

Raimond Dallmann



Baustatik 2

Berechnung statisch
unbestimmter Tragwerke



5., aktualisierte Auflage

HANSER



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf HanserPLUS finden Sie zu diesem Titel kostenloses digitales Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-t8hgt-8tvm4

plus.hanser-fachbuch.de



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp • *Aufgabensammlung zur Baustatik*

Dallmann • *Baustatik*

Band 1: Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

Band 2: Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

Band 3: Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Engel/Al-Akel • *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Engel/Lauer • *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Fouad/Zapke • *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann • *Hydraulik in der Wasserwirtschaft*

Göttsche/Petersen • *Festigkeitslehre – klipp und klar*

Jochim/Lademann • *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke • *Physik im Bauwesen*

Malpricht • *Schalungsplanung im Baubetrieb*

Prüser • *Konstruieren im Stahlbetonbau*

Rjasanowa • *Mathematik für Bauingenieure*

Raimond Dallmann

Baustatik 2

Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

5., aktualisierte Auflage

HANSER

Der Autor:

Prof. Dr.-Ing. Raimond Dallmann
Hochschule Wismar
Fakultät für Ingenieurwissenschaften



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2022 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © gettyimages.de/Xinzheng

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Satz: Raimond Dallmann

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47279-2

E-Book-ISBN 978-3-446-47387-4

Vorwort

Der vorliegende zweite Band dieses Lehrbuches vermittelt die grundlegenden Kenntnisse zur Berechnung von Formänderungen sowie der Kraft- und Verformungszustände statisch unbestimmter Tragwerke. Der überwiegende Teil des Inhalts ist aus den von mir an der Fachhochschule in Wismar gehaltenen Lehrveranstaltungen entstanden. Das Buch richtet sich an Studenten des Bauingenieurwesens. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Berechnung statisch bestimmter Tragwerke, die im Band 1 behandelt wurden.

Es werden in *Kapitel 1* zunächst die Grundlagen zur Berechnung von Formänderungen stabförmiger Tragwerke vermittelt. Ausgehend von den der Berechnung stabförmiger Bauteile zugrunde liegenden Hypothesen werden die Grundgleichungen der Stabtheorie hergeleitet. Ein weiteres Thema dieses Kapitels ist die Berechnung einzelner Verformungen mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte und die Ermittlung von Biegelinien.

Die klassischen Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme sind das Kraftgrößenverfahren und das Weggrößenverfahren. Beide Methoden werden auf anschaulichem Wege ausführlich erläutert. Das Kraftgrößenverfahren wird in *Kapitel 2* dargestellt, das Drehwinkelverfahren als Spezialfall des allgemeinen Weggrößenverfahrens ist Inhalt von *Kapitel 3*. Sowohl beim Kraftgrößen- als auch beim Drehwinkelverfahren werden neben der Beanspruchung durch äußere Kraftgrößen auch Verformungseinwirkungen ausführlich behandelt.

Die Ermittlung von Einflusslinien für Schnittgrößen und Verformungen statisch unbestimmter Systeme wird in *Kapitel 4* dargestellt und erfolgt auf der Grundlage beider Berechnungsmethoden.

Anhand vieler vollständig durchgerechneter Beispiele wird die Anwendung der theoretischen Grundlagen in jedem Kapitel anschaulich erläutert.

Obwohl das Lehrgebiet der Baustatik durch den Einsatz des Computers einen Wandel erfahren hat, ist die Baustatik als Grundlagenfach für den Konstruktiven Ingenieurbau nach wie vor unverzichtbar. Das Verständnis des

Trag- und Verformungsverhaltens einer Konstruktion kann nicht durch den Einsatz von Software ersetzt werden. Nur solide Kenntnisse der Baustatik ermöglichen den Entwurf sicherer, gebrauchstauglicher und wirtschaftlicher Tragwerke.

Es ist nicht Ziel dieses Buches, die Statik der Stabtragwerke umfassend darzustellen, sondern vielmehr in die Methoden zur Berechnung von Verformungen und statisch unbestimmter Tragwerke einzuführen und damit die Grundlage für ein vertieftes Studium der Baustatik zu schaffen. Um einen anschaulichen Zugang zu den Berechnungsverfahren zu ermöglichen und um den Abstraktionsgrad niedrig zu halten, wird auf die Darstellung matrizieller Methoden bewusst verzichtet.

Die klassischen Verfahren fördern durch ihre Anschaulichkeit das Verständnis des Tragverhaltens insbesondere statisch unbestimmter Systeme. Es ist daher wichtig, dass die Vermittlung der Berechnungsmethoden nicht auf die Anwendung rezeptartiger Algorithmen ausgerichtet ist. Spezielle Methoden, die darauf abzielen, die Auflösung von Gleichungssystemen mit vielen Unbekannten zu vermeiden, werden nicht behandelt, da dieser Aspekt heutzutage bedeutungslos ist.

Es wird beim Lesen dieses Buches sicher manche Stellen geben, bei denen sich das erwünschte Verständnis nicht unmittelbar einstellt. Oft ist es dann hilfreich, die Zusammenhänge zunächst in der Anwendung auf ein konkretes Beispiel zu betrachten und danach den nicht richtig verstandenen Abschnitt nochmals zu lesen.

Selbst wenn die Berechnung der Beispiele nachvollzogen werden kann, ist es doch etwas völlig anderes, vor dem leeren Blatt Papier zu sitzen und den richtigen Ansatz zur Lösung finden zu müssen. Darum enthält auch dieses Buch zahlreiche Übungsaufgaben, die die so wichtige eigenständige Übung des Lehrstoffes ermöglichen. Die Lösungen sind am Ende des Buches angegeben. Die vollständigen Lösungswege sind im Internet unter <http://www.bau.hs-wismar.de/Dallmann> oder unter <https://plus.hanser-fachbuch.de/> zu finden.

Ich wünsche mir, dass dieses Buch den Lesern zu dem erhofften Lernerfolg verhilft und würde mich über Hinweise, und Anregungen zur Verbesserung des Inhalts sehr freuen.

Dank gebührt Frau Franziska Kaufmann und ganz besonders Frau Christine Fritsch vom Carl Hanser Verlag für die sehr freundliche und angenehme Zusammenarbeit.

Für die Kontrolle der Beispiele und Aufgaben sowie für die wertvollen Hinweise bei der Durchsicht des Manuskripts danke ich Frau Bianca Hennings ganz herzlich.

Abschließend möchte ich mich wieder ganz besonders bei meiner Frau Nanette bedanken, die auch beim Entstehen des zweiten Buches viel Geduld und Verständnis aufbringen musste und mich in vielerlei Hinsicht beim Schreiben unterstützte.

Ich danke für die zahlreichen Hinweise sowie für die überwiegend sehr positive Beurteilung des Buches.

Tressow, im Frühjahr 2012

Raimond Dallmann

Vorwort zur fünften Auflage

Auch die dritte und vierte Auflage sind von den Lesern sehr positiv aufgenommen worden. In der vorliegenden fünften Auflage wurden immer noch vorhandene Fehler korrigiert. Sollten weitere Fehler auffallen, bitte ich um entsprechende Hinweise.

Frau Christina Kubiak und Herrn Frank Katzenmayer vom Carl Hanser Verlag danke ich für die gute und angenehme Zusammenarbeit.

Tressow, im Frühjahr 2022

Raimond Dallmann

Inhaltsverzeichnis

1	Berechnung der Weggrößen stabförmiger Tragwerke	11
1.1	Einführung	11
1.2	Weggrößen	12
1.3	Formänderungen	12
1.3.1	Formänderungen infolge von Dehnung	12
1.3.1.1	Kinematik	12
1.3.1.2	Stoffgesetz	12
1.3.1.3	Verträglichkeit	13
1.3.1.4	Gleichgewicht	13
1.3.2	Formänderungen infolge von Biegung und Temperaturdifferenz	15
1.3.2.1	Kinematik	15
1.3.2.2	Stoffgesetz	16
1.3.2.3	Verträglichkeit	17
1.3.2.4	Gleichgewicht	18
1.3.3	Formänderungen infolge von Querkraft	18
1.3.4	Formänderungen infolge von Torsion	22
1.3.4.1	Kinematik	22
1.3.4.2	Stoffgesetz	23
1.3.4.3	Verträglichkeit	23
1.3.4.4	Gleichgewicht	23
1.4	Analogien	24
1.4.1	Analogie zwischen Dehn- und Torsionsstab und Balkengleichgewicht	24
1.4.2	Mohrsche Analogie	26
1.5	Formänderungsarbeiten	28
1.5.1	Äußere Eigenarbeiten	28
1.5.2	Äußere Verschiebungsarbeiten	28
1.5.3	Innere Verschiebungsarbeit	29
1.5.4	Innere Eigenarbeit	32
1.6	Ermittlung einzelner Verformungen	32
1.6.1	Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Kräfte	32
1.6.1.1	Federn	33
1.6.1.2	Eingeprägte Auflagerverformungen	33
1.6.1.3	Gleichgewichtsbedingung des virtuellen Kraftgrößenzustands	34

1.6.1.4	Anwendung der Arbeitsgleichung	35
1.6.1.5	Berechnung der Integrale	36
1.6.2	Einheiten	37
1.6.3	Grundfälle der Einzelverformungsberechnung	37
1.6.4	Größenordnung der Verformungsanteile	43
1.7	Ermittlung von Biegelinien	51
1.7.1	Ermittlung der Biegelinie aus der Differenzialgleichung	51
1.7.2	Ermittlung der Biegelinie mithilfe der ω -Zahlen	53
1.8	Der Satz von Betti	59
1.9	Der Satz von Maxwell	60
	Aufgaben 1.1 bis 1.13	61
2	Das Kraftgrößenverfahren	63
2.1	Grundlagen	63
2.1.1	Einführung	63
2.1.2	Statisch bestimmtes Hauptsystem	66
2.1.3	Lastspannungszustand	67
2.1.4	Einheitsspannungszustände	67
2.1.5	Ermittlung der δ -Werte	67
2.1.6	Verformungsbedingungen	68
2.1.7	Ermittlung der Schnittgrößen	68
2.1.8	Einheiten	68
2.1.9	Kontrollen	68
2.1.10	Verformungsbeanspruchungen	69
2.1.10.1	Eingeprägte Auflagerverschiebung	69
2.1.10.2	Eingeprägte Auflagerdrehung	71
2.1.10.3	Temperaturdifferenz ΔT , oben wärmer	72
2.2	Allgemeines Vorgehen	73
2.3	Einfluss der Steifigkeiten, Ersatzfedern	80
2.4	Wahl des Hauptsystems	93
2.5	Verformungsberechnung bei statisch unbestimmten Systemen	94
2.6	Verallgemeinerung des Kraftgrößenverfahrens	108
	Aufgaben 2.1 bis 2.16	111
3	Das Drehwinkelverfahren	114
3.1	Grundlagen	114

3.1.1	Einführung	114
3.1.2	Drehwinkelverfahren und allgemeines Weggrößenverfahren	116
3.1.3	Kinematisch bestimmtes Hauptsystem	116
3.1.3.1	Grundelemente	116
3.1.3.2	Ermittlung der erforderlichen Festhaltungen	116
3.1.4	Lastverformungszustand	118
3.1.5	Einheitsverformungszustände	118
3.1.5.1	Knotendrehungen	118
3.1.5.2	Stabsehnendrehungen	119
3.1.6	Vorzeichen des Drehwinkelverfahrens	119
3.1.7	Gleichgewichtsbedingungen	119
3.1.8	Ermittlung der Schnittgrößen	121
3.1.9	Kontrollen	122
3.2	Vorgehensweise beim Drehwinkelverfahren	122
3.3	Vergleich von Drehwinkel- und Kraftgrößenverfahren	149
	Aufgaben 3.1 bis 3.10	150
4	Einflusslinien statisch unbestimmter Systeme	152
4.1	Einflusslinien für Schnittgrößen	152
4.1.1	Einführung	152
4.1.2	Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren	153
4.1.3	Auswertung der Einflusslinien	158
4.1.3.1	Analytische Integration	158
4.1.3.2	Numerische Integration	159
4.1.4	Einflusslinien bei Durchlaufträgern	163
4.1.5	Einflusslinien bei verzweigten Systemen	164
4.1.6	Berechnung nach dem Drehwinkelverfahren	169
4.2	Einflusslinien für Weggrößen	173
	Aufgaben 4.1 bis 4.6	175
	Lösungen	176
	Anhang: Tafeln	182
	Literaturverzeichnis	190
	Sachwortverzeichnis	191

Inhalt Baustatik 1

1 Einführung

- 1.1 Einordnung der Statik
- 1.2 Kräfte
- 1.3 Der starre Körper
- 1.4 Axiome der Mechanik
- 1.5 Das Schnittprinzip
- 1.6 Gleichgewicht

2 Das zentrale Kräftesystem

- 2.1 Grafische Behandlung
- 2.2 Rechnerische Behandlung
- 2.3 Gleichgewicht am Punkt

3 Das allgemeine ebene Kräftesystem

- 3.1 Grafische Behandlung
- 3.2 Rechnerische Behandlung
- 3.3 Die Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik
- 3.4 Koordinatensystem und Vorzeichen
- 3.5 Auflager der ebenen Statik
- 3.6 Reduktion verteilter Kräfte
- 3.7 Darstellung von Streckenlasten

4 Schnittgrößen statisch bestimmter ebener Systeme

- 4.1 Allgemeines
- 4.2 Einteilige Tragwerke
- 4.3 Mehrteilige Tragwerke
- 4.4 Stützlinien

4.5 Fachwerke

4.6 Gemischte Systeme

5 Systemaufbau

- 5.1 Abzählkriterium
- 5.2 Abbauprinzip
- 5.3 Aufbauprinzip
- 5.4 Verschiebliche Systeme

6 Kinematik starrer Scheiben

- 6.1 Kinematik der Einzelscheibe
- 6.2 Die zwangläufige kinematische Kette
- 6.3 Polpläne
- 6.4 Untersuchung der kinematischen Unverschieblichkeit

7 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

- 7.1 Mechanische Arbeit
- 7.2 Begriff der virtuellen Verschiebung
- 7.3 Prinzip der Lagrangeschen Befreiung

8 Räumliche Tragwerke

- 8.1 Einführung
- 8.2 Beispiele

9 Einflusslinien für Schnittgrößen statisch bestimmter Systeme

- 9.1 Einführung
- 9.2 Kinematische Ermittlung der Einflusslinien

1 Berechnung der Weggrößen stabförmiger Tragwerke

1.1 Einführung

Jedes Tragwerk verformt sich infolge vorhandener Einwirkungen. Die Modellvorstellung des starren Körpers, von der wir in **Baustatik 1** ausgegangen sind, muss aufgegeben werden, um Verformungen in die Betrachtungen einbeziehen zu können.

Warum müssen Verformungen überhaupt berechnet werden?

Bauwerke müssen nicht nur tragfähig, sondern auch gebrauchstauglich sein. Um die Gebrauchstauglichkeit eines Bauwerks gewährleisten zu können, müssen die Verformungen des Tragwerks beschränkt bleiben. Die Kenntnis der Verformungen ist also wichtig, um beurteilen zu können, ob ihre Größe die Nutzung des Bauwerks nicht beeinträchtigt.

Obwohl die Schnittgrößen bei statisch bestimmten Systemen nur mithilfe von Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden konnten, haben wir die aus der mechanischen Wirkung des Momentes resultierende Biegung der stabförmigen Bauteile als wichtiges Hilfsmittel für die Veranschaulichung des Tragverhaltens kennen gelernt.

Statisch unbestimmte Tragwerke können nur dann berechnet werden, wenn die Verformungen des Tragwerks berücksichtigt werden. Da bei statisch unbestimmten Systemen die Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichen, um die Schnittgrößen zu ermitteln, müssen als zusätzliche Gleichungen Verformungsbedingungen formuliert werden.

Auch wenn wir nicht mehr davon ausgehen, dass der Körper unverformbar, also starr ist, setzen wir jedoch voraus, dass die Verformungen so klein sind, dass ihr Einfluss auf die Ermittlung der Schnittgrößen vernachlässigt werden kann. Die Gleichgewichtsbedingungen werden in Bezug auf das unverformte Tragwerk formuliert, man nennt dies *Theorie I. Ordnung*.

Zur Erläuterung der Zusammenhänge betrachten wir den Kragträger in *Bild 1.1*. Im oberen Teil des Bildes

ergibt sich das Auflagermoment im Einspannungspunkt unter der Annahme des starren Kragträgers ohne Einfluss der Horizontalkraft F_h , da diese keinen Hebelarm bezüglich des Auflagerpunktes hat.

Berücksichtigen wir bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen, dass sich der Kragträger infolge der Vertikalkraft verformt, wie in *Bild 1.1* unten dargestellt ist, ergibt sich für das Auflagermoment ein zusätzlicher Anteil infolge der Horizontalkraft F_h , da aufgrund der Durchbiegung δ ein Hebelarm entstanden ist. Die Berücksichtigung dieses Einflusses wird mit *Theorie II. Ordnung* bezeichnet. Die Bedeutung dieses Einflusses für die Schnittgrößen ist von der Größe des Produkts $F_h \cdot \delta$ abhängig. Wir gehen in diesem Buch davon aus, dass die Verformung und die Normalkräfte so klein sind, dass die Gleichgewichtsbedingungen in Bezug auf das unverformte Tragwerk formuliert werden können. Die Größe der Verformung muss daher bekannt sein, um zu beurteilen, ob sie für die Formulierung des Gleichgewichts von Bedeutung ist.

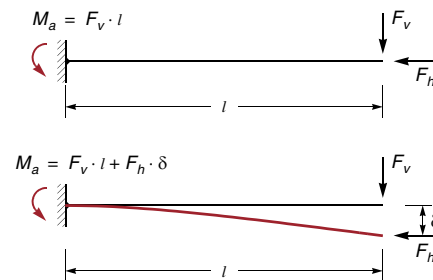


Bild 1.1 Einfluss der Verformungen auf die Schnittgrößen

Verformungen werden also benötigt:

- zum Nachweis der Gebrauchstauglichkeit eines Bauwerkes
- zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme (Verformungsbedingungen des Kraftgrößenverfahrens)
- zur Beurteilung des Einflusses der Verformung auf die Schnittgrößen (Theorie II. Ordnung)

Wir werden in diesem Buch nur *Stabtragwerke* betrachten. Das sind Tragwerke, die aus linienförmigen Bauteilen, also aus *Stäben* bestehen. Wie im Folgenden dargestellt wird, kann bei stabförmigen Bauteilen aus der Verformung der Stabachse auf die Verformung des gesamten Bauteils geschlossen werden.

1.2 Weggrößen

In Analogie zu inneren und äußeren Kräften unterscheidet man *innere* und *äußere Weggrößen*.

Äußere Weggrößen sind Verformungen, die an einem Bauteil von außen sichtbar sind bzw. sichtbar gemacht werden können. Beispiele äußerer Weggrößen sind Verschiebungen einzelner Punkte eines Bauteils oder Verdrehungen von Punkten der Schwerachse stabförmiger Bauteile.

Innere Weggrößen sind den inneren Kraftgrößen, also den Schnittgrößen zugeordnet. Es sind bezogene Größen, wie z. B. die Dehnung eines Stabes infolge einer Normalkraft. Allgemein werden die inneren Weggrößen als Verzerrungen bezeichnet.

1.3 Formänderungen

Jedes Bauteil ist ein dreidimensionaler Körper. Jeder Punkt seines Volumens kann sich in den drei Koordinatenrichtungen des Raumes bewegen. Die hier betrachteten *stabförmigen Bauteile* sind dadurch gekennzeichnet, dass eine Abmessung groß gegenüber den beiden anderen ist. Die Stablänge ist viel größer als die Abmessungen des Querschnittes.

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, den Verformungszustand des dreidimensionalen Körpers „Stab“ durch die Verformungen der Stabachse zu beschreiben. Dies gelingt durch Annahmen, also durch *Hypothesen*, wie in den nächsten Abschnitten dargestellt wird.

1.3.1 Formänderungen infolge von Dehnung

Wird ein Stab nur durch Normalkräfte beansprucht, kann unterstellt werden, dass in gewisser Entfernung von Punkten, in denen die Lastenleitung erfolgt, die Verformungen aller Querschnittspunkte gleich sind. Aufgrund dieser Hypothese kann der gesamte Verformungszu-

stand des Stabes durch die Verformung der Schwerachse beschrieben werden.

1.3.1.1 Kinematik

Die kinematischen oder geometrischen Beziehungen verknüpfen die inneren Weggrößen, also die Dehnungen bzw. allgemein Verzerrungen mit den äußeren Weggrößen, in diesem Fall die Axialverschiebung u .

Wir betrachten das differenzielle Element in *Bild 1.2*. Die unverformte Lage, auch Referenzkonfiguration genannt, ist schwarz dargestellt. Durch die Beanspruchung wird der Stab in Richtung seiner Achse um den Wert u verschoben. An der Stelle $x + dx$ hat sich die Verschiebung um einen differenziellen Zuwachs verändert und beträgt $u + du$. Durch die differenzielle Änderung hat sich die Länge des Elementes um den Wert du vergrößert, das Element wird gedehnt.

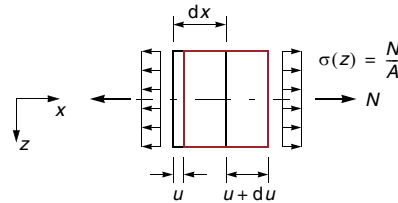


Bild 1.2 Differenzielles Element mit konstanter Dehnungsverteilung

Die Dehnung ist der Quotient aus Verlängerung und Ursprungslänge:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u' = \varepsilon_N + \varepsilon_{T_0} \quad (1.1)$$

1.3.1.2 Stoffgesetz

Die elastischen Dehnungen hängen mit den Spannungen über das Werkstoffgesetz zusammen. Es wird im Rahmen dieses Buches nur das *Hookesche*¹ Gesetz betrachtet, also linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Dehnung und Spannung ist der Elastizitätsmodul E .

$$\sigma = E\varepsilon_N \Rightarrow \varepsilon_N = \frac{\sigma}{E}$$

¹ Robert Hooke (1635 – 1703), britischer Physiker

Sind die Dehnungen im Querschnitt konstant, so folgt daraus auch eine konstante Spannungsverteilung im Querschnitt:

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \varepsilon_N = \frac{N}{EA} \quad (1.2)$$

Ein zusätzlicher, über den Querschnitt konstanter Dehnungsanteil ergibt sich aus einer gleichmäßigen Temperaturänderung T_0 . Der Begriff Temperaturänderung bedeutet, dass sich die Temperatur zwischen zwei Zeitpunkten geändert hat. Die Dehnung infolge der Temperaturbeanspruchung ist der Temperaturänderung T_0 proportional. Der Proportionalitätsfaktor α_T ist eine Werkstoffkonstante, er wird auch als Temperatureausdehnungskoeffizient bezeichnet

$$\varepsilon_{T_0} = \alpha_T \cdot T_0 \quad (1.3)$$

Die gesamte Dehnung des Materials ist die Summe beider Anteile:

$$\varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_{T_0} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0 \quad (1.4)$$

1.3.1.3 Verträglichkeit

Die Verträglichkeitsbedingung besagt, dass die Dehnung aus der kinematischen Beziehung in Gl. (1.1) gleich der Dehnung aus der werkstofflichen Beziehung in Gl. (1.4) sein muss.

Damit ergibt sich die Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Längsverschiebung u :

$$u' = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0 \quad (1.5)$$

Die zweite Ableitung der Verschiebung lautet:

$$u'' = \frac{N'}{EA} + \alpha_T \cdot T_0' \text{ für } EA = \text{konst.} \quad (1.6)$$

1.3.1.4 Gleichgewicht

Der differenzielle Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der verteilten Belastung in Richtung der Stabachse ergab sich in **Baustatik 1** zu:

$$N' = -p(x) \quad (1.7)$$

Daraus folgt die Differenzialgleichung 2. Ordnung des Dehnstabes durch Einsetzen von Gl. (1.7) in Gl. (1.6):

$$u'' = \frac{-p}{EA} + \alpha_T \cdot T_0' \quad (1.8)$$

Eine Übersicht über die Differenzialgleichungen des Dehnstabes ist in **Tabelle 1.1** angegeben.

Tabelle 1.1 Differenzialgleichungen des Dehnstabes

Differenzialgleichung	Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik
1. Ordnung	$N' = -p$	$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0$	$\varepsilon = u'$
		$u' = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0$	
2. Ordnung	$u'' = \frac{-p}{EA}$		

Beispiel 1.1

Für den in **Bild 1.3** dargestellten einseitig festgehaltenen Dehnstab ist der Verschiebungsverlauf infolge Eigengewicht zu ermitteln.

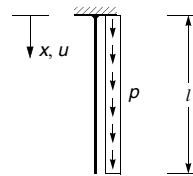


Bild 1.3 Einseitig festgehaltenen Dehnstab unter Eigengewicht

Der Normalkraftverlauf lässt sich unmittelbar aus Gleichgewichtsbedingungen aufschreiben:

$$N(x) = p(l - x)$$

$$u' = \frac{N(x)}{EA} = \frac{p(l - x)}{EA}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int u'(x) dx = \int \frac{p(l - x)}{EA} dx \\ &= \frac{p}{EA} \int (l - x) dx = \frac{p}{EA} \left(lx - \frac{x^2}{2} + c \right) \end{aligned}$$

Die Ermittlung der Integrationskonstanten c erfolgt durch Anpassung an die Randbedingung $u(0) = 0$.

$$u(0) = \frac{p}{EA} \left(l^2 - \frac{0^2}{2} + c \right) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Damit liegt der Verschiebungsverlauf fest:

$$u(x) = \frac{p}{EA} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Die Verschiebung ist anschaulich am freien Stabende maximal, also an der Stelle $x = l$. Mathematisch entspricht dies der Nullstelle der Ableitung des Verschiebungsverlaufes $u(x)$, die der Normalkraftfunktion proportional ist, siehe Gl. (1.5).

$$u_{\max} = u(l) = \frac{p}{EA} \left(l^2 - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{pl^2}{2EA}$$

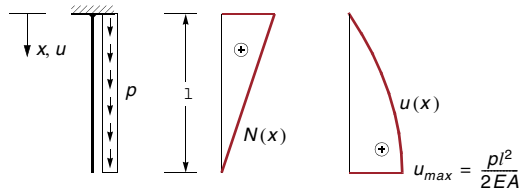


Bild 1.4 Verlauf von Längsverschiebung und Normalkraft

Beispiel 1.2

Für den in *Bild 1.5* dargestellten beidseitig festgehaltenen Dehnstab ist der Verschiebungsverlauf infolge der linear verteilten Streckenlast zu ermitteln.

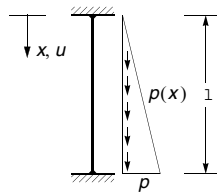


Bild 1.5 Beidseitig festgehaltener Dehnstab mit linear verteilter Belastung

Für diese Lagerung lässt sich die Normalkraft nicht mehr aus Gleichgewichtsbedingungen ermitteln, da zur Ermittlung von zwei unbekannten Auflagerkräften nur eine Gleichgewichtsbedingung ($\sum F = 0$ in Richtung der Stabachse) zur Verfügung steht. Es muss daher von der

Differenzialgleichung 2. Ordnung, Gl. (1.8), ausgegangen werden:

$$u'' = \frac{-p(x)}{EA}$$

Die Lastfunktion $p(x)$ wird durch die folgende Geradengleichung beschrieben:

$$p(x) = \frac{p}{l}x$$

Diese Differenzialgleichung kann durch zweimalige Integration gelöst werden, wobei zwei unbekannte Integrationskonstante auftreten, die durch Anpassen der Lösung an die Randbedingungen ermittelt werden.

$$u'' = \frac{-p(x)}{EA} = \frac{-p}{l \cdot EA}x$$

$$u'(x) = \frac{-p}{l \cdot EA} \int x dx = \frac{-p}{2l \cdot EA}x^2 + c_1 = \frac{N}{EA}$$

$$u(x) = \frac{-p}{2l \cdot EA} \int x^2 dx + c_1 \int dx = \frac{-p}{6l \cdot EA}x^3 + c_1x + c_2$$

Randbedingungen: $u(0) = 0$, $u(l) = 0$

$$u(0) = \frac{-p}{6l \cdot EA}0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$u(l) = \frac{-p}{6l \cdot EA}l^3 + c_1l = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{pl}{6EA}$$

Damit liegt der Verschiebungsverlauf fest:

$$u(x) = \frac{-p}{6l \cdot EA}x^3 + \frac{pl}{6EA}x = \frac{p}{6l \cdot EA}(l^2x - x^3)$$

Der Normalkraftverlauf folgt aus der Ableitung der Verschiebung:

$$u'(x) = \frac{N}{EA}$$

$$\Rightarrow N(x) = EAu'(x) = \frac{p}{6l}(l^2 - 3x^2) = \frac{pl}{6} - \frac{p}{2l}x^2$$

Die Verschiebung ist dort maximal, wo ihre Ableitung, also die Normalkraft, gleich null ist:

$$\frac{pl}{6} - \frac{p}{2l}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Daraus folgt die maximale Verschiebung mit:

$$u_{\max} = u(x_0) = \frac{p}{6l \cdot EA} \left(l^2 \frac{l}{\sqrt{3}} - \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^3 \right) = \frac{pl^2}{9\sqrt{3} \cdot EA}$$

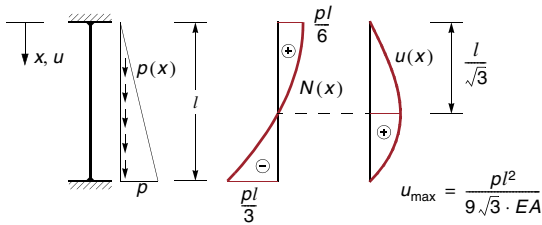


Bild 1.6 Verlauf von Längsverschiebung und Normalkraft

1.3.2 Formänderungen infolge von Biegung und Temperaturdifferenz

Auch im Fall der Biegebeanspruchung lassen sich die Verformungen des dreidimensionalen Bauteils „Balken“ durch eine Hypothese aus den Verformungen der Schwerachse ableiten. Diese nach Jakob Bernoulli¹ benannte Hypothese unterstellt, dass die Querschnitte auch nach der Verformung eben und senkrecht zur Schwerachse bleiben.

In *Bild 1.7* ist die Biegeverformung eines einfachen Balkens dargestellt. Die dargestellten geraden Linien, die vor der Verformung senkrecht zur Balkenachse sind, sind auch nach der Verformung Geraden und senkrecht zur Balkenachse.

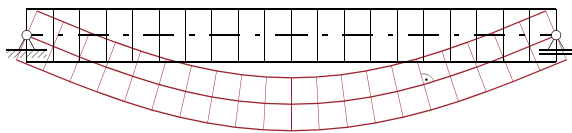


Bild 1.7 Verformungen des Bernoullischen Balkenmodells

1.3.2.1 Kinematik

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen der Krümmung des Balkens als innere Weggröße und der Verschiebung der Balkenachse als äußere Weggröße.

Wir betrachten zur Herleitung der kinematischen Beziehungen das differentielle Balkenelement in *Bild 1.8*. Aufgrund der Wirkung des Biegemoments wird die untere Faser des Elements gezogen und verlängert sich. Entsprechend wird die obere Faser gedrückt und dadurch verkürzt. Die Querschnittslinien bleiben nach der Bernoulli-Hypothese auch im verformten Zustand gerade und sind senkrecht zur Schwerachse. Ersetzen wir die Kurve, die die Verformung der Schwerachse beschreibt, durch den Krümmungskreis, bilden alle Fasern des Balkenelements Segmente konzentrischer Kreise mit gleichem Zentriwinkel $d\varphi$.

Da wir eine reine Momentenbeanspruchung voraussetzen, wird die Schwerachse des Balkens nicht gedehnt und behält ihre ursprüngliche Länge dx . Eine Faser des Balkenelements in einer beliebigen Höhe z hat die Länge ds . Aufgrund der Ähnlichkeit der Kreisausschnitte folgt die Beziehung:

$$\frac{ds}{\rho + z} = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{\rho + z}{\rho} = 1 + \frac{z}{\rho}$$

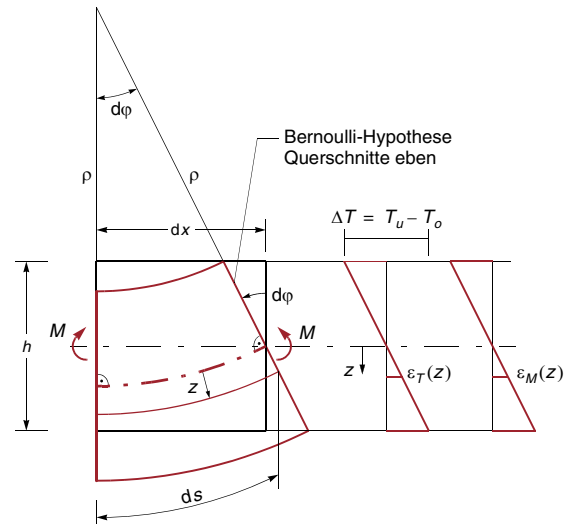


Bild 1.8 Differenzielles Balkenelement in verformter Lage

Die Dehnung der betrachteten Faser an der Stelle z beträgt:

$$\varepsilon(z) = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1$$

¹ Jakob Bernoulli (1655 – 1705), Schweizer Mathematiker

Mit $\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{z}{\rho}$ folgt:

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{z}{\rho} - 1 = \frac{z}{\rho} \quad (1.9)$$

Die Dehnungen sind aufgrund der Bernoulli-Hypothese linear über den Querschnitt verteilt. Die Steigung der Geradengleichung ist der Reziprokwert des Krümmungsradius, also die Krümmung κ .

$$\varepsilon(z) = \kappa \cdot z \quad (1.10)$$

Die Krümmung einer Kurve gibt an, wie sich die Neigung ihrer Tangente mit zunehmender Bogenlänge ändert.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Durch Anwendung der Kettenregel folgt:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{dw'} \cdot \frac{dw'}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = w'' \cdot \frac{d\varphi}{dw'} \cdot \frac{dx}{ds}$$

Mit $ds^2 = dw^2 + dx^2$ ergibt sich:

$$\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{dw^2}{dx^2} + \frac{dx^2}{dx^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{w'^2 + 1}$$

Die Ableitung w' ist gleich dem Anstieg der Tangente an die Biegelinie, siehe *Bild 1.9*. Daher gilt:

$$w' = -\tan \varphi \text{ bzw. } \varphi = -\arctan w'$$

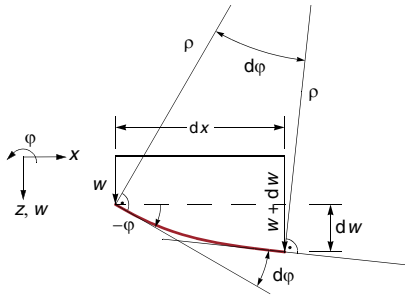


Bild 1.9 Geometrische Beziehungen an verformter Stabachse

Damit folgt:

$$\frac{d\varphi}{dw'} = \frac{-1}{1 + w'^2}$$

Die Krümmung der Biegelinie wird somit:

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = w'' \cdot \frac{d\varphi}{dw'} \cdot \frac{dx}{ds} = w'' \cdot \frac{-1}{1 + w'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{w'^2 + 1}}$$

$$\kappa = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \quad (1.11)$$

Wir werden uns im Folgenden auf die Betrachtung kleiner Verformungen beschränken. Diese Voraussetzung vereinfacht die Zusammenhänge erheblich und ist deswegen zulässig, da Tragwerke so ausgelegt werden müssen, dass die Gebrauchstauglichkeit gewährleistet ist.

Unter dieser Annahme ist die Neigung w' der Biegelinie so klein, dass ihr Quadrat gegenüber eins vernachlässigt werden kann, d. h. $w'^2 \ll 1$. Damit vereinfacht sich Gl. (1.11) zu:

$$\kappa = -w'' \quad (1.12)$$

1.3.2.2 Stoffgesetz

Wir setzen linear-elastisches Werkstoffverhalten, also die Gültigkeit des *Hookeschen Gesetzes* voraus. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ist damit:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ bzw. } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Ersetzen wir in Gl. (1.9) die Dehnung durch die Spannung, dann ergibt sich:

$$\varepsilon_M(z) = \frac{\sigma_M(z)}{E} = \frac{z}{\rho} \text{ bzw. } \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_M(z)}{Ez}$$

Der Index M bei ε_M bedeutet, dass die Dehnung durch das Moment verursacht wird.

Im **Hauptachsensystem** gilt:

$$\sigma_M(z) = \frac{M \cdot z}{I}$$

Daraus folgt für die Krümmung:

$$\kappa_M = \frac{M}{EI} \text{ bzw. } M = EI \cdot \kappa_M \quad (1.13)$$

Das Biegemoment ist der Krümmung der Biegelinie proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist die Biegesteifigkeit EI .

Ein zusätzlicher Krümmungsanteil wird von einer Temperaturdifferenz ΔT zwischen unterer und oberer Balkenseite erzeugt. Zur Erläuterung dieser Einwirkung betrachten wir den Temperaturverlauf in *Bild 1.10*, der in guter Näherung als linear angenommen werden kann. Dieser Verlauf wird in die dargestellten beiden Anteile zerlegt.

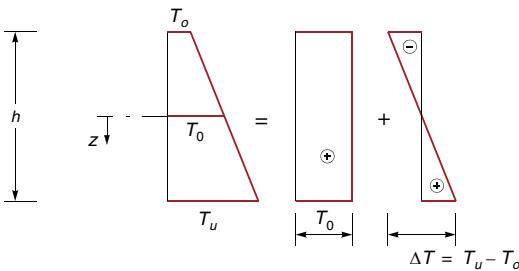


Bild 1.10 Aufteilung des linearen Temperaturverlaufs

Der konstante Anteil mit der Temperatur in Höhe der Schwerachse stellt eine gleichmäßige Temperaturbeanspruchung dar, die eine konstante Dehnung im gesamten Querschnitt bewirkt. Diese Einwirkung wurde bereits in Abschnitt 1.3.1 behandelt.

Der lineare Anteil ist in Höhe der Schwerachse gleich null und erzeugt einen linearen Dehnungsverlauf.

$$\varepsilon_T(z) = \alpha_T \cdot T(z) = \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot z$$

Mit $\varepsilon_T(z) = \frac{z}{\rho} = \kappa_T \cdot z$ folgt:

$$\kappa_T = \frac{\varepsilon_T(z)}{z} = \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

Die gesamte Krümmung ist die Summe beider Anteile:

$$\kappa = \kappa_M + \kappa_T = \frac{M}{EI} + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \quad (1.14)$$

1.3.2.3 Verträglichkeit

Die Krümmung aus der kinematischen Beziehung in Gl. (1.12) muss der Krümmung aus dem Materialgesetz in Gl. (1.14) entsprechen. Daraus folgt die Differenzialgleichung zweiter Ordnung des Bernoullischen Balkens:

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \quad (1.15)$$

Unter Voraussetzung der Annahme infinitesimal kleiner Verformungen betrachten wir nochmals *Bild 1.8*. Für infinitesimal kleine Winkel gilt $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$. Damit folgt aus der Neigungsänderung $d\varphi$ des Querschnitts die Verlängerung einer Querschnittsfaser an der Stelle z zu:

$$\Delta dx = d\varphi \cdot z$$

Die Dehnung ist damit:

$$\varepsilon(z) = \frac{d\varphi \cdot z}{dx} = \varphi' \cdot z$$

In linearisierter Form ($\tan \varphi \approx \varphi$) gilt:

$$\varphi = -w' \quad (1.16)$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon(z) = -w'' \cdot z$$

Unter Berücksichtigung von:

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot z = \frac{M}{EI} \cdot z + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot z$$

ergibt sich:

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}, \text{ also wiederum Gl. (1.15).}$$

Unter Berücksichtigung der linearisierten kinematischen Beziehungen ist in *Bild 1.8* die Länge der gekrümmten Biegelinie ungefähr gleich der differentiellen Abmessung dx . Damit gilt für die Winkeländerung $d\varphi$ näherungsweise:

$$d\varphi \approx \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \varphi' \approx \frac{1}{\rho} = \kappa \quad (1.17)$$

Mit $w' \approx -\varphi$ folgt $w'' \approx -\varphi' \approx -\kappa$

1.3.2.4 Gleichgewicht

Der differenzielle Zusammenhang zwischen der Belastung senkrecht zur Stabachse und den Schnittgrößen ergab sich in **Baustatik 1** mit zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} V' &= -q \\ M' &= V - m \end{aligned} \quad (1.18)$$

bzw. mit einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$M'' = -q - m' \quad (1.19)$$

Daraus folgt die Differenzialgleichung 4. Ordnung des Bernoulli-Balkens:

$$w'''' = \left(-\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h} \right)''$$

$$w'''' = -\frac{M''}{EI} = \frac{q + m'}{EI}, \text{ für konstantes } EI, \text{ bzw.:}$$

$$EI w'''' = q + m' \quad (1.20)$$

1.3.3 Formänderungen infolge von Querkraft

Die Schubspannung infolge von Querkraft ergibt sich im Hauptachsensystem aus der folgenden Beziehung:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b} \text{ bzw. } T = \frac{V \cdot S}{I} \quad (1.21)$$

Diese Beziehung folgt aus einer Gleichgewichtsbetrachtung aufgrund der Änderung der Normalspannungen in Richtung der Achse des Balkens und wurde in der Festigkeitslehre hergeleitet.

Für linear-elastisches Werkstoffverhalten gilt das Hookesche Gesetz für den Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ und der Gleitung γ :

$$\tau = G \cdot \gamma \text{ bzw. } \gamma = \frac{\tau}{G}$$

Der Schubmodul G ist mit dem Elastizitätsmodul E durch folgende Beziehung verknüpft:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1.22)$$

Wir betrachten einen infinitesimal kleinen Balkenabschnitt der Länge dx . Der Schubfluss T bzw. die

Schubspannung τ ist parabolisch über die Querschnittshöhe verteilt. In der Schwerachse ist die Schubspannung extremal und am oberen und unteren freien Rand ist die Schubspannung gleich null. Da die Schubverzerrung γ der Schubspannung proportional ist, ist der Winkel γ in der Schwerachse am größten, an den freien Rändern ist γ gleich null. Wir denken uns nun den infinitesimalen schmalen Streifen durch horizontale Schnitte in rechteckige Teile zerlegt. Das obere und untere Rechteck ist fast unverzerrt, an den freien Rändern ist der rechte Winkel erhalten. Die Rechtecke an der Schwerachse verzerren sich am meisten. Dazwischen ist die Schubverzerrung dem Verlauf der Schubspannung entsprechend abgestuft. Die Rechtecke müssen nach der Verformung wieder zusammen passen, da es sich um ein kontinuierlich zusammenhängendes Material handelt. Wie in **Bild 1.11** dargestellt ist, folgt aus dem lückenlosen Zusammensetzen der einzelnen Rechtecke eine S-förmige Verwölbung des Querschnitts. Diese Verwölbung verletzt die Bernoulli-Hypothese!

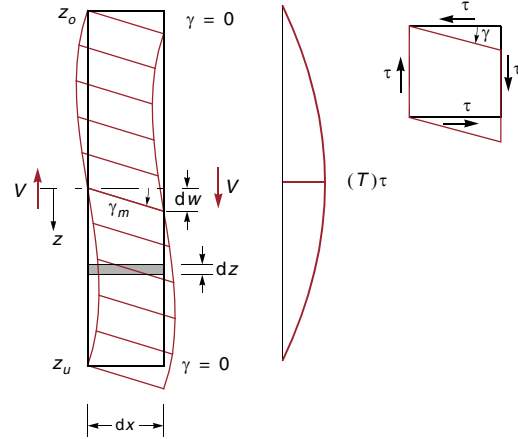


Bild 1.11 Querschnittsverformung infolge von Schubspannungen

Um die Schubverformungen als integrale Größe der Schwerachse zuzuordnen, betrachten wir die Äquivalenz der Arbeiten, die einerseits von den Schubspannungen auf den Verzerrungen über die Querschnittshöhe geleistet wird, andererseits die Arbeit, die vom Integral der Schubspannungen über die Querschnittsfläche, also der