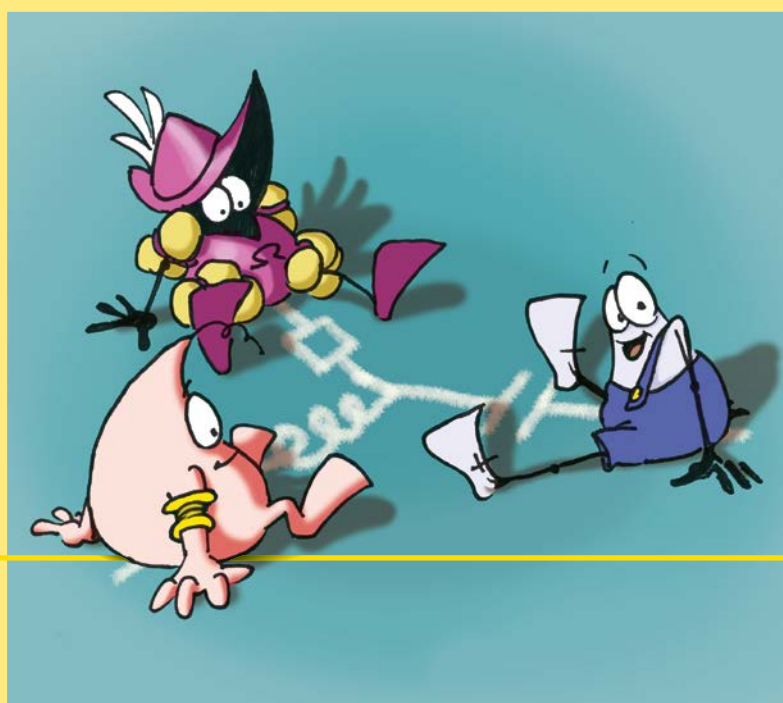


Christian Kral



Grundlagen der Elektrotechnik 2

Ein weiterführendes Lehrbuch



HANSER

Kral

Grundlagen der Elektrotechnik 2



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial.

Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-a2z8a-s4jk8

plus.hanser-fachbuch.de



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Christian Kral

Grundlagen der Elektrotechnik 2

Ein weiterführendes Lehrbuch

HANSER

Über den Autor:

Dipl.-Ing. Dr. Christian Kral lehrt am Technologischen Gewerbemuseum (TGM), Wien/Österreich.



Print-ISBN: 978-3-446-48166-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-48393-4

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2025 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelbild und Illustrationen: © Michi Fleischmann, MF-Illustrationen, <https://www.cromagnon.at>

Satz: Christian Kral

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Vorwort

Gleichstrom, das elektrische und magnetische Feld sind Teil von Band 1 der Grundlagen der Elektrotechnik. Der vorliegende Band 2 behandelt Wechselstrom, Drehstrom und einfache Schaltvorgänge mit Spulen und Kondensatoren. Dabei geht es wieder um die grundlegenden Prinzipien, nicht um die Details. Was nicht für das Verständnis erforderlich ist, wurde fortgelassen.

Für die Wechselstromtechnik vollziehen wir einen wichtigen Abstraktionsschritt, indem wir die sinusförmigen Kurvenverläufe der Spannungen und Ströme mit komplexwertigen Spannungs- und Stromzeigern verknüpfen. Das Konzept der komplexen Wechselstromzeiger wird erläutert und auf einfache Wechselstromsysteme angewandt. Die von der Gleichstromtechnik her bekannten Prinzipien werden sinngemäß auf die Wechselstromtechnik erweitert. Danach wird die Anwendung der erlernten Prinzipien auf die Drehstromtechnik übertragen. Den Abschluss dieses Lehrbuchs bilden einfache Schaltvorgänge. Dabei werden die Problemlösungen durch die Anwendung grundlegender Eigenschaften vermittelt, gemeinsam mit logischem Verständnis. Die Verwendung höherer Mathematik wird dabei möglichst vermieden. Das physikalische Verständnis steht im Vordergrund.

Ich habe auch in diesem Lehrbuch versucht, alle wesentlichen Eigenschaften und Prinzipien ausführlich und in langsamem Tempo zu vermitteln. Lieber das Wesentliche gut lernen, als Vieles nicht so gut. Denn das Wichtige sind und bleiben die Grundlagen, die Grundlagen, die Grundlagen. Wer die Grundlagen versteht, kann sich alles Weitere erarbeiten.

Neben den theoretischen Inhalten gibt es auch einige durchgerechnete Zahlenwertbeispiele im Buch, die das erworbene Wissen festigen und praktisch verständlich machen. Zusätzlich gibt es eine umfangreiche Beispielsammlung auf LeTTo, die online und interaktiv für das Training und die Vertiefung genutzt werden kann. Der Zugang zu diesen Aufgaben ist über <https://plus.hanser-fachbuch.de> möglich. Dort gibt man jenen Code ein, der auf der ersten Seite dieses Buchs abgedruckt ist.

Sehr gerne nehme ich Feedback zum Buch und den LeTTo-Aufgaben entgegen. Auf der Seite <https://github.com/christiankral/Grundlagen-der-Elektrotechnik> können Rückmeldungen zu Fehlern und Ungenauigkeiten eingebracht werden. Dafür muss ein kostenfreier Account auf <https://github.com> angelegt werden. Für jedes Thema sollte ein eigenes Issue (Ticket) angelegt werden. Dadurch können alle Themen systematisch dokumentiert und behandelt werden. Durch diesen öffentlichen und transparenten Prozess ist es möglich, das Lehrbuch und die LeTTo-Aufgabensammlung laufend zu verbessern. Zusätzlich ist eine Liste der dokumentierten Fehler einschließlich Korrekturen über die Internetseite

<https://github.com/christiankral/Grundlagen-der-Elektrotechnik> verfügbar, sodass alle LeserInnen von diesem Feedback-Prozess profitieren.

Für die gezeichneten Illustrationen bedanke ich mich bei meinem Freund Michi Fleischmann. Die von ihm gezeichneten Bilder sind gut am Punkt, schön gemacht und vergnüglich anzusehen. Sie bringen eine gute Dimension in die Vermittlung technischen Wissens, die allein mit Worten und Skizzen nicht zu erreichen ist.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei meiner Kollegin Martina Baumann und bei meinen Kollegen Thomas Jäger, Norbert Salomon und Peter Macheiner für die kritische und gründliche Durcharbeitung des Manuskripts. Ich danke auch Daniel Asch-Goiser für sein pingeliges Feedback, seine Anregungen und seine fortwährende Unterstützungsarbeit.

Meinen Schülern Lucas Auer, Mladen Gojkovic und Mohammad Assef Rahimi danke ich sehr, dass sie beim Entwicklungsprozess dieses Buchs intensiv beteiligt waren. Ihre Rückmeldungen waren ein wichtiger Beitrag dafür, dass die zu vermittelnden Inhalte auf einem angemessenen Level und gut aufbereitet kommuniziert werden.

Bei meinem Lektor Frank Katzenmayer vom Carl Hanser Verlag bedanke ich mich für die andauernd gute und sehr konstruktive Zusammenarbeit.

Lichtenegg, im Mai 2025

Christian Kral

Inhalt

Gezeichnetes und Geschriebenes	1
1 Komplexe Rechnung	5
2 Potenz und Logarithmus	15
2.1 Basis 10.....	16
2.1.1 Zehnerpotenz	16
2.1.2 Logarithmus zur Basis 10	17
2.2 Basis e	18
2.2.1 Exponentialfunktion	19
2.2.2 Natürlicher Logarithmus	20
3 Wechselstrom	23
3.1 Zeitverlauf.....	23
3.1.1 Periodische Größen.....	23
3.1.2 Kosinusschwingung	25
3.1.3 Bauelemente	29
3.2 Komplexe Zeigerrechnung	32
3.2.1 Zeiger und Projektion	32
3.2.2 Mittelwerte	34
3.2.3 Komplexer Effektivwertzeiger	38
3.2.4 Koordinatensystem und komplexer Zeitzeiger	41
3.2.5 Phasenverschiebungswinkel	42
3.2.6 Spannungs- und Stromquellen	45
3.3 Impedanz	46
3.3.1 Ohmsches Gesetz des Wechselstroms	48
3.3.2 Ohmscher Widerstand	48
3.3.3 Ideale Spule.....	50
3.3.4 Idealer Kondensator	52

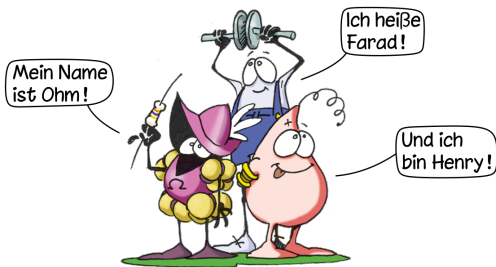
3.3.5	Zusammenfassung	54
3.4	Admittanz	56
3.4.1	Ohmsches Gesetz des Wechselstroms	58
3.4.2	Ohmscher Widerstand	58
3.4.3	Ideale Spule.....	59
3.4.4	Idealer Kondensator	60
3.4.5	Zusammenfassung	61
3.5	Serien- und Parallelschaltung	62
3.5.1	Kirchhoffsche Maschenregel	63
3.5.2	Serienschaltung	63
3.5.3	Spannungsteilerregel.....	70
3.5.4	Kirchhoffsche Knotenregel	71
3.5.5	Parallelschaltung	71
3.5.6	Stromteilerregel	79
3.5.7	Umwandlung zwischen Serien- und Parallelschaltung.....	80
3.5.8	Gemischte Impedanzen	83
3.6	Leistungsbegriffe	85
3.6.1	Sinusförmige Zeitverläufe	85
3.6.2	Allgemeine Definitionen.....	90
3.6.3	Komplexe Wechselstromrechnung	92
3.6.4	Leistungsberechnungen	93
3.6.5	Parameter einer Serienschaltung aus Messwerten	96
3.6.6	Parameter einer Parallelschaltung aus Messwerten	99
3.7	Blindleistungskompensation	100
3.8	Resonanz	106
3.8.1	Physikalische Schwingung	106
3.8.2	Elektrischer Schwingkreis	108
3.8.3	Serienresonanzkreis	111
3.8.4	Parallelresonanzkreis.....	116
3.9	Frequenzabhängigkeit	120
3.9.1	Ortskurven	121
3.9.2	Filter	126
3.9.3	Bodediagramm	128
4	Drehstrom	139
4.1	Symmetrische Systeme.....	140
4.1.1	Phasenspannungen.....	140
4.1.2	Außenleiterspannungen.....	145

4.1.3	Drei- und Vierleiternetz	149
4.1.4	Strang	150
4.1.5	Sternschaltung	154
4.1.6	Dreieckschaltung	157
4.1.7	Wirk-, Blind- und Scheinleistung	161
4.1.8	Stern-Dreieck-Transformation	165
4.1.9	Blindleistungskompensation	166
4.2	Unsymmetrische Systeme	169
4.2.1	Wirk-, Blind- und Scheinleistung	170
4.2.2	Sternschaltung im Vierleitersystem	171
4.2.3	Sternschaltung im Dreileitersystem	173
4.2.4	Dreieckschaltung	175
5	Einfache Schaltvorgänge	179
5.1	Schaltvorgänge	181
5.1.1	Stationärer Zustand	181
5.1.2	Analyse von einfachen Schaltvorgängen	182
5.2	Exponentialfunktion	183
5.3	R-C-Kreis	185
5.3.1	Einschalten	185
5.3.2	Entladen	187
5.4	R-L-Kreis	189
5.4.1	Einschalten	190
5.4.2	Ausschalten	192
5.4.3	Periodisches Ein- und Ausschalten	194
A	Verzeichnis der Formelzeichen	199
A.1	Griechische Kleinbuchstaben	199
A.2	Griechische Großbuchstaben	200
A.3	Lateinische Kleinbuchstaben	200
A.4	Lateinische Großbuchstaben	201
B	Verzeichnis der Einheiten	203
	Literatur	205
	Stichwortverzeichnis	207

Gezeichnetes und Geschriebenes

■ Figuren

Wir haben drei Figuren, die uns durch dieses Buch begleiten:



Farad ist drahtig und hat lange Beine. Er hat viel Energie und steht manchmal unter großer Spannung.

Ohm heißt nicht nur wie die Einheit des Widerstands, manchmal bietet er auch Widerstand.

Henry sieht aus wie ein Wassertropfen. Er ist stromlinienförmig. Und er ist anpassungsfähig, auch wenn man ihm das nicht immer zutraut. Wenn es drauf ankommt, zwingt er sich durch engste Spalten und in kleinste Räume.

■ Nummerierungen

In technischen Dokumenten und Büchern ist es üblich, alle Gleichungen, Bilder und Tabellen zu nummerieren, so wie es auch in diesem Buch umgesetzt ist. Verweise auf andere Bücher (Literatur) werden über ein Kürzel angegeben.

Gleichungen. Wichtige Gleichungen werden in einer separaten Zeile geschrieben und in runden Klammern nummeriert. Dabei gibt die erste Zahl das Kapitel an, während die zweite Zahl eine fortlaufende Nummerierung repräsentiert. Die beiden Zahlen sind durch einen Punkt voneinander getrennt.

Beispiel: Der Satz von Pythagoras lautet:

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.4)$$

Wenn wir auf diese Gleichung verweisen, so schreiben wir Gl. (1.4). Wenn wir auf mehrere Gleichungen verweisen, verwenden wir die Abkürzung Gln.

Besonders wichtige Gleichungen werden in einen rechteckigen Rahmen gesetzt, um deren Wichtigkeit zu unterstreichen.

Beispiel: Zwischen komplexer Admittanz und Impedanz gilt:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \quad (3.48)$$

Bilder. Alle Bilder sind nummeriert und weisen eine Bildunterschrift auf, um die gezeigte Darstellung in kurzer Form zu beschreiben. Die erste Zahl der fortlaufenden Nummerierung kennzeichnet das Kapitel, die zweite Zahl gibt eine fortlaufende Nummer an.

Beispiel: Henry zeigt beispielsweise in Bild 3.7a auf Seite 33 auf ein Zeigerdiagramm.

Tabellen. Die Nummerierung einer Tabelle steht oberhalb der Tabelle und eine kurze textliche Beschreibung erläutert, was dargestellt ist. Die Tabellen sind unabhängig von den Bildern, aber nach demselben Schema, mit Kapitel und fortlaufender Zahl, nummeriert.

Literatur. Der Verweis auf andere Bücher wird mit einer Kombination aus Buchstaben und Zahlen codiert. Die konkrete Auflösung dieser Codierung mit allen bibliografischen Angaben befindet sich im Kapitel Literatur auf Seite 205 am Ende dieses Buchs.

Beispiel: Der kosinusförmige Stromverlauf ist in [Pre08, Abschnitt 22.3] erläutert.

■ Schreibweisen

Wir verwenden lateinische und griechische Buchstaben in unterschiedlichen Schreibweisen.

Hervorhebung. Wichtige Begriffe und Formulierungen sind im Text *kursiv* geschrieben, also *schräg gestellt*.

Physikalische Größen. Mit dem Formelzeichen t bezeichnen wir beispielsweise die physikalische Größe Zeit. Formelzeichen werden kursiv geschrieben. Zahlenwerte werden mit einem schmalen Leerzeichen als Tausendertrennzeichen dargestellt. Die zugehörige Einheit einer physikalischen Größe wird gerade geschrieben und vom Zahlenwert durch ein schmales Leerzeichen getrennt:

Beispiel: Die Zeitdauer beträgt $t = 1\,200\,\text{s}$

Wenn eine physikalische Größe gleich null ist, so wird ihre Einheit dennoch mit angegeben.

Beispiel: Die Zählung beginnt zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$

■ Hervorhebungen

Am Beginn eines neuen Abschnitts, wo neue Formelzeichen und Einheiten auftreten, werden diese strukturiert zusammengefasst. Dabei ist in aller Regel Ohm so freundlich und weist auf besondere Eigenschaften und Aussprachen hin.

Zeichen	Einheit	Größe	Quantity
i	A	Strom	Current
u	V	Spannung	Voltage


 Die Kleinbuchstaben i und u bezeichnen zeitabhängige Ströme und Spannungen!

Wichtige Sachverhalte werden gesondert hervorgehoben:


 Wichtige Eigenschaften oder Zusammenhänge werden durch einen Kasten mit Ausrufezeichen versehen.

Der Verweis auf ausgewählte Bücher ist gesondert gekennzeichnet:


Siehe Kapitel 4 in: Christian Kral, »Grundlagen der Elektrotechnik 1«, Carl Hanser Verlag 2024, ISBN 978–3–446–47376–8

Am Ende von mehreren Abschnitten werden wichtige deutsche und englische Begriffe zusammengefasst.

Deutsch	English
Spannung	Voltage
Strom	Current

Erweitertes Wissen. Dadurch werden Inhalte gekennzeichnet, die über das grundlegende Wissen hinausgehen.

■ Beispiele und Übungen

Zahlenwertbeispiele. Durchgerechnete Zahlenwertbeispiele sind im Buch enthalten. Diese Zahlenwertbeispiele wenden das im jeweiligen Abschnitt erworbene Wissen unmittelbar an. Sie sind fortlaufend nummeriert und werden mit einem kleinen rechteckigen Quadrat abgeschlossen. ■

Übungsaufgaben. Es gibt zu diesem Buch eine große Sammlung von Musterbeispielen und Übungsaufgaben, die über einen LeTTo-Server¹ online zur Verfügung gestellt werden. Zu dieser Aufgabensammlung gelangen Sie, in dem Sie den auf der ersten Seite abgedruckten Code auf <https://plus.hanser-fachbuch.de> eingeben und den dort angegebenen Anweisungen folgen. Über LeTTo können alle Rechen- bzw. Arbeitsschritte der bearbeiteten Aufgaben online auf Korrektheit geprüft werden.

Die gesamte Aufgabensammlung ist frei verfügbar und kann daher auch auf dem LeTTo-Server einer Bildungseinrichtung uneingeschränkt genutzt, verändert und weiterentwickelt werden.

■ Suche im Buch

Grundsätzlich gibt es folgende systematische Möglichkeiten, Inhalte in diesem Buch zu finden:

Inhaltsverzeichnis. Das am Beginn des Buchs befindliche Inhaltsverzeichnis zeigt die Gliederung in Kapitel und Abschnitte. Dort kann man sich an den angeführten Themen orientieren und dann auf den entsprechenden Seiten nachschlagen.

Beispiel: 3.3 Impedanz 46

Stichwortverzeichnis. Das Stichwortverzeichnis ab Seite 207 listet die wichtigsten Stichworte und Begriffe auf. Gleich daneben sind jene Seitennummern angegeben, unter denen die zugehörigen Inhalte zu finden sind.

Beispiel: Impedanz 46

Verzeichnis der Formelzeichen. Das Verzeichnis aller in diesem Buch verwendeten Formelzeichen mitsamt Einheit (EH) ist im Anhang A ab Seite 199 angegeben.

Beispiel:	Größe	EH	Beschreibung	Seite
	i	A	Momentanwert des Stroms	23

Verzeichnis der Einheiten. Das Verzeichnis aller in diesem Buch verwendeten Einheiten ist im Anhang B auf Seite 203 angeführt.

Beispiel:	Einheit	Alternative	Einheitenname
	S	A/V	Siemens

¹ LeTTo steht für »Learning Evaluating Teaching Testing Online«, siehe <https://letto.at>.

1

Komplexe Rechnung

Wir benötigen die komplexe Rechnung in der Wechsel- und Drehstromtechnik. Damit sind wir in der Lage, die zeitabhängigen sinus- bzw. kosinusförmigen Spannungen und Ströme auf eine mathematisch sehr einfache Art und Weise zu behandeln. Für die komplexen Zahlen benötigen wir die sogenannte *imaginäre Einheit*, die in der Elektrotechnik mit »j« und in der Mathematik mit »i« bezeichnet wird.

Das Quadrat der imaginären Einheit j ergibt:

$$j^2 = -1 \quad (1.1)$$

Da keine reelle Zahl existiert, deren Quadrat -1 ergibt, eröffnet die imaginäre Einheit einen neuen Zahlenbereich. Die reellen und imaginären Zahlen bilden gemeinsam die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Kartesische Darstellung

Eine beliebige komplexe Zahl¹ $z_1 \in \mathbb{C}$ weist den Realteil x_1 und den Imaginärteil y_1 auf. Die zugehörige Schreibweise über Real- und Imaginärteil nennen wir die kartesische Darstellung der komplexen Zahl z_1 :

$$z_1 = x_1 + j \cdot y_1 \quad (1.2)$$

Die komplexe Zahl z_1 versehen wir mit einem Unterstrich, um sie von einer reellen Zahl zu unterscheiden.



Sowohl der **Real-** als auch der **Imaginärteil** sind ...



... jeweils eine reelle Zahl!

Erst die **Multiplikation mit j** macht aus $j \cdot y_1$ eine **imaginäre Zahl**.

¹ Die Schreibweise $z_1 \in \mathbb{C}$ besagt, dass z_1 ein Element der Zahlenmenge $\mathbb{C}$ ist.

Der Real- und Imaginärteil werden in diesem Zusammenhang über die Funktionen Re und Im aus der komplexen Zahl $\underline{z}_1$ ermittelt:

$$\text{Re}(\underline{z}_1) = x_1 \qquad \text{Im}(\underline{z}_1) = y_1 \qquad (1.3)$$

Zu den komplexen Zahlen gehören folgende Begriffe und Eigenschaften:

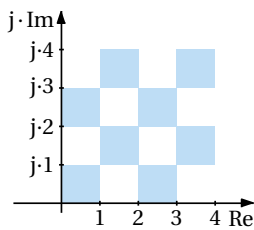
Komplexe Ebene. Die komplexe Ebene oder *Gaußsche Zahlenebene* in Bild 1.1a ist eine Ebene, die über zwei rechtwinklig zueinander stehende Achsen aufgespannt wird:

Reelle Achse. Die reelle Achse »Re« zeichnen wir meist nach rechts.

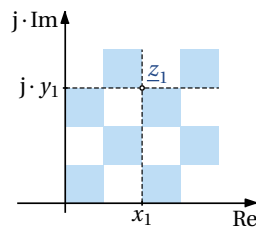
Imaginäre Achse. Die imaginäre Achse »j · Im« ist um 90° im mathematisch positiven Sinn (⤵) gegenüber der reellen Achse verdreht. In Bild 1.1b zeigt diese Achse nach oben.

Komplexe Zahl. Eine komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ finden wir in der Ebene, indem wir

- eine gestrichelte Linie senkrecht auf die reelle Achse bei x_1 und
- eine gestrichelte Linie senkrecht auf die imaginäre Achse bei $j \cdot y_1$ zeichnen.
- Der Schnittpunkt der gestrichelten Linien repräsentiert die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in der komplexen Ebene. Diese komplexe Zahl ist in Bild 1.1b durch eine kreisförmige Markierung (o) repräsentiert.

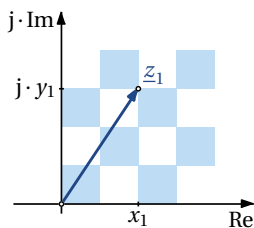


(a)

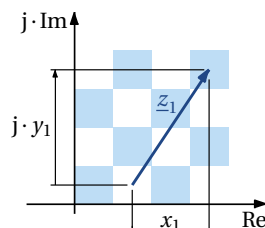


(b)

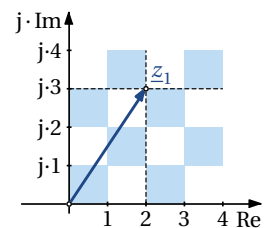
Bild 1.1 (a) Komplexe Ebene, (b) Konstruktion der komplexen Zahl $\underline{z}_1$, mit kreisförmiger Markierung (o) in der komplexen Ebene



(a)



(b)



(c)

Bild 1.2 Repräsentation von $\underline{z}_1$ durch einen Pfeil: (a) allgemein für $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$, (b) komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ parallel verschoben, (c) komplexe Zahl $\underline{z}_1 = 2 + j \cdot 3$

Komplexer Pfeil. Wir repräsentieren eine komplexe Zahl in der Ebene in aller Regel durch einen »komplexen« Pfeil, wie er in Bild 1.2a dargestellt ist. Dazu zeichnen wir diesen Pfeil vom Ursprung zum eingezeichneten Punkt $\underline{z}_1$.

Parallelverschiebung. Komplexe Pfeile darf man in der Wechselstromtechnik zur Veranschaulichung von grafischen Zusammenhängen parallel verschieben. Der in Bild 1.2b dargestellte Pfeil repräsentiert daher dieselbe komplexe Zahl $\underline{z}_1$ wie in Bild 1.2a, da er dieselbe Länge und dieselbe Richtung aufweist.

Zahlenwertbeispiel 1.1. Wir zeichnen die komplexe Zahl $\underline{z}_1 = 2 + j \cdot 3$ als Pfeil in die komplexe Ebene ein.

Der Realteil- und Imaginärteil dieser komplexen Zahl betragen:

$$\operatorname{Re}(\underline{z}_1) = 2$$

$$\operatorname{Im}(\underline{z}_1) = 3$$

Um die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in Bild 1.2c zu finden, zeichnen wir

- eine gestrichelte vertikale Linie bei 2 (passend zum Realteil) und
- eine gestrichelte horizontale Linie bei $j \cdot 3$ (passend zum Imaginärteil) ein.

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ ist im Schnittpunkt der gestrichelten Linien durch eine kreisförmige Markierung gekennzeichnet und durch einen Pfeil repräsentiert. ■

Betrag

Der Betrag einer komplexen Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ ist gemäß Bild 1.3 die Länge des zugehörigen komplexen Zeigers. Nach dem Satz von Pythagoras bestimmen wir:

$$|\underline{z}_1| = \operatorname{abs}(\underline{z}_1) = z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.4)$$



Der Betrag des Vektors wird entweder durch zwei Betragsstriche um die komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in der Form $|\underline{z}_1|$, durch die Funktion abs (Absolutwert) oder durch das Fortlassen des komplexen Unterstrichs gekennzeichnet, also durch z_1 .

Daher ist es fortan wichtig, komplexe Zahlen konsequent mit einem komplexen Unterstrich zu versehen, um eine Verwechslung mit den zugehörigen Beträgen zu vermeiden.

Winkel

Den Winkel φ_1 der komplexen Zahl $\underline{z}_1$ in Bild 1.3 bestimmen wir mit der Funktion $\arg$ (Argument):

$$\arg(\underline{z}_1) = \varphi_1 \quad (1.5)$$

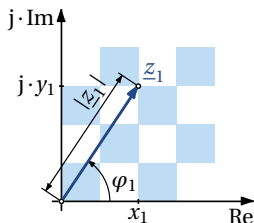


Bild 1.3 Komplexe Zahl $\underline{z}_1$ in der komplexen Ebene mit Betrag und Winkel

Polardarstellung

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ kann statt mit Real- und Imaginärteil auch über ihren Betrag und Winkel repräsentiert werden. Dafür gibt es die *Polarschreibweise*:

$$\underline{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1 \quad (1.6)$$

Dabei entspricht der Ausdruck $\angle \varphi_1$ dem Term $(\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1))$ und damit einem Zeiger mit der Länge eins und dem Winkel φ_1 . Aus dem Betrag z_1 und dem Phasenwinkel φ_1 können gemäß Gl. (1.3) der Real- und Imaginärteil bestimmt werden:

$$\operatorname{Re}(\underline{z}_1) = x_1 = z_1 \cdot \cos(\varphi_1) \quad \operatorname{Im}(\underline{z}_1) = y_1 = z_1 \cdot \sin(\varphi_1) \quad (1.7)$$



Jede **komplexe Zahl** kann gleichwertig ...



... in kartesischer oder polarer Form dargestellt werden!

Zahlenwertbeispiel 1.2. Wir ermitteln für $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1 = 2 + j \cdot 3$ den Betrag und Winkel: Betrag und Winkel lassen sich vorteilhaft direkt mit einem Taschenrechner ermitteln, indem man von kartesischer auf polare Darstellung umschaltet. Für eine händische Rechnung wenden wir zunächst den Satz von Pythagoras an, um den Betrag zu ermitteln:

$$z_1 = |\underline{z}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,606$$

Da der Realteil positiv ist, wird der Winkel direkt aus der Arkustangensfunktion bestimmt:

$$\varphi_1 = \arg(\underline{z}_1) = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 56,31^\circ$$

Damit erhalten wir:

$$\underline{z}_1 = 3,606 \angle 56,31^\circ = \underbrace{3,606 \cdot \cos(56,31^\circ)}_2 + j \cdot \underbrace{3,606 \cdot \sin(56,31^\circ)}_3$$

■



Siehe Abschnitt 4.2 zu den Winkelfunktionen in: Christian Kral, »Grundlagen der Elektrotechnik 1«, Carl Hanser Verlag 2024, ISBN 978–3–446–47376–8

Addition

Die Summe von $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ berechnen wir gemäß:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2) \quad (1.8)$$

Der Realteil der Summe ist die Summe der Realteile, der Imaginärteil der Summe berechnet sich aus der Summe der Imaginärteile. Grafisch setzen wir in Bild 1.4a bei der Summenbildung den Anfang eines der beiden Pfeile an die Pfeilspitze des anderen Pfeils.

Zahlenwertbeispiel 1.3. Wir bestimmen für $\underline{z}_1 = 2 + j \cdot 3$ und $\underline{z}_2 = 2 + j$ die Summe $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2 + j \cdot 3 + 2 + j = \underbrace{2+2}_4 + j \cdot \underbrace{(3+1)}_4 = 4 + j \cdot 4$$

Gegenzahl

Die zur komplexen Zahl $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ gehörige negative Zahl $-\underline{z}_2$ heißt Gegenzahl. Um sie zu bestimmen, müssen wir die Vorzeichen des Real- und Imaginärteils umdrehen:

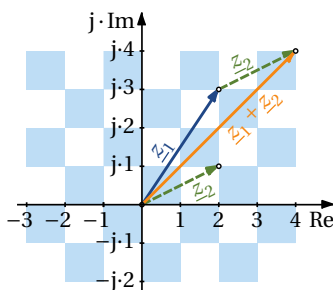
$$-\underline{z}_2 = -x_2 - j \cdot y_2 \quad (1.9)$$

Zahlenwertbeispiel 1.4. Wir stellen die komplexen Zahlen $\underline{z}_2 = 2 + j$ und $-\underline{z}_2$ in der komplexen Ebene dar.

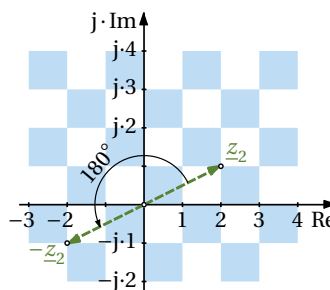
Dafür ermitteln wir für $\underline{z}_2 = 2 + j = 3,606 \angle 56,31^\circ$ die Gegenzahl:

$$-\underline{z}_2 = -2 - j = 3,606 \angle -123,69^\circ = \underbrace{3,606 \cdot \cos(-123,69^\circ)}_{-2} + j \cdot \underbrace{3,606 \cdot \sin(-123,69^\circ)}_{-1}$$

Die komplexen Pfeile zu $\underline{z}_2$ und $-\underline{z}_2$ in Bild 1.4b zeigen in einander entgegengesetzte Richtungen. Die Pfeile weisen jedoch dieselbe Länge bzw. denselben Betrag auf. ■



(a)

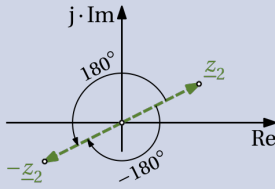


(b)

Bild 1.4 (a) Addition der komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$, (b) komplexe Zahl $\underline{z}_2$ und Gegenzahl $-\underline{z}_2$



Die komplexe **Zahl** $\underline{z}_2$ und ihrer **Gegenzahl** $-\underline{z}_2$ unterscheiden sich um den Winkel $\pm 180^\circ$.



Subtraktion

Die Differenz aus $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ berechnen wir dadurch, indem wir $\underline{z}_1$ und die Gegenzahl $-\underline{z}_2$ addieren:

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z}_1 + (-\underline{z}_2) = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2) \quad (1.10)$$

Bei der grafischen Subtraktion in Bild 1.5a werden die Pfeile von $\underline{z}_1$ und $-\underline{z}_2$ addiert.

Zahlenwertbeispiel 1.5. Wir bestimmen die Differenz $\underline{z}_1 - \underline{z}_2$ für $\underline{z}_1 = 2 + j \cdot 3$ und $\underline{z}_2 = 2 + j$:

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = 2 + j \cdot 3 - (2 + j) = 2 + j \cdot 3 + (-2 - j) = \underbrace{2 - 2}_0 + j \cdot \underbrace{(3 - 1)}_2 = 0 + j \cdot 2 \quad \blacksquare$$

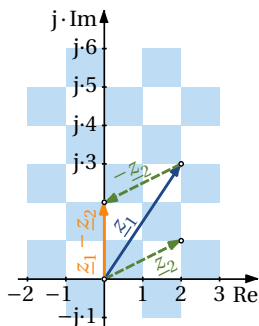
Multiplikation

Das Produkt aus $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ lässt sich in kartesischer Form durch Ausmultiplizieren bestimmen:

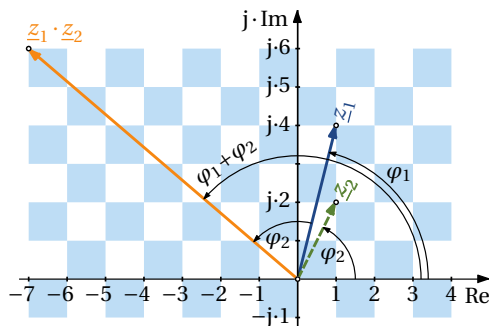
$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad (1.11)$$

Verwenden wir alternativ die Polardarstellung $\underline{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1$ und $\underline{z}_2 = z_2 \angle \varphi_2$, so ergibt sich bei der Multiplikation:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2) \quad (1.12)$$



(a)



(b)

Bild 1.5 (a) Subtraktion und (b) Multiplikation der komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$