

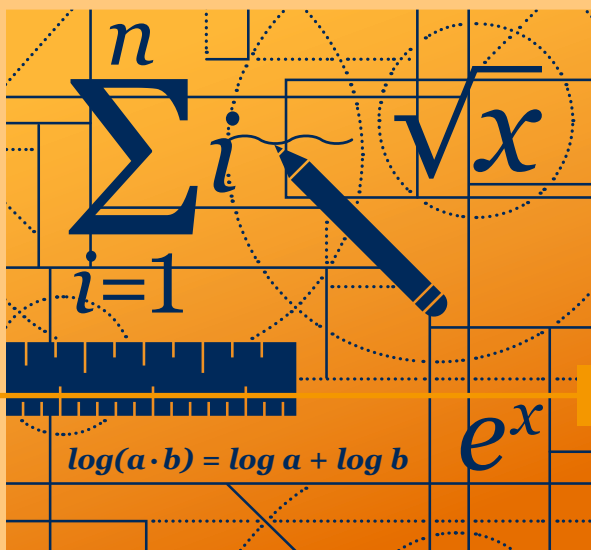
Michael Knorrenschild

Über
25.000
verkaufte
Exemplare

Mathematik-Studienhilfen

Vorkurs Mathematik

Ein Übungsbuch für Fachhochschulen



5., aktualisierte Auflage

HANSER



Blieben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Mathematik–Studienhilfen

Herausgegeben von

Prof. Dr. Bernd Engelmann

Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig,

Fachbereich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Zu dieser Buchreihe:

Die Reihe Mathematik-Studienhilfen richtet sich vor allem an Studenten technischer und wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten.

Die mathematische Theorie und die daraus resultierenden Methoden werden korrekt, aber knapp dargestellt. Breiten Raum nehmen ausführlich durchgerechnete Beispiele ein, welche die Anwendung der Methoden demonstrieren und zur Übung zumindest teilweise selbstständig bearbeitet werden sollten.

In der Reihe werden neben mehreren Bänden zu den mathematischen Grundlagen auch verschiedene Einzelgebiete behandelt, die je nach Studienrichtung ausgewählt werden können. Die Bände der Reihe können vorlesungsbegleitend oder zum Selbststudium eingesetzt werden.

Bisher erschienen:

Dobner/Engelmann, *Analysis 1*

Dobner/Engelmann, *Analysis 2*

Dobner/Dobner, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*

Gramlich, *Lineare Algebra*

Gramlich, *Anwendungen der Linearen Algebra*

Knorrenschild, *Numerische Mathematik*

Knorrenschild, *Vorkurs Mathematik*

Martin, *Finanzmathematik*

Nitschke, *Geometrie*

Preuß, *Funktionaltransformationen*

Sachs, *Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik*

Stingl, *OperationsResearch–Lineare Optimierung*

Tittmann, *Graphentheorie*

Michael Knorrenschild

Vorkurs Mathematik

Ein Übungsbuch für Fachhochschulen

5., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor:

Prof. Dr. rer. nat. Michael Knorrenschild, Hochschule Bochum



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München;
Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Anne Kurth

Satz: Michael Knorrenschild

Titelbild: Max Kostopoulos, unter Verwendung von Grafiken von © gettyimages.de/filo

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Druck und Binden: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46917-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-46955-6

Inhalt

1	Elementares Rechnen	1
1.1	Die Grundrechenarten	1
1.2	Bruchrechnung	10
1.3	Prozentrechnung	13
1.4	Rechnen mit Potenzen	15
1.5	Summen- und Produktzeichen	16
1.6	Fakultät und Binomialkoeffizienten	19
2	Elementare Strukturen	25
2.1	Aussagenlogik	25
2.2	Anordnung von Zahlen	32
2.3	Mengenlehre	32
3	Funktionen	37
3.1	Grundlegendes	37
3.2	Umkehrbarkeit und Monotonie	42
3.3	Komposition von Abbildungen	46
3.4	Translationen, Skalierungen und Spiegelungen	48
3.5	Die Wurzelfunktionen	52
3.6	Polynome	55
3.6.1	Polynome vom Grad 0	56
3.6.2	Polynome vom Grad 1	56
3.6.3	Polynome vom Grad 2	58

3.7	Rationale Funktionen	59
3.8	Die e-Funktion und ihre Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus ..	63
3.8.1	Rechnen mit Logarithmen	65
3.8.2	Logarithmische Skalen	67
3.8.3	Andere Logarithmen als der natürliche	68
4	Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	75
4.1	Grundlegendes zu Gleichungen	75
4.2	Lineare Gleichungen	77
4.3	Gleichungen mit Brüchen	78
4.4	Gleichungen mit Beträgen	79
4.5	Quadratische Gleichungen	81
4.6	Gleichungen mit Quadratwurzeln	83
4.7	Bestimmung von Umkehrfunktionen	86
4.8	Weitere Gleichungen	87
4.9	Gleichungssysteme	89
4.10	Textaufgaben	91
4.11	Grundlegendes zu Ungleichungen	94
4.12	Lineare Ungleichungen	96
4.13	Ungleichungen mit Brüchen	97
4.14	Ungleichungen mit Beträgen	98
4.15	Quadratische Ungleichungen	101
4.16	Weitere Ungleichungen	103
5	Ein wenig elementare Geometrie	107
5.1	Rechtwinklige Dreiecke	107
5.2	Kreis und Ellipse	109
5.3	Hyperbeln	111
5.4	Parabeln und Geraden	114
5.5	Die Strahlensätze	116
6	Trigonometrische Funktionen	119
6.1	Trigonometrie am Einheitskreis	119
6.2	Wissenswertes über sin und cos	121

6.3	Schwingungen	125
6.4	Wissenswertes über \tan und \cot	126
6.5	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	128
7	Einige Tests	131
7.1	Test Nr. 1 der Fachhochschule Bochum	133
7.2	Test Nr. 2 der Fachhochschule Bochum	135
7.3	Test der Fachhochschule Koblenz	137
7.4	Test Nr. 1 der Hochschule Wismar	138
7.5	Test Nr. 2 der Hochschule Wismar	140
	Lösungen	143
	Literatur	159
	Stichwortverzeichnis	161

Vorwort

In einer großen Anzahl von Studiengängen sehen sich Studienanfänger mit dem Fach Mathematik konfrontiert. Dies löst erfahrungsgemäß unterschiedliche Erwartungshaltungen bei den Betroffenen aus. Während die Bedeutung des Faches gerade in den Ingenieurstudiengängen unumstritten ist, klafft zwischen den Vorkenntnissen der Studienanfänger und dem anfänglichen Niveau der Hochschulmathematik eine immer größer werdende Lücke. Diese hat verschiedene Ursachen, dazu zählen ein verändertes schulisches Lernverhalten und teilweise Mängel in den Rahmenbedingungen für die Grundlagenlehre in den Hochschulen.

Vielfach angebotene Vorkurse der Hochschulen dienen der Auffrischung der Schulmathematik, jedoch wo Schulabgänger Lücken aufweisen, gibt es wenig aufzufrischen, sondern manche Themen erst noch neu zu vermitteln. Das ist in wenigen Wochen vor Beginn des Studiums nicht zu bewerkstelligen, trotz allen Bemühens und guten Willens auf beiden Seiten.

So bleibt es vielfach der Eigeninitiative der Studierenden überlassen, sich um das Schließen der Lücken zu kümmern. Zu diesem Zweck gibt es bereits eine Reihe von Vorkurs-Büchern auf dem Markt.

Meiner Erfahrung nach mangelt es Studienanfängern vielfach an Vertrautheit mit elementaren mathematischen Konzepten und an Sattelfestigkeit in der Anwendung mathematischer Techniken. Sind diese Fundamente erst einmal gelegt, bereitet das Verständnis fortgeschrittener mathematischer Konzepte wie Ableitungen und Integrale kaum Probleme.

Ziel dieses Buches ist, elementare mathematische Begriffe und Methoden gründlich zu vermitteln. Es setzt auf eine Kombination von vertieftem Verständnis und Einübung der Techniken an typischen Beispielen. Bewusst wird auf fortgeschrittenere Themen wie Grenzwerte, Differenzial- und Integralrechnung verzichtet. Stattdessen konzentriert es sich auf elementares Rechnen, den Funktionsbegriff, Techniken zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, elementare Geometrie und Trigonometrie. Dabei handelt es sich um Themen aus dem schulischen Curriculum etwa der

zehnten Klasse – Konzepte, die zum mathematischen Rüstzeug in praktisch allen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen gehören.

Leserinnen und Leser sollen in diesem Buch angeregt werden, diese Konzepte im Selbststudium zu durchdringen und wirklich Verständnis zu erwerben – im Studium kommt später noch genug auf sie zu, was sie einfach als verkündete Weisheit hinnehmen müssen. Eine solide Grundlage hilft aber enorm bei einem guten Start in die neue Lernumgebung und einem zügigen Vorankommen, auch in anderen Fächern.

Diesem Zweck dienen viele Beispiele und Übungsaufgaben, die so ausgewählt sind, dass typische Problemstellungen abgedeckt werden. Zur Kontrolle gibt es Lösungen am Ende des Buches. Der kritischen Prüfung des eigenen Wissensstands dient eine Auswahl von Eingangstests, die schon von vielen Hochschulen eingesetzt werden, um Studienanfängern die Auseinandersetzung mit eventuell vorhandenen Lücken zu ermöglichen.

In die Darstellungsweise fließen viele Erfahrungen ein, die ich als Lehrender für Studierende der Ingenieurwissenschaften und der Informatik an der Hochschule Bochum gesammelt habe. Die Arbeit mit Studierenden ist für mich ein immerwährender Ansporn, die Darstellung zu verbessern, und ich danke meinen Studierenden für viele gezielt oder unbeabsichtigt gegebene Anregungen, meine Lehrveranstaltungen zu hinterfragen.

Des Weiteren möchte ich mich bei Frau Christine Fritsch vom Hanser Verlag für die aufmerksame Zusammenarbeit sowie beim Herausgeber Prof. Dr. Bernd Engelmann für fachliche Ratschläge bedanken. Herrn Dr. Thomas Schenk gebührt Dank für die kritische Durchsicht weiter Teile des Manuskripts.

Seit dem Erscheinen 2004 hat dieses Buch eine erfreuliche Aufnahme gefunden und nun ist wiederum eine Neuauflage erforderlich. Für die vorliegende fünfte Auflage wurde das Layout überarbeitet, ansonsten nur geringfügige Änderungen vorgenommen. Für die stets angenehme Zusammenarbeit bei den Neuauflagen danke ich dem Team des Hanser-Verlags. Aus dem Leserkreis wurden mir im Laufe der Jahre einige Fehler mitgeteilt, wofür ich dankbar bin. So konnten diese in Neuauflagen behoben werden. Weitere Hinweise und Anregungen sind jederzeit willkommen.

Bochum, im Januar 2021

Michael Knorrenschild

1

Elementares Rechnen

■ 1.1 Die Grundrechenarten

Die einfachste Verknüpfung zweier Zahlen a und b ist die Addition, das Ergebnis ist die Summe $a + b$. Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion, die zur Differenz $a - b$ führt. Die Subtraktion von b ist nichts anderes als die Addition der „Gegenzahl“ $-b$, also

$$a - b = a + (-b)$$

Geht man von den sogenannten „natürlichen Zahlen“ $1, 2, 3, \dots$ aus, so sind deren Gegenzahlen keine natürlichen Zahlen mehr. Man bezeichnet die natürlichen Zahlen als \mathbb{N} . Wenn die Null noch dazu kommt, schreiben wir \mathbb{N}_0 . Die Zahlen, die durch Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen erzeugt werden können, sind die „ganzen Zahlen“, symbolisch \mathbb{Z} . Die ganzen Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen und ihre Gegenzahlen und enthalten auch die Null (die gleich ihrer Gegenzahl ist).

Die Gegenzahl von b kann man auch als das Produkt $(-1) \cdot b$ berechnen. Es ist jedoch keineswegs so, dass $-b$ immer eine negative Zahl ist. Beispielsweise ist zu $b = -3$ die Gegenzahl $-b = -(-3) = 3$.

Da die Subtraktion insbesondere also auch eine Addition ist, also keine wirklich neue Operation, werden wir im Folgenden, wenn wir „Addition oder Subtraktion“ meinen, einfach nur von „Addition“ sprechen. In einer Summe darf man die Reihenfolge der summierten Zahlen („Summanden“) vertauschen, das Ergebnis ist davon unabhängig. In einer Differenz ändert sich bei Vertauschung von a und b das Vorzeichen, es gilt:

$$b - a = -(a - b)$$

Die Klammern geben die Reihenfolge der Rechenoperationen vor: In $-(b - a)$ wird zuerst $b - a$ berechnet und dann das Vorzeichen geändert. Würde man hier die Klammern weglassen, so erhielte man $-b - a$, das ist nicht dasselbe wie $-(b - a) = a - b$.

Man kann $b - a$ auch als Summe von b und $-a$ sehen, also $b - a = b + (-a)$; hier darf die Reihenfolge ohne Schaden vertauscht werden und man erhält $b - a = b + (-a) = -a + b$. Wir halten fest:



Steht vor einer Klammer ein Minus-Zeichen, so müssen beim Auflösen der Klammern die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer umgekehrt werden:

$$-(x + y) = -x - y, \quad -(x - y) = -x + y, \quad -(-x - y) = x + y.$$

Natürlich können Klammern auch geschachtelt auftreten. Bei Rechnungen per Hand kann man sich dabei die Übersicht erleichtern, indem man verschiedene Sorten Klammern verwendet, etwa $(,), [,], \{, \}$ usw. Diese Hilfe steht in Programmiersprachen nicht zur Verfügung, daher wollen wir hier auch nur die „runden“ Klammern verwenden und Leserin und Leser zu genauem Hinschauen motivieren.

Beispiel 1.1

Lösen Sie die Klammern in $-(a - (b + c - (5 - (a + 3))))$ auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Lösung: Wir lösen zuerst die Klammern auf der innersten Ebene auf:

$$\begin{aligned} -(a - (b + c - (5 - (a + 3)))) &= -(a - (b + c - (5 - a - 3))) \\ &= -(a - (b + c - 5 + a + 3)) \\ &= -(a - b - c + 5 - a - 3) \\ &= -a + b + c - 5 + a + 3 = b + c - 2. \end{aligned}$$

Aufgabe

1.1 Lösen Sie in den folgenden Ausdrücken die Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

- $b - (a + 2 - (c + d - (3 - a))) + b$
- $c + (-3 - d - (-(-4 - b))) - c - (d - 2)$
- $-(b + a - (c - 3 - d + b - (a + c + b - d)))$
- $a + c - (d + a + 2 - (b + c - (-d + c)))$

Wir erkennen also:



Klammern dienen nicht der Zierde, auch nicht vorrangig der Übersicht, sondern stellen eine nicht vernachlässigbare Information über die Reihenfolge von Rechenoperationen dar.

In der Mathematik ist man bestrebt, Formeln möglichst kurz und bündig zu schreiben. Für wiederholte Additionen desselben Summanden hat man daher die Multiplikation zur Verfügung. So schreibt man beispielsweise anstelle von $a + a + a + a + a$ einfach das Produkt $5 \cdot a$, oder noch kürzer $5a$. Die Umkehrung der Multiplikation ist die Division. Da die Division nichts anderes als die Multiplikation mit dem Kehrwert ist, also keine wirklich neue Operation, werden wir im Folgenden, wenn wir „Multiplikation oder Division“ meinen, einfach nur von „Multiplikation“ reden. Bei der Division ist eine Ausnahme zu beachten: Durch 0 kann nicht dividiert werden: Für jedes a gilt $0 \cdot a = 0$; für eine Umkehrung müssten wir das Produkt durch 0 dividieren und wieder a erhalten. Im Produkt 0 ist aber nicht mehr erkennbar, ob diese 0 aus $5 \cdot 0$, $6 \cdot 0$, oder wo auch immer herkommt, sodass eine Umkehrung nicht möglich ist. Das Ergebnis einer Division $a : b$, der sog. Quotient, wird meist als Bruch geschrieben: $a : b = \frac{a}{b}$ (natürlich muss $b \neq 0$ sein). Dabei heißt a der Zähler und b der Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$.

Wir halten also fest:



Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition.

Niemals(!!!) darf durch 0 dividiert werden.

Bei Brüchen darf nie 0 im Nenner auftauchen.

Der Quotient zweier ganzer Zahlen muss keine ganze Zahl mehr sein. Man bezeichnet die Menge aller Zahlen, die als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können, als „rationale Zahlen“, symbolisch \mathbb{Q} .

Einen Bruch aus zwei ganzen Zahlen kann man alternativ auch als *Dezimalzahl* schreiben. Dazu dividiert man Zähler durch Nenner fortlaufend mit Rest, wie man es in der Grundschule gelernt hat, und erhält beispielsweise:

$$\frac{78}{125} = 78 : 125 = 0 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000} = 0.624$$

$$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000} + \dots = 0.111111\dots = 0.\overline{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{37}{33} &= 37 : 33 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10000} + \dots \\ &= 1.12121212\dots = 1.\overline{12} \end{aligned}$$

Diese Rechnung findet im 10er-System (Dezimalsystem) statt, d. h. man verwendet nur die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Man beachte den Unterschied zwischen *Ziffer* und *Zahl*: Eine Zahl besteht aus Ziffern gerade so wie ein Wort aus Buchstaben besteht. Die rationalen Zahlen besitzen eine abbrechende Dezimaldarstellung (Bei-

spiel: $\frac{78}{125}$) oder eine periodische Dezimaldarstellung (Beispiel: $\frac{37}{33}, \frac{1}{9}$). Aus der Dezimaldarstellung von $\frac{1}{9}$ sehen wir übrigens, dass $\frac{9}{9} = 0.9999\dots = 0.\overline{9}$; man kann also $1 = \frac{9}{9}$ auch als $1 = 0.\overline{9}$ darstellen¹.

Es gibt auch Zahlen mit nicht-periodischer, nicht-abbrechender Dezimaldarstellung, z. B. $\pi = 3.141592654\dots$. Diese Zahlen können also nicht rational sein, sie werden daher *irrational* genannt. Man bezeichnet die Menge aller Zahlen mit abbrechender oder nicht-abbrechender Dezimaldarstellung als die *reellen Zahlen*, symbolisch \mathbb{R} . Die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen wird mit \mathbb{R}_+ bezeichnet.

Aus verschiedenen Gründen gibt man oft Dezimalzahlen nicht mit allen Ziffern hinter dem Komma an, sondern nur mit einer begrenzten Anzahl. Dabei verwendet man *Rundung*.



Rundungsregeln:

Ist die erste weggelassene Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4, so bleibt die letzte geschriebene Ziffer unverändert („Abrunden“).

Ist die erste weggelassene Ziffer 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird die letzte geschriebene Ziffer um 1 erhöht („Aufrunden“).

Beispiele:

π auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet: $\pi = 3.141592\dots \approx 3.14$

π auf 3 Stellen nach dem Komma gerundet: $\pi = 3.141592\dots \approx 3.142$

π auf 4 Stellen nach dem Komma gerundet: $\pi = 3.141592\dots \approx 3.1416$

Wer Genaueres über die dabei entstehenden Abweichungen wissen möchte, sei z. B. auf [3] verwiesen.

Nach diesem Exkurs über Dezimalzahlen wenden wir uns wieder den Grundrechenarten und ihren Regeln zu.

Da die Multiplikation quasi relativ zur Addition eine höhergestellte Operation ist, vereinbart man, um Klammern zu sparen, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition, kurz „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“. Es gilt also $a \cdot b + c = (a \cdot b) + c \neq a \cdot (b + c)$. Wiederum erkennt man, dass das Weglassen von Klammern die Bedeutung eines Ausdrucks ändert.

Oft spart man sich bei Produkten auch den Punkt zwischen den Faktoren; man schreibt also beispielsweise anstelle von $x \cdot y$ einfach xy . Dabei gibt es jedoch eine Situation, in der es zu Missverständnissen kommen kann: Ist nämlich ein Faktor eine Zahl, und der andere Faktor ein Bruch, so würde man anstelle von, sagen wir $2 \cdot \frac{1}{2}$, gemäß der erwähnten Konvention $2\frac{1}{2}$ schreiben. Damit entsteht aber ein Gebilde,

¹ Eine beliebte Streitfrage unter Möchtegernmathematikern ist, ob $0.\overline{9}$ vielleicht doch nicht gleich 1 sei, sondern eine andere Zahl, die nur eine Winzigkeit kleiner als 1 ist.

das aussieht wie ein gemischter Bruch, nämlich wie zweieinhalb, also 2.5, wogegen $2 \cdot \frac{1}{2}$ aber nichts anderes als 1 ist. Um das Problem zu umgehen, empfiehlt es sich, im Zusammenhang mit Mathematik auf gemischte Brüche konsequent zu verzichten – wie wir es in diesem Buch tun werden. Im Alltag sind gemischte Brüche allerdings verbreitet („Ich hätte gerne zweieinhalb Kilo Kartoffeln“), dort sollte man sie auch belassen.

Treten Multiplikation und Addition gemeinsam in einem Ausdruck auf, so ist das Distributivgesetz zu beachten:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Es ist also beispielsweise

$$5 \cdot (3 + 7) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7, \quad \text{Punkt- vor Strichrechnung}$$

wovon man sich durch Nachrechnen überzeugen sollte. Außerdem ist natürlich

$$5 \cdot (3 + 7) \neq 5 \cdot 3 + 7.$$

Tatsächlich, die Klammern dürfen also nicht weggelassen werden!

Die Anwendung des Distributivgesetzes in der obigen Form bezeichnet man auch schlicht als „Ausmultiplizieren“.

Man muss jedoch auch in der Lage sein, das Distributivgesetz von rechts nach links anzuwenden.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Diesen Vorgang nennt man auch „Ausklammern“, also beispielsweise:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot (3 + 7).$$

Hier wird der gemeinsame Faktor 5 ausgeklammert. Um auszuklammern, ist – außer der Kenntnis des Distributivgesetzes – erforderlich, dass man den gemeinsamen Faktor, in diesem Fall 5, erkennt. Für das Erkennen solcher Merkmale in Ausdrücken gibt es keine Regeln; dies ist eine Erfahrungssache, also ist hier Üben, Üben, Üben angesagt.

Will man die für ein Ingenieurstudium nötigen Rechenfertigkeiten erwerben, so ist Folgendes nützlich zu wissen:



Ebensowenig wie man Klavierspielen durch häufigen Besuch von Klavierkonzerten erlernt, lernt man Rechnen durch Lesen von Mathematik-Büchern (auch nicht von diesem Buch!) oder durch Besuch von Vorlesungen.

Bestehen in einem Produkt beide Faktoren aus einer Summe, so gilt:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

In Worten, es ist jeder Summand des einen Faktors mit jedem Summanden des anderen Faktors zu multiplizieren und alle entstehenden Produkte sind zu addieren. Man

sollte auch üben, solche Sätze sprachlich und inhaltlich zu erfassen; dann erkennt man, welche enormen Vorteile die Kürze und Präzision der Formelsprache bietet.

Aufgabe

1.2 Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

- a) $a(c+b) - c(b+a) + b(c-a)$
- b) $a(c+b(a-c)) - c(b(a-1)+a) - b(c-a(b-a))$
- c) $(a+b)(a-c) - (a-b)(b+c)$
- d) $(a+b-c)(a+c) - (a-c)(b+a+c)$
- e) $(a+b)(a-c(b-c)) - (a-b(c-a))(b-c)$
- f) $(a+b-c)(a+c-b) + (a-c-b)(b+a+c)$

Spätestens jetzt kommen uns natürlich die bekannten binomischen Formeln in den Sinn, die übrigens, entgegen anders lautenden Gerüchten, nicht nach einem Mathematiker namens Binomi benannt sind. Vielmehr heißen sie so, weil sie aus zwei („bi“) Ausdrücken zusammengesetzt sind.

Binomische Formeln

Für alle a, b gilt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Auf die drei binomischen Formeln wird oft auch als erste bzw. zweite bzw. dritte binomische Formel Bezug genommen.

Beispiel 1.2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln.

$$(a+2b)^2 + (2b-a)(2b+a) \text{ und } (a+b+c)(a+c-b)$$

Lösung: Im ersten Ausdruck warten die erste und die dritte binomische Formel auf Anwendung:

$$(a+2b)^2 + (2b-a)(2b+a) = a^2 + 2 \cdot 2ab + (2b)^2 + (2b)^2 - a^2 = 4ab + 8b^2.$$

Sicherheitshalber weisen wir ausdrücklich darauf hin, dass wir hier die Regel $(2b)^2 = 2b \cdot 2b = 4b^2$ verwendet haben.

Wenn wir im zweiten Ausdruck erkennen, dass

$$(a+b+c)(a+c-b) = ((a+c)+b)((a+c)-b)$$

ist, so können wir zunächst die dritte und anschließend die erste binomische Formel anwenden:

$$(a + b + c)(a + c - b) = ((a + c) + b)((a + c) - b) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2.$$

Es ist eine große Erleichterung, wenn man so geübt ist, dass man sofort erkennt, wenn man durch geringfügige Umstellungen binomische Formeln anwenden kann. ■

Aufgabe

1.3 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln.

- a) $(2a + b)(2a - b) + (c + b)(c - b)$
 b) $(a + b + c)(-a + b + c) + (2c + b - a)^2 - 2(b + c)^2$
 c) $(b - a)(a + b) + (c + b - a)(c - b - a) - (b - c)^2$
 d) $(2b - 3a)(3a - 2b) - (2a - b)^2$

Natürlich kann man auch die binomischen Formeln von rechts nach links lesen und auf diese Weise anwenden. Dadurch kann man in manchen Fällen einen Ausdruck vollständig in Faktoren zerlegen.

Beispiel 1.3

Zerlegen Sie die Ausdrücke $16a^2 - 25b^2$ und $4a^2 + 12ab + 9b^2$ mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.

Lösung: $16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = (4a + 5b)(4a - 5b)$
 $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot (3b) + (3b)^2 = (2a + 3b)^2.$ ■

Aufgabe

1.4 Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.

- a) $4a^2 + 20ab + 25b^2$ b) $169x^2 - 312xy + 144y^2$
 c) $x^2 + 2xy + y^2 - 9z^2$ d) $x^2 + 6xz - y^2 + 9z^2$

Oft lassen sich Ausdrücke mithilfe der binomischen Formeln nicht vollständig in Faktoren zerlegen, sondern beispielsweise nur in ein Quadrat plus einen restlichen Ausdruck. Dies ist in vielerlei Hinsicht sehr nützlich, wie wir später noch sehen werden. Es kommt dabei darauf an, den Anfang einer binomischen Formel (von rechts nach links gelesen!) zu erkennen und den fehlenden Ausdruck zu ergänzen, um ein vollständiges Quadrat zu erhalten. Daher wird diese Methode auch „quadratische Ergänzung“ genannt.