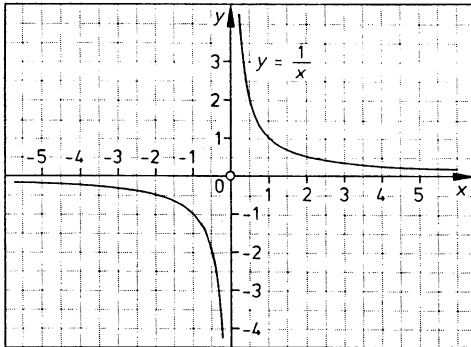
a) , b)



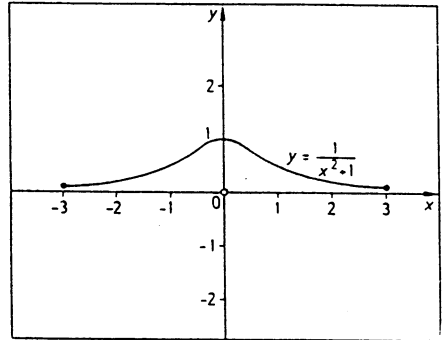
c) , d)



e)



f)

**1.3.2**

Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ und $g(x) = x^2$.

Man berechne die Funktionsterme für $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$, $g \circ f$, und gebe jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich der entstehenden Funktion an.

Zunächst folgt für $f + g$ und für $f \cdot g$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 2, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2$$

Für die Verkettung folgt:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$$

Alle diese Funktionen besitzen den Definitionsbereich \mathbb{R} .

1.3.3

Bei der Produktion eines Gutes entstehen fixe Kosten von 1500 € und variable Kosten von 0,75 €/Stück. Geben Sie die Funktion an, die die Gesamtkosten K in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge bestimmt. Wie groß muß die produzierte und abgesetzte Menge x_1 sein, damit ein Gewinn erzielt wird, wenn für die Erlösfunktion E gilt: $E(x) = 1,5x$?

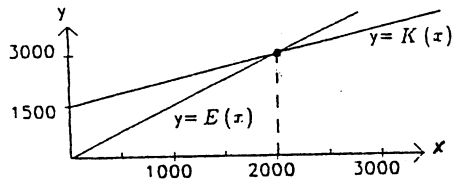
Zeichnen Sie die Graphen der Kosten- und Erlösfunktionen!

Während die fixen Kosten von der Ausbringungsmenge x unabhängig sind, ergeben sich die variablen Kosten zu $0,75 \cdot x$ (Einheit ist €). Also ist

$$K(x) = 1500 + 0,75x, \quad (x \geq 0)$$

die Kostenfunktion. Es wird Gewinn erzielt, wenn $K(x) < E(x)$ gilt. Es ist $K(x) < E(x)$ genau dann, wenn $1500 + 0,75x < 1,5x$ gilt. Dies ist für $x = 2000$ erfüllt.

Ergebnis: Für $x > 2000$ wird Gewinn erzielt.



1.3.4

Der Preis eines Produktes ist eine lineare Funktion der Ausbringungsmenge x mit der Gleichung $p = 5 - 0,2 \cdot x$. Man skizziere den Graphen von $p = p(x)$ und ermittle den Erlös in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge. Man bestimme die Ausbringungsmenge mit dem maximalen Erlös.

Aus dem Zusammenhang

$$\text{Erlös} = \text{Preis} \cdot \text{Absatz}$$

folgt für den Erlös $E(x)$ in Abhängigkeit von dem Absatz x :

$$E(x) = p(x) \cdot x = (5 - 0,2x) x = 5x - 0,2x^2$$

Die Erlösfunktion ist also eine quadratische Funktion, ihr Graph also eine Parabel.

Die Nullstellen von

$$E(x) = x(5 - 0,2x)$$

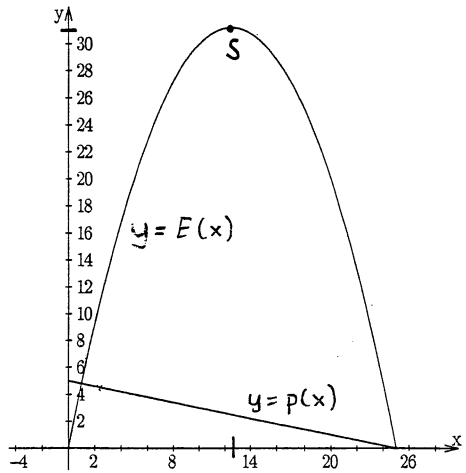
sind 0 und 25. Das Argument x_s des Scheitelpunktes einer quadratischen Parabel ist aus Symmetriegründen die Mitte zwischen den Nullstellen. Es folgt:

$$x_s = \frac{1}{2}(0 + 25) = 12,5$$

Wegen $E(12,5) = 31,25$ folgt

$$S = (12,5 ; 31,25),$$

d. h. der maximale Erlös beträgt 31,25.



1.3.5

Durch die nachstehenden Gleichungen sind Parabeln gegeben.

$$(i) \quad y = x^2 + 2x - 3 \quad (ii) \quad y = 3x^2 - 12x + 9 \quad (iii) \quad y = 2x^2 - 8x + 6$$

- a) Man bestimme die Scheitelpunkte der Parabeln.
 b) Man bestimme die Nullstellen der Parabeln.
 c) Mit Hilfe von b) bestimme man – falls möglich – die Scheitelpunkte der Parabeln auf eine zweite Art.
 d) Man fertige eine Skizze an.

a) Aus der Form $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ erkennt man (x_s, y_s) als Scheitelpunkt der Parabel. Mittels quadratischer Ergänzung wird also die gegebene Gleichung jeweils auf diese Form gebracht.

$$(i) \quad \begin{aligned} y &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \text{Scheitelpunkt: } S = (-1, -4)$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} y &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x) + 9 \\ &= 3(x - 2)^2 - 12 + 9 \\ &= 3(x - 2)^2 - 3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \text{Scheitelpunkt: } S = (2, -3)$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} y &= -2x^2 + 16x - 33 \\ &= -2(x^2 - 16x) - 33 \\ &= -2(x - 4)^2 + 32 - 33 \\ &= -2(x - 4)^2 - 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \text{Scheitelpunkt: } S = (4, -1)$$

b) Die Nullstellen von $x^2 + px + q$ sind gegeben durch

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$.

$$(i) \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2 \quad \text{Nullstellen: } 1 \text{ und } -3$$

$$(ii) \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

Nullstellen sind 1 und 3.

$$(iii) \quad -2x^2 + 16x - 33 = 0 \iff x^2 - 8x + \frac{33}{2} = 0$$

$$\frac{p^2}{4} - q = 16 - \frac{33}{2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Es existieren keine Nullstellen.}$$

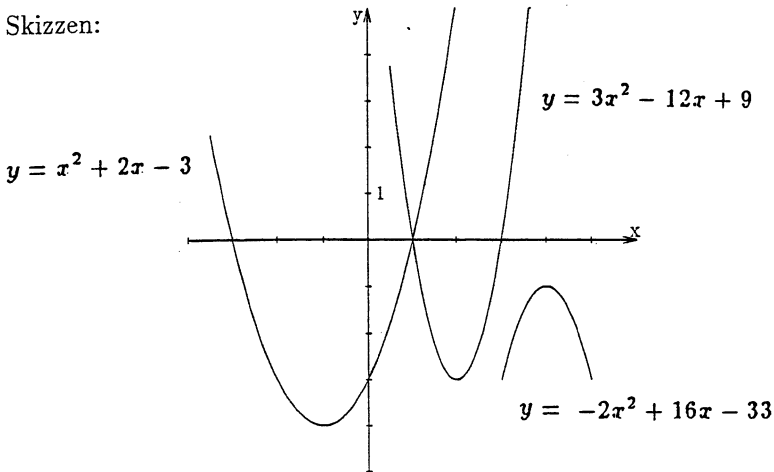
(Das entnimmt man auch schon Teil a), da es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, deren Scheitelpunkt unterhalb der x -Achse liegt.

c) Sind Nullstellen vorhanden, so ist aus Symmetriegründen die Abszisse des Scheitelpunktes die Mitte zwischen den Nullstellen.

Damit erhält man bei der ersten Parabel $S = (-1, f(-1))$ und bei der zweiten Parabel $S = (2, f(2))$. Der jeweilige Funktionswert läßt sich mittels der gegebenen Gleichung berechnen.

Bei der dritten Parabel versagt diese Methode, da keine Nullstellen vorhanden sind.

d) Skizzen:



1.3.6

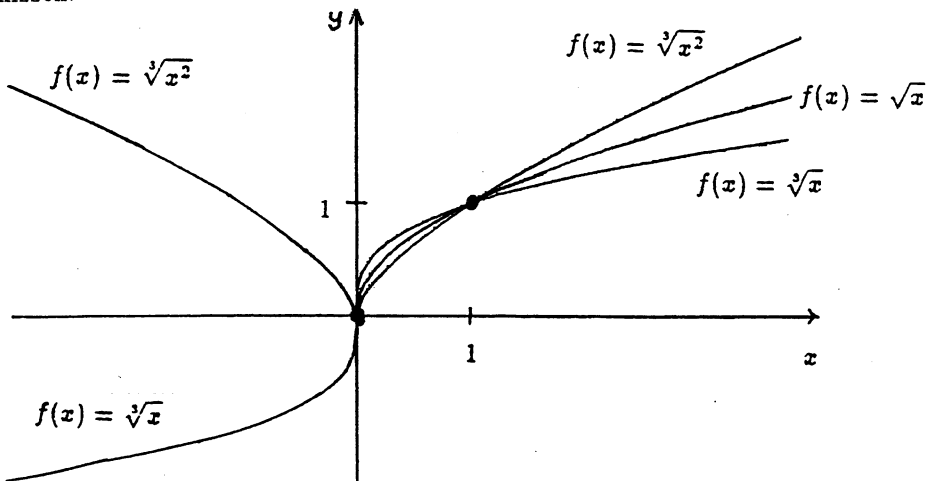
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen, die gegeben sind durch:

a) $y = f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$

b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Skizzen:



1.3.7

Durch die nebenstehende Tabelle sind Werte einer Funktion f gegeben. Aus Erfahrung weiß man, daß f eine quadratische Funktion ist, d. h. es gilt $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Welcher Funktionswert ergibt sich für f an der Stelle 5,2?

x	y
0	0
2	1
4	3

Aufgrund der Einfachheit des Problems sollte hier keine Polynominterpolation nach LAGRANGE vorgenommen werden. Aus dem Wertepaar $(0; 0)$, d. h. $f(0) = 0$ erkennt man nämlich sofort, daß $c = 0$ gilt. Es verbleibt der Ansatz $f(x) = ax^2 + bx$.

$$\text{Das Wertepaar } (2; 1) \text{ ergibt:} \quad 1 = 4a + 2b$$

$$\text{Das Wertepaar } (4; 3) \text{ ergibt:} \quad 3 = 16a + 4b$$

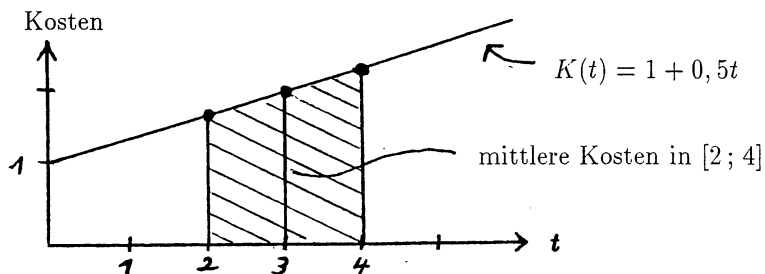
Diese beiden Gleichungen liefern ein einfaches Gleichungssystem mit der Lösung $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{4}$.

Damit folgt $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$ und es ist $f(5,2) \approx 4,68$.

1.3.8

Für ein gewisses Problem sei der Graph der momentanen Kosten gegeben durch $K(t) = 1 + 0,5t$ (wie stets unter Festlegung entsprechender Einheiten). ($t \geq 0$)

Veranschaulichen Sie die Kosten für das Zeitintervall $[2; 4]$, und bestimmen Sie diese.



Da $K(t)$ eine lineare Funktion darstellt, gilt:

$$\begin{aligned} \text{Kosten für das Zeitintervall} &= \underbrace{\text{mittlere Kosten im Zeitintervall} \cdot \text{Intervalllänge}}_{= \text{schrattierte Trapezfläche}} \\ &= K(3) \cdot 2 = 2,5 \cdot 2 = \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

1.4 Polynome, binomischer Satz, Binomialkoeffizient

Wir geben hier die Definition sowie einige wichtige Formeln für die Binomialkoeffizienten an.

Es wird definiert: $0! := 1$
 $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$
 (lies: **n-Fakultät**)

Binomischer Satz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten** und sind definiert durch:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$$

Es gilt:

1. $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$ falls $n \geq k \geq 1$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. **Rekursionsformel** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

1.4.1

Man dividiere das Polynom $p(x) = x^3 + 2x - 1$ durch den Linearfaktor $x + 1$.

Es ist auf übersichtliche Schreibweise zu achten, da der Term x^2 nicht auftritt.

$$\begin{array}{r}
 x^3 \qquad \qquad \qquad + \quad 2x \quad - \quad 1 \quad : (x+1) = x^2 - x + 3 - \frac{4}{x+1} \\
 - (x^3 \quad + \quad x^2) \\
 \hline
 \quad - \quad x^2 \quad + \quad 2x \quad - \quad 1 \\
 - (\quad - \quad x^2 \quad - \quad x) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 3x \quad - \quad 1 \\
 \qquad \qquad \qquad - (3x \quad + \quad 3) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - \quad 4
 \end{array}$$

1.4.2

Man berechne alle reellen Nullstellen der folgenden Polynome p , ($x \in \mathbb{R}$)

$$\text{a) } p : x \mapsto 3x^2 + 12x - 15 \quad \text{b) } p : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

(Hinweis zu (b): p hat eine ganzzahlige Nullstelle.)

$$\text{a) } p(x) = 0 \iff x^2 + 4x - 5 = 0$$

Nullstellen von $x^2 + px + q = 0$ berechnen sich zu:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Mit $p = 4$ und $q = -5$ erhält man hier:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$$

Ergebnis: Nullstellen sind 1 und -5 .

b)

1. Schritt: Eine ganzzahlige Nullstelle wird geraten. 1 ist eine Nullstelle, wie man durch Einsetzen erhält.

2. Schritt: $x - 1$ ist ein Teiler von p , d. h. es gilt $p(x) = (x - 1)q(x)$, wobei die weiteren Nullstellen von p die Nullstellen von q sind. Es wird nun also eine Polynomdivision durchgeführt, um $q(x)$ zu berechnen.

$$\begin{array}{r} x^3 \quad - \quad 2x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6 \quad : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ - (x^3 \quad - \quad x^2) \\ \hline \quad \quad - \quad x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6 \\ \quad \quad - (-x^2 \quad + \quad x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad - \quad 6x \quad + \quad 6 \\ \quad \quad \quad \quad - (-6x \quad + \quad 6) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Es ist also $q(x) = x^2 - x - 6$, und Nullstellen von q sind:

$$x_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Ergebnis: Nullstellen sind -2 , 1 und 3.

1.4.3

Eine ganze rationale Funktion besitzt die Form

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

und hat die vier Nullstellen $x_1 = 2$; $x_2 = 3, 5$; $x_3 = -1$; $x_4 = 4$.
Wie lautet d ?

Die ganze rationale Funktion ist ein normiertes Polynom vom Grade 4. Ein solches Polynom ist durch die Angabe aller 4 Nullstellen x_1, x_2, x_3 und x_4 eindeutig bestimmt zu:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Ausmultiplizieren liefert für d :

$$d = (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) = (-2)(-3,5)(+1)(-4) = -28$$

1.4.4

Aus $(4 + 0,5x)^{10}$ erhält man durch Umformung ein Polynom 10. Grades der Form $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$. Wie lautet der Koeffizient a_8 des Summanden a_8x^8 ?

In der binomischen Formel $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ setzen wir hier:

$$a = 4, b = \frac{x}{2}, n = 10 \text{ und } k = 8.$$

Es folgt:

$$a_8x^8 = \binom{10}{8} \cdot 4^{10-8} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^8$$

$$a_8 = \binom{10}{2} \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^4}{2^8} = \frac{45}{16}$$

1.4.5

Schreiben Sie ausführlich (ohne Klammer) :

$$\text{a) } (a + b)^5 \quad \text{b) } (1 + x)^6 \quad \text{c) } \left(2 - \frac{x}{2}\right)^7 \quad \text{d) } (1 + 0,1x)^5$$

$$\text{a) } a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\text{b) } 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

$$\text{c) } 128 - 224x + 168x^2 - 70x^3 + \frac{35}{2}x^4 - \frac{21}{8}x^5 + \frac{7}{32}x^6 - \frac{1}{128}x^7$$

$$\text{d) } 1 + 0,5x + 0,1x^2 + 0,01x^3 + 0,0005x^4 + 0,00001x^5$$

1.4.6

Berechnen Sie:

$$\text{a) } \binom{10}{4} \quad \text{b) } \binom{201}{198} \quad \text{c) } \binom{23}{4} + \binom{23}{5}$$

a)

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

b) Wir benutzen hier die Formel: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{201}{198} = \binom{201}{3} = \frac{201 \cdot 200 \cdot 199}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1\,333\,300$$

c) Für die Binomialkoeffizienten gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{23}{4} + \binom{23}{5} = \binom{24}{5} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42\,504$$

1.4.7

Man zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Die Richtigkeit der Aussage läßt sich mittels vollständiger Induktion zeigen. Unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes ist jedoch auch ein direkter Beweis möglich:

Man wählt in $(a+b)^n$ die Zahlen a und b jeweils zu 1 und erhält:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

1.5 Weitere Funktionen

In diesem Abschnitt wird eine Zusammenstellung weiterer wichtiger Funktionen gegeben.

1.5.1

Man skizziere die Graphen der folgenden Funktionen, gebe (wo möglich) ihre Periode an und untersuche auf Symmetrie.

Wo sind die Funktionen monoton wachsend, wo monoton fallend?

- a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \cos x$
 c) $f(x) = \cos(\pi x)$ d) $f(x) = x^2 \cdot \cos(\pi x)$

Welche dieser Funktionen sind beschränkt?

a) Der Graph von \sin ist punktsymmetrisch zum Ursprung, für alle x gilt also

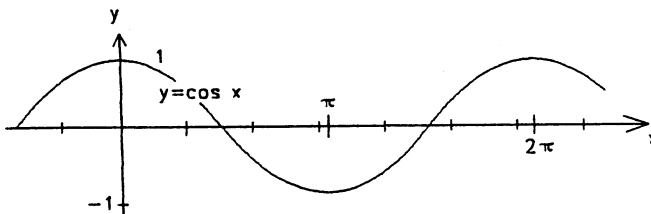
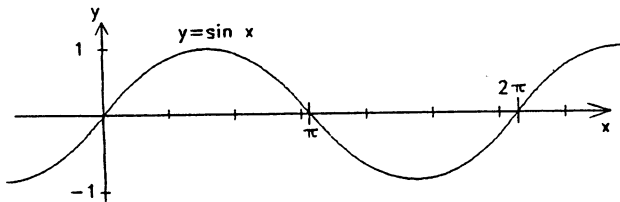
$$\sin(-x) = -\sin x.$$

\sin ist periodisch mit der Periode 2π . \sin ist monoton wachsend in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ und monoton fallend in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. Wegen $|\sin x| \leq 1$ für alle x , ist \sin beschränkt.

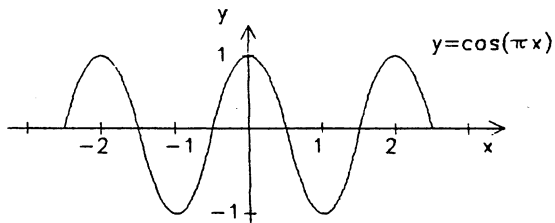
b) Der Graph von \cos ist achsensymmetrisch zur y -Achse, für alle x gilt also

$$\cos x = \cos(-x).$$

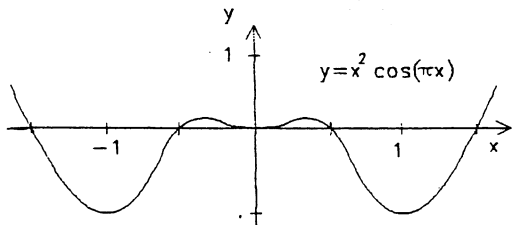
\cos ist periodisch mit der Periode 2π . \cos ist monoton wachsend in $[\pi, 2\pi]$ und monoton fallend in $[0, \pi]$. Wie \sin ist auch \cos durch 1 beschränkt.



c) f hat die Periode 2 und ist monoton fallend in $[0, 1]$ und monoton wachsend in $[1, 2]$. Ansonsten siehe b).



d) f ist nicht periodisch; der Graph ist achsensymmetrisch. f ist unbeschränkt. Die Diskussion der Monotonie ist erst mit Hilfsmitteln der Analysis möglich, die hier noch nicht zur Verfügung stehen.



1.5.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

- Welches ist der größtmögliche Definitionsbereich von f ?
- Man zeichne den Graphen von f .
- Besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1} ?
- Man ermittle gegebenenfalls die Funktionsgleichung von f^{-1} .
- Man zeichne gegebenenfalls den Graphen von f^{-1} .

a) Eine rationale Funktion ist überall dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, hier also auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) An dem Graphen erkennt man, daß es zu jedem Wert genau ein Argument gibt, d. h. f ist injektiv, also umkehrbar. Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1}

ergibt sich aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

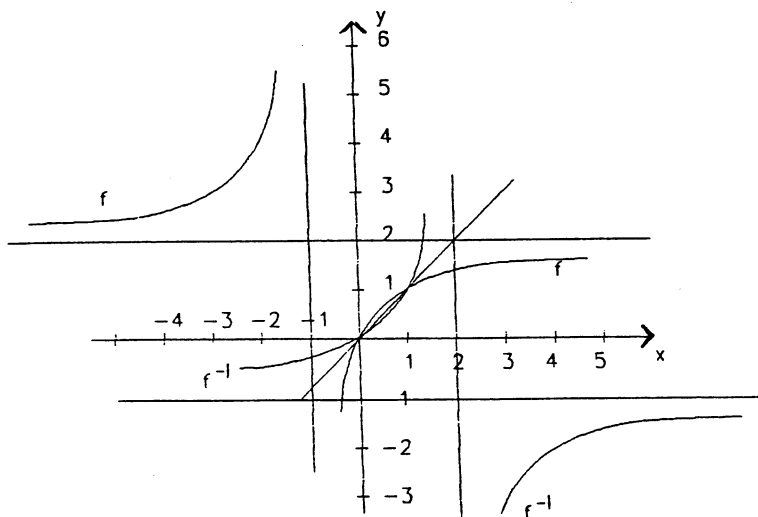
d) Zur Berechnung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion wird x zunächst in y und y in x umbenannt, anschließend wird nach y aufgelöst.

$$x = \frac{2y}{y+1} \iff (y+1)x = 2y$$

$$\iff y(x-2) + x = 0$$

$$\iff y = \frac{x}{2-x} = f^{-1}(x)$$

e) Skizze des Graphen von f^{-1} :



1.5.3

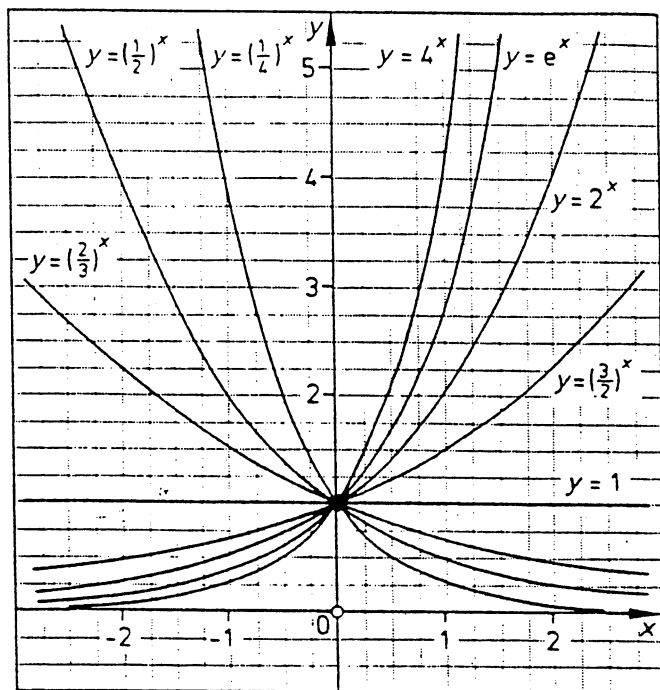
Skizzieren Sie die Graphen der Exponential-Funktionen

$$y = 2^x; \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^x; \quad y = 4^x; \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x; \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$y = 2,71828^x.$$

Alle Graphen bitte in ein Bild, sowie den zu $y = 1$.

Die Zahl 2,71828 ist eine Näherung für die sog. EULERSche Zahl e .



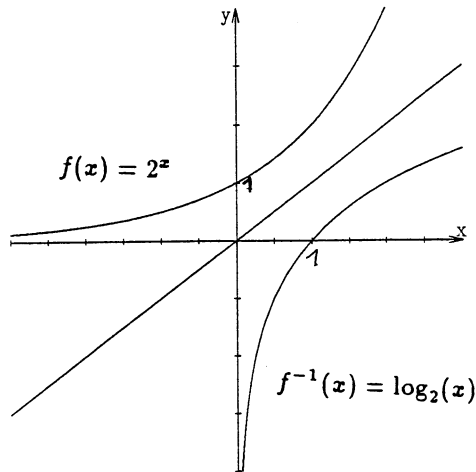
1.5.4

Skizzieren Sie die Graphen von $f(x) = 2^x$ und der Umkehrfunktion. Äußern Sie sich auch zu Definitions- und Wertbereichen.

$f(x) = 2^x$ besitzt den Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W(f) = \{x \mid x > 0\}$.

Die Umkehrfunktion von f lautet $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.

Diese Funktion besitzt den Definitionsbereich $D(f^{-1}) = \{x \mid x > 0\}$ und den Wertebereich $W(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

**1.5.5**

Berechnen Sie:

a) $\log_5 125$

b) $\log_{10} \frac{1}{100000}$

Es gilt die wichtige Äquivalenz:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

a)

$$\log_5 125 = x \iff 5^x = 125 \iff x = 3$$

b)

$$\log_{10} \frac{1}{100\,000} = x \iff 10^x = \frac{1}{100\,000} \iff 10^x = 10^{-5} \iff x = -5$$

1.5.6Lösen Sie die Exponentialgleichung: $3 = 2^{3x-1}$ Durch Logarithmieren (z. B. mit dem Zehnerlogarithmus \lg) erhält man:

$$3 = 2^{3x-1} \iff \lg 3 = (3x-1) \lg 2 \iff x = \frac{1}{3} \left(\frac{\lg 3}{\lg 2} + 1 \right)$$

1.5.7

Herr G. Heim zahlt bei seiner Bank 18000 € ein, die diesen Betrag mit 6 % p.a. verzinst. Wie hoch ist sein Guthaben nach Ablauf von 2 Jahren, 10 Jahren, n Jahren, wenn er zwischendurch kein Geld von diesem Konto abhebt?

Lösung: Es gilt $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$.

Nach 2 Jahren beträgt sein Guthaben 20224,80 € .

Nach 10 Jahren beträgt sein Guthaben 32235,26 € .

Nach n Jahren beträgt sein Guthaben $18000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^n$ € .

1.5.8

Die Privatbank G.L.D. Schleicher bietet Frau O. Zelot eine Geldanlage an, bei der sich ihr eingezahltes Kapital durch Zinsen, Prämien und einen Bonus in 15 Jahren verdoppelt haben soll.

Welchen effektiven Jahreszinssatz gewährt damit die Bank ?

Bei einem effektiven Jahreszinssatz i ist ein Kapital K nach 15 Jahren auf $(1+i)^{15} K$ angewachsen. Hier soll es sich dabei verdoppelt haben. Dafür folgt:

$$2K = (1+i)^{15} K \iff 2 = (1+i)^{15} \iff \sqrt[15]{2} = 1+i \iff i = \sqrt[15]{2} - 1$$

Die Bank gewährte einen effektiven Jahreszinssatz von $i = \sqrt[15]{2} - 1 \approx 4,7294\%$.

1.5.9

Ein Kapital K hat sich bei einem Zinssatz von $i = 11,5\%$ innerhalb eines Zeitraumes t um 50 % erhöht. Wie lang war der Zeitraum t ?

Bei $i\%$ Verzinsung wächst ein Kapital K in t Jahren auf

$$K(1+i)^t.$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich hier:

$$K(1+0,115)^t = 1,5K \iff (1+0,115)^t = 1,5$$

Durch Logarithmieren folgt:

$$t \lg(1+0,115) = \lg 1,5 \implies t = \frac{\lg 1,5}{\lg(1+0,115)} \approx 3,7248$$

Der Zeitraum betrug etwa $3\frac{3}{4}$ Jahre.

1.5.10

Zeichnen Sie den Graphen der Potenzfunktion

$$y = 10 \cdot x^{2,5} \quad \text{mit } x > 0$$

bei doppelt-logarithmischer Achseneinteilung.

Logarithmieren von

$$y = 10 \cdot x^{2,5}$$

liefert

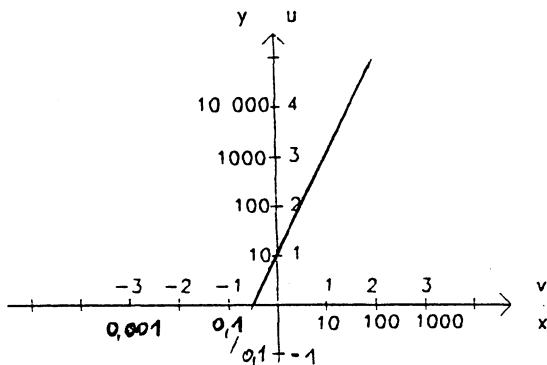
$$\lg y = \lg 10 + 2,5 \cdot \lg x.$$

Mit der Transformation

$$u := \lg y \quad , \quad v := \lg x$$

folgt:

$$\begin{aligned} u &= \lg 10 + 2,5v \\ &= 1 + 2,5v \end{aligned}$$



Dies stellt eine Gerade dar.

1.5.11

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Exponentialfunktion $y = 100 \cdot 1,75^{px}$ für $p = 2$ und $p = 4$ bei einfach-logarithmischer Achseneinteilung.
 b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion zu $y = 100 \cdot 1,75^{2x}$ und zeichnen Sie den Graphen bei logarithmischer Einteilung der x -Achse.

a)

Durch Logarithmieren von

$$y = 100 \cdot 1,75^{px}$$

und die Transformation

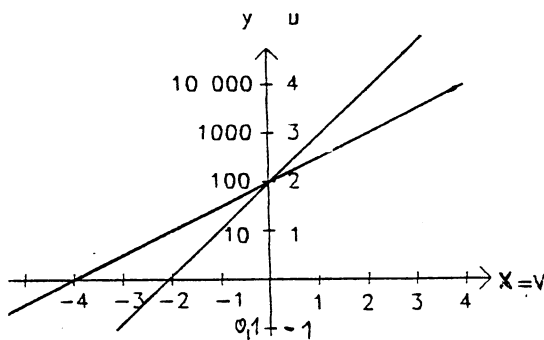
$$u := \lg y \quad , \quad v := x$$

folgt: $u = \lg 100 + px \cdot \lg 1,75$.

Die Graphen sind also Geraden;

für $p = 2$: $u \approx 2 + 0,49x$

für $p = 4$: $u \approx 2 + 0,97x$



b) Die Umkehrfunktion läßt sich auf zwei Arten bestimmen:

Man kann $u = 2 + 2x \cdot \lg 1,75$ nach x auflösen und dann u und x vertauschen (am einfachsten) oder man löst $y = 100 \cdot 1,75^{2x}$ nach x auf und vertauscht anschließend x und y .

Auf die erste Art erhält man $x = \frac{u-2}{2 \lg 1,75}$, also $u = \frac{1}{2 \lg 1,75} x - \frac{1}{\lg 1,75}$ und erkennt gleich, daß der Graph bei logarithmischer Einteilung der x -Achse eine Gerade ist.

Bei der zweiten Rechenmöglichkeit erhält man zunächst durch Logarithmieren:

$$\lg y = \lg 100 + 2x \cdot \lg 1,75,$$

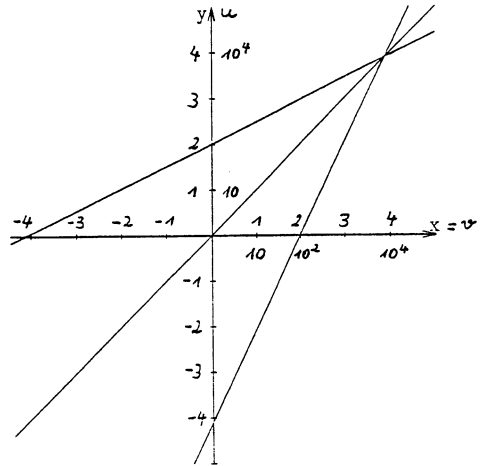
$$\text{also } x = \frac{\lg y - 2}{2 \lg 1,75}, \text{ bzw.}$$

$$y = \frac{1}{2 \lg 1,75} \lg x - \frac{1}{\lg 1,75}.$$

Die Substitution $\lg x = v$ zeigt dann wieder, daß der Graph bei logarithmischer Einteilung der x -Achse eine Gerade ist, die die Gleichung

$$y = \frac{1}{2 \lg 1,75} v - \frac{1}{\lg 1,75} \approx 2v - 4$$

besitzt.



1.5.12

Die Bevölkerungsstatistik eines Staates weist folgende Daten aus:

Bevölkerungszahl: 26 540 000

jährliche Sterberate pro 1000 Einwohner: 14

jährliche Geburtenrate pro 1000 Einwohner: 45

In wieviel Jahren hat sich die Bevölkerungszahl bei diesen Daten verdoppelt?

Es ist die natürliche Exponentialfunktion zu verwenden. Mit den Bezeichnungen

σ : jährliche Sterberate pro 1000 Einwohner

α : jährliche Geburtenrate pro 1000 Einwohner

B_0 : Anfangsbevölkerung zum Zeitpunkt t_0

t : Zeit in Jahren ab t_0

$B(t)$: Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t

gilt die folgende Formel für die Bevölkerungsentwicklung:

$$B(t) = B_0 \cdot e^{\frac{\alpha - \sigma}{1000} t}$$

Hier gilt:

$$B(t) = 26\,540\,000 e^{0,031t}$$

Soll sich die Bevölkerungszahl verdoppeln, so erhält man für die dazu nötige Zeit t die Gleichung

$$2 = e^{0,031t}$$

mit der Lösung:

$$t = \frac{\ln 2}{0,031} \approx 22,36$$

Ergebnis: Die Bevölkerung hat sich in ca. 22,36 Jahren verdoppelt.

Hinweis: Eine Berechnung von Bevölkerungsanzahlen oder sonstiger stetiger Wachstumsprozesse mittels der Zinseszinsformel kann nur als Näherung betrachtet werden, und das auch nur so lange Zeitraum und Prozentsatz recht klein sind.

Das mathematische Modell des diskreten Zinszuwachses ist falsch zur Beschreibung stetiger Wachstumsprozesse. Bei der Bevölkerungsentwicklung z. B. treten die Geburten und Todesfälle über das ganze Jahr verteilt auf und nicht etwa nur am 31.12.!

1.6 Präferenzrelationen

Eine **Relation** R auf einer Menge M ist eine Teilmenge von $M \times M$, also $R \subseteq M \times M$. Die Elemente von R sind also Paare (a, b) mit $a, b \in M$. Statt $(a, b) \in R$ schreibt man häufig $a R b$, da diese Schreibweise bei Standardrelationen (z.B. der Relation \leq) üblich ist.

Eigenschaften von Relationen

\succsim sei eine Relation auf einer Menge M .

\succsim heißt **reflexiv**, falls für alle $a \in M$ gilt: $a \succsim a$.

\succsim heißt **symmetrisch**, falls gilt: $a \succsim b \iff b \succsim a$.

\succsim heißt **antisymmetrisch**, falls gilt: $a \succsim b \wedge b \succsim a \iff a = b$.

\succsim heißt **transitiv**, falls gilt: $a \succsim b \wedge b \succsim c \iff a \succsim c$.

\succsim heißt **vollständig**, falls gilt: $a \succsim b$ oder $b \succsim a$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt **Äquivalenzrelation**.

Eine Relation R heißt **Präferenzrelation** (bzw. **Präferenzordnung**), falls gilt:

R ist transitiv, vollständig und erfüllt die folgende Bedingung:

$a R b \wedge b R a \implies a \sim b$ d.h. es gibt eine Äquivalenzrelation \sim , so daß $a \sim b$ gilt.

Diese Äquivalenzrelation \sim ist durch R definiert und ist häufig die Gleichheitsrelation. In diesem Falle ist obige Bedingung gerade die Antisymmetrie. Daher sagt man häufig auch: R ist Präferenzordnung, falls R transitiv, vollständig und antisymmetrisch ist.

Ist \succeq eine Relation auf der Menge M und $a \in M$, so heißt die Menge $\{b \in M \mid b \succeq a\}$ die **Bessermenge** B zu a .

1.6.1

Auf $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0\}$ ist eine Relation \succeq definiert durch

$$(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2) : \iff (y_1 \geq x_1 \wedge y_2 \geq x_2).$$

- Ist \succeq transitiv?
- Ist \succeq eine Präferenzrelation?
- Man skizziere die Bessermenge für ein beliebiges (x_1, x_2) .

a) Es seien (x_1, x_2) , (y_1, y_2) , $(z_1, z_2) \in G$ beliebig und es gelte $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$. Die Frage ist, ob dann $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$ gilt. Aus $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ folgt $x_1 \geq y_1$ und $x_2 \geq y_2$. Aus $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$ folgt $y_1 \geq z_1$ und $y_2 \geq z_2$. Damit gilt $x_1 \geq y_1 \geq z_1$, also $x_1 \geq z_1$, da \geq

transitiv ist. Entsprechend folgt $x_2 \geq z_2$. $x_1 \geq z_1$ und $x_2 \geq z_2$ bedeutet aber $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$, also ist \succeq transitiv.

b) Wir untersuchen zunächst auf Vollständigkeit:

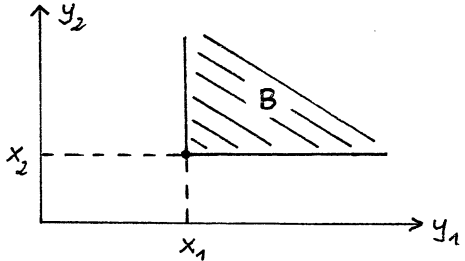
Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G$ beliebig. Dann muß stets $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ oder $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ gelten.

Betrachtet man aber z.B. die Paare $(3, 2)$ und $(4, 1)$, so gilt weder $(3, 2) \succeq (4, 1)$ (da $3 \not\geq 4$) noch $(4, 1) \succeq (3, 2)$ (da $1 \not\geq 2$). Also ist \succeq nicht vollständig, d.h. \succeq ist keine Präferenzrelation.

c) Die Bessermenge

$$B = \{(y_1, y_2) | (y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)\}$$

zu (x_1, x_2) ist nebenstehend skizziert. Es ist die schraffierte Menge einschließlich des Randes.



1.6.2

Auf $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0 \text{ und } y > 0\}$ sei eine Relation \succeq definiert durch

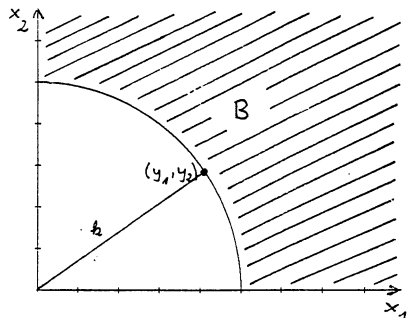
$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) : \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

- a) Man skizziere die Bessermenge zu einem beliebigen $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$.
- b) Man zeige, daß \succeq eine Präferenzrelation ist.

a) Die Bessermenge B zu $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ist

$$B = \{(x_1, x_2) | \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\}.$$

Wie läßt sie sich beschreiben? Ist (y_1, y_2) vorgegeben, so setze man $k := \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. k ist also der Abstand von (y_1, y_2) vom Nullpunkt. Die Bedingung $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq k$ liefert dann $x_1^2 + x_2^2 \geq k^2$.



Diese Ungleichung beschreibt den Außenbereich eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius k einschließlich des Kreises selbst.

b) Es ist zu zeigen:

- (1) \succeq ist transitiv
- (2) \succeq ist vollständig

(3) Definiert man auf \mathbb{R}_+^2 eine Relation \sim durch

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

so ist \sim eine Äquivalenzrelation und es gilt:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \wedge (x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \implies (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2).$$

Zu (1): Es seien (x_1, x_2) , (y_1, y_2) , $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2$ beliebig und es gelte $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$. Dann folgt $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ und $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geq \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, also

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geq \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

und damit $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Das bedeutet $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$, was zu zeigen war.

Zu (2): Zu zeigen ist: Sind $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$ so folgt $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ oder $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$.

Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ gegeben und $x := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ sowie $y := \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Für beliebige Zahlen x, y gilt:

$$\underbrace{x \geq y} \quad \text{oder} \quad \underbrace{y \geq x} \quad , \text{ also gilt}$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad ,$$

d.h. $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ oder $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$, was zu zeigen war.

Zu (3): Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$ mit $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ gegeben. Das bedeutet

$$\underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{=:x} \geq \underbrace{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}_{=:y} \quad \text{und} \quad \underbrace{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}_{=:y} \geq \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{=:x} .$$

Für beliebige reelle Zahlen x, y gilt:

$$x \geq y \quad \text{und} \quad y \geq x \iff x = y$$

Also gilt hier $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ und das bedeutet $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$.

Zu zeigen bleibt, daß \sim eine Äquivalenzrelation ist. Die Bedingungen dafür, nämlich

- (i) Reflexivität, d.h. $(x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$
- (ii) Symmetrie, d.h. $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \implies (y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$
- (iii) Transitivität, d.h. $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \sim (z_1, z_2) \implies (x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$

sind alle erfüllt, da $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ gerade $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ bedeutet und = reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß \succeq eine Präferenzordnung ist.

Kapitel 2

Differentialrechnung einer Veränderlichen

2.1 Folgen und Reihen

Eine **Folge** ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Man schreibt statt $f(n)$ üblicherweise a_n und nennt a_n das **allgemeine Glied** der Folge. Damit schreibt man eine Folge in der Form $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Spezielle Folgen

Arithmetische Folge: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n - 1)d$
(Jedes Folgenglied entsteht aus dem vorhergehenden durch **Addition** einer festen Zahl d .)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) = \frac{k}{2}(2a_1 + (k - 1)d)$$

Geometrische Folge: $a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}$
(Jedes Folgenglied entsteht aus dem vorhergehenden durch **Multiplikation** mit einer festen Zahl q .)

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^k = \frac{a_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1} \quad (\text{für } q \neq 1)$$

Reihen

Ist a_1, a_2, a_3, \dots eine Folge und $s_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$ die k -te **Teilsumme** der Folge, so heißt die Folge s_1, s_2, s_3, \dots eine **Reihe**.

Schreibweise für diese Reihe: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Die k -ten Teilsummen heißen auch **endliche Reihen**.

2.1.1

Geben Sie jeweils das nächste Folgenglied an:

- a) 2, 4, 6, 8, ... b) 6, 4, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, ... c) 17, 9, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...
 d) 15, 18, 22, 27, ... e) 2, 3, 5, 8, 13, ... f) 3, 3, 6, 18, 72, ...

Versuchen Sie auch, die Folge durch einen Term a_n zu beschreiben.

- a) Nächstes Glied: 10 Allgemeines Glied: $a_n = 2n$
 b) Nächstes Glied: $\frac{32}{27}$ Allgemeines Glied: $a_n = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
 c) Nächstes Glied: $\frac{1}{16}$ Allgemeines Glied: $a_n = \frac{1}{2}^{n-3}$ für $n \geq 3$
 d) Nächstes Glied: 33 Allgemeines Glied: $a_n = 12 + \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$
 Dies erkennt man wie folgt:

$$\begin{aligned} a_n &= 15 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n+1) \\ &= 15 + \underbrace{1 + 2 + \dots + (n+1)}_{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} - 3 \\ &= 12 + \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \end{aligned}$$

- e) Nächstes Glied: 21 Allgemeines Glied: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \geq 1$
 f)

$$\begin{array}{cccccc} 3, & 3, & 6, & 18, & 72, & 360, \dots \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \\ \cdot 1 & \cdot 2 & \cdot 3 & \cdot 4 & \cdot 5 & \end{array}$$

Nächstes Glied: 360 Allgemeines Glied: $a_{n+1} = n \cdot a_n$

2.1.2

Der Wert einer Maschine sinkt im ersten Jahr um 4000 € . Jedes weitere Jahr werden 1000 € mehr abgeschrieben. Wie teuer war die Maschine, wenn ihr Buchungswert nach 10 Jahren gleich Null ist?

Der Preis der Maschine betrug:

$$\underbrace{(4000 + 5000 + 6000 + \dots + 13000)}_{10 \text{ Summanden}} \text{ €} = \frac{10}{2} \cdot (4000 + 13000) \text{ €} = 85000 \text{ €}$$

2.1.3

Berechnen Sie (mittels geeigneter Formeln):

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 560$ b) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + 100$

c) $\sum_{i=0}^{20} \left(\frac{2}{3}\right)^i$ Was ergibt sich für $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$?

d) $\sum_{i=3}^7 (9i - 2)$

Bildet man für eine arithmetische Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = a_1 + (n - 1)d$ die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_k$, so gilt:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{k}{2} (2a_1 + (k - 1)d)$$

Bildet man für eine geometrische Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = a_1 q^{n-1}$ die Summe $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^k$ so gilt:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^k = \frac{a_1 (q^{k+1} - 1)}{q - 1}$$

a) Dies ist die Summe der ersten 280 Glieder einer arithmetischen Folge mit $a_1 = 2$ und $d = 2$. Die Formel liefert:

$$2 + 4 + \dots + 560 = 140 (4 + 2 \cdot 279) = 78680$$

b) Dies ist die Summe der ersten 200 Glieder einer arithmetischen Folge mit $a_1 = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + 100 = 100 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 199\right) = 10050$$

c) Dies ist die Summe einer geometrischen Folge. Die Formel liefert:

$$\sum_{i=0}^{20} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{21} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \approx 2,9994 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{0 - 1}{-\frac{1}{3}} = 3$$

d) Dies ist die Summe einer arithmetischen Folge mit $a_1 = 25$, $d = 9$ und $k = 5$. Die Formel liefert:

$$\sum_{i=3}^7 (9i - 2) = \frac{5}{2} (2 \cdot 25 + 4 \cdot 9) = 215$$