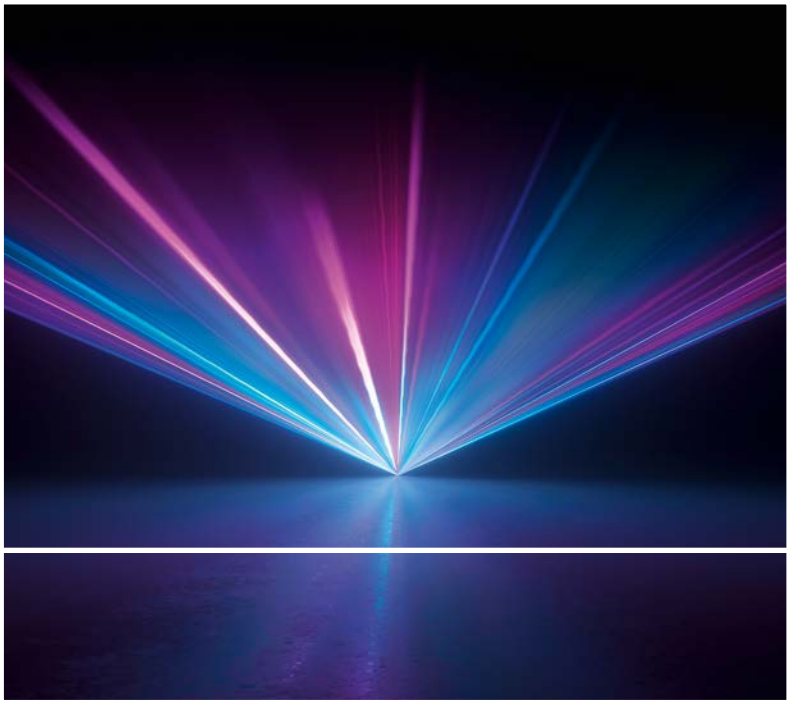
Ekbert Hering · Rolf Martin

Optik in Ingenieur- und Naturwissenschaften

Grundlagen und Anwendungen



3., aktualisierte Auflage

HANSER

Disclaimer zur Barrierefreiheit

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Dazu gehört auch, dass Bilder oder Tabellen für blinde und sehbehinderte Menschen zugänglich gemacht werden. Dies geschieht durch zusätzliche beschreibende Texte (Alternativtexte), die in den Daten integriert sind. Die Alternativtexte können von assistiven Technologien (z. B. Screenreadern) vorgelesen werden. Bei der Erstellung dieser Texte kommt eine KI zum Einsatz. Die inhaltliche Verantwortung liegt weiterhin bei den Lektor:innen und Autor:innen.

Martin / Hering

Optik in Ingenieur- und Naturwissenschaften



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Herausgeber

Prof. Dr. rer. nat., Dr. rer. pol., Dr. h. c. Ekbert Hering war langjähriger Rektor der Hochschule Aalen und lehrte dort Physik, Informatik und Management. Er ist Autor und Herausgeber erfolgreicher Fach-, Sach- und Lehrbücher.

Prof. Dr. rer. nat., Dr. h. c. Rolf Martin wurde nach einer Praxistätigkeit am Landeskriminalamt B.-W. an die Hochschule Esslingen berufen, wo er über 30 Jahre als Professor für Physik und Optoelektronik tätig war.

Autoren

Prof. Dr. Karlheinz Blankenbach (Abschnitte 10.4.4 und 11.5), Hochschule Pforzheim

Wolfgang Bay (Abschnitt 10.4.2), Leiter der zentralen Forschung und Entwicklung, SICK AG, Waldkirch

Dr. rer. nat. Thomas Engel (Abschnitt 10.4.1.3), Geschäftsführer ennovare, Aalen

Dr. Alexander Forkl (Abschnitte 10.4.1.1 und 10.4.1.2), Vorstand Entwicklung, Balluff GmbH, Neuhausen a. d. F.

Hans-Joachim Frasch (Kapitel 13), Staff Scientist, Corporate Research and Technology, Carl Zeiss AG, Oberkochen

Prof. Dr. Günter Gauglitz (Abschnitt 10.6), Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Tübingen

Dr. rer. nat. Christoph Hilmar Graf vom Hagen (Abschnitte 11.3, 11.4, 11.5, 11.9), Director Metrology, Corporate Research and Technology, Carl Zeiss AG, Oberkochen

Prof. Dr. rer. nat. Andreas Heinrich (Abschnitt 10.3), Hochschule Aalen

Alexander Hennig (Abschnitt 9.5), Creative Director, LOBO electronic GmbH, Aalen

Prof. Dr. mult. Dr. h. c. Ekbert Hering (Kapitel 8, 12 und 14 sowie Abschnitte 9.1, 9.2, 9.4, 10.1, 10.4.3, 10.4.5, 11.1), Hochschule Aalen

Dr.-Ing. Frank Höller (Abschnitte 11.2, 11.6, 11.10), Principal Scientist, Corporate Research and Technology, Carl Zeiss AG, Oberkochen

Prof. Dr. Bernd Lingelbach (Kapitel 14), Hochschule Aalen

Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. Rolf Martin (Kapitel 1 bis 7 und 15), Hochschule Esslingen

Wilfried Neumann (Abschnitte 3.2, 7.6, 10.2, 11.7 und 11.8), Beratender Ingenieur, Weiler-Simmelberg

Prof. Dr.-Ing. Harald Riegel (Abschnitt 9.1), Hochschule Aalen

Prof. Dr. rer. nat. habil. Herbert Schneckenburger (Abschnitt 9.3), Hochschule Aalen

Dr. Gert Schönfelder (Abschnitt 10.4.4), Entwicklungsleiter, Prignitz Mikrosystemtechnik GmbH, Wittenberge

Dr. rer. nat. Elfriede Simon (Abschnitt 10.5), Principal Research Scientist, chemical and optical systems, Siemens AG

Dr. Wolfgang Singer (Kapitel 12), Principal Scientist, Corporate Research and Technology, Carl Zeiss AG, Oberkochen

Dr. Roland Wernecke (Abschnitt 10.4.5), dr. wernecke Feuchtemesstechnik GmbH, Potsdam

Rolf Martin
Ekbert Hering

Optik in Ingenieur- und Naturwissenschaften

Grundlagen und Anwendungen

3., aktualisierte Auflage

HANSER

Print-ISBN: 978-3-446-48743-7
E-Book-ISBN: 978-3-446-48744-4

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.
Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2026 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: le-tex publishing services, Leipzig
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © shutterstock.com/NeoLeo
Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten
Druck: Elanders Waiblingen GmbH, Waiblingen
Printed in Germany

Vorwort

Die Optik erklärt die physikalischen Eigenschaften des Lichtes und wie diese technologisch genutzt werden können. Die optischen Technologien sind zum einen **Schlüsseltechnologien**, weil sie die Grundlage von sehr vielen technischen Anwendungen sind, und zum anderen **Querschnittstechnologien**, weil sie in vielen anderen Technologien Verwendung finden. Die Optik ist aus diesen Gründen einer der ganz wichtigen, weltweit wirksamen **Innovations-** und **Erfolgstreiber**.

Das vorliegende Werk hat zwei Teile. Der **erste Teil** erklärt in den ersten sieben Kapiteln die **physikalischen Grundlagen** des Werkes, mit denen der Leser den **zweiten Teil**, die **Anwendungsbereiche** in den Kapiteln 8 bis 14, besser verstehen kann.

Der **Grundlagenteil** des Werkes hat folgende Kapitel: Nach einer **Einleitung** im ersten Kapitel werden im zweiten Kapitel die Grundlagen der **geometrischen Optik** dargestellt. Dieses Kapitel befasst sich im Wesentlichen mit der Natur des Lichtes, mit der Reflexion und Brechung von Lichtstrahlen, der Abbildung durch Linsen und Spiegel, der Berechnungsmethoden von optischen Systemen, den Abbildungsfehlern und den Grundlagen der optischen Instrumente. Das dritte Kapitel ist der **Radio-** und **Fotometrie** gewidmet. Dort werden die strahlungsphysikalischen und lichttechnischen Größen sowie die Farbmetrik behandelt. Im vierten Kapitel wird die **Wellenoptik** vermittelt. Dazu werden die elektromagnetischen Wellen vorgestellt, die Polarisation, Interferenz und Beugung besprochen sowie die Eigenschaften der Gauß'schen Strahlen erläutert. Das fünfte Kapitel widmet sich der **Quantenoptik**, d. h. den Lichtquanten (Photonen), dem Welle-Teilchen-Dualismus, der Absorption und Emission von Licht und den Grundlagen des Laser-Prinzips. Die **Optoelektronik** im sechsten Kapitel behandelt die Halbleiterbauelemente, die in der optischen Nachrichtentechnik eingesetzt werden, wie LEDs, Halbleiterlaser und die verschiedenen Spielformen der Fotodioden. Das siebte Kapitel zeigt die Eigenschaften der **Lichtwellenleiter** auf.

Im **Anwendungsteil** des Werkes werden die **wichtigsten technischen Anwendungen** der Optik behandelt. Das Kapitel 8 ist der **Beleuchtungstechnik** gewidmet. Dieses oft vernachlässigte Kapitel behandelt ausführlich die optischen Systeme zur Beleuchtung in Innen- und Außenräumen sowie die Methoden zur Simulation und Berechnung von Beleuchtungssystemen. In einem besonderen Abschnitt sind die Effekte der Lichtverschmutzung und der biologischen Wirkung von Licht auf den Menschen beschrieben. Ganz wichtige Anwendungsbereiche sind die **Laseranwendungen** in Kapitel 9. Neben dem Einsatz der Laser im Maschinen- und Apparatebau und der Materialbearbeitung werden die Lasereinsätze in der Kommunikationstechnik, der Biologie und Medizin sowie in Konsumgütern und der Unterhaltung vorgestellt. Kapitel 10 ist den **optischen Sensoren** und der **Messtechnik** gewidmet und Kapitel 11 der **optischen Gerätetechnik** wie Kameras, fernoptische und astronomische Geräte, Mikroskope und Optometrie. Besonderes Gewicht wurde auf die Spektralapparate und Spektrofotometer gelegt, weil diese Anwendungen in der engen Verzahnung von Theorie und Praxis in der Literatur kaum behandelt werden. Kapitel 12 behandelt die **bildgebenden Verfahren**, die vor allem in den Materialwissenschaften, der Biologie und Medizin eine wichtige Rolle spielen. In Kapitel 13 werden die Verfahren des **optischen Designs** und der **optischen Simulation** vorgestellt, mit denen komplexe optische Systeme geplant und entworfen werden können. Den **optischen Phänomenen** widmet sich Kapitel 14. Hier werden die faszinierenden Bereiche der optischen Täuschungen systematisch vorgestellt und Erklärungen versucht. In Kapitel 15 sind die wichtigsten **Normen der Optik** zusammengestellt.

Das vorliegende Buch ist als Kompendium und Nachschlagewerk für Studierende und Praktiker geschrieben. Viele Ingenieure und Naturwissenschaftler begegnen im Laufe Ihrer Karriere optischen Fragestellungen. Diese befriedigend zu beantworten und die optischen Technologien nutzbringend und erfolgreich einzusetzen, ist ebenfalls ein Ziel dieses Werkes. Seine Übersichtlichkeit und seine klaren Strukturen helfen dem Leser dabei.

Für die sachkundige und konstruktive Mitarbeit möchten wir uns bei allen Autoren herzlich bedanken. Ohne die Expertise von nahezu 20 Persönlichkeiten aus der Praxis wäre dieses Werk in seiner Praxisnähe unmöglich gewesen. Diese Autoren haben ihre Freizeit geopfert und viel Zeit investiert, um ihre Leser von den Gebieten zu begeistern, denen sie in ihrer täglichen Praxis begegnen. Möge ein Teil dieser Begeisterung der Autoren auch auf die Leser überspringen und sie motivieren, sich von der Faszination des Lichtes anstecken zu lassen, um auf diesem Gebiet innovativ und erfolgreich wirken zu können. Unser Dank gilt aber auch den Mitarbeitern des Fachbuchverlages Leipzig im Carl Hanser Verlag. Besonderen Dank schulden wir Frau Ute Eckardt und Herrn Philipp Thorwirth vom Lektorat sowie Frau Katrin Wulst, die viele unserer Bilder auf ihre drucktechnische Realisierung prüfte und entsprechend anpasste. Sie haben das Werk in allen Phasen der Entstehung motivierend, freundlich und kompetent begleitet. Ganz besonders bedanken möchten wir uns bei unseren

Ehefrauen, die wieder einmal unsere Leidenschaft, gute Bücher zu schreiben, unterstützt haben, uns die nötige Zeit einräumten und auf uns oftmals verzichten mussten.

Allen Leserinnen und Lesern wünschen wir, dass sie mit dem Wissen und den Informationen dieses Taschenbuches ihre Aufgaben schnell, effizient und erfolgreich lösen können. Mögen sie aber auch von der Faszination der Optik inspiriert werden, auf diesem Gebiet innovative und Nutzen stiftende Anwendungen zu entwickeln. Für Hinweise und Verbesserungen sind wir stets dankbar.

Aalen und Köngen, im Februar 2017

Ekbert Hering

Rolf Martin

Vorwort zur dritten Auflage

Die zweite Auflage des Werkes „Optik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“ hat im Markt eine hervorragende Resonanz gefunden. Von der Leserschaft, bestehend aus Studierenden und mit optischen Fragestellungen in der Praxis befassten Personen, erhielten wir große Anerkennung. Deshalb haben wir auch die Gliederung des Werkes beibehalten. Die Rückmeldungen unserer Leserschaft haben wesentliche Verbesserungen und Aktualisierungen bewirkt. Dafür möchten wir uns sehr herzlich bedanken. Wichtig war uns eine bessere Vernetzung der Grundlagen- mit den Anwendungskapiteln. Dies konnten wir durch vermehrte Querverweise in den Kapiteln sicherstellen. Sie stellen einen großen Mehrwert für die Leserinnen und Leser dar. In der neuen Auflage konnten auch Belange des „barrierefreien Zugangs“ berücksichtigt werden.

Eine der wichtigsten Neuerungen ist die Einführung von farbigen Darstellungen. Das Werk wurde deshalb optisch stark aufgewertet sowie pädagogisch und didaktisch einprägsamer gestaltet. Es wird Freude bereiten, das Werk zu studieren und die Strahlkraft und die Faszination des Lichtes zu spüren.

Für die ersten sieben Grundlagenkapitel hat *Rolf Martin* ein Übungsbuch mit dem Titel „Optik in Ingenieur- und Naturwissenschaften – Aufgaben und Lösungen“ entwickelt. Dort sind zu jedem Kapitel passende Aufgaben mit ausführlichen Lösungen mit Bezügen zum vorliegenden Buch zu finden. Sie ermöglichen ein tieferes Verständnis der optischen Grundlagen.

Unser Dank gilt den vielen Optik-Experten aus der Praxis, die für diese Auflage ihre Texte und Bilder aktualisiert und verbessert haben. Danken möchten wir aber auch der Geschäftsleitung des Hanser-Verlages, die uns die Einführung der Farbgebung in der Druckausgabe ermöglicht. Besonderen Dank schulden wir unserer Lektorin Natalia Silakova, die uns bei der farblichen Umsetzung und Neugestaltung der Texte stets kompetent unterstützt hat.

Wir wünschen allen Leserinnen und Lesern ein motivierendes Studium dieses Werkes, um ihre Aufgaben erfolgreich zum Wohle der Gesellschaft lösen sowie weitere innovative Anwendungen entwickeln zu können. Gerne nehmen wir Hinweise auf neue Anwendungsgebiete sowie Vorschläge zur Verbesserung unserer Ausführungen entgegen.

Heubach und Köngen, im April 2026

Ekbert Hering

Rolf Martin

Nachruf

Ekbert Hering, mein langjähriger Freund und Weggenosse beim Schreiben von Fachbüchern, hat leider die Drucklegung dieser dritten Auflage nicht mehr erlebt. Wir verlieren durch seinen Tod einen exzellenten Fachmann auf dem Gebiet der optischen Technologien, der die Gestaltung dieses Buches ganz wesentlich verantwortet hat. Es ist mir ein besonderes Anliegen, das Werk in seinem Sinne fortzuführen.

Köngen im Juli 2026

Rolf Martin

Inhalt

Vorwort ..... **V**
Vorwort zur dritten Auflage VII
Nachruf VIII

1 Einleitung **1**

2 Geometrische Optik **2**
2.1 Lichtstrahlen, optische Abbildung 2
2.2 Fermat'sches Prinzip 3
2.3 Reflexion von Lichtstrahlen 4
2.3.1 Reflexion an ebenen Flächen 4
2.3.2 Reflexion an gekrümmten Flächen 6
2.4 Brechung des Lichts 11
2.4.1 Brechungsgesetz 11
2.4.2 Dispersion 12
2.4.3 Totalreflexion 16
2.4.4 Prismen 18
2.5 Brechung an gekrümmten Flächen 21
2.5.1 Asphärische Flächen 21
2.5.2 Kugelflächen 22
2.5.2.1 Vorzeichenkonvention in der technischen Optik 22
2.5.2.2 Brechung an einer Kugelfläche 23
2.6 Abbildung durch Linsen 26
2.6.1 Dünne Linsen 26

2.6.2 Dicke Linsen ... 36
2.6.3 Fresnel-Linsen ... 43
2.6.4 GRIN-Linsen ... 45
2.6.5 Linsen mit torischen Flächen ... 48
2.6.6 Linsensysteme ... 50
2.7 Matrixmethoden der Gauß'schen Optik ... 55
2.7.1 Matrizen zur Beschreibung der Strahlausbreitung ... 56
2.7.2 Matrizen für Linsen ... 58
2.7.3 Eigenschaften der Systemmatrix ... 62
2.7.4 Lage der Kardinalpunkte eines optischen Systems ... 65
2.7.5 Lage der Referenzebenen ... 71
2.8 Strahlbegrenzungen ... 73
2.8.1 Blenden und Pupillen ... 73
2.8.2 Kenngrößen der Strahlenbegrenzung ... 76
2.8.3 Feldblenden und Luken ... 78
2.8.4 Feldlinsen und Kondensoren ... 81
2.9 Abbildungsfehler ... 84
2.9.1 Sphärische Aberration (Öffnungsfehler) ... 85
2.9.2 Koma (Asymmetriefehler) ... 91
2.9.3 Astigmatismus und Bildfeldwölbung ... 93
2.9.4 Verzeichnung ... 95
2.9.5 Chromatische Aberration (Farbfehler) ... 97
2.10 Optische Instrumente ... 100
2.10.1 Optik des menschlichen Auges ... 100
2.10.2 Lupen und Okulare ... 107
2.10.3 Mikroskope ... 113
2.10.4 Fernrohre ... 124
2.10.5 Fotoapparate ... 133

3 Radio- und Fotometrie ... 141

3.1 Strahlungsphysikalische Größen, Radiometrie ... 142
3.1.1 Grundlagen, Definitionen ... 142
3.1.2 Strahlungsfelder einfacher Geometrien ... 151
3.2 Erfassen und Transfer der Strahlung von Lampen und kegelförmig abstrahlenden Lichtquellen in optisch-analytischen Geräten ... 157

3.2.1 Abstrahlcharakteristik verschiedener Lichtquellen 157
3.2.2 Technische Ausführung von Lampen für optisch-analytische Messgeräte 159
3.2.3 Ulbricht'sche Integrationskugel 163
3.3 Lichttechnische Größen, Fotometrie 166
3.4 Farbmetrik 172

4 Wellenoptik 185
4.1 Elektromagnetische Wellen 185
4.2 Polarisation des Lichts 190
4.2.1 Polarisationsformen 190
4.2.2 Mathematische Beschreibung des Polarisationszustands 192
4.2.3 Polarisationsoptische Komponenten 196
4.2.4 Optische Aktivität 207
4.2.5 Elektro- und magnetooptische Effekte 210
4.2.6 Anwendungen der Doppelbrechung 218
4.3 Lichtwellen an Grenzflächen 223
4.3.1 Fresnel'sche Gleichungen 223
4.3.2 Übergang vom optisch dünnen ins optisch dichte Medium 229
4.3.3 Übergang vom optisch dichten ins optisch dünne Medium 231
4.3.4 Wellen in absorbierenden Medien 239
4.4 Interferenz 248
4.4.1 Zweistrahl-Interferenz 248
4.4.2 Kohärenz 251
4.4.3 Gruppengeschwindigkeit 257
4.4.4 Interferenz einander schräg durchdringender Wellen 261
4.4.5 Stehende Wellen 262
4.4.6 Interferenzen an dielektrischen Schichten 265
4.4.7 Interferenzen an dielektrischen Vielfachschichten 274
4.4.8 Interferometer 281
4.4.9 Vielstrahlinterferenzen 285
4.5 Beugung 291
4.5.1 Huygens-Fresnel'sches Prinzip 291
4.5.2 Beugung am Spalt und an der Lochblende 293
4.5.3 Auflösungsvermögen beugungsbegrenzter Instrumente 298
4.5.4 Beugung am Gitter 303

4.6 Gauß'sche Strahlen ... 316
4.6.1 Feldverteilung im Gauß-Strahl ... 316
4.6.2 Laser-Resonatoren ... 320
4.6.3 Durchgang Gauß'scher Strahlen durch optische Komponenten ... 322
4.7 Holografie ... 328
4.7.1 Aufnahme eines Hologramms und Rekonstruktion des Bildes ... 328
4.7.2 Technische Anwendungen der Holografie ... 337

5 Quantenoptik ... 341
5.1 Lichtquanten ... 341
5.2 Welle-Teilchen-Dualismus ... 345
5.3 Absorption und Emission von Licht ... 348
5.4 Laser ... 352
5.4.1 Laserprinzip ... 353
5.4.2 Lasertypen ... 358

6 Optoelektronik ... 363
6.1 Halbleiter-Sender ... 364
6.1.1 Strahlungsemission aus Halbleitern ... 364
6.1.2 Lumineszenzdioden (LEDs) ... 366
6.1.3 Laserdioden (Injektionslaser) ... 374
6.2 Halbleiter-Detektoren ... 389
6.2.1 Strahlungsabsorption in Halbleitern ... 389
6.2.2 Gütekriterien von Detektoren ... 391
6.2.3 Fotowiderstand ... 393
6.2.4 Fotodiode ... 395

7 Führung von Licht in Lichtwellenleitern ... 404
7.1 Einleitung ... 404
7.2 Schichtwellenleiter ... 405
7.2.1 Strahlenbild ... 405
7.2.2 Wellenbild ... 408
7.3 Wellen in zylindrischen Fasern ... 411
7.3.1 Stufenindex-Faser ... 411
7.3.2 Einmodenfaser ... 419
7.3.3 Gradientenfaser ... 422

7.4 Dämpfung in Lichtwellenleitern ... 425
7.5 Dispersion im Lichtwellenleiter ... 429
7.5.1 Modendispersion ... 430
7.5.2 Chromatische Dispersion ... 436
7.6 Lichtleiter in praktischen Anwendungen ... 440

8 Beleuchtungstechnik ... 448
8.1 Einleitung ... 448
8.2 Lichttechnische Größen ... 449
8.3 Lichtquellen ... 453
8.3.1 Lampen ... 453
8.3.2 Leuchten ... 455
8.4 Optische Systeme zur Beleuchtung ... 455
8.4.1 Beleuchtung im Innenraum ... 455
8.4.2 Beleuchtung im Außenraum ... 462
8.4.3 Signalisation ... 468
8.4.4 Informationsträger ... 478
8.5 Simulation und Berechnungsprogramme ... 480
8.5.1 DIALux ... 480
8.5.2 ReluxSuite ... 481
8.5.3 Weitere Simulationssoftware für den Innenbereich ... 482
8.6 Spezielle Kapitel der Beleuchtungstechnik ... 482
8.6.1 Wirkung des Lichts auf den Menschen ... 482
8.6.2 Lichtverschmutzung ... 484

9 Laseranwendungen ... 487
9.1 Laser in der Materialbearbeitung ... 488
9.1.1 Laserstrahlquellen ... 488
9.1.1.1 Festkörperlaser ... 488
9.1.1.2 Halbleiterlaser (Diodenlaser) ... 493
9.1.1.3 Gaslaser ... 494
9.1.2 Strahlqualität ... 497
9.1.3 Wechselwirkung Strahlung mit Materie ... 499
9.1.3.1 Energieströme und Wirkungsgrade ... 499
9.1.3.2 Einwirkdauer und Leistungsdichte ... 500

9.1.4 Laser-Materialbearbeitung ... 501
9.1.4.1 Aufwärmen zum Bearbeiten von Oberflächen ... 501
9.1.4.2 Schmelzen zur Behandlung von Oberflächen ... 502
9.1.4.3 Schmelzen zum Aufbauen und Laserformen (Urformen) 503
9.1.4.4 Wärmeleitschweißen (Schmelzen zum Fügen) ... 505
9.1.4.5 Tiefschweißen (Verdampfen zum Fügen) ... 505
9.1.4.6 Laserschneiden ... 506
9.1.4.7 Laserbohren ... 507
9.1.4.8 Lasermikrobearbeitung (Verdampfen zum Reinigen, Strukturieren und Abtragen) ... 509
9.2 Laser in der Kommunikationstechnik ... 510
9.2.1 Funktionsweise ... 510
9.2.2 Vor- und Nachteile ... 511
9.2.3 Anwendungen ... 512
9.3 Laseranwendungen in Medizin und Biologie ... 514
9.3.1 Wechselwirkungen von Laserstrahlung mit Zellen und Gewebe ... 514
9.3.2 Laseranwendungen in Diagnose und Therapie ... 516
9.3.3 Mikroskopische Laseranwendungen ... 520
9.4 Laser bei den Konsumgütern ... 523
9.4.1 Laserdrucker und Laserkopierer ... 523
9.4.2 Laserscanner ... 525
9.4.3 Laserprojektor ... 526
9.5 Laser in der Unterhaltung ... 527
9.5.1 Technischer Aufbau ... 528
9.5.2 Projektion ... 530
9.5.3 Laservideo ... 532
9.5.4 Räumliche Strahleneffekte ... 532
9.5.5 Strahlensicherheit beim Audience Scanning ... 534

10 Optische Sensoren und Messtechnik ... 535

10.1 Eigenschaften optischer Sensoren ... 535
10.2 Optische Detektoren ... 536
10.2.1 Arbeit und Leistung von Lichtsignalen ... 536
10.2.2 Basis-Parameter von Detektoren ... 537
10.2.3 Fotoröhren, Fotomultiplier (PMT) und Sekundär-Elektronen-Vervielfacher (SEV oder SEM) ... 539

10.2.4 Mikrokanalplatte (MCP: Micro Channelplate) ... 541
10.2.5 Festkörperdetektoren ... 543
10.2.6 Planck'sche Strahlung, Hintergrundstrahlung ... 544
10.2.7 Flächendetektoren (Array, CCD und CMOS) ... 546
10.2.8 Arrays und NIR-Flächendetektoren ... 554
10.2.9 CCD mit Bildverstärkung ... 555
10.2.10 CMOS-Sensoren, Active Pixel Sensoren (APS) ... 556
10.3 Methoden der optischen Messtechnik ... 557
10.3.1 Schattenprojektion ... 558
10.3.2 Lasertriangulation ... 561
10.3.3 Streifenprojektion ... 564
10.3.4 Fotogrammetrie ... 566
10.3.5 Deflektometrie ... 573
10.3.6 Konfokale Sensorik ... 576
10.3.7 Lasertracking ... 580
10.3.8 Individualisierte optische Messtechnik ... 583
10.4 Messung physikalischer Größen ... 585
10.4.1 Geometrische Größen ... 585
10.4.1.1 Abstands- und Wegsensoren ... 585
10.4.1.2 Winkel und Drehbewegung ... 597
10.4.1.3 3D-Messtechnik ... 598
10.4.2 Objekterfassung ... 605
10.4.2.1 Lichtschranke, Lichttaster ... 605
10.4.2.2 Laserscanner ... 624
10.4.2.3 Optische Identifikation ... 627
10.4.3 Temperaturmessung ... 632
10.4.4 Fotometrie ... 634
10.4.5 Feuchtemessung ... 649
10.4.5.1 Messungen im Infrarotbereich (IR) ... 650
10.4.5.2 Messung im nahen Infrarotbereich (NIR) ... 651
10.4.5.3 Messung im ultravioletten Bereich (UV-Licht) ... 653
10.4.5.4 Messung mit Lichtwellenleitern ... 653
10.4.5.5 Diodenlaserspektrometer (TDL) ... 655
10.4.5.6 Messung von Wassertröpfchen (Flüssigphase) ... 656

10.5 Anwendungsgebiete in der Medizin und Biologie ... 657
10.5.1 Überblick der Nachweismethoden ... 657
10.5.2 Oberflächenplasmonenresonanz (SPR) ... 658
10.5.3 Interne Totalreflexionsfluoreszenz (TIRF) ... 659
10.5.4 Lumineszenzverfahren ... 660
10.5.5 Colorimetrie/Fotometrie ... 663
10.6 Optische Sensoren in der Chemie ... 665
10.6.1 Einleitung ... 665
10.6.2 Komponenten des optischen Sensors ... 668
10.6.3 Detektionsprinzipien ... 670
10.6.4 Ausgewählte Anwendungen ... 672

11 Optische Gerätetechnik ... 674
11.1 Einleitung ... 674
11.2 Fotokameras ... 675
11.2.1 Analoge Fotokamera ... 675
11.2.2 Digitale Fotokamera ... 678
11.2.3 Kamerachips ... 678
11.2.4 Bauformen digitaler Kameras ... 680
11.2.5 Besondere Anforderungen an digitale Kameras ... 685
11.2.6 Zusammenfassung ... 687
11.3 Fernoptische Geräte ... 687
11.4 Mikroskopie ... 695
11.4.1 Klassische Lichtmikroskopie ... 695
11.4.2 Verfahren zur Reduktion des Hintergrunds ... 698
11.4.3 Super Resolution Microscopy ... 701
11.5 Digitale Visualisierung ... 706
11.5.1 Displaytechnologien ... 706
11.5.2 Übersicht ... 706
11.5.3 Funktionsprinzip von LCD, OLED und E-Paper ... 708
11.5.4 Pixelansteuerung und elektro-optische Kurve ... 709
11.5.5 Zusammenfassung ... 711
11.5.6 Displays in optischen Geräten ... 711
11.5.7 Digitale Projektoren (Beamer) ... 711
11.5.8 Augmented Reality und Virtual Reality ... 712

11.5.9 Stereosysteme ... 714
11.5.10 Zusammenfassung ... 717
11.6 Optische Messgeräte ... 717
11.6.1 Interferometer ... 717
11.6.2 Shack-Hartmann-Sensoren ... 725
11.6.3 Autokollimatoren ... 726
11.6.4 Brechzahlmessung ... 727
11.7 Spektralapparate ... 728
11.7.1 Einleitung, Definitionen und Nomenklatur ... 728
11.7.2 Beugungsgitter ... 730
11.7.3 Dispersionsprismen ... 735
11.7.4 Filter ... 737
11.7.5 Polarisation ... 737
11.7.6 Spektrometer ... 738
11.7.7 Doppelspektrometer ... 745
11.7.8 Spektrometer für den tiefen UV- und Vakuum-UV-Bereich ... 747
11.7.9 Kompakte Spektrometer mit Lichtleiterkopplung ... 749
11.7.10 Spezielle Anforderungen der Lichtleiterkopplung ... 750
11.7.11 Transmissions-Spektrometer ... 751
11.7.12 Prismenspektrometer ... 751
11.7.13 Echelle-Spektrometer ... 752
11.7.14 Hyperspektrale Spektrometer (Hyperspectral Imaging Spectroscopy) ... 752
11.7.15 Allgemeine Funktionen ... 753
11.8 Spektralfotometer ... 759
11.8.1 Einleitung, Definitionen und Nomenklatur ... 759
11.8.2 Absorptions- und Reflexions-Spektralfotometer ... 760
11.8.3 Lumineszenz-Spektroskopie: Fluoreszenz und Phosphoreszenz ... 764
11.8.4 Messmethoden für dynamische Lumineszenz – Lifetime-Messung ... 769
11.8.5 Raman- und Brillouin-Spektralfotometrie ... 776
11.8.6 Spektrale Radiometrie ... 783
11.9 Optometrie ... 786
11.9.1 Geräte beim Augenoptiker ... 786
11.9.2 Geräte für die Augenheilkunde ... 793

11.10 Astronomische Teleskope ... 797
11.10.1 Einleitung ... 797
11.10.2 Bauformen ... 798
11.10.3 Amateurastronomie ... 799
11.10.4 Terrestrische Astronomie ... 800
11.10.5 Weltraumteleskope ... 803

12 Bildgebende Verfahren ... 807
12.1 Definition und Übersicht ... 807
12.2 Messprinzipien ... 810
12.3 Optische Verfahren ... 814
12.4 Abbildungskette und ihre Komponenten ... 816
12.5 Lichtquellen und Beleuchtung ... 817
12.6 Bildwiedergabe (Empfänger) ... 819
12.7 Optische Systeme nach Auflösung und Vergrößerung der optischen Abbildung ... 823
12.8 Objekttreue ... 828
12.9 Komplexität bildgebender Verfahren ... 830
12.10 Komplexität optischer Systeme ... 833
12.11 Rechenaufwand ... 834
12.12 Beispiele einiger bildgebender Verfahren ... 835
12.12.1 Computertomografie (CT) zur Werkstoffprüfung ... 835
12.12.2 Akustisches Mikroskop zur Untersuchung elektronischer Bauteile ... 837

13 Optikdesign und Simulation ... 839
13.1 Optikdesign ... 840
13.1.1 Einleitung ... 840
13.1.2 Apertur und Feld, Eintritts- und Austrittspupille ... 840
13.1.3 Bildfehler dritter Ordnung ... 845
13.1.4 Bewertung optischer Systeme ... 848
13.1.5 Optikdesign-Prozess ... 855
13.1.6 Methoden des Optikdesigns ... 858
13.1.7 Optimierung ... 875
13.1.8 Tolerierung ... 881
13.1.9 Spezielle Komponenten im Optik-Design ... 882

13.2 Optiksimulation ... 899
13.2.1 Einleitung ... 899
13.2.2 Streulichtsimulationen ... 901
13.2.3 Digitalisierung ... 908
13.2.4 Simulation äußerer Einflüsse ... 913
13.2.5 Wellenoptische Simulationen ... 915

14 Optische Phänomene ... 919
14.1 Definition und Erklärungsversuche ... 919
14.2 Geometrische Täuschungen ... 921
14.2.1 Längentäuschung ... 921
14.2.2 Krümmungstäuschung ... 922
14.2.3 Richtungstäuschung ... 922
14.2.4 Größentäuschung ... 923
14.3 Räumliche Täuschungen ... 924
14.3.1 Ambiguität ... 924
14.3.2 Perspektiventäuschung ... 926
14.4 Helligkeits- und Kontrasttäuschungen ... 928
14.5 Bewegungstäuschungen ... 929
14.6 Farbtäuschungen ... 930
14.7 Unmögliche Figuren, Objekte und Bilder ... 930
14.8 Ames-Raum ... 932

15 Optiknormen ... 935

Index ... 939

1 Einleitung

Die Optik befasst sich mit der Entstehung, Ausbreitung und Absorption von Licht. Das Wesen des Lichts hat bereits verschiedene Deutungen erfahren. Insbesondere die Phänomene der Interferenz und Beugung führten zur Wellentheorie des Lichts (**C. Huygens, T. Young, A. Fresnel**). Die Experimente von **Malus** zur Polarisation zeigten, dass es sich um eine Transversalwelle handeln muss. Schließlich erkannte **J. C. Maxwell**, dass Licht eine elektromagnetische Transversalwelle ist. Experimente im Zusammenhang mit der Absorption und Emission von Licht führten **Einstein** zur Lichtquantenhypothese. Danach findet der Energieaustausch zwischen einem Strahlungsfeld und Materie in ganzen Quanten statt. Der Dualismus Teilchen/Welle wurde schließlich im Rahmen der Quantenelektrodynamik zu einer einheitlichen Theorie zusammengeführt.

Bild 1.1 zeigt die in der Optik relevanten Wellenlängenbereiche. Das sichtbare Licht (VIS, visible spectrum) erstreckt sich von 380 nm bis 780 nm. Die zugehörigen Frequenzen betragen einige Hundert Terahertz. Die benachbarten Spektralgebiete sind die ultraviolette Strahlung (UV, 100 nm bis 380 nm) sowie die infrarote Strahlung (IR, 780 nm bis 1 mm). Insbesondere das nahe Infrarot ist von großer Bedeutung für die Optoelektronik.

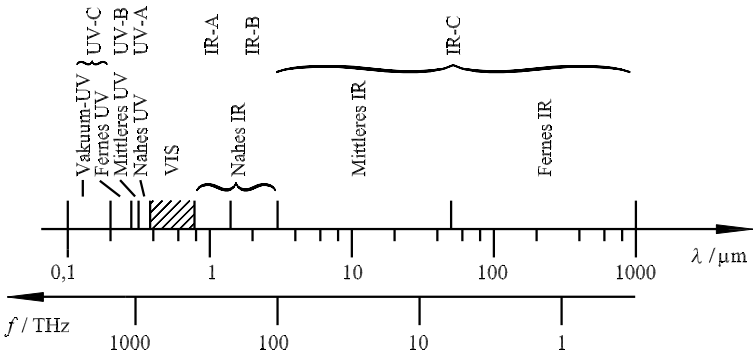


Bild 1.1 Wellenlängenbereiche und Frequenzen optischer Strahlung nach DIN 5031-7

2
Geometrische Optik

Wenn Beugungseffekte keine Rolle spielen – das ist der Fall, wenn die Objekte groß sind gegenüber der Wellenlänge –, dann kann die Ausbreitung des Lichts durch Strahlen beschrieben werden, was in der geometrischen Optik oder Strahlenoptik behandelt wird.

2.1 Lichtstrahlen, optische Abbildung

Im homogenen und isotropen Raum sendet ein leuchtender Objektpunkt O (Bild 2.1) eine Kugelwelle aus. Strahlen sind Normalen auf den kugelförmigen Wellenflächen (Abschnitt 4.1). Sie breiten sich im homogenen Raum vom Gegenstandspunkt geradlinig aus. Werden beispielsweise durch eine Linse die Wellenflächen so transformiert, dass sie wieder auf einen Punkt zulaufen, dann konvergieren die Strahlen ebenfalls in diesem Bildpunkt O′.

Treffen sich die Strahlen wirklich wie in Bild 2.1 a) in einem Punkt, so kann das Bild beispielsweise auf einer Mattscheibe aufgefangen werden; es entsteht ein *reelles Bild*. Divergieren die Strahlen wie in Bild 2.1 b), so schneiden sich die gestrichelten rückwärtigen Verlängerungen im *virtuellen Bildpunkt* O′. Obwohl das Bild nicht real existiert, kann es ein Beobachter durchaus sehen, wenn die Augenlinse die divergierenden Strahlen wieder auf der Netzhaut zu einem reellen Bild vereinigt.

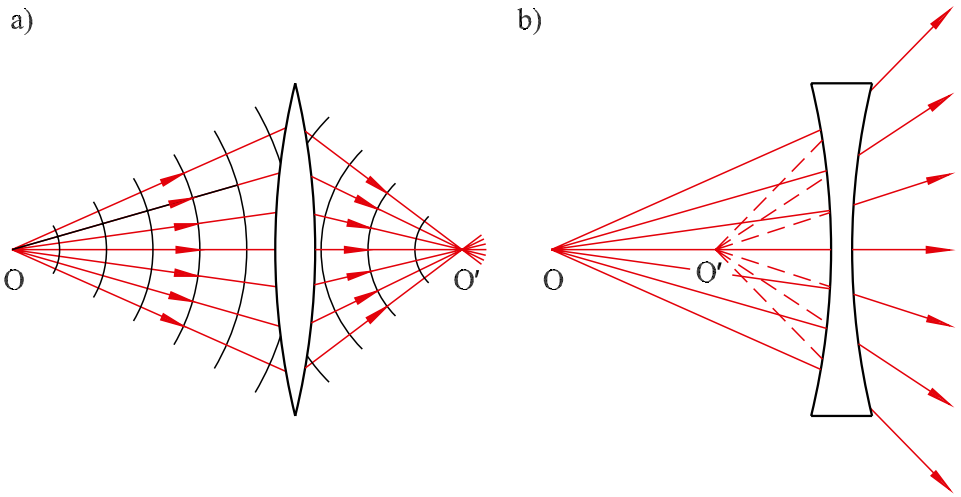


Bild 2.1 Abbildungen durch Strahlen; a) reelles, b) virtuelles Bild

2.2 Fermat'sches Prinzip

Pierre Fermat stellte ein fundamentales Extremalprinzip auf:



Ein Lichtstrahl nimmt zwischen zwei Punkten A und B den Weg, bei dem die benötigte Zeit ein Extremum (meist Minimum) ist.

In einer Anordnung nach Bild 2.2 ist die Zeit, die das Licht von A nach B benötigt,

$$t = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} + \frac{s_3}{c_3} + \frac{s_4}{c_4} = \sum \frac{s_i}{c_i}$$

Die Lichtgeschwindigkeit c innerhalb eines Mediums ist verknüpft mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 durch die *Brechzahl* n (*Brechungsindex*)

$$n = \frac{c_0}{c} \tag{2.1}$$

Damit wird die vom Licht benötigte Zeit

$$t = \frac{1}{c_0}(n_1 s_1 + n_2 s_2 + n_3 s_3 + n_4 s_4) = \frac{1}{c_0} \sum n_i \, s_i \tag{2.2}$$

Nach dem **Fermat**'schen Prinzip muss gelten

$$l = \sum n_i \, s_i = \text{Min!} \tag{2.3}$$

l wird als *optischer Weg* bezeichnet. Wenn sich der Brechungsindex längs des Weges ändert, gilt

$$l = \int_{A}^{B} n(s)\,\mathrm{d}s = \text{Min!} \tag{2.4}$$

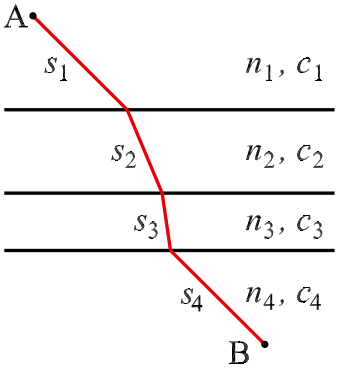


Bild 2.2
Weg eines Lichtstrahls durch Schichten aus verschiedenen Medien
s_i: geometrischer Weg im Medium i, n_i: Brechzahl des Mediums i, c_i: Lichtgeschwindigkeit im Medium i

Nach **Fermat** ist der Weg eines Lichtstrahls also so, dass nicht der geometrische Weg zwischen zwei Punkten ein Extremum wird, sondern der optische Weg.

Bei der Abbildung eines Objektpunktes O in einen Bildpunkt O′ (Bild 2.1) gilt nach dem **Fermat**'schen Prinzip, dass für alle an der Abbildung teilnehmenden Strahlen der optische Weg gleich lang sein muss.

2.3 Reflexion von Lichtstrahlen

2.3.1 Reflexion an ebenen Flächen

Der Lichtweg eines Strahls, der an einer ebenen spiegelnden Fläche reflektiert wird, folgt unmittelbar aus dem **Fermat**'schen Prinzip (Bild 2.3 a). Von den unendlich vielen denkbaren Lichtwegen von A nach B ist der Weg, bei dem die beiden Winkel ε und ε_r gleich sind, der kürzeste. Es gilt das *Reflexionsgesetz* (Bild 2.3 b):



Einfallender Strahl, reflektierter Strahl sowie das Lot auf die Fläche im Auftreffpunkt liegen in einer Ebene; der Einfallswinkel ε und der Reflexionswinkel ε_r sind betragsmäßig gleich groß.

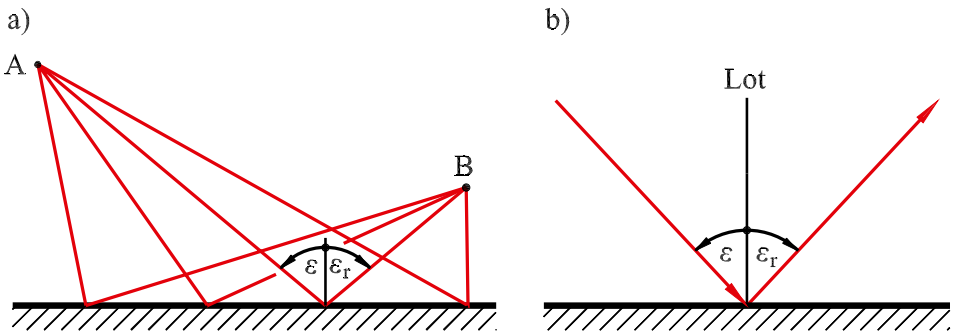


Bild 2.3 Reflexion an einer ebenen Grenzfläche

Mit den in der technischen Optik nach DIN 1335 üblichen Vorzeichen für Winkel ist $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_r < 0$. Damit lautet das Reflexionsgesetz:

$$\varepsilon_r = -\varepsilon \tag{2.5}$$

Bild 2.4 zeigt die Bildentstehung am ebenen Spiegel. Von den unendlich vielen Strahlen, die der Gegenstandspunkt O aussendet, treten die innerhalb des schraffierten Kegels laufenden ins Auge eines Betrachters ein. Die nach rückwärts verlängerten Strahlen ergeben den virtuellen Bildpunkt O′. Gegenstandspunkt O und Bildpunkt O′ liegen also auf derselben Normalen zur Spiegelebene und haben von dieser den gleichen Abstand, sie sind „spiegelsymmetrisch“.

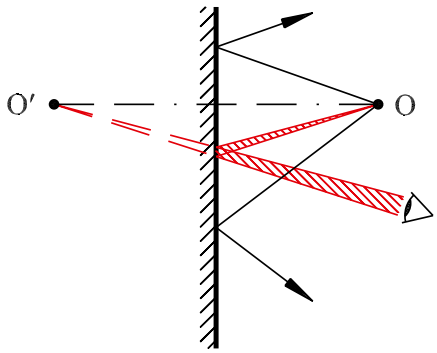


Bild 2.4
Bildentstehung am ebenen Spiegel

Technisch besonders interessant ist der *Winkelspiegel* mit einem Winkel von 90° (Bild 2.5 a). Unabhängig vom Einfallswinkel ist nach zwei Reflexionen der ausfallende Strahl parallel zum einfallenden, falls alle Strahlen in der Zeichenebene verlaufen.

Bringt man noch eine dritte Fläche senkrecht zu den beiden anderen an, so wie die Flächen in einer Würfelecke, dann wird jeder beliebig einfallende Strahl nach drei Reflexionen parallel zu sich selbst reflektiert (Bild 2.5 b). Derartige *Tripelspiegel* werden beispielsweise als Rückstrahler an Fahrzeugen eingesetzt sowie zur optischen Entfernungsmessung (Bild 10.61).

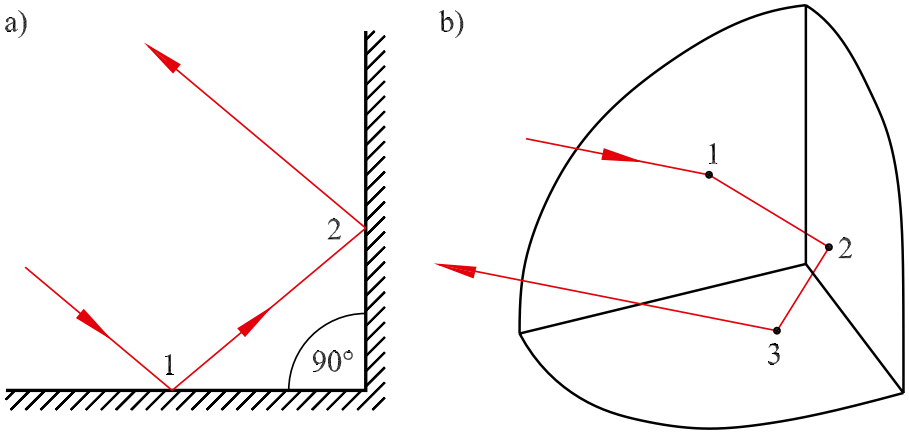


Bild 2.5 Reflexion an a) 90°-Winkelspiegel, b) Tripelspiegel

2.3.2 Reflexion an gekrümmten Flächen

Bei gekrümmten Flächen gilt das Reflexionsgesetz unverändert, wenn im Auftreffpunkt eines Strahls eine Tangentialebene und senkrecht dazu das Lot errichtet werden. Besonders interessante Eigenschaften haben Flächen in Form eines Kegelschnitts (Bild 2.6).

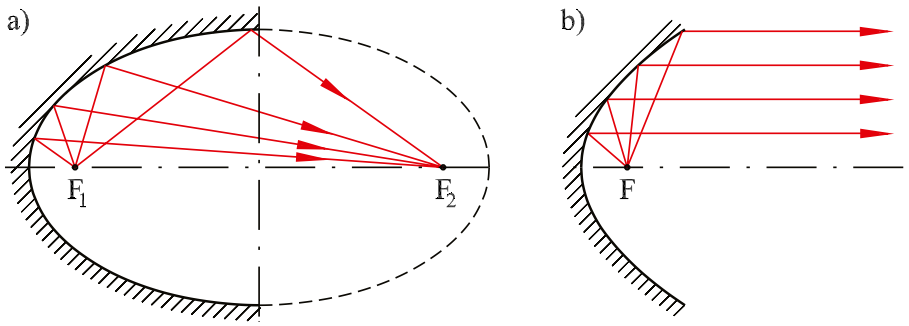


Bild 2.6 Spiegel mit Kegelschnittflächen; a) Ellipsoid, b) Paraboloid

Der *Ellipsoidspiegel* hat zwei *Brennpunkte*. Wenn eine punktförmige Lichtquelle in einem Brennpunkt sitzt, so werden alle von ihr ausgehenden Strahlen, die den Spiegel treffen, im zweiten Brennpunkt fokussiert. Sitzt beim *Paraboloidspiegel* eine punktförmige Lichtquelle im Brennpunkt, so verlassen die Strahlen den Spiegel als Parallelbündel parallel zur *optischen Achse* (Rotationssymmetrieachse). Wegen der grundsätzlichen Umkehrbarkeit des Strahlengangs werden parallel zur optischen Achse in einen Parabolspiegel einfallende Strahlen im Brennpunkt fokussiert.

Die größte praktische Bedeutung haben Spiegel mit kugelförmiger Fläche. Der *sphärische Hohl-* oder *Konkavspiegel* ist eine innen verspiegelte Kugelkalotte (Bild 2.7).

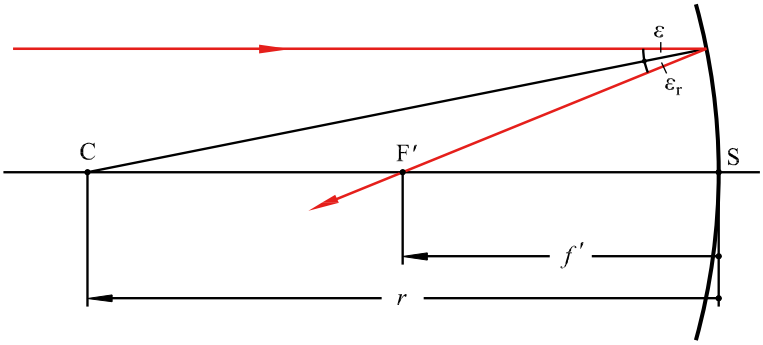


Bild 2.7 Reflexion eines paraxialen Strahls parallel zur optischen Achse CS am Hohlspiegel
C: Krümmungsmittelpunkt, F′: Brennpunkt, S: Scheitel, f': Brennweite, r: Krümmungsradius

Fällt ein weit geöffnetes paralleles Strahlenbündel in einen Hohlspiegel, so treffen sich nicht alle Strahlen in einem Brennpunkt wie beim Paraboloidspiegel. Verlaufen jedoch die Strahlen relativ nahe an der optischen Achse, sogenannte *Paraxialstrahlen*, so werden mit guter Näherung alle im Brennpunkt fokussiert. Für kleine Winkel ε (Bild 2.7) wird die *Brennweite*

$$f' = \frac{r}{2} \tag{2.6}$$

Nach den Vorzeichenregeln der technischen Optik in DIN 1335 (s. Abschnitt 2.5) sind die vom Scheitel S aus nach links gerichteten Strecken negativ, d. h., $f' < 0$, $r < 0$.

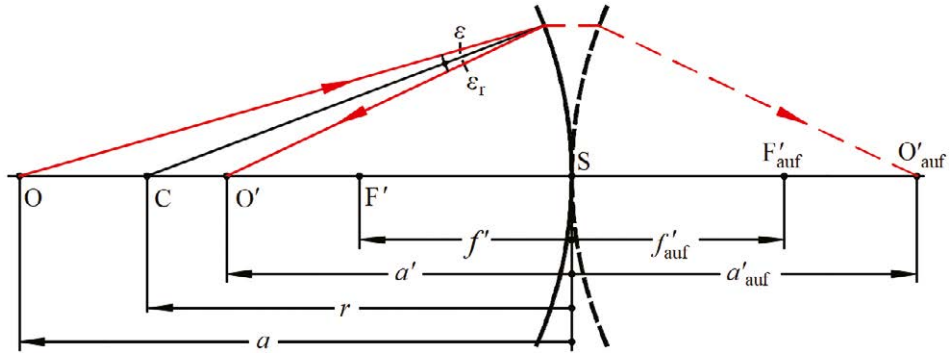


Bild 2.8 Abbildung eines Objektpunktes O auf der optischen Achse eines Hohlspiegels, $r < 0$, $f' < 0$. Rechts ist gestrichelt der aufgefaltete Strahlengang gezeichnet

Die Abbildung eines leuchtenden Objektpunktes auf der optischen Achse eines Hohlspiegels ist in Bild 2.8 dargestellt. Um den Bildpunkt O′ zu finden, genügt es, wenn zwei von O ausgehende Strahlen verfolgt werden. An ihrem Schnittpunkt liegt der Bildpunkt O′. Einer dieser Strahlen ist die optische Achse selbst, der andere wird gemäß Reflexionsgesetz konstruiert. Eine kurze trigonometrische Rechnung zeigt, dass bei kleinen Winkeln ε, also bei der Verwendung von paraxialen Strahlen, Gegenstandsweite a und Bildweite a' mit der Brennweite f' verknüpft sind durch die *Abbildungsgleichung des Hohlspiegels*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \tag{2.7}$$

Beim Durchrechnen von Strahlengängen ist es häufig zweckmäßig, zum *aufgefalteten Strahlengang* überzugehen. Dabei wird der aufgefaltete Bildpunkt O'_{auf} symmetrisch zu O′ hinter dem Spiegel gezeichnet. Bei *Auffaltung* gilt die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{a'_{auf}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'_{auf}} \tag{2.8}$$

mit $f'_{auf} = -\frac{r}{2} = -f' > 0$

Bei der Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes, dargestellt als Pfeil OP in Bild 2.9, genügt es, zwei ausgewählte Strahlen von der Pfeilspitze aus zu verfolgen. Dabei wird ausgenutzt, dass Strahlen parallel zur optischen Achse (z-Achse) nach der Reflexion am Spiegel durch den Brennpunkt gehen und umgekehrt. Für achsennahe Strahlen *(Paraxialstrahlen)* erfolgt die Reflexion praktisch an der y-Achse. Ein dritter Strahl von der Pfeilspitze zum Scheitel S wird unter dem gleichen Winkel relativ zur z-Achse reflektiert. Der Zusammenhang zwischen Objektgröße y und Bildgröße y' folgt direkt aus den Strahlensätzen. Der *Abbildungsmaßstab* bzw. die *Lateralvergrößerung* beträgt

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} \tag{2.9}$$

Mithilfe der Abbildungsgleichung ergibt sich

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{f'}{f' - a} = \frac{1}{1 - a/f'} \tag{2.10}$$

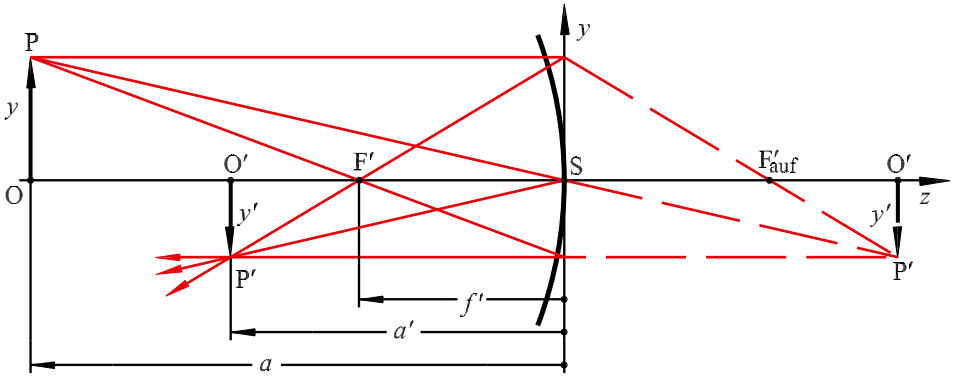


Bild 2.9 Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes durch einen Hohlspiegel mittels Paraxialstrahlen. Der aufgefaltete Strahlengang ist gestrichelt

Wenn der Gegenstand zwischen Brennpunkt und Scheitel steht, entsteht ein virtuelles Bild (Bild 2.10).

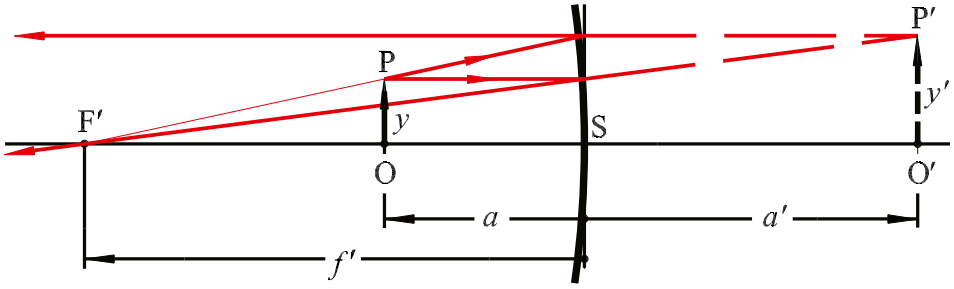


Bild 2.10 Abbildung eines Gegenstandes innerhalb der Brennweite des Hohlspiegels. Das Bild ist virtuell, aufrecht und vergrößert

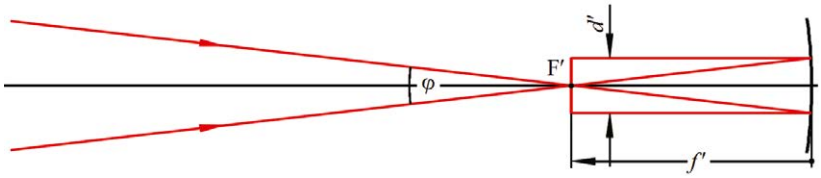
Je nach Abstand des Gegenstandes vom Spiegel ergeben sich die in Tabelle 2.1 zusammengestellten Verhältnisse.

Tabelle 2.1 Abbildungsverhältnisse beim Hohlspiegel

Gegenstandsweite	Bildweite	Abbildungsmaßstab	Bildart
$\lvert a\rvert > 2\lvert f'\rvert$	$\lvert f'\rvert < \lvert a'\rvert < 2\lvert f'\rvert$	$-\beta' < 1$	umgekehrt, reell
$a = 2f'$	$a' = 2f'$	$-\beta' = 1$	umgekehrt, reell
$2\lvert f'\rvert > \lvert a\rvert > \lvert f'\rvert$	$\lvert a'\rvert > 2\lvert f'\rvert$	$-\beta' > 1$	umgekehrt, reell
$a = f'$	$a' = \infty$	$\beta' = \pm\infty$	Bild im Unendlichen
$\lvert a\rvert < \lvert f'\rvert$	$a' > 0$	$\beta' > 1$	aufrecht, virtuell

Beispiel 2.1

Mit einem Hohlspiegel von 10 m Krümmungsradius soll ein Bild der Sonne erzeugt werden. Wo befindet sich das Bild und wie groß ist es, wenn die Sonne von der Erde aus unter einem Sehwinkel von $\varphi = 32'$ erscheint?



Die Sonne ist praktisch unendlich weit entfernt. Dadurch entsteht ihr Bild in der Brennebene des Spiegels, d. h. 5 m vor dem Spiegel. Strahlen, die vom Sonnenrand durch den Brennpunkt gehen, werden nach der Reflexion am Spiegel zu achsenparallelen Strahlen und bestimmen dadurch die Größe des Bildes. Für den Bilddurchmesser ergibt sich

$$d' = |f'| \cdot \varphi = 5\,\text{m} \cdot 9{,}31 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} = 46{,}6\,\text{mm}$$

Beim *sphärischen Wölb-* oder *Konvexspiegel* ist die Außenseite einer Kugelkalotte verspiegelt. Die Abbildungsgleichungen für den Hohlspiegel behalten ihre Gültigkeit, lediglich die Brennweite und der Krümmungsradius werden jetzt positiv:

$$f' = \frac{r}{2} \qquad (2.11)$$

mit $r > 0$

Das Bild ist beim Wölbspiegel immer aufrecht, verkleinert und virtuell (Bild 2.11). Er wird gerne benutzt als Rückspiegel beim Kraftfahrzeug. Der Wölbspiegel macht zwar verkleinerte Bilder der Umwelt, besitzt aber ein großes Gesichtsfeld.

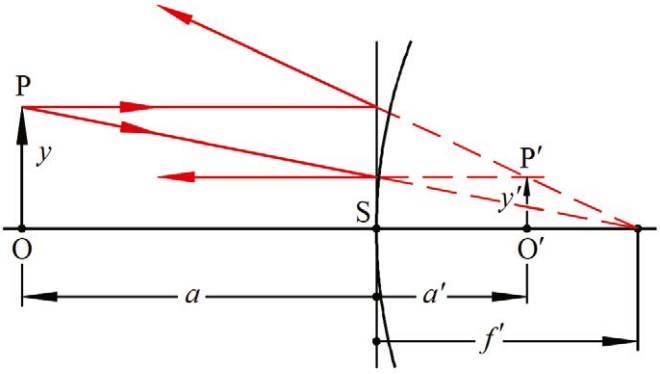


Bild 2.11
Bildentstehung beim Wölbspiegel. Das Bild ist virtuell, aufrecht und verkleinert

2.4 Brechung des Lichts

2.4.1 Brechungsgesetz

Wenn eine Lichtwelle schief auf eine Grenzfläche zuläuft, die Medien mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten trennt, dann ändert die Welle ihre Laufrichtung (Bild 2.12). Dadurch ändert sich auch die Richtung der Lichtstrahlen, sie werden gebrochen. Die Richtungsänderung kann sowohl mit der Methode der **Huygens**'schen Elementarwellen (mehr dazu in Abschnitt 4.5.1) als auch mit dem Fermat'schen Prinzip berechnet werden.

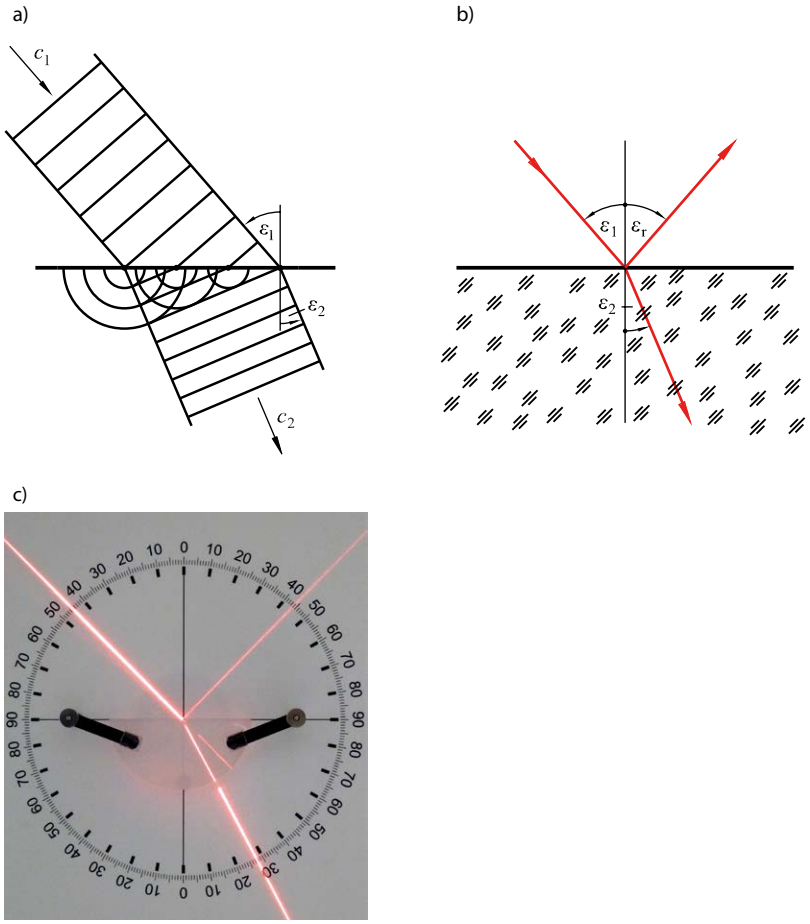


Bild 2.12 Brechung des Lichts; a) Wellenflächen mit **Huygens**'schen Elementarwellen, b) Richtungen von einfallendem, reflektiertem und gebrochenem Strahl, c) Brechung eines Laserstrahls an der Grenzfläche Luft/PMMA

Wenn die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien mit c_1 und c_2 bezeichnet werden, dann folgt für die Winkel relativ zum Lot:

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{2.12}$$

Mithilfe der bereits in Formel 2.1 definierten Brechzahl $n = c_0/c$ lässt sich das Brechungsgesetz schreiben als

$$n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2 \tag{2.13}$$

was als ***Snellius**'sches Brechungsgesetz* bekannt ist. Tritt der Lichtstrahl durch weitere Grenzflächen, so gilt

$$n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2 = n_3 \sin \varepsilon_3 \ldots \tag{2.14}$$

oder

$$n \sin \varepsilon = \text{konst} \tag{2.15}$$



Das Produkt aus Brechzahl und Sinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und Lot bleibt bei einer Brechung konstant. Es ist eine *Invariante der Brechung*.

2.4.2 Dispersion

Die Lichtgeschwindigkeit im Innern eines Materials ist nicht konstant, sondern hängt u. a. von der Wellenlänge ab. Dadurch wird der Brechungsindex auch abhängig von der Wellenlänge bzw. Farbe des Lichts, was als *Dispersion* bezeichnet wird (die Ursache derselben wird in Abschnitt 4.3.4 erläutert). Auf diesem Effekt beruht die Zerlegung des Lichts in seine Spektralfarben mithilfe eines *Prismenspektrometers* (Bild 2.13).

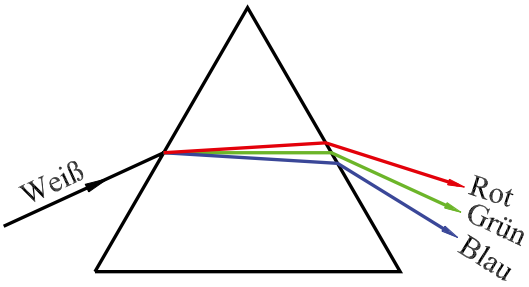


Bild 2.13 Brechung von weißem Licht an einem Prisma

Zur Charakterisierung der Stärke der Dispersion eines Glases wird die *Abbe-Zahl* herangezogen:

$$\nu_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \tag{2.16}$$

oder

$$\nu_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}} \tag{2.17}$$

Die Indizes beschreiben verschiedene Spektrallinien (*Fraunhofer-Linien*), deren Wellenlängen in Tabelle 2.2 zusammengestellt sind. Gläser mit großer **Abbe**-Zahl zeigen geringe Dispersion. Gläser mit $\nu_d > 55$ heißen Krongläser. Gläser mit $\nu_d < 50$ heißen Flintgläser; sie zeigen eine starke Dispersion.

Tabelle 2.2 Wellenlängen einiger Spektrallinien

Name	Wellenlänge λ/nm	Herkunft
F	486,133	blau, Wasserstoff
d	587,562	gelb, Helium
C	656,273	rot, Wasserstoff
F′	479,991	blau, Cadmium
e	546,074	grün, Quecksilber
C′	643,847	rot, Cadmium

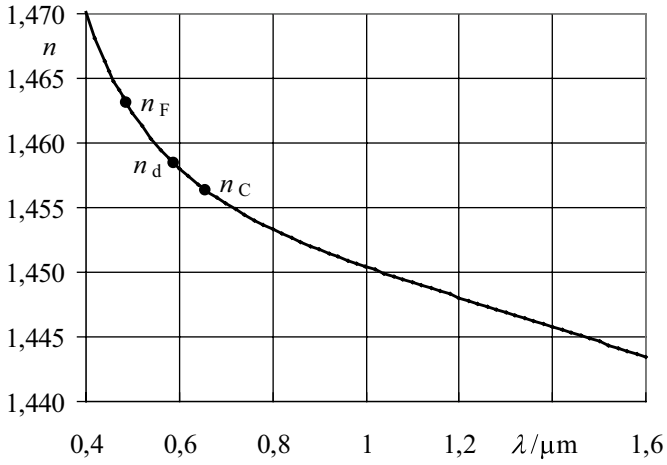


Bild 2.14
Brechungsindex von Quarzglas, berechnet mithilfe der **Sellmeier**-Gleichung (Formel 2.18)

Bei *normaler Dispersion* nimmt die Brechzahl mit zunehmender Wellenlänge ab (Bild 2.14). Der Verlauf $n(\lambda)$ kann mit der *Sellmeier-Gleichung* (Formel 2.18) berechnet werden. Die Koeffizienten B_i und C_i können beispielsweise aus dem Glaskatalog der Firma Schott für jede Glassorte entnommen werden.

$$n^2 = 1 + B_1 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + B_2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + B_3 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \tag{2.18}$$

Einen Überblick über die Eigenschaften optischer Gläser gestattet das *Abbe-Diagramm* (Bild 2.15). Hier sind die Brechungsindizes der Gläser über der **Abbe**-Zahl aufgetragen. Das Diagramm zeigt, dass hochbrechende Gläser meist auch starke Dispersion zeigen und umgekehrt.

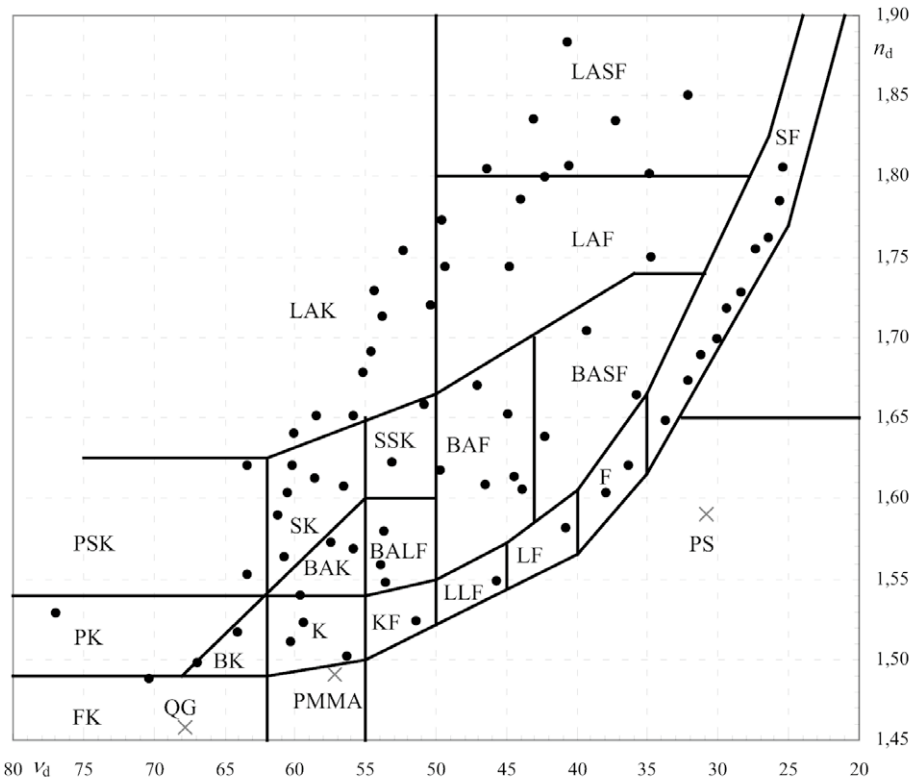


Bild 2.15 **Abbe**-Diagramm des Brechungsindex n_d in Abhängigkeit von der **Abbe**-Zahl ν_d, (Quelle: *www.schott.com/advanced_optics*), PS: Polystyrol, PMMA: Polymethylmethacrylat (Plexiglas), QG: Quarzglas

Die Bedeutung der Abkürzungen verschiedener *Glassorten* ist in Tabelle 2.3 zusammengestellt. Tabelle 2.4 zeigt die optischen Daten einiger ausgewählter Stoffe.

Tabelle 2.3 Bezeichnungen optischer Gläser

Krongläser		Flintgläser	
BAK	Barytkron	BAF	Barytflint
BK	Borkron	BALF	Barytleichtflint
FK	Fluorkron	BASF	Barytschwerflint
K	Kron	F	Flint
LAK	Lanthankron	KF	Kronflint
PK	Phosphatkron	LAF	Lanthanflint
SK	Schwerkron	LASF	Lanthanschwerflint
SSK	Schwerstkron	LF	Leichtflint
		LLF	Doppelleichtflint
		SF	Schwerflint

Tabelle 2.4 Brechzahl und **Abbe**-Zahl einiger Substanzen

Stoff	n_d	v_d	Code
Fluorkronglas, FK5	1,48749	70,41	487 704
Quarzglas	1,45846	67,79	458 678
Borkronglas, BK7	1,51680	64,17	517 642
Flintglas, F2	1,62004	36,37	620 364
Schwerflintglas, SF6	1,80518	25,43	805 254
Schwerflintglas, SF66	1,92286	20,88	923 209
Luft (trocken, bei 20 °C und 1013,25 hPa)	1,000277	89,3	
Ethylalkohol, C_2H_5OH	1,3618	55,8	
Wasser	1,333041	55,6	
Benzol, C_6H_6	1,50155	30,1	
Schwefelkohlenstoff, CS_2	1,62804	18,4	

Gläser werden international mit einer sechsstelligen *Codenummer* charakterisiert: xxxyyy, wobei

$$\text{xxx} = (n_\text{d} - 1) \cdot 1000 \tag{2.19}$$

und

$$\text{yyy} = \nu_\text{d} \cdot 10 \tag{2.20}$$

2.4.3 Totalreflexion

Ein Lichtstrahl, der in einem optisch dichten Medium läuft, wird an der Grenzfläche zu einem optisch dünneren Medium totalreflektiert, wenn er relativ flach auf die Grenzfläche trifft (streifender Einfall). Der Strahl a in Bild 2.16 wird sowohl reflektiert, a_r, als auch gebrochen, a′. Der Strahl g verläuft unter dem *Grenzwinkel der Totalreflexion* ε_g; sein gebrochener Strahl g′ verläuft tangential zur Grenzfläche, daneben gibt es den reflektierten Strahl g_r. Der Strahl t wird totalreflektiert, d. h., er besitzt keinen gebrochenen Strahl mehr, sondern nur noch den reflektierten t_r.

Nach dem **Snellius**'schen Brechungsgesetz gilt für den Grenzwinkel der Totalreflexion $n_1 \sin \varepsilon_g = n_2 \sin 90°$ und damit

$$\sin \varepsilon_\text{g} = \frac{n_2}{n_1} \tag{2.20}$$

oder

$$\varepsilon_\text{g} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \tag{2.21}$$

Eine interessante Anwendung der Totalreflexion ist die Führung von Lichtwellen in Lichtwellenleitern (Bild 2.17). Ein *Lichtwellenleiter* (LWL) besteht aus einem Kern mit einer Brechzahl n_1, der umgeben ist von einem Mantel mit geringerer Brechzahl n_2. Wenn die Lichtstrahlen genügend flach auf die Grenzfläche fallen, werden sie totalreflektiert und breiten sich zickzackförmig im Kern aus. Die Reflexion erfolgt vollkommen verlustfrei. Die Verluste der Glasfaser haben andere Gründe (Abschnitt 7.4).

Der Strahl in Bild 2.17 a), der unter dem Grenzwinkel ε_g auf die Kern-Mantel-Grenze trifft, fällt unter dem Winkel Θ auf die Stirnfläche der Faser. Dieser größtmögliche Winkel relativ zur optischen Achse wird als *Akzeptanzwinkel* bezeichnet und bestimmt sich aus

$$\sin \Theta = A_\text{N} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{2.22}$$

Der Sinus des Öffnungswinkels optischer Systeme wird auch als *numerische Apertur*, A_N, bezeichnet. Strahlen, die mit einem größeren Winkel auf die Stirnfläche fallen, so wie der gestrichelte in Bild 2.17 a), werden ausgekoppelt und nicht geführt.

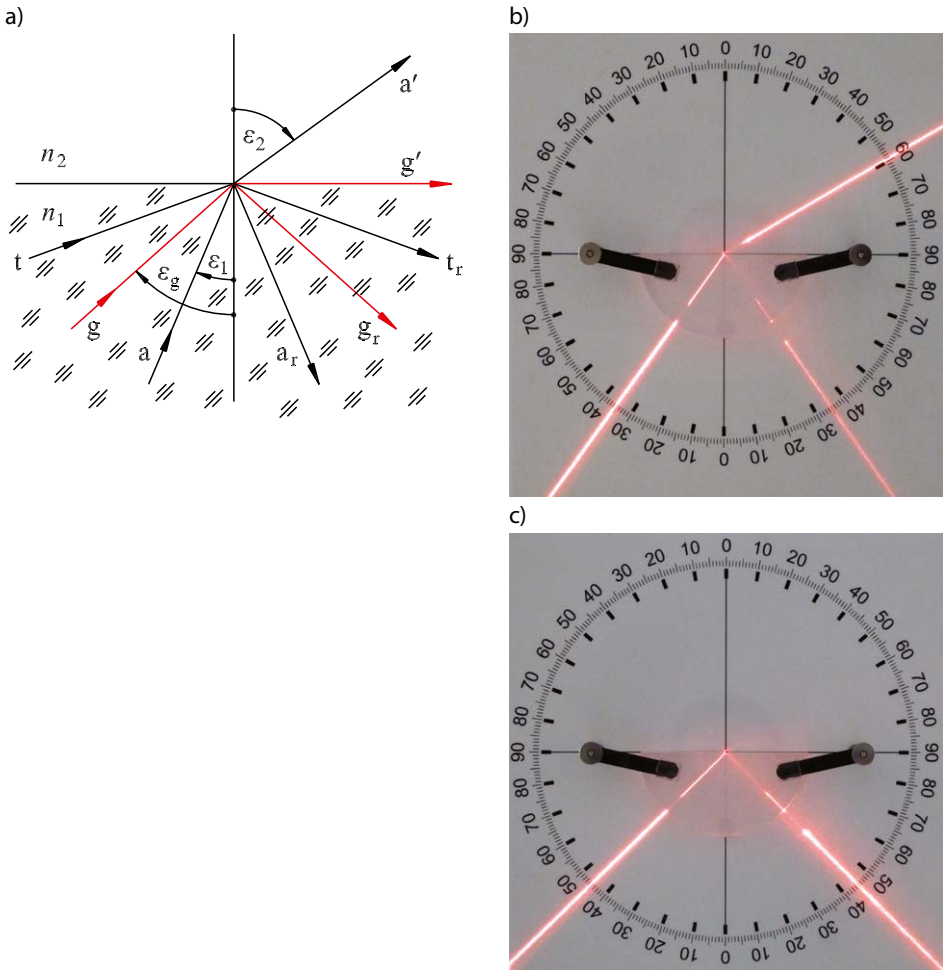


Bild 2.16 Brechung und Reflexion beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium, d. h., $n_1 > n_2$; a) relevante Strahlen und Winkel, ε_g: Grenzwinkel der Totalreflexion, b) Brechung eines Laserstrahls an der Grenzfläche PMMA/Luft mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_g$, c) Totalreflexion eines Laserstrahls an der Grenzfläche PMMA/Luft mit $\varepsilon_1 > \varepsilon_g$

Strahlen, die sich unter verschiedenen Winkeln (in der Sprache der Wellenlehre: verschiedene Schwingungsmoden) im Kern ausbreiten, weisen unterschiedliche Laufzeiten auf. Diese *Modendispersion* macht eine Datenübertragung mit hoher Bitrate nicht möglich (Abschnitt 7.5). Wesentlich günstiger sind Fasern mit kontinuierlich veränderlicher Brechzahl, sogenannte *Gradientenfasern* (Bild 2.17 b). Bei einem parabelförmigen Indexprofil $n(r)$ verlaufen die Strahlen im Kern sinusförmig. Obwohl der geometrische Weg für die weiter außen verlaufenden Strahlen größer ist als für die inneren, ist der optische Weg für alle Strahlen gleich und damit auch die Laufzeit der Lichtpulse. Die Periodenlänge p ist für alle Strahlen gleich, d. h., alle treffen sich nach

einer bestimmten Lauflänge. Die fokussierende Wirkung derartiger Gradientengläser wird ausgenutzt zur Herstellung von GRIN-Linsen (**Gr**aded **In**dex, Abschnitt 2.6.4).

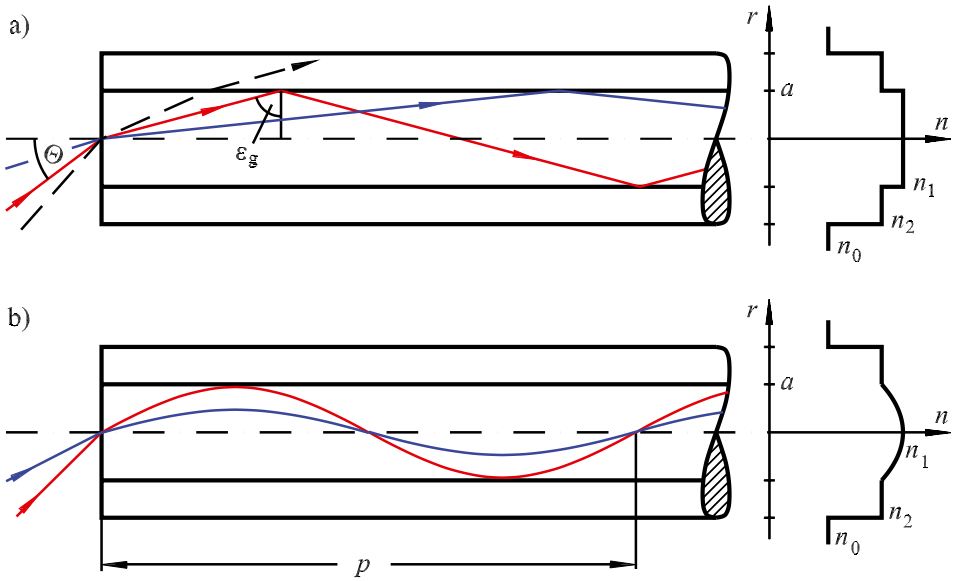


Bild 2.17 Lichtwellenleiter; a) Stufenindexfaser, b) Gradientenfaser

2.4.4 Prismen

Prismen haben vielfältige Anwendungen in der Optik. Beispielsweise kann die unvermeidliche Dispersion des Lichts ausgenutzt werden, um Licht spektral zu zerlegen (Bild 2.13, Formel 2.20). Eine andere Anwendung ist die Strahlumlenkung mittels Reflexionsprismen sowie die Bildumkehr bei optischen Abbildungen (Bild 2.19).

Bei gegebenem Prismenwinkel α kann der – formal negative – Ablenkungswinkel δ in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ε_1' (Bild 2.18 a) durch zweimaliges Anwenden des **Snellius**'schen Brechungsgesetzes berechnet werden:

$$-\delta = \varepsilon_1' - \alpha + \arcsin\left[\sin\,\alpha\sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - \sin^2\,\varepsilon_1'} - \cos\,\alpha\,\sin\,\varepsilon_1'\right] \tag{2.23}$$

Bei symmetrischem Durchgang wird der Ablenkungswinkel minimal (Bild 2.18 b) und beträgt, wenn sich das Prisma an Luft befindet ($n' = 1$):

$$\delta_{\min} = \alpha - 2\,\arcsin(n\,\sin\,(\alpha/2)) \tag{2.24}$$

Bei kleinem brechendem Winkel α vereinfacht sich Formel 2.24 zu

$$\delta_{\min} \approx -\alpha(n-1) \tag{2.25}$$

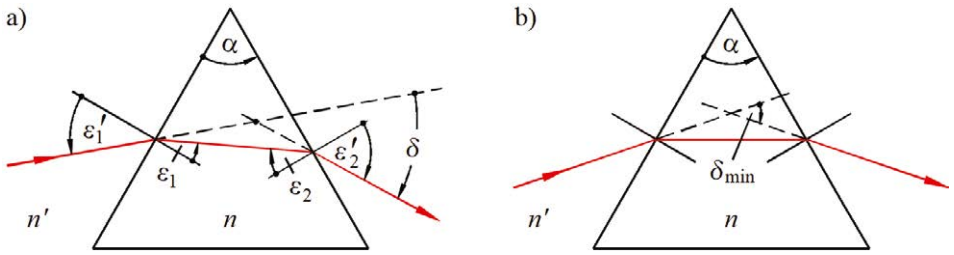


Bild 2.18 Ablenkung eines Strahls an einem Prisma; a) beliebiger Einfallswinkel, b) minimale Ablenkung. Die Winkel haben Vorzeichen gemäß DIN 1335

Die relative Winkeldifferenz zwischen blauem und rotem Licht (F- und C-Linie, Tabelle 2.2) bezogen auf gelbes Licht (d-Linie) entspricht bei kleinem Keilwinkel dem Kehrwert der *Abbe-Zahl*:

$$\frac{\delta_\mathrm{F} - \delta_\mathrm{C}}{\delta_\mathrm{d}} = \frac{n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}}{n_\mathrm{d} - 1} = \frac{1}{\nu_\mathrm{d}} \tag{2.26}$$

Die *Winkeldispersion*, d. h. die Abhängigkeit des minimalen Ablenkwinkels von der Wellenlänge, folgt für beliebige brechende Winkel α aus

$$\frac{\mathrm{d}(\delta_\mathrm{min})}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}(\delta_\mathrm{min})}{\mathrm{d}n} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2\,\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2\,\sin(\alpha/2)}{\cos\,\varepsilon'_1} \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.27}$$

Die Materialdispersion $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ kann näherungsweise mithilfe der **Abbe**-Zahl bestimmt werden:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \approx \frac{\Delta n}{\Delta\lambda} \approx \frac{n_\mathrm{d} - 1}{\nu_\mathrm{d}(\lambda_\mathrm{F} - \lambda_\mathrm{C})} \tag{2.28}$$

Damit wird der Winkelabstand zweier Spektrallinien, welche den Wellenlängenabstand $\Delta\lambda$ voneinander haben

$$\Delta(\delta_\mathrm{min}) \approx \frac{2\,\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1 - n^2\,\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{n_\mathrm{d} - 1}{\nu_\mathrm{d}(\lambda_\mathrm{C} - \lambda_\mathrm{F})} \cdot \Delta\lambda = \frac{2\,\sin(\alpha/2)}{\cos\,\varepsilon'_1} \cdot \frac{n_\mathrm{d} - 1}{\nu_\mathrm{d}(\lambda_\mathrm{C} - \lambda_\mathrm{F})} \cdot \Delta\lambda \tag{2.29}$$



Beispiel 2.2

Wie groß ist die Winkeldifferenz, unter der bei einem Prisma aus SF6 mit brechendem Winkel $\alpha = 60°$ die C- und F-Linien auftreten, bei symmetrischem Durchgang?

Nach Tabelle 2.4 ist für dieses Glas die **Abbe**-Zahl $\nu_\mathrm{d} = 25{,}43$ und der Brechungsindex $n_\mathrm{d} = 1{,}80518$. Damit ergibt sich nach Formel 2.29

$$\Delta(\delta_\mathrm{min}) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - 1{,}80518^2 \cdot 0{,}25}} \cdot \frac{0{,}80518}{25{,}43} = 0{,}0735\,\mathrm{rad} = 4{,}21°$$

Bild 2.19 zeigt einige Prismen zur Umlenkung des Strahlengangs oder zur Bildumkehr in optischen Systemen. Die Bildlage wird durch ein L dargestellt, wobei der lange Strich in der Zeichenebene liegt, der kurze darauf senkrecht steht. Während beispielsweise beim einfachen rechtwinkligen Umkehrprisma und beim geradsichtigen Wendeprisma oben und unten vertauscht wird, muss für eine vollständige Bildumkehr auch links und rechts vertauscht werden. Beim **Porro**'schen Prismensatz wird dies durch ein zweites Prisma erreicht, dessen Hauptschnitt um 90° gegenüber dem ersten gedreht ist. Diese Art der Bildumkehr wird bei Prismenfeldstechern eingesetzt.

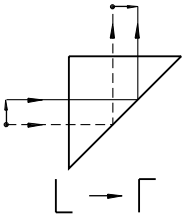
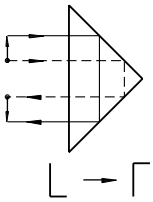
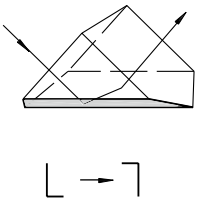
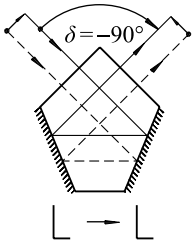
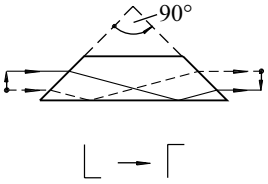
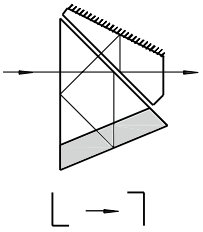
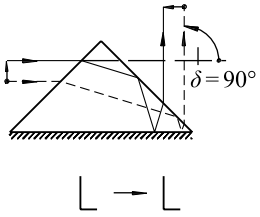
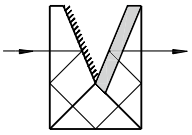
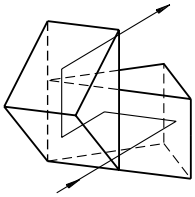
<table>
<tr><th>Umlenkprismen</th><th colspan="2">Umkehrprismen</th></tr>
<tr><td>rechtwinkliges Umlenkprisma
</td><td>rechtwinkliges Umkehrprisma
</td><td>Dachkantprisma
</td></tr>
<tr><td>Pentagonalprisma mit konstanter Ablenkung
</td><td>geradsichtiges Wendeprisma (Amici/Dove)
</td><td>Schmidt-Pechan-Prisma
</td></tr>
<tr><td>Bauernfeind-Prisma mit konstanter Ablenkung
</td><td>Uppendahl-Prisma
</td><td>Porro-Prismen
</td></tr>
</table>

Bild 2.19 Prismen zur Strahlumlenkung und Bildumkehr. Die Grenzflächen mit Schraffur sind verspiegelt

Eine vollständige Bildumkehr wird auch beim Dachkantprisma erreicht, dessen Hypothenusenfläche Dachform besitzt. Im Gegensatz zu den **Porro**-Prismen wird die Bildumkehr bei den Prismensystemen nach **Schmidt-Pechan** sowie **Uppendahl** ohne Strahlversatz erreicht. Beide benutzen je ein Dachkantprisma. Sie werden gerne in modernen geradsichtigen Feldstechern eingesetzt. Das Pentagonalprisma sowie das **Bauernfeind**'sche lenken den Strahl um 90° um, unabhängig vom Einfallswinkel.

2.5 Brechung an gekrümmten Flächen

2.5.1 Asphärische Flächen

Bei einer optischen Abbildung sollten im Idealfall alle Strahlen, die von einem Objektpunkt ausgesandt werden, in einem Bildpunkt wieder zusammentreffen (Abschnitt 2.1). Dies kann z. B. erreicht werden durch elliptische Spiegel (Abschnitt 2.3.2). Nutzt man zur Strahlablenkung und Umformung der Wellenflächen die Brechung an gekrümmten Flächen aus, so kann dieses Ziel mit Flächen in Form von Kegelschnitten erreicht werden (Abschnitt 13.1.9).

Bild 2.20 zeigt ein Beispiel, wie Strahlen, die von einem Objektpunkt O ausgehen, mithilfe einer plankonvexen Linse zu einem parallelen Strahlenbündel umgeformt werden. Wenn dies für alle Strahlen gelten soll, die auf die gekrümmte Fläche fallen, dann muss nach dem **Fermat**'schen Prinzip (Abschnitt 2.2) die Flächenform so gewählt werden, dass die *optischen Wege* OP_1 und OP_2 gleich sind. Es muss demnach gelten

$$s + n\ (\rho \cdot \cos\ \varepsilon - s) = \rho$$

falls das Linsenmaterial den Brechungsindex n besitzt, während die beidseitig der Linse vorhandene Luft die Brechzahl $n_\mathrm{L} \approx 1$ hat.

Für die Länge OP_2 folgt daraus

$$\rho = \frac{s(n-1)}{n\cos\varepsilon - 1} \tag{2.30}$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten. Die gesuchte Flächenform ist daher ein Hyperboloid.

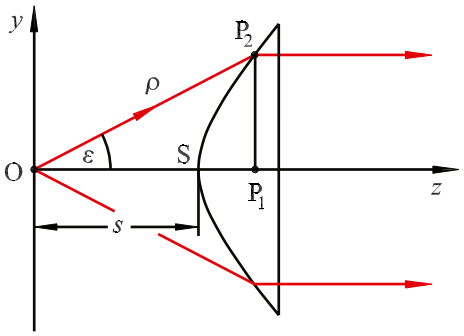


Bild 2.20
Erzeugung eines parallelen Strahlenbündels mithilfe einer hyperbolischen Plankonvexlinse

Mithilfe eines zweiten Hyperboloids können die Parallelstrahlen wieder in einem Punkt vereinigt werden. Wie Bild 2.21 illustriert, hat man damit erreicht, dass ein Objektpunkt O auf der optischen Achse in einen Bildpunkt O′ abgebildet wird. Die Abbildung ist allerdings nur perfekt für einen definierten Objektabstand von der Linse und den dazu gehörenden Bildabstand. Für Punkte, die andere Gegenstandsweiten haben oder nicht auf der optischen Achse liegen, wird die Abbildung nicht perfekt.

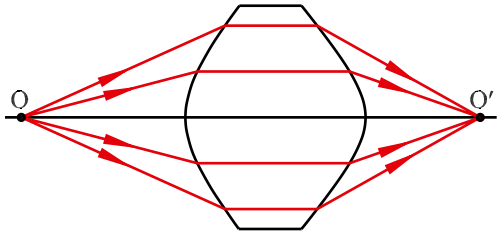


Bild 2.21 Fehlerfreie Abbildung eines Objektpunktes in einen Bildpunkt mithilfe einer hyperbolischen Bikonvexlinse

Obwohl asphärische Flächen heute mit computergesteuerten Bearbeitungsmaschinen hergestellt werden können, sind sie immer noch sehr aufwendig und teuer. Die meisten Linsen werden daher mit Kugeloberflächen (sphärische Flächen) ausgeführt. Die unweigerlich damit verbundenen Abbildungsfehler sucht man durch Kombination verschieden geformter Linsen mit verschiedenen Materialien zu kompensieren.

2.5.2 Kugelflächen

2.5.2.1 Vorzeichenkonvention in der technischen Optik

Nach den Festlegungen der DIN 1335 wird die Lichtausbreitung in optischen Systemen in kartesischen Koordinatensystemen beschrieben. Die Lichtausbreitung erfolgt von links nach rechts (vor einer etwaigen Reflexion) in Richtung der positiven z-Achse

(Symmetrieachse, optische Achse). Die y-Achse steht senkrecht auf der z-Achse und weist von unten nach oben. Strecken werden mit Richtungspfeilen (einseitigen Pfeilen) gekennzeichnet. Sämtliche Strecken, die vom Bezugspunkt aus nach links gerichtet sind, erhalten ein negatives Vorzeichen; solche, die nach rechts weisen, sind positiv. Als Beispiel zeigt Bild 2.22 die Vorzeichendefinition des Krümmungsradius von Kugelflächen, der vom Scheitel S zum Zentrum C des Kreises weist.

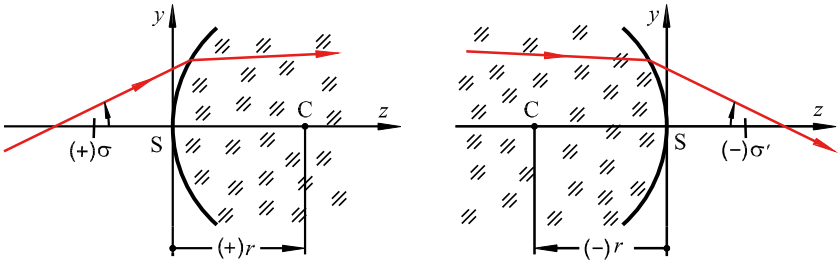


Bild 2.22 Vorzeichen des Krümmungsradius r und des Neigungswinkels σ eines Strahls

Die Strahlrichtungen werden durch Winkel relativ zu einem Bezugsschenkel angegeben. Schneidet der Strahl die optische Achse, so ist diese der Bezugsschenkel (Bild 2.22).

2.5.2.2 Brechung an einer Kugelfläche

Bild 2.23 zeigt die Abbildung eines Objektpunktes O durch eine brechende Kugelfläche. Der Brechungsindex des Mediums im Objektraum ist n, derjenige im Bildraum n'. Da sich alle Strahlen, die vom Objektpunkt ausgesandt werden, im Bildpunkt wieder treffen müssen, kann die Lage des Bildpunktes dadurch ermittelt werden, dass man zwei willkürliche Strahlen betrachtet und deren Schnittpunkt im Bildraum sucht.

In Bild 2.23 ist dies der Strahl OPO′ sowie ein zweiter Strahl OSO′, der auf der optischen Achse verläuft.

Die vom Scheitel S aus gemessenen Abstände s und s' zu O und O′ heißen *Schnittweiten*. Durch Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck OCP folgt unter Beachtung der Vorzeichenregeln die Beziehung

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OP}} = \frac{r-s}{-l} = \frac{\sin\,(180^\circ - \varepsilon)}{-\sin\,\varphi} = \frac{\sin\,\varepsilon}{-\sin\,\varphi}$$

Für das Dreieck CO′P liefert der Sinussatz

$$\frac{\mathrm{CO'}}{\mathrm{O'P}} = \frac{s'-r}{l'} = \frac{\sin\varepsilon'}{\sin\,(180^\circ+\varphi)} = \frac{\sin\varepsilon'}{-\sin\,\varphi}$$

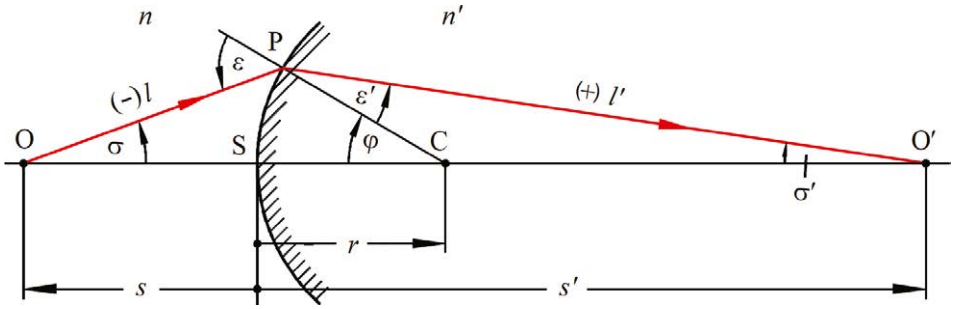


Bild 2.23 Schnittweiten im Objekt- und Bildraum bei der Abbildung eines Objektpunktes durch eine Kugelfläche

Dividiert man beide Gleichungen durcheinander, so folgt mithilfe des **Snellius**'schen Brechungsgesetzes (Formel 2.13)

$$\frac{\sin\,\varepsilon}{\sin\,\varepsilon'} = \frac{n'}{n} = \frac{(r-s)l'}{(r-s')l} \tag{2.31}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die gesuchte Schnittweite s' von den beiden Längen l und l' und damit vom Winkel σ abhängt, den der Strahl OP mit der optischen Achse einnimmt.

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn man sich auf *paraxiale Strahlen* beschränkt. Das sind Strahlen, die nahe an der optischen Achse verlaufen und geringe Neigungswinkel relativ zu ihr aufweisen. Die Beschränkung auf paraxiale Strahlen ist das Merkmal der *Gauß'schen Optik*, da C. F. **Gauß** die entsprechenden mathematischen Grundlagen entwickelte.

Für kleine Winkel σ gilt näherungsweise $s \approx l$ und $s' \approx l'$ und damit folgt aus Formel 2.31 für die Schnittweiten

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n-n'}{r} \tag{2.32}$$

Diese Gleichung kann so umgeformt werden, dass die Glieder auf der linken Seite für den Objektraum und die auf der rechten Seite für den Bildraum dieselbe Struktur haben. Eine solche Beziehung nennt man eine *Invariante*; in diesem Fall wird sie auch als *Abbe'sche Invariante* bezeichnet:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) \tag{2.33}$$

Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes

Wenn das Objekt eine seitliche Ausdehnung hat, so wird das von der brechenden Kugelfläche entworfene Bild ebenfalls seitlich ausgedehnt sein. Wie Bild 2.24 demonstriert, können im Prinzip nur solche Objektpunkte zu einem scharfen Bild führen, die auf einer um C konzentrischen Kugelschale liegen. Das Bild liegt dann ebenfalls auf

einer Kugelschale. Beschränkt man sich wieder auf paraxiale Strahlen, lässt man also nur Objekte mit geringer Querausdehnung zu, dann wird von einem ebenen Objekt näherungsweise wieder ein ebenes Bild erzeugt.

Der sogenannte *Abbildungsmaßstab* β', der das Größenverhältnis der Querdimensionen beschreibt, kann gemäß Bild 2.24 durch Anwendung des Strahlensatzes berechnet werden.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'-r}{r-s} = \frac{s'-r}{s-r}$$

Das Minuszeichen beschreibt, dass der aufrechte Gegenstand umgekehrt abgebildet wird. Unter Verwendung der **Abbe**'schen Invariante wird daraus

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} \tag{2.34}$$

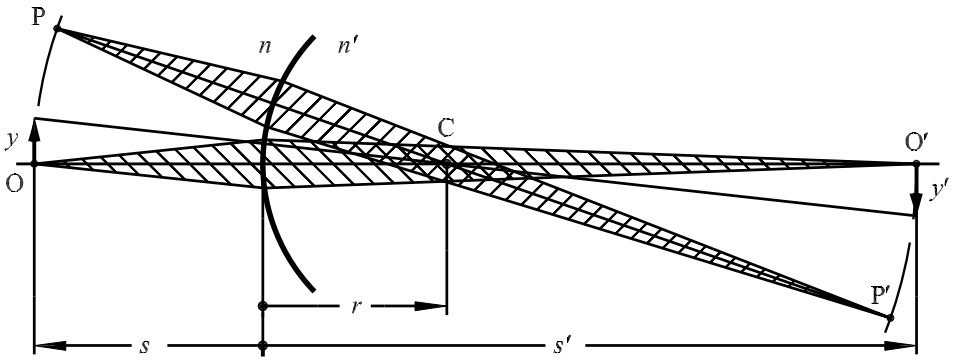
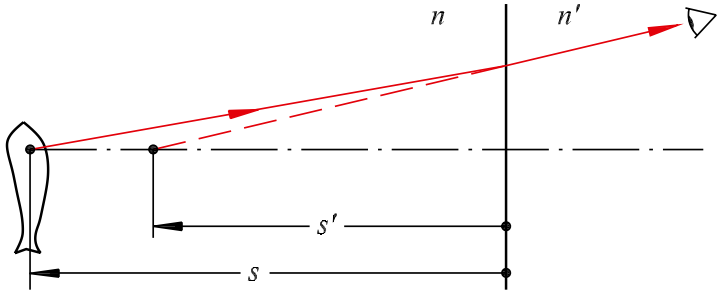


Bild 2.24 Abbildungsmaßstab bei der Abbildung eines ausgedehnten Objektes durch eine brechende Kugelfläche

Beispiel 2.3

Ein Fisch schwimmt 1 m unter einer Wasseroberfläche. In welcher Tiefe erscheint er einem Betrachter, der senkrecht von oben ins Wasser schaut, und wie groß erscheint ihm der Fisch?



Durch Anwendung der **Abbe**'schen Invariante (Formel 2.33) folgt mit $r = \infty$, $s = -1$ m, $n = 1{,}333$ und $n' = 1$

$$s' = \frac{s}{n} = -0{,}75\,\text{m}$$

Der Fisch erscheint dem Betrachter daher näher an der Oberfläche. Der Abbildungsmaßstab beträgt

$$\beta' = \frac{ns'}{n's} = 1$$

Das Bild ist virtuell, aufrecht und hat dieselbe Größe wie der Gegenstand.

Bei ebenen Grenzflächen gilt allgemein:



Bilder, die durch ebene brechende Flächen erzeugt werden, sind immer aufrecht und haben dieselbe Größe wie der Gegenstand.

J. L. **de Lagrange** fand eine interessante Beziehung zwischen dem Abbildungsmaßstab und den Neigungswinkeln, der an der Abbildung beteiligten Strahlen. Aus Bild 2.23 folgt für das Verhältnis

$$\frac{\tan\,\sigma'}{\tan\,\sigma} = \frac{s}{s'}$$

mit Formel 2.34 ergibt sich für paraxiale Strahlen, für die $\tan\sigma \approx \sigma$ gilt,

$$n\,y\,\sigma = n'\,y'\,\sigma' \tag{2.35}$$

also wieder eine Invariante, die als *Helmholtz-Lagrange-Invariante* bezeichnet wird, weil H. **von Helmholtz** gezeigt hat, dass sie für ein beliebiges System brechender Flächen gültig ist.

2.6 Abbildung durch Linsen

2.6.1 Dünne Linsen

Linse ist von verschiedenen Medien umgeben

Sphärische Linsen bestehen aus Gläsern oder Kunststoffen, die beidseitig von Kugelflächen begrenzt sind; dabei kann eine Fläche eben sein, d. h., sie hat einen unendlich großen Krümmungsradius. Bild 2.25 zeigt die Abbildung eines Objektpunktes O, der sich auf der optischen Achse in einem Medium der Brechzahl n befindet. Das Bild entsteht in einem Medium der Brechzahl n', der Brechungsindex der Linse ist n_L. Die

Krümmungsradien der Kugelflächen sind r_1 für die erste und r_2 für die zweite brechende Fläche. Die Dicke der Linse ist d (positiv).

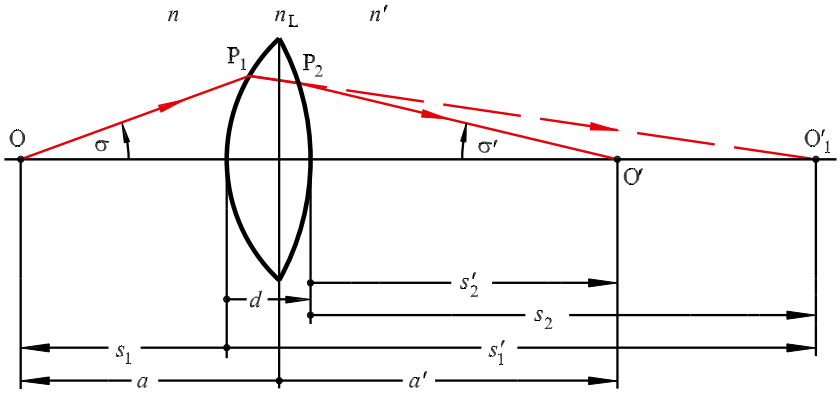


Bild 2.25 Abbildung eines Punktes durch eine sphärische Linse bei unterschiedlichen Brechungsindizes im Bild- und Gegenstandsraum

Ein vom Objektpunkt O ausgehender Lichtstrahl, der die erste brechende Fläche im Punkt P_1 trifft, würde im Bildpunkt O'_1 die optische Achse schneiden, wenn die zweite brechende Fläche nicht vorhanden wäre, d. h., wenn rechts von der Fläche 1 der einheitliche Brechungsindex n_L existierte. Die relativ zum linken Scheitel gemessenen Schnittweiten s_1 und s'_1 sind durch die **Abbe**'sche Invariante (Formel 2.33) verknüpft:

$$n\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right)=n_L\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s'_1}\right) \tag{2.36}$$

In Wahrheit wird der Strahl von der zweiten Fläche im Punkt P_2 noch einmal gebrochen und schneidet dadurch die optische Achse im Bildpunkt O′. Dessen Schnittweite s'_2 vom rechten Scheitel kann wieder aus der **Abbe**'schen Invariante bestimmt werden, wobei jetzt der Punkt O'_1 als virtueller Gegenstandspunkt mit der Schnittweite s_2 vom rechten Scheitel aufgefasst wird:

$$n_L\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)=n'\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s'_2}\right) \tag{2.37}$$

mit

$$s_2=s'_1-d \tag{2.38}$$

Aus Formel 2.36, Formel 2.37 und Formel 2.38 lässt sich die Schnittweite s'_1 eliminieren und eine Beziehung zwischen den Schnittweiten s_1 und s'_2 herstellen:

$$\frac{n_L r_1 s_1}{n r_1+(n_L-n)s_1}=\frac{n_L r_2 s'_2}{n' r_2+(n_L-n')s'_2}+d \tag{2.39}$$

Diese *Schnittweitengleichung* verknüpft die Schnittweiten auf der Gegenstands- und der Bildseite für Linsen mit beliebiger Dicke und beliebigen Krümmungsradien, wobei die Linse von verschiedenen Medien umgeben sein kann. Es soll hier bereits angemerkt werden, dass die Berechnung des Bildortes bei derart allgemeinen Parametern sehr viel einfacher vonstatten geht mit den in Abschnitt 2.7 behandelten Matrixmethoden.

Die unhandliche Schnittweitengleichung wird erheblich vereinfacht, wenn die Linsendicke vernachlässigbar ist, d. h., wenn es sich um eine *dünne Linse* handelt. Für diesen Fall kann nach Bild 2.25 die Schnittweite s_1 ersetzt werden durch die *Gegenstandsweite a*, die aus der Linsenmitte heraus gemessen wird, und die Schnittweite s_2' durch die *Bildweite a'*:

$$d \to 0, \quad s_1 \to a, \quad s_2' \to a'$$

Dadurch reduziert sich Formel 2.39 auf

$$\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n_\mathrm{L} - n}{r_1} - \frac{n_\mathrm{L} - n'}{r_2} \tag{2.40}$$

Sind die Brechungsindizes und die Linsendaten bekannt, dann kann mithilfe von Formel 2.40 für jeden Gegenstandsort der zugehörige Bildort berechnet werden.

Bei seitlich ausgedehnten Objekten kann der Abbildungsmaßstab aus der **Helmholtz-Lagrange**-Invariante (Formel 2.35) berechnet werden:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n\sigma}{n'\sigma'} \tag{2.41}$$

Für paraxiale Strahlen gilt die Näherung $\sigma/\sigma' = a'/a$. Damit wird der Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{na'}{n'a} \tag{2.42}$$

Linse ist beidseitig von Luft umgeben

Für den praktisch am häufigsten vorkommenden Fall, dass die dünne Linse auf beiden Seiten von Luft umgeben wird, vereinfacht sich Formel 2.40 weiter zu

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = (n_\mathrm{L} - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.43}$$

In diesem Fall beträgt der Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \tag{2.44}$$

Brennpunkte

Wenn Strahlen von einem unendlich weit entfernten Gegenstand kommend auf eine Linse treffen, dann verlaufen sie alle parallel. Fällt dieses Lichtbündel parallel zur optischen Achse ein, treffen sich nach Formel 2.43 alle Strahlen in einem Punkt, dem *bildseitigen Brennpunkt* F′ der Linse. Sein Abstand von der Linse ist die *bildseitige Brennweite f′*, für die aus Formel 2.43 folgt

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_\mathrm{L} - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.45}$$

Der Kehrwert der Brennweite wird als *Brechkraft* oder *Brechwert* bezeichnet. Die Maßeinheit der Brechkraft ist die *Dioptrie*: $[D'] = 1\,\mathrm{dpt} = 1\,\mathrm{m}^{-1}$.

Formel 2.45 wird als *Linsenschleiferformel* bezeichnet. Sie zeigt, dass bei gegebenem Material die Brechkraft bzw. Brennweite von den Krümmungsradien der Linsenoberfläche bestimmt wird.

Bei einer *Sammellinse* ist die Brennweite $f' > 0$. Der zugehörige Brennpunkt F′ liegt im Bildraum. Strahlen, die parallel zur optischen Achse auf die Linse fallen, werden im Brennpunkt F′ gesammelt (Bild 2.26). Wie Bild 2.26 illustriert, existiert aus Symmetriegründen auch ein *gegenstandseitiger Brennpunkt* F, der so definiert ist, dass alle Strahlen, die aus ihm kommen, auf der Bildseite zu Parallelstrahlen werden. Die gegenstandseitige Brennweite folgt aus Formel 2.43, wenn die Bildweite $a' = \infty$ gesetzt wird. Demnach sind die beiden Brennweiten betragsmäßig gleich groß:

$$f = -f' \tag{2.46}$$

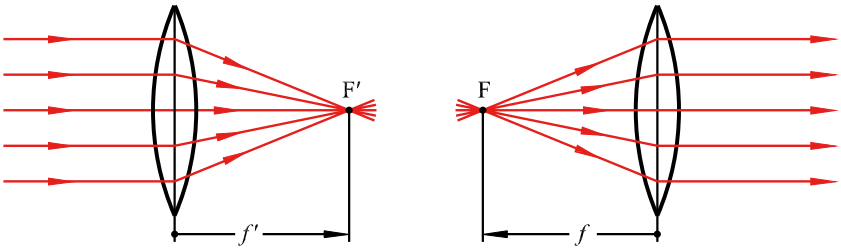


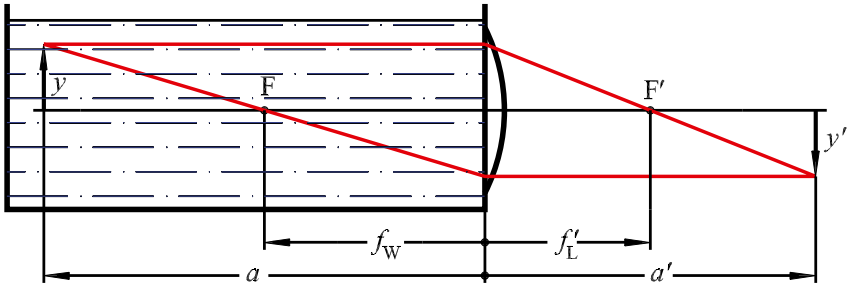
Bild 2.26 Bildseitiger (F′) und gegenstandseitiger (F) Brennpunkt bei einer Sammellinse



Beispiel 2.4

An ein mit Wasser gefülltes Aquarium wird seitlich eine plankonvexe Linse angebracht, die an der Luft die Brennweite $f'_\mathrm{L} = 150\,\mathrm{mm}$ besitzt.

a. Wie groß ist die Brennweite f_W im Wasser?
b. Wo entsteht das Bild eines Fisches, der $a = -400\,\mathrm{mm}$ entfernt von der Linse schwimmt, und wie groß ist der Abbildungsmaßstab?



a. Aus Formel 2.40 folgt mit $n' = 1$ und $a' = \infty$ für die Brennweite $\frac{n_W}{f_W} = \frac{n_L - 1}{r_2}$.
Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der Linsenmacherformel (Formel 2.45) zu $\frac{n_L - 1}{r_2} = -\frac{1}{f'_L}$, woraus schließlich für die gegenstandseitige Brennweite im Wasser folgt $f_W = -n_W f'_L = -1{,}333 \cdot 150\,\text{mm} = -200\,\text{mm}$.

b. Formel 2.40 liefert für die Bildweite

$$\frac{1}{a'} = \frac{n_W}{a} + \frac{1}{f'_L} = 0{,}00333\,\text{mm}^{-1}$$

oder

$$a' = 300\,\text{mm}$$

Der Abbildungsmaßstab beträgt nach Formel 2.42

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n_W a'}{a} = -1$$

Das Bild ist reell, umgekehrt und betragsmäßig so groß wie der Gegenstand.

Bei einer *Zerstreuungslinse* ist die Brennweite $f' < 0$. Der zugehörige Brennpunkt F′ liegt im Gegenstandsraum. Strahlen, die parallel zur optischen Achse auf die Linse fallen, werden hinter der Linse zerstreut; sie scheinen aus dem Brennpunkt F′ zu kommen (Bild 2.27). Hier liegt der gegenstandseitige Brennpunkt F rechts von der Linse. Strahlen, die in Richtung des Brennpunktes F auf die Linse fallen, verlassen sie als paralleles Bündel.

Wie die Linsenmacherformel (Formel 2.45) zeigt, gibt es verschiedene Kombinationen der Krümmungsradien r_1 und r_2, für die entweder eine positive oder eine negative Brennweite f' existiert, d. h. für die sich eine Sammel- oder Zerstreuungslinse ergibt. In Bild 2.28 sind die verschiedenen geometrischen Formen zusammengestellt.

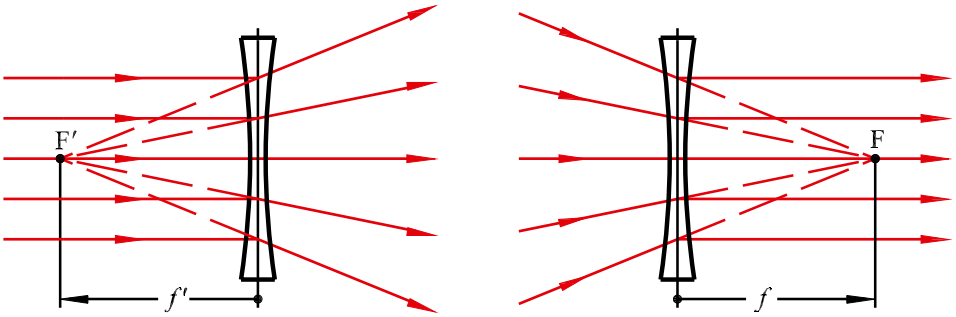


Bild 2.27 Bildseitiger (F′) und gegenstandseitiger (F) Brennpunkt bei einer Zerstreuungslinse

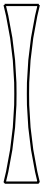
Sammellinsen, $f' > 0$			Zerstreuungslinsen, $f' < 0$		
					
bikonvex	plankonvex	konkav-konvex	bikonkav	plankonkav	konvex-konkav
$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_1 > r_2 > 0$

Bild 2.28 Linsenformen und Bezeichnungen. Die konkav-konvexe Linse wird auch als positiver, die konvex-konkave als negativer Meniskus bezeichnet

Abbildungsgleichungen

Die *Abbildungsgleichung* erhält eine besonders einfache Gestalt, wenn in Formel 2.43 die rechte Seite durch die Brennweite nach Formel 2.45 ausgedrückt wird:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \tag{2.47}$$

Kombiniert man die Abbildungsgleichung (Formel 2.47) mit Formel 2.44 für den Abbildungsmaßstab, so ergibt sich für diesen

$$\beta' = \frac{f'}{a + f'} \tag{2.48}$$

oder

$$\beta' = \frac{f' - a'}{f'} \tag{2.49}$$

Für große Gegenstandsweiten ($|a| \gg f'$) gilt die Näherung

$$\beta' \approx \frac{f'}{a} \tag{2.50}$$

Der Abbildungsmaßstab steigt demnach mit der Brennweite der Linse. Aus diesem Grund hat z. B. ein Teleobjektiv für eine Kamera eine große Brennweite.

Bei der *Newton'schen Abbildungsgleichung* werden Gegenstands- und Bildweite nicht von der Linse aus gemessen, sondern von den jeweiligen Brennpunkten (Bild 2.29). Ersetzt man in der Abbildungsgleichung (Formel 2.47) die Bildweite durch $a' = f' + z'$ und die Gegenstandsweite durch $a = f + z$, dann ergibt sich

$$z\,z' = -f'^2 \tag{2.51}$$

oder

$$z\,z' = f\,f' \tag{2.52}$$

Der Vorteil dieser Abbildungsgleichung liegt darin, dass sie auch bei dicken Linsen und bei Linsensystemen anwendbar ist, da die Entfernungen von Gegenstand und Bild nicht mehr von der Linse aus gemessen werden (Abschnitt 2.7.5).

Für den Abbildungsmaßstab ergibt sich mit den **Newton**'schen Koordinaten direkt aus Bild 2.29 durch Anwendung des Strahlensatzes

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{f'}{z} = -\frac{z'}{f'} \tag{2.53}$$

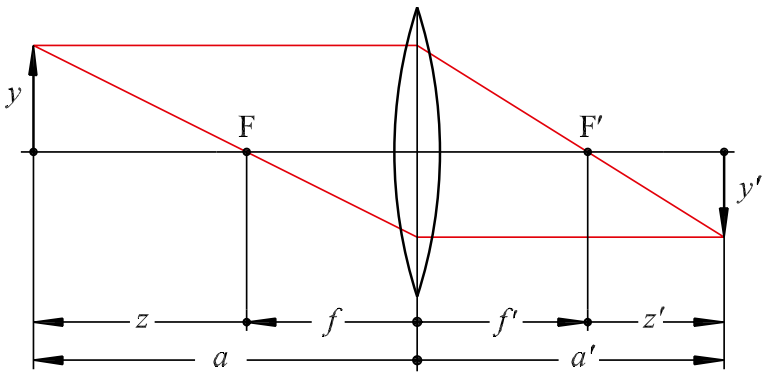


Bild 2.29 Koordinaten für die Anwendung der **Newton**'schen Abbildungsgleichung

Bildkonstruktionen

Das Bild eines durch eine Linse abgebildeten Gegenstandes kann sehr einfach zeichnerisch ermittelt werden. Um das Bild eines Punktes zu finden, genügt es, zwei vom Objektpunkt ausgehende Strahlen zu verfolgen. An ihrem Schnittpunkt liegt der Bildpunkt. Aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften eigenen sich dazu besonders Strahlen, die achsenparallel verlaufen und durch die Brennpunkte gehen (Bild 2.30). Ein weiterer ausgezeichneter Strahl ist einer, der durch die Linsenmitte geht, denn bei einer dünnen Linse, die beidseitig vom gleichen Medium umgeben ist, wird dieser Strahl nicht gebrochen.

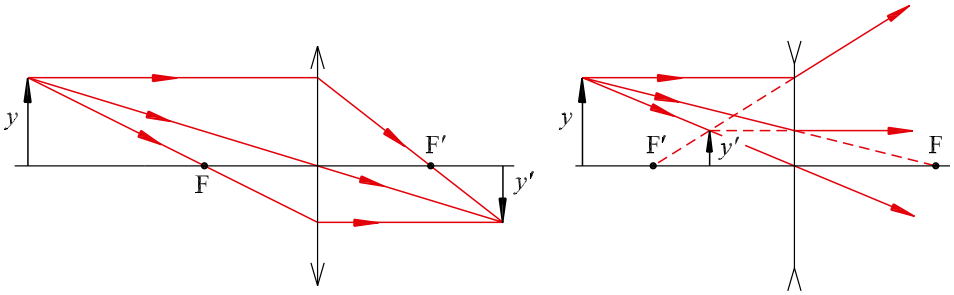


Bild 2.30 Bildkonstruktion bei Sammel- und Zerstreuungslinse. Die Linsenform ist nur noch symbolisch angegeben

Der Zusammenhang zwischen Gegenstands- und Bildweite, der durch die Abbildungsgleichung (Formel 2.47) und Formel 2.51 mathematisch beschrieben wird, ist in Bild 2.31 grafisch dargestellt und in Tabelle 2.5 zusammengefasst. Offenbar liegen alle Bildpunkte der Pfeilspitze auf einer Geraden durch F′ mit der Steigung $-y/f'$. Während das Bild bei der Sammellinse reell oder virtuell sein kann und damit kopfstehend oder aufrecht, ist es bei der Zerstreuungslinse stets virtuell und aufrecht. Ein virtuelles Bild kann nicht auf einer Mattscheibe aufgefangen werden. Trotzdem ist es möglicherweise sichtbar für den Betrachter, wenn die Augenlinse imstande ist, die divergierenden Strahlen auf der Netzhaut des Auges wieder zu vereinigen.

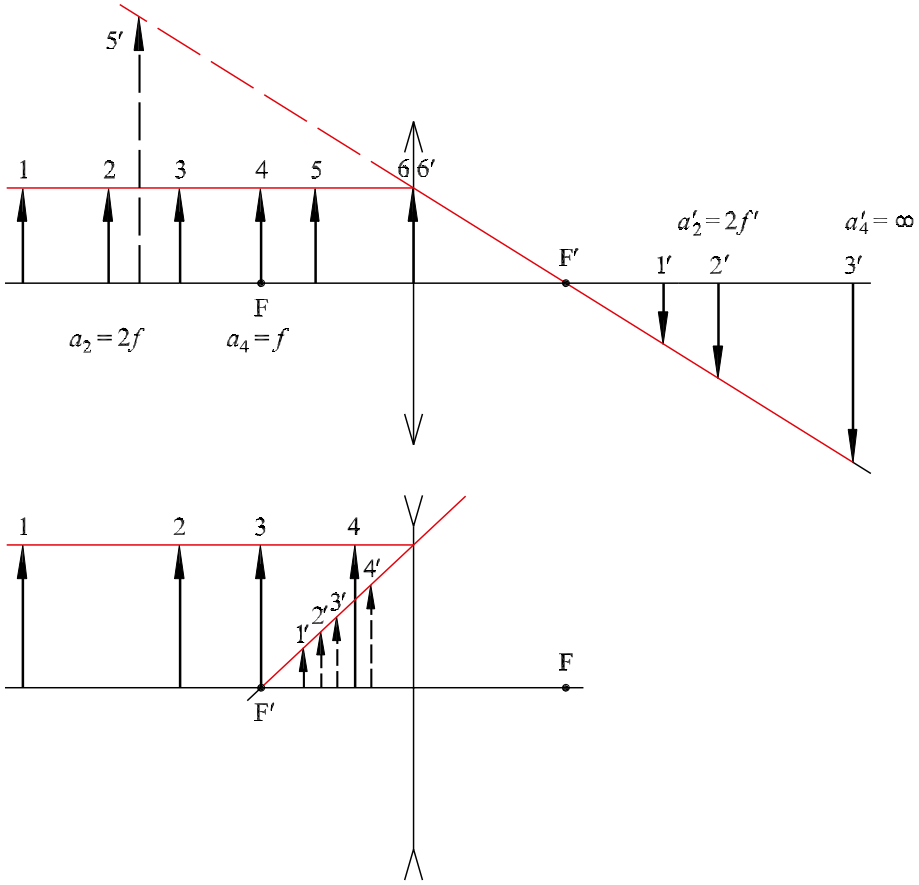


Bild 2.31 Zuordnung von Gegenstandsweite zu Bildweite bei der Sammellinse und Zerstreuungslinse

Tabelle 2.5 Abbildungsverhältnisse an dünnen Linsen, die Nummer bezieht sich auf Bild 2.31

Nr.	Objektweite	Bildweite	Eigenschaften
Sammellinsen, $f' > 0$			
1	$2f' < -a < \infty$	$f' < a' < 2f'$	reell, umgekehrt, verkleinert
2	$-a = 2f'$	$a' = 2f'$	reell, umgekehrt, gleich groß
3	$f' < -a < 2f'$	$2f' < a' < \infty$	reell, umgekehrt, vergrößert
4	$-a = f'$	$a' = \infty$	kein Bild im Endlichen
5	$0 < -a < f'$	$a' < 0$	virtuell, aufrecht, vergrößert
6	$a = 0$	$a' = 0$	virtuell, aufrecht, gleich groß

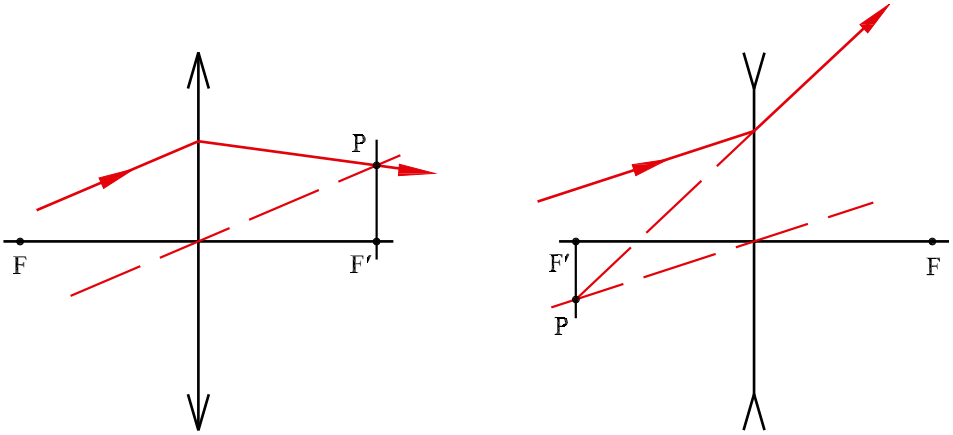
Nr.	Objektweite	Bildweite	Eigenschaften
Zerstreuungslinsen, $f' < 0$			
1 bis 4	alle	$f' < a' < 0$	virtuell, aufrecht, verkleinert



Beispiel 2.5

Ein willkürlich auf eine Sammel- bzw. Zerstreuungslinse fallender Strahl ist konstruktiv weiter zu verfolgen.

Wenn parallel zu dem betreffenden Strahl ein Konstruktionsstrahl durch die Linsenmitte gezeichnet wird, entspricht dies zwei Strahlen, die von einem unendlich entfernten Gegenstand herkommen. Diese Parallelstrahlen müssen sich aber laut Abbildungsgleichung (Formel 2.47) in der bildseitigen Brennebene treffen. Daher wird die Brennebene von F′ zum Schnitt gebracht mit dem Konstruktionsstrahl durch die Linsenmitte. Durch den Schnittpunkt P muss der ursprüngliche Strahl ebenfalls gehen.



Systeme mehrerer Linsen

Sind mehrere Linsen eines optischen Systems hintereinander auf derselben optischen Achse angeordnet, dann dient jeweils das Bild, das eine Linse entwirft, für die nächstfolgende Linse als Gegenstand. So kann sukzessive das komplette System durchgerechnet werden. Bei mehreren Linsen kann das sehr schnell relativ unübersichtlich und langwierig werden. Wesentlich eleganter geht das Durchrechnen einer Linsenfolge mit der in Abschnitt 2.7 besprochenen Matrixmethode. In Beispiel 2.6 soll exemplarisch der Fall von zwei Linsen behandelt werden.

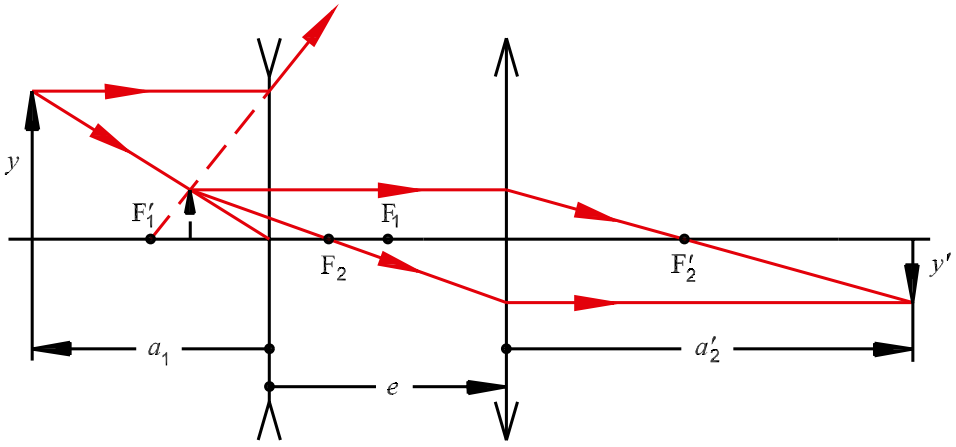
Beispiel 2.6

Eine Zerstreuungslinse der Brennweite $f_1' = -2\,\text{cm}$ und eine Sammellinse der Brennweite $f_2' = 3\,\text{cm}$ sind im Abstand $e = 4\,\text{cm}$ angeordnet. Ein Gegenstand steht $a_1 = -4\,\text{cm}$ vor der ersten Linse. Wo entsteht sein Bild und wie groß ist der Abbildungsmaßstab?

Die Abbildungsgleichung (Formel 2.47) liefert für die erste Abbildung die Bildweite $a_1' = -1{,}33\,\text{cm}$. Der Abbildungsmaßstab ist $\beta_1' = \frac{y_1'}{y} = \frac{a_1'}{a_1} = \frac{1}{3}$. Das Bild ist aufrecht und virtuell.

Die Gegenstandsweite für die zweite Linse beträgt $a_2 = -e + a_1' = -5{,}33\,\text{cm}$. Die zugehörige Bildweite wird damit $a_2' = 6{,}86\,\text{cm}$ mit dem Abbildungsmaßstab $\beta_2' = \frac{y'}{y_1'} = \frac{a_2'}{a_2} = -1{,}29$. Das Bild ist umgekehrt und reell.

Der komplette Abbildungsmaßstab beträgt $\beta' = \frac{y'}{y} = \beta_1' \cdot \beta_2' = -0{,}43$.



2.6.2 Dicke Linsen

Wenn die Linsendicke d nicht mehr vernachlässigbar ist, müssen die in Abschnitt 2.6.1 gewonnenen Beziehungen etwas modifiziert werden. Bild 2.32 zeigt, dass ein Strahl, der von links her achsenparallel auf die Linse fällt, an der ersten Kugelfläche gebrochen wird und nach Durchlaufen der Linse an der zweiten Oberfläche, bis er schließlich im Brennpunkt F′ die optische Achse schneidet. In gleicher Weise kann man einen von rechts kommenden Strahl verfolgen, der nach zweimaliger Brechung im Brennpunkt F die optische Achse schneidet.

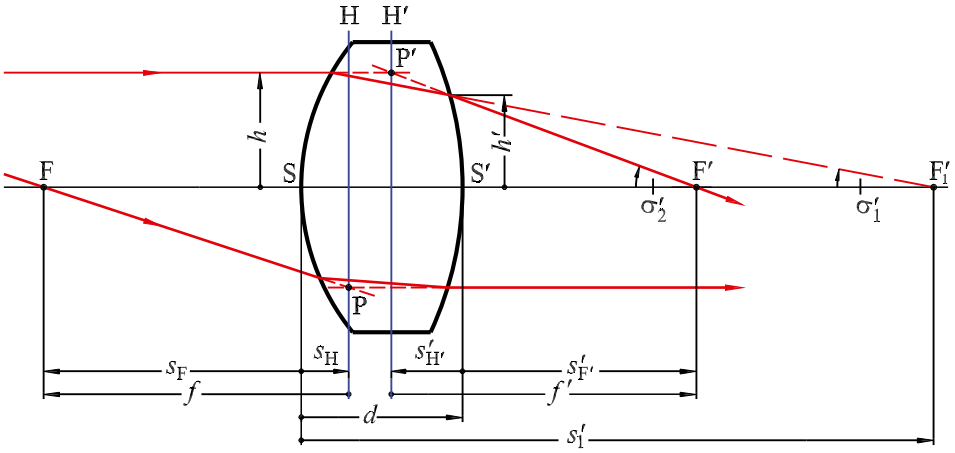


Bild 2.32 Lage der Brennpunkte und der Hauptebenen bei einer dicken Linse

Die Schnittweite $s'_{F'}$, d. h., der Abstand des Brennpunktes F′ vom Scheitel S′ kann aus der Schnittweitengleichung (Formel 2.39) berechnet werden, wenn $s_1 = -\infty$ gesetzt wird. Ebenfalls ergibt sich die Schnittweite s_F zum Brennpunkt F, indem die Bildweite $s'_2 = \infty$ gesetzt wird. Für den Fall, dass die Linse beidseitig von Luft ($n = n' = 1$) umgeben wird, folgt für die beiden Schnittweiten

$$s'_{F'} = r_2 \frac{n_L r_1 - (n_L - 1)d}{(n_L - 1)[n_L(r_2 - r_1) + (n_L - 1)d]} \tag{2.54}$$

und

$$s_F = -r_1 \frac{n_L r_2 + (n_L - 1)d}{(n_L - 1)[n_L(r_2 - r_1) + (n_L - 1)d]} \tag{2.55}$$

Nun ist der Strahlenverlauf im Innern der Linse im Grunde völlig uninteressant. Im Außenraum scheint der Strahl, der die rechte Linsenoberfläche verlässt und durch den Brennpunkt F′ geht, aus dem Punkt P′ zu kommen. Dieser Punkt entsteht durch Verlängerung des achsenparallelen und des aus der Linse austretenden Strahls. Der Schnittpunkt definiert die Lage der *bildseitigen Hauptebene* H′. Da die Lage dieser Hauptebene einfach berechnet werden kann, ist folgende Konstruktion möglich: Ein von links kommender achsenparalleler Strahl wird gezeichnet bis zum Schnittpunkt mit der Hauptebene H′ und von dort aus zum Brennpunkt F′. Auf dieselbe Weise wird mit der Gegenstandseite verfahren: Ein Strahl, der durch den gegenstandseitigen Brennpunkt geht, wird verlängert bis zum Schnittpunkt mit der *gegenstandseitigen Hauptebene* H. Von dort aus läuft er achsenparallel weiter.

Die Lagen der Hauptebenen und die Brennweite der dicken Linse werden folgendermaßen berechnet. Nach Bild 2.32 gilt für paraxiale Strahlen für den Tangens des Winkels σ_2': $\tan\sigma_2' = h'/s_{F'}' = h/f'$. Damit ist die Brennweite

$$f' = \frac{h}{h'} s_{F'}' \tag{2.56}$$

Für den Winkel σ_1' folgt: $\tan\sigma_1' = -h'/(s_1' - d) = -h/s_1'$ oder

$$\frac{h}{h'} = \frac{s_1'}{s_1' - d} \tag{2.57}$$

Wird Formel 2.57 in Formel 2.56 eingesetzt, ergibt sich für die Brennweite

$$f' = \frac{s_1'}{s_1' - d} s_{F'}'$$

Die Schnittweite s_1' lässt sich aus der **Abbe**'schen Invariante (Formel 2.33), angewandt auf die linke Fläche, berechnen:

$$s_1' = \frac{n_L}{n_L - 1} r_1$$

Damit erhält man die Brechkraft der dicken Linse:

$$\frac{1}{f'} = D' = (n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n_L - 1)^2}{n_L} \cdot \frac{d}{r_1 r_2} \tag{2.58}$$

Das erste Glied ist bereits bekannt von der Linsenmachergleichung (Formel 2.45) für dünne Linsen. Das zweite Glied berücksichtigt die Linsendicke und ist offensichtlich vernachlässigbar, wenn diese gegen null geht. Die Brennweite selbst folgt aus (Formel 2.58) durch Bildung des Kehrwertes:

$$f' = \frac{n_L}{n_L - 1} \cdot \frac{r_1 r_2}{n_L(r_2 - r_1) + (n_L - 1)d} \tag{2.59}$$

Die gegenstandseitige Brennweite f wird nach dem gleichen Schema berechnet, wobei sich ergibt, dass sie betragsmäßig denselben Wert hat wie die bildseitige: $f = -f'$.

Bei bekannter Brennweite lassen sich die beiden Schnittweiten $s_{F'}'$ und s_F einfacher berechnen, als in Formel 2.54 angegeben. Wird Formel 2.59 in Formel 2.54 eingesetzt, so folgt

$$s_{F'}' = f'\left(1 - \frac{n_L - 1}{n_L} \cdot \frac{d}{r_1}\right) \tag{2.60}$$

und

$$s_F = -f'\left(1 + \frac{n_L - 1}{n_L} \cdot \frac{d}{r_2}\right) \tag{2.61}$$

Die Abstände der Hauptebenen H′ und H folgen schließlich durch Differenzbildung:

$$s'_{H'} = s'_{F'} - f' = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \cdot \frac{d}{r_1} \tag{2.62}$$

und

$$s_H = s_F - f = s_F + f' = -f' \frac{n_L - 1}{n_L} \cdot \frac{d}{r_2} \tag{2.63}$$

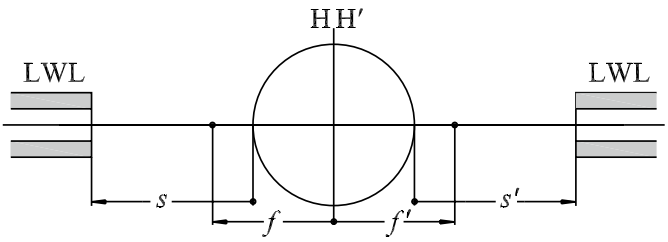
Beispiel 2.7

Eine kleine Glaskugel mit Brechungsindex $n_L = 1{,}5$ und Radius 1 mm wird als Mikrolinse verwendet. Wie groß ist die Brennweite der Linse? Wo liegen ihre Hauptebenen und die Brennpunkte? In welchem Abstand von der Kugeloberfläche müssen zwei Lichtwellenleiter angeordnet werden, damit das Licht vom ersten 1:1 in den zweiten eingekoppelt wird?

Die Orte der Hauptebenen folgen aus Formel 2.62 zu $s'_{H'} = -r$ und $s_H = +r$. Damit liegen beide Hauptebenen aufeinander in der Mitte der Kugel.

Für eine 1:1-Abbildung muss die Gegenstandsweite $a = -2f'$ sein und die Bildweite $a' = 2f'$ (Bild 2.31). Die Abstände zum LWL sind damit $-s = s' = 2\,\text{mm}$.

Mit $r_1 = r$ und $r_2 = -r$ ergibt sich nach Formel 2.59 $f' = \frac{n_L}{n_L - 1} \cdot \frac{r}{2} = 1{,}5\,\text{mm}$.



Die Lage der Hauptebenen relativ zu den Begrenzungsflächen der Linse hängt von der Geometrie und dem Brechungsindex ab. Bild 2.33 präsentiert einige Beispiele.

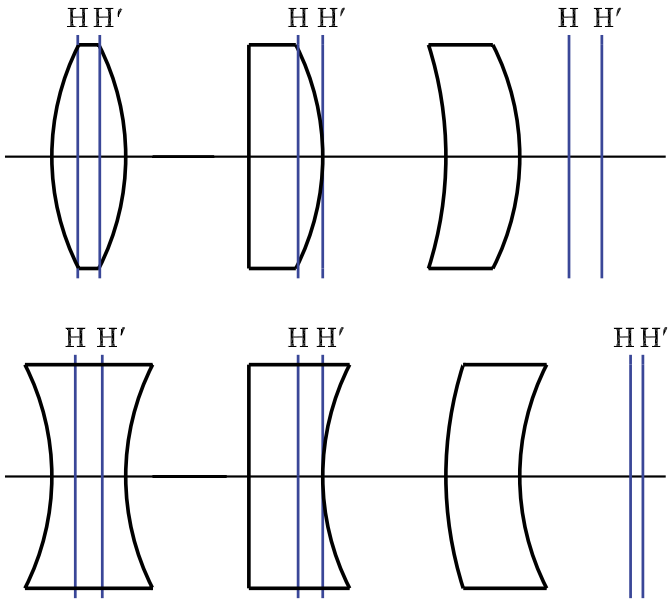


Bild 2.33 Lage der Hauptebenen bei verschiedenen Linsen. Die Bilder wurden gezeichnet für $n_L = 1{,}5$ und $d/|r_2| = 0{,}3$. Bei den Menisken ist $r_1/r_2 = 1{,}5$

Wenn die Brennweite und die Lage der Hauptebenen einer dicken Linse bekannt sind, kann die Abbildung eines Gegenstandes nach Bild 2.34 zeichnerisch ermittelt werden. Wie bereits in Bild 2.30 für die dünne Linse erläutert, werden achsenparallele Strahlen und Strahlen durch die Brennpunkte herangezogen. Der bei der dünnen Linse verwendete Mittelpunktstrahl wird in zwei parallele Strahlen aufgeteilt, die zu den Schnittpunkten der Hauptebenen mit der optischen Achse gehen. Diese Schnittpunkte werden auch als *Hauptpunkte* bezeichnet.

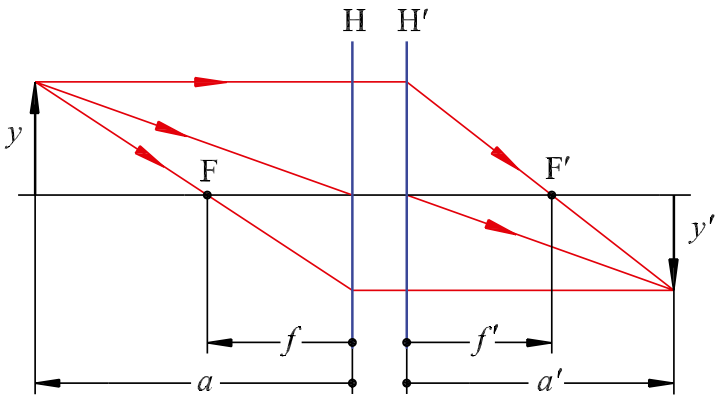


Bild 2.34 Zuordnung von Gegenstandsweite und Bildweite sowie zeichnerische Bildkonstruktion bei der dicken Linse an Luft

Die *Abbildungsgleichung* (Formel 2.47), $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$ gilt auch bei dicken Linsen, wenn gemäß Bild 2.34 Gegenstands- und Bildweite von den zugehörigen Hauptebenen gemessen werden. Ebenfalls wird der *Abbildungsmaßstab* nach Formel 2.44 berechnet, $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$, wie man leicht aus Bild 2.34 durch Anwendung des Strahlensatzes zeigen kann.

Befindet sich ein Gegenstand am Ort der Hauptebene H, d. h., $a = 0$, so folgt aus der Abbildungsgleichung, dass die Bildweite ebenfalls null wird: $a' = 0$. Also liegt das Bild auf der Hauptebene H′. Daraus lässt sich folgende Definition für die Hauptebenen formulieren (DIN 1335):

Die Hauptebenen H und H′ sind dasjenige konjugierte Ebenenpaar, für welches der Abbildungsmaßstab $\beta' = +1$ ist.

Für dünne Linsen, wo die Hauptebenen in der Linsenebene zusammenfallen, ist dieser Zusammenhang in Bild 2.31 und Tabelle 2.5 dargestellt.

Beispiel 2.8

Eine bikonvexe Linse hat die Krümmungsradien 50 mm und die Dicke 20 mm. Der Brechungsindex des Glases ist 1,5. Wie groß ist die Brennweite? Wo liegen die Hauptebenen und die Brennpunkte? Im Abstand $s_O = -80$ mm vom linken Scheitel steht ein Gegenstand. In welchem Abstand vom rechten Scheitel entsteht sein Bild und wie groß ist der Abbildungsmaßstab?

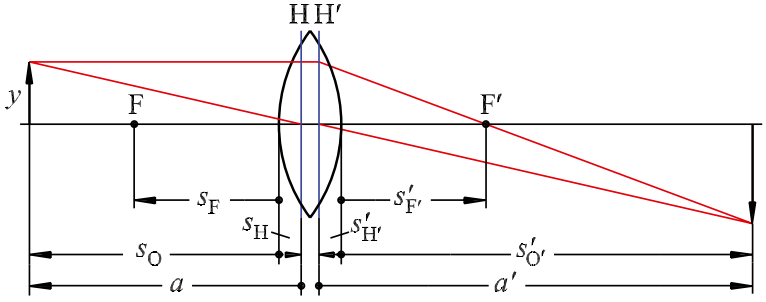
Nach Formel 2.58 wird die Brechkraft der Linse $D' = 18{,}7$ dpt und die Brennweite $f' = 53{,}57$ mm.

Die Schnittweiten der Hauptebenen betragen nach Formel 2.62 $s'_{H'} = -7{,}14\,\text{mm}$ und $s_H = +7{,}14$ mm.

Die Schnittweiten der Brennpunkte sind $s'_{F'} = 46{,}4\,\text{mm}$ und $s_F = -46{,}4$ mm.

Die Gegenstandsweite des Objekts beträgt $a = s_O - s_H = -87{,}14$ mm. Mithilfe der Abbildungsgleichung (Formel 2.47) folgt für die Bildweite $a' = 139$ mm. Die Schnittweite des Bildes beträgt somit $s'_{O'} = a' + s'_{H'} = 132\,\text{mm}$.

Der Abbildungsmaßstab ist nach Formel 2.44 $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -1{,}6$. Das Bild ist reell, kopfstehend und vergrößert.

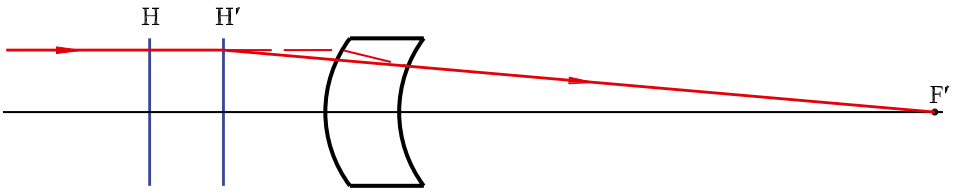


Beispiel 2.9

Der *Hoegh'sche Meniskus* ist eine Meniskuslinse mit $r_1 = r_2 = r$. Er ist für optische Abbildungen interessant, weil bei ihm der Abbildungsfehler *Bildfeldkrümmung* in erster Näherung nicht auftritt.

Wovon hängt die Brechkraft des **Hoegh**'schen Meniskus ab und wo liegen die Hauptebenen? Wie verläuft ein achsenparallel einfallender Strahl? Welche Werte ergeben sich für $n_L = 1{,}7$, $r = 50\,\text{mm}$ und $d = 30\,\text{mm}$?

Nach Formel 2.58 beträgt die Brechkraft $D' = \frac{1}{f'} = \frac{(n_L-1)^2}{n_L} \cdot \frac{d}{r^2} = 3{,}46\,\text{dpt}$; sie ist proportional zur Dicke des Meniskus. Die Schnittweiten der Hauptebenen betragen nach Formel 2.62 $s'_{H'} = s_H = -f' \frac{n_L-1}{n_L} \frac{d}{r} = -\frac{r}{n_L-1} = -71{,}4\,\text{mm}$. Die beiden Hauptebenen sind demnach von ihren zugeordneten Scheiteln gleich weit entfernt.



Ein achsenparallel einfallender Strahl wird bis zur Hauptebene H′ gezeichnet und von dort weiter durch den Brennpunkt F′. Der wahre Strahlengang ist gestrichelt dargestellt.

Brennweitenbestimmung nach Bessel

Die Brennweite sowohl einer dünnen als auch einer dicken Linse kann experimentell bestimmt werden, ohne dass man etwa vom Linsenrand aus eine Entfernung messen muss. Zu diesem Zweck wird ein beleuchteter Gegenstand im Abstand $l > 4f'$ auf eine optische Bank montiert (Bild 2.35). Mit einer verschiebbaren Sammellinse können für genau zwei Orte scharfe Abbildungen des Gegenstandes auf der Mattscheibe erreicht werden.

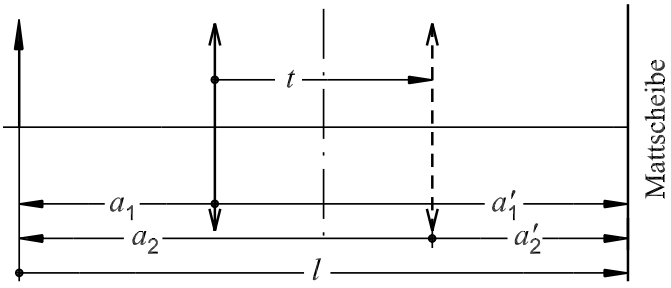


Bild 2.35 Anordnung zur Bestimmung der Brennweite nach **Bessel**

Die beiden Gegenstandsweiten folgen aus der Abbildungsgleichung (Formel 2.47), $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$, mit der Nebenbedingung $-a + a' = l$.
Die Auflösung einer quadratischen Gleichung liefert

$$-a_{1,2} = \frac{l}{2} \mp \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,f'}$$

Das bedeutet, dass die beiden möglichen Gegenstandsweiten und damit Linsenstellungen symmetrisch um die Mittellinie ($l/2$) im Abstand

$$t = 2\sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,f'}$$

angeordnet sind. Die gesuchte Brennweite ergibt sich hieraus zu

$$f' = \frac{l^2 - t^2}{4l} \tag{2.64}$$

Naturgemäß können mit dem Bessel-Verfahren nur von Sammellinsen die Brennweiten bestimmt werden. Will man es auf eine Zerstreuungslinse anwenden, so muss man sie zusammen mit einer stärker brechenden Sammellinse ausmessen und dann rechnerisch die Brechkraft der Zerstreuungslinse ermitteln (Abschnitt 2.6.6).

Ein Ergebnis der oben stehenden quadratischen Gleichung ist auch folgende, gelegentlich als *4-f-Regel* bezeichnete Voraussetzung:



Eine reelle Abbildung mittels einer Sammellinse ist nur möglich, wenn der Abstand zwischen Objekt und Bild mindestens das Vierfache der Brennweite beträgt: $l \geq 4f'$.

2.6.3 Fresnel-Linsen

Wenn Linsen mit großer Öffnung benötigt werden, was beispielsweise in der Beleuchtungstechnik häufig der Fall ist, dann werden die Linsen mit großen Durchmessern sehr dick und schwer. Dies kann umgangen werden, wenn nach dem Muster von Bild 2.36 eine *Fresnel-Linse* erzeugt wird. Dabei wird die Linse in konzentrische Ringe unterteilt, die etwa die gleiche Dicke besitzen.

An den störenden Flanken der Übergänge zwischen den Ringen wird das Licht mehr oder weniger unkontrolliert gestreut. Daher werden **Fresnel**-Linsen nicht für optische Abbildungen verwendet, sondern ausschließlich in der Beleuchtungstechnik, wie z. B. als Scheinwerferlinsen im Kraftfahrzeug oder bei der Bühnenbeleuchtung. Diese Linsen werden in der Regel aus Glas gefertigt.

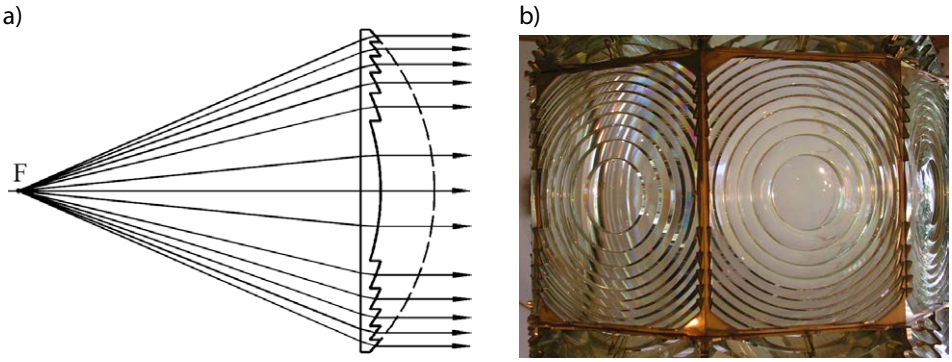


Bild 2.36 **Fresnel**-Linsen; a) Prinzip, b) Linsen in einem Leuchtturm

Fresnel-Linsen, wie sie beispielsweise in der Beleuchtungseinheit von Overhead-Projektoren eingesetzt werden, bestehen aus Kunststoff und sind sehr fein gestuft mit Stufenbreiten von etwa 0,1 mm bis 0,5 mm. Hier sind die wirksamen Flächen nicht als Kugelflächen wie in Bild 2.36 ausgeführt, sondern als Kegel. Im Schnitt sehen sie aus wie Ablenkprismen, deren brechender Winkel α von innen nach außen zunimmt (Bild 2.37).

Soll ein paralleles Strahlenbündel entstehen, wie in Bild 2.36 und Bild 2.37 a), dann folgt aus Formel 2.23 mit $-\delta = \sigma_1'$ für den Ablenkwinkel an einem Prisma der erforderliche Keilwinkel α aus

$$\tan\,\alpha = \frac{\sin\sigma_1'}{\sqrt{n^2 - \sin^2\,\sigma_1'} - 1} \tag{2.65}$$

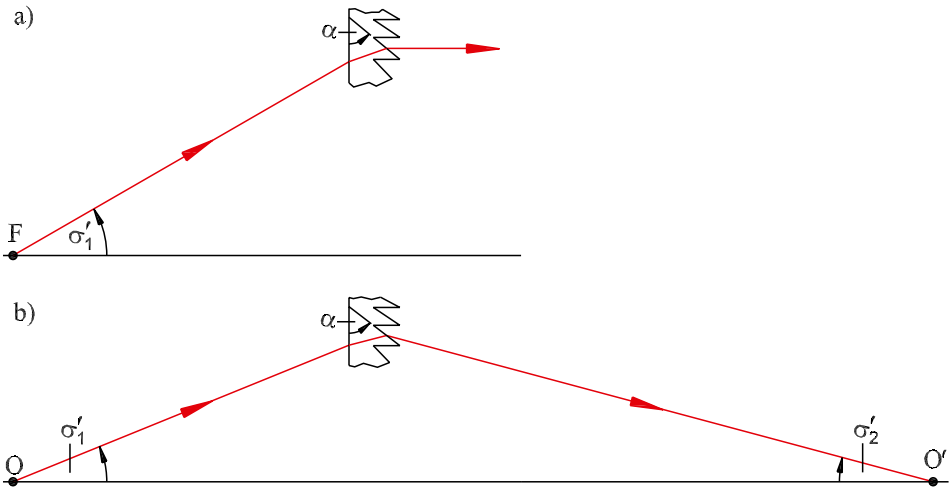


Bild 2.37 Zur Berechnung des Keilwinkels bei Stufenlinsen; a) Erzeugung eines parallelen Strahlenbündels, b) Abbildung eines Objektpunkts O in einen Bildpunkt O′

Soll der Strahl nicht parallel zur optischen Achse die Ablenkstufe verlassen, sondern unter dem Winkel σ_2' die optische Achse schneiden (Bild 2.37 b), so liefert Formel 2.23 mit $-\delta = \sigma_1' - \sigma_2'$ für den erforderlichen Keilwinkel

$$\tan\ \alpha = \frac{\sin\ \sigma_1' - \sin \sigma_2'}{\sqrt{n^2 - \sin^2\ \sigma_1'} - \cos\ \sigma_2'} \tag{2.66}$$

2.6.4 GRIN-Linsen

GRIN-Linsen (**Gr**aded **In**dex), auch bekannt unter dem Handelsnamen SELFOC-Linsen, sind kleine Glasstäbchen mit einigen Millimetern Durchmesser und Länge, bei denen der Brechungsindex von innen nach außen kontinuierlich abnimmt, wie bei der in Bild 2.17 b) dargestellten Gradientenfaser. Die Variation des Brechungsindex wird erreicht durch Ionenaustausch, indem aus einer das Glas umgebenden Salzschmelze Ionen in das Glas diffundieren und solche des Glases ersetzen. Beispielsweise werden Na-Ionen durch Li- oder Ag-Ionen ersetzt, wodurch sich ein anderer Brechungsindex ergibt.

Nimmt wie in Bild 2.38 die Brechzahl von innen nach außen ab, so verläuft ein Strahl auf einer gekrümmten Kurve, deren Verlauf aus der Invariante der Brechung, Formel 2.14, berechnet werden kann. Danach gilt, dass das Produkt aus Brechzahl und Sinus des Winkels gegen das Lot eine Konstante ist:

$$n(r) \cdot \sin \varepsilon(r) = n(r + \mathrm{d}r) \cdot \sin \varepsilon(r + \mathrm{d}r)$$

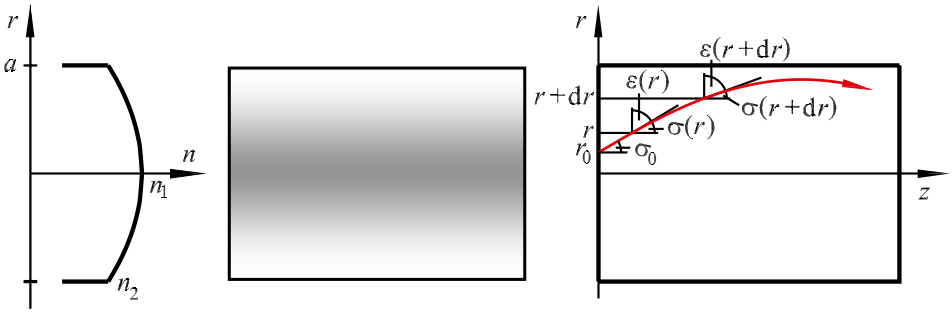


Bild 2.38 Verlauf des Brechungsindex und eines Lichtstrahls in einer GRIN-Linse

Der Übergang auf die Ergänzungswinkel zu 90° ergibt

$$n(r) \cdot \cos \sigma(r) = n(r + \mathrm{d}r) \cdot \cos \sigma(r + \mathrm{d}r)$$

Die rechte Seite kann in eine **Taylor**-Reihe entwickelt werden. Werden Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, folgt die lineare Beziehung

$$n\cos\sigma \approx n\cos\sigma - n\sin\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r + \cos\sigma\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r$$

oder

$$n\tan\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$$

Der Tangens des Winkels entspricht der Ableitung der Kurve: $\tan\sigma = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}z)$. Damit ergibt sich die Beziehung $n\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$, die sich durch Anwendung der Kettenregel $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ vereinfachen lässt zu $n\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$

Mit der paraxialen Näherung $\sigma \approx \tan\sigma = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}$ folgt schließlich die Differenzialgleichung der Strahlkurve

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} \tag{2.67}$$

Hat das Brechzahlprofil einen parabolischen Verlauf, dann wird es üblicherweise beschrieben durch

$$n(r) = n_1\left(1 - \Delta\frac{r^2}{a^2}\right) \tag{2.68}$$

mit der relativen Brechzahldifferenz $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$.

Mit der Ableitung $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\Delta n_1}{a^2}r$ und $n(r) \approx n_1$ wird die Differenzialgleichung der Strahlkurve

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2} + \frac{2\Delta}{a^2}r = 0 \tag{2.69}$$

die durch die harmonische Funktion

$$r(z) = r_0\,\cos\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\cdot z\right) + \frac{\sigma_0 a}{\sqrt{2\Delta}}\sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\cdot z\right) \tag{2.70}$$

gelöst wird. Die Parameter r_0 und σ_0 sind durch die Randbedingungen bei $z = 0$ gegeben (Bild 2.38).

Die Periodenlänge (*Pitch Length*) ist im Rahmen der gemachten Näherungen für alle Strahlwege gleich (Bild 2.17 b) und beträgt

$$p = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}} \tag{2.71}$$

In Bild 2.39 sind einige Strahlwege für GRIN-Linsen der Länge $p/4$ und $p/2$ dargestellt. Fallen Strahlen außerhalb der optischen Achse schief auf die Linsenstirnfläche, dann verlaufen sie im Innern des Stäbchens auf Schraubenlinien mit elliptischem Querschnitt (*Skew Rays*). Die Pitch-Länge für diese Strahlen ist ebenfalls durch Formel 2.57 gegeben.

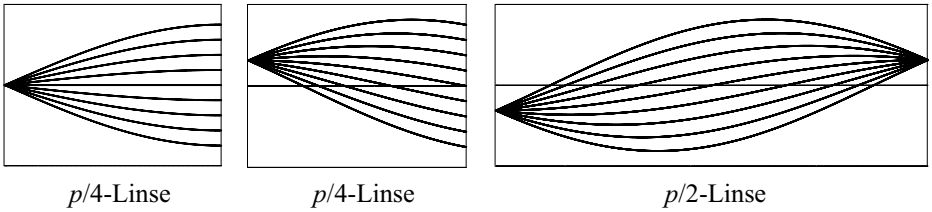


Bild 2.39 Strahlformen in GRIN-Linsen mit verschiedenen Pitch-Längen

GRIN-Linsen sind in Laserdruckern, Kopierern, Faxgeräten, Endoskopen u. v. m. eingebaut. Sie sind sehr klein (Mikrolinsen) und haben wegen ihrer ebenen Endflächen eine sehr günstige Geometrie. Große GRIN-Linsen sind andererseits nicht herstellbar. Wenn der Brechungsindex von innen nach außen zunimmt, entsteht eine Zerstreuungslinse. Bild 2.40 zeigt schematisch einige Anwendungsbeispiele.

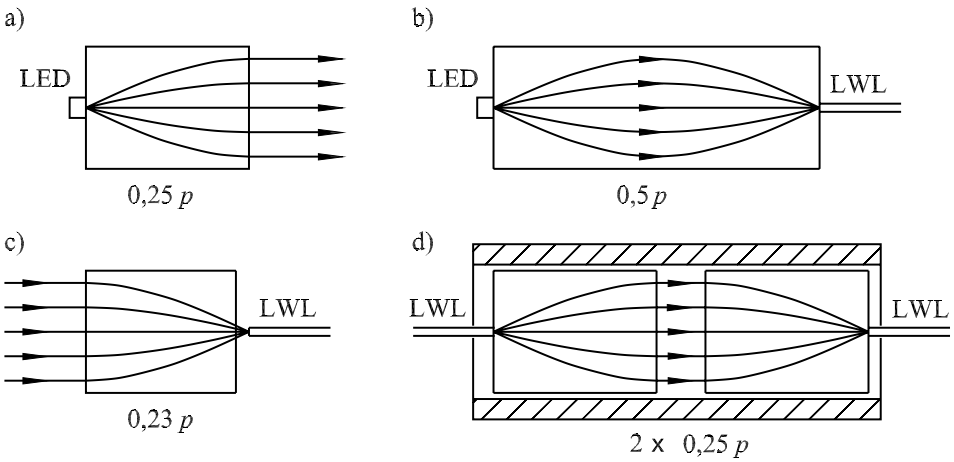
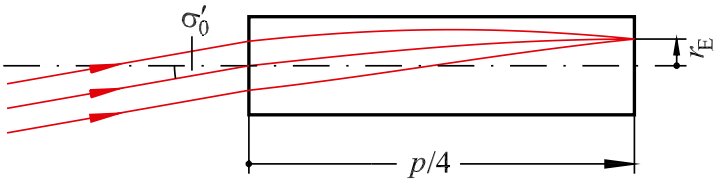


Bild 2.40 Anwendungsbeispiele für GRIN-Linsen; a) Transformation des Strahlenbüschels einer LED in einen Parallelstrahl, b) Einkoppelung der LED-Strahlung in einen Lichtwellenleiter, c) Einkoppelung in einen Lichtwellenleiter, der nicht direkt auf der GRIN-Endfläche sitzt, d) Kopplung zweier Lichtwellenleiter

Beispiel 2.10

Auf eine $p/4$-GRIN-Linse fällt ein paralleles Strahlenbündel unter dem Winkel $\sigma_0' = 10^\circ$ relativ zur optischen Achse. Wie lang ist die Linse? In welchem Abstand r_E von der optischen Achse liegt der Bildpunkt aller Strahlen auf der Endfläche des Stäbchens?

Der Brechungsindex des Glases ist $n \approx n_1 = 1{,}6$; die relative Brechzahldifferenz beträgt $\Delta = 2\,\%$; der Radius des Stäbchens ist $a = 1\,\text{mm}$.



Die Periodenlänge ist nach Formel 2.57 $p = 2\pi\, a/\sqrt{2\Delta} = 31{,}4\,\text{mm}$; daher ist die Länge des GRIN-Stäbchens 7,85 mm.

Das Strahlenbündel erfährt an der Stirnfläche der Linse eine Brechung. Der Winkel σ_0 im Innern beträgt nach dem Brechungsgesetz $\sigma_0 = \arcsin\left(\sin\sigma_0'/n\right) = 6{,}23^\circ = 0{,}109\,\text{rad}$. Aus Formel 2.56 folgt für die Auslenkung der Lichtstrahlen auf der Endfläche

$$r_E = r\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\sigma_0}{2\,\pi}\cdot p = 0{,}543\,\text{mm}$$

2.6.5 Linsen mit torischen Flächen

Torische Flächen sind asphärische Flächen, die dadurch entstehen, dass ein Kreisbogen mit Radius r_M um eine in der Ebene des Kreisbogens liegende Achse rotiert, wobei der Rotationsradius r_S von r_M verschieden ist (Bild 2.41). Die am häufigsten eingesetzte torische Linse ist die Zylinderlinse, die relativ einfach herzustellen ist.

Infolge der unterschiedlichen Krümmungen im *Meridianschnitt* und dem darauf senkrecht stehenden *Sagittalschnitt* hat gemäß Linsenmachergleichung (Formel 2.45) die Linse in diesen beiden Richtungen verschiedene Brennweiten f_M' und f_S'. Beispielsweise fokussiert die in Bild 2.42 dargestellte Zylinderlinse das Licht nur im Sagittalschnitt, während im Meridianschnitt die Strahlen die Linse ungebrochen durchsetzen. Die Folge ist, dass die Linse keinen Brennpunkt, sondern eine *Brennlinie* erzeugt.

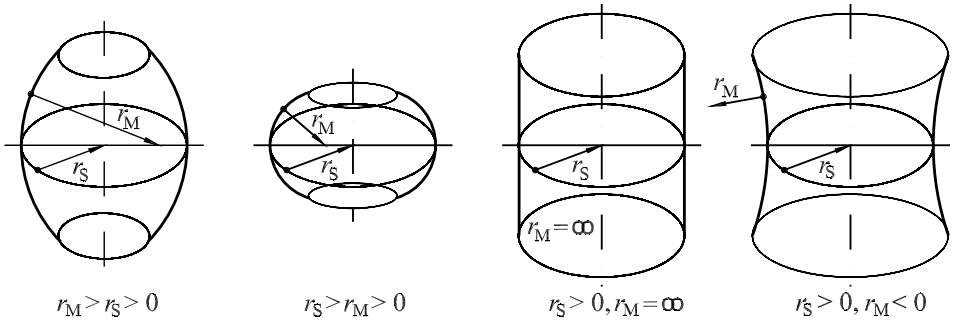


Bild 2.41 Torische Flächen. Für $r_M = \infty$ entsteht eine Zylinderlinse; haben r_M und r_S unterschiedliche Vorzeichen, so entsteht eine Sattellinse; die sphärische Linse entspricht dem Spezialfall $r_M = r_S$

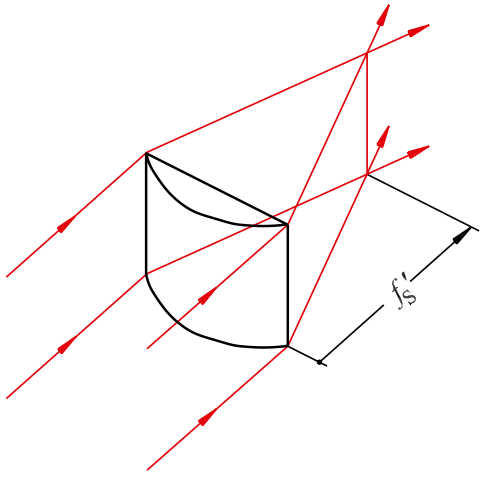


Bild 2.42
Ausbildung einer Brennlinie bei einer Zylinderlinse

Bei einer torischen Sammellinse mit $r_M \neq r_S$ wird ein Punkt nicht als Punkt abgebildet, sondern es entstehen zwei um 90° gegeneinander verdrehte Striche. Dieser Effekt wird als *Astigmatismus* bezeichnet. Das menschliche Auge zeigt diesen Fehler, wenn die Krümmung der Hornhaut in zwei zueinander senkrechten Richtungen unterschiedlich ist. Dieser Astigmatismus im Auge (gelegentlich als *Stabsichtigkeit* bezeichnet) kann mit einer Brille mit torischen Flächen korrigiert werden, wenn der Astigmatismus der Brillengläser demjenigen des Auges entgegengesetzt wirkt.

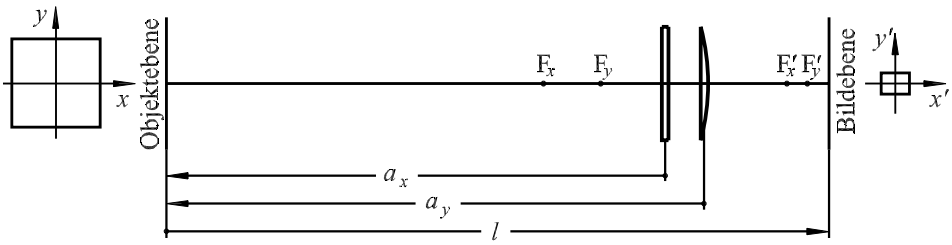
Erzeugt man eine optische Abbildung beispielsweise mit zwei unterschiedlichen Zylinderlinsen, deren Rotationssymmetrieachsen senkrecht aufeinander stehen, so, dass der Bildort für beide Linsen derselbe ist, also ein scharfes Bild entsteht, so spricht man von einer *anamorphotischen Abbildung*. Dies bedeutet, dass das Bild verzerrt, also dem Gegenstand nicht ähnlich ist. Derartige anamorphotische Systeme werden z. B. bei der Aufnahme von Breitwandfilmen eingesetzt, um das breite Format auf

übliche Bildformate zu komprimieren. Umgekehrt muss anschließend bei der Projektion des Films die Verzerrung mit einem zweiten anamorphotischen System wieder rückgängig gemacht werden. An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass man anamorphotische Abbildungen auch mit zwei relativ zueinander verkippten Prismen erzeugen kann. Dies wird z. B. benutzt, um das elliptische Licht eines kantenemittierenden Halbleiterlasers in einen rotationssymmetrischen Strahl zu transformieren.

Beispiel 2.11

Ein Quadrat der Kantenlänge 20 mm soll auf einen ½″-CCD-Sensor mit den Maßen 6,4 mm × 4,8 mm abgebildet werden.

Welche Brennweiten müssen die beiden Zylinderlinsen haben und in welchem Abstand vom Quadrat müssen sie aufgestellt werden, wenn Gegenstand und Bild den Abstand $l = 300$ mm haben?



Die geforderten Abbildungsmaßstäbe sind

$$\beta'_x = \frac{x'}{x} = \frac{a'_x}{a_x} = -0{,}32$$

und

$$\beta'_y = \frac{y'}{y} = \frac{a'_y}{a_y} = -0{,}24$$

Mit der Bedingung $-a + a' = l$ ergibt sich für $a_x = -l/1{,}32 = -227{,}3\,\text{mm}$ und $a_y = -l/1{,}24 = -241{,}9\,\text{mm}$. Die zugehörigen Bildweiten sind $a'_x = 72{,}7\,\text{mm}$ und $a'_y = 58{,}1\,\text{mm}$. Die erforderlichen Brennweiten ergeben sich aus der Abbildungsgleichung (Formel 2.47) zu $f'_x = 55{,}1\,\text{mm}$ und $f'_y = 46{,}8\,\text{mm}$.

2.6.6 Linsensysteme

Optische Geräte enthalten meist Systeme aus mehreren Linsen. Derartige Anordnungen mit beliebiger Zahl an brechenden oder spiegelnden Flächen lassen sich am einfachsten mit der in Abschnitt 2.7 dargestellten Matrixmethode durchrechnen. Hier soll lediglich der häufig auftretende Spezialfall mit zwei Linsen besprochen werden.

Die unten angegebenen Gleichungen lassen sich relativ leicht mit der Matrixmethode ableiten.

Bild 2.43 zeigt den Strahlengang in einem System mit zwei dünnen Sammellinsen. Wird ein von links achsenparallel einfallender Strahl betrachtet, so wird dieser an der Linse L_1 so gebrochen, dass er durch den Brennpunkt F_1' geht. Da er aber vorher auf die Linse L_2 trifft, muss sein weiterer Weg so konstruiert werden, wie dies in Beispiel 2.5 demonstriert wird. Der Schnittpunkt des so konstruierten Strahls mit der optischen Achse definiert den bildseitigen Systembrennpunkt F′. Genauso verfährt man mit einem von rechts her kommenden achsenparallelen Strahl. Sein Schnittpunkt mit der optischen Achse definiert den gegenstandseitigen Systembrennpunkt F.

Nun kann jedes abbildende System reduziert werden auf die bereits von der dicken Linse bekannten Hauptebenen H und H′ sowie auf die zugehörigen Brennpunkte F und F′. In Bild 2.43 sind diese *Kardinalpunkte* konstruktiv ermittelt worden, wobei sich die Hauptebenen aus den Schnittpunkten der Strahlverlängerungen von achsenparallelen und zugeordneten Brennpunktstrahlen ergeben. Bei bekannter Lage der Kardinalpunkte können Abbildungen behandelt werden wie bei einer dicken Linse (Abschnitt 2.6.2). Insbesondere ist auch für Systeme die Abbildungsgleichung (Formel 2.47) gültig, wenn die Gegenstandsweite a von der Hauptebene H und die Bildweite a' von der Hauptebene H′ aus gemessen werden. Die Formel 2.44 für den Abbildungsmaßstab ist ebenfalls nach wie vor gültig.

Die Lagen der Systembrennpunkte F′ und F werden durch ihre Schnittweiten relativ zu den Linsen L_1 und L_2 angegeben (Bild 2.43):

$$\frac{1}{s'_{F'}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_1 - e} \tag{2.72}$$

und

$$\frac{1}{s_F} = -\frac{1}{f'_1} - \frac{1}{f'_2 - e} \tag{2.73}$$

Die Orte der Hauptebenen bestimmen sich aus

$$s'_{H'} = s'_{F'} - f' = \frac{-e f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \tag{2.74}$$

und

$$s_H = s_F - f = \frac{-e f'_1}{f'_1 + f'_2 - e} \tag{2.75}$$

Für die Brechkraft eines Systems aus zwei dünnen Linsen liefert die Rechnung

$$D' = \frac{1}{f'} = D'_1 + D'_2 - e\, D'_1\, D'_2 \tag{2.76}$$

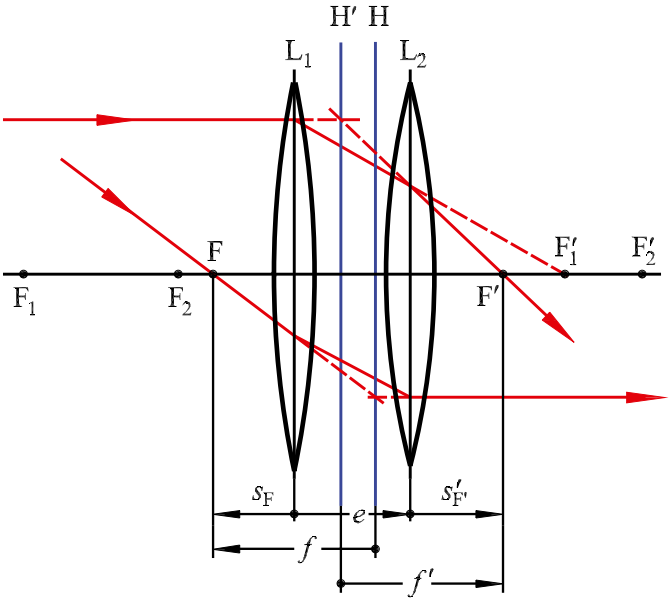


Bild 2.43 Ermittlung der Hauptebenenlage in einem System aus zwei Sammellinsen

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn zwei Linsen dicht nebeneinander angeordnet sind, d. h., der Abstand $e \approx 0$ ist:

$$D' = \frac{1}{f'} = D'_1 + D'_2 \tag{2.77}$$

Die Gesamtbrechkraft eines Systems eng zusammenstehender Linsen ist gleich der Summe der Einzelbrechkräfte.

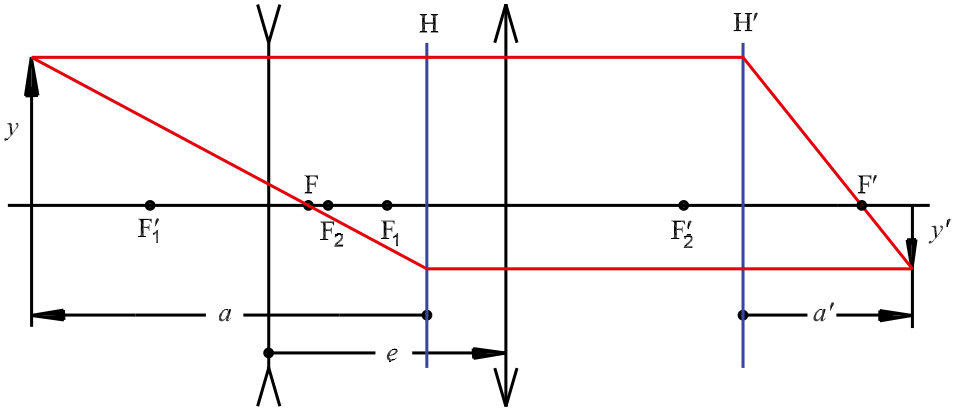
Aus Formel 2.76 folgt für die Brennweite eines Systems aus zwei dünnen Linsen

$$f' = -f = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \tag{2.78}$$

Beispiel 2.12

Das in Beispiel 2.6 behandelte System aus einer Zerstreuungs- und einer Sammellinse ($f'_1 = -2\,\mathrm{cm}$, $f'_2 = +3\,\mathrm{cm}$, $e = 4\,\mathrm{cm}$) soll mit der oben angegebenen Methode noch einmal durchgerechnet werden.

Die Systembrennweite ist nach Formel 2.78 $f' = 2\,\mathrm{cm}$. Die Abstände der Brennpunkte von den beiden Linsen folgen aus Formel 2.72 zu $s'_{F'} = 6\,\mathrm{cm}$ und $s_F = 0{,}667\,\mathrm{cm}$.



Die Abstände der Hauptebenen von den Linsen werden mit Formel 2.74 und Formel 2.75 ermittelt. Es ergibt sich $s'_{H'} = 4\,\text{cm}$ und $s_H = 2{,}67\,\text{cm}$. Die Gegenstandsweite wird nun von der Hauptebene H aus gemessen und beträgt $a = -6{,}67\,\text{cm}$. Mithilfe der Abbildungsgleichung (Formel 2.47) folgt für die Bildweite $a' = 2{,}86\,\text{cm}$. Der Abstand des Bildes von der zweiten Linse beträgt $a'_2 = 6{,}86\,\text{cm}$. Für den Abbildungsmaßstab ergibt sich $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -0{,}43$.



Beispiel 2.13

Die Brennweite einer plankonkaven Linse soll nach der **Bessel**-Methode bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird sie mit einer plankonvexen Linse der Brennweite $f' = 15\,\text{cm}$ so zusammengespannt, dass sich die Planseiten berühren. In einer Anordnung nach Bild 2.35 werden bei einer Aufbaulänge von $l = 1\,\text{m}$ zwei Linsenorte mit scharfer Abbildung im Abstand $t = 30\,\text{cm}$ ermittelt.

Nach Formel 2.64 ist die Gesamtbrennweite $f' = \frac{l^2 - t^2}{4\,l} = 22{,}8\,\text{cm}$ und die Gesamtbrechkraft $D' = 4{,}4\,\text{dpt}$. Da nach Formel 2.77 die Gesamtbrechkraft gleich der Summe der Einzelbrechkräfte ist, ergibt sich für die Zerstreuungslinse $D'_2 = D' - D'_1 = -2{,}27\,\text{dpt}$. Ihre Brennweite beträgt $f'_2 = -44\,\text{cm}$.

Die Formel 2.78 für die Systembrennweite lehrt, dass ein zweilinsiges System sammelnd oder zerstreuend sein kann, je nachdem, welche Brennweiten die beiden Linsen haben und in welchem Abstand e sie aufgestellt sind. Ergebnisse für einige Fälle sind in Tabelle 2.6 zusammengestellt.

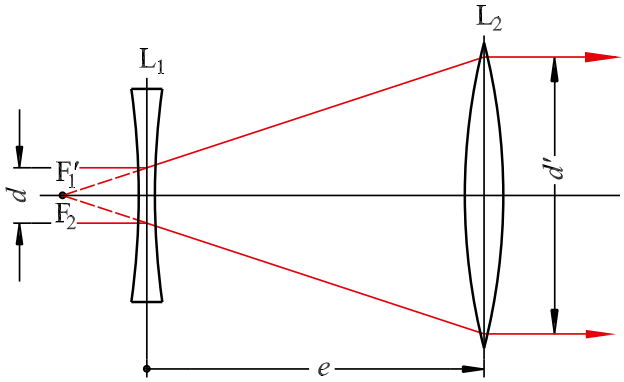
Tabelle 2.6 Eigenschaften von Systemen aus zwei dünnen Linsen

Abstand	zwei Sammellinsen		Sammel- und Zerstreuungslinse	
	Brennweite	Eigenschaft	Brennweite	Eigenschaft
$e < f_1' + f_2'$	$f' > 0$	sammelnd	$f' < 0$	zerstreuend
$e = f_1' + f_2'$	$f' = \infty$, $D' = 0$	afokal	$f' = \infty$, $D' = 0$	afokal
$e > f_1' + f_2'$	$f' < 0$	zerstreuend	$f' > 0$	sammelnd
Bei zwei Zerstreuungslinsen ist immer $f' < 0$, das System ist zerstreuend.				

Liegt ein *afokales System* vor, dann wird ein parallel in das System eintretendes Strahlenbündel das System wieder als paralleles Bündel verlassen. Derartige Strahlengänge werden realisiert in Fernrohren (Abschnitt 2.10.4) oder bei Strahlaufweitungs- oder -kompressionsoptiken.

Beispiel 2.14

Ein Laserstrahl soll von 2 mm auf 10 mm Durchmesser aufgeweitet werden. Zur Verfügung steht eine Zerstreuungslinse mit $f_1' = -10\,\mathrm{cm}$. Welche zweite Linse ist erforderlich und in welchem Abstand zur ersten muss sie aufgestellt werden? Hier soll davon ausgegangen werden, dass der Laserstrahl exakt parallel ist. In Wahrheit wird er durch einen **Gauß**'schen Strahl beschrieben (Abschnitt 4.6), der eine gewisse Divergenz aufweist.



Die Aufweitungsoptik entspricht einem umgekehrten **Galilei**'schen Fernrohr (Abschnitt 2.10.4). Aus dem geforderten Durchmesserverhältnis $\frac{d'}{d} = \frac{f_2'}{-f_1'} = 5$ folgt die Brennweite der Sammellinse zu $f_1' = +50\,\mathrm{cm}$. Der Linsenabstand beträgt $e = f_1' + f_2' = +40\,\mathrm{cm}$.

2.7 Matrixmethoden der Gauß'schen Optik

Das Durchrechnen des Weges eines beliebigen auf ein optisches System fallenden Strahls kann mitunter sehr aufwendig werden, lässt sich aber heute mithilfe von *Raytracing*-Rechnerprogrammen für alle Probleme lösen. Wenn man lediglich im paraxialen Bereich arbeitet, sind die Gleichungen, die den Weg eines Lichtstrahls beschreiben, linear und können auf elegante Weise durch Matrizenoperationen gelöst werden. Das Aussehen der auftretenden Matrizen hängt von der Vorzeichenkonvention für Strecken und Winkel ab. Hier wird die in Abschnitt 2.5.2.1 beschriebene Konvention der DIN 1335 angewandt.

Ein Strahl ist vollständig charakterisiert durch zwei Angaben, beispielsweise durch die Höhe h_1 in einer beliebigen Referenzebene RE_1 (Bild 2.44) sowie den Winkel σ_1 bezogen auf die optische Achse. Wenn der Strahl ein optisches System durchläuft, wird er im Allgemeinen in einer dahinterliegenden zweiten Referenzebene RE_2 eine neue Höhe h_2 und einen neuen Winkel σ_2 besitzen. Die Parameter h_2 und σ_2 hängen über lineare Beziehungen von den Ausgangsdaten h_1 und σ_1 ab:

$$h_2 = A \cdot h_1 + B \cdot \sigma_1 \tag{2.79}$$

$$\sigma_2 = C \cdot h_1 + D \cdot \sigma_1 \tag{2.80}$$

Schreibt man die Höhen und Winkel als Spaltenvektoren, dann sind diese durch eine – gelegentlich als *A,B,C,D-Matrix* bezeichnete – *Systemmatrix* $\boldsymbol{M}$ verknüpft:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

Die vier Elemente A, B, C und D der 2×2-Matrix hängen ab von geometrischen Größen wie Krümmungsradien der beteiligten brechenden und spiegelnden Flächen sowie von den Brechungsindizes der vorhandenen Medien.

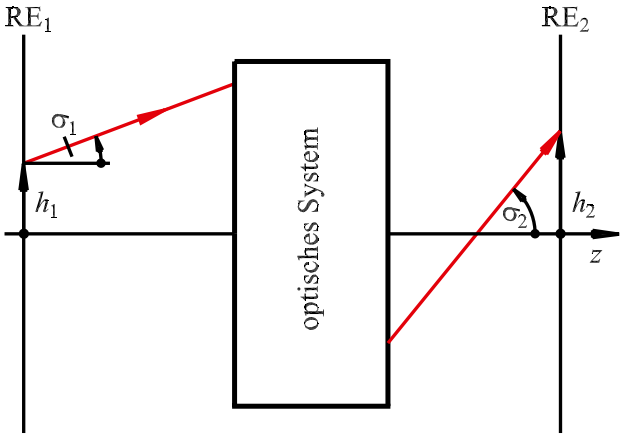


Bild 2.44
Strahlenverlauf im Außenraum eines beliebigen optischen Systems

2.7.1 Matrizen zur Beschreibung der Strahlausbreitung

Transfermatrix

Wenn sich ein Strahl in einem homogenen Medium mit einheitlichem Brechungsindex geradlinig ausbreitet (Bild 2.45), so ist der Winkel σ_2 in der Referenzebene RE_2 identisch mit dem Winkel σ_1 in der Referenzebene RE_1. Nach Formel 2.79 und Formel 2.81 sind daher die Matrixelemente $C = 0$ und $D = 1$.

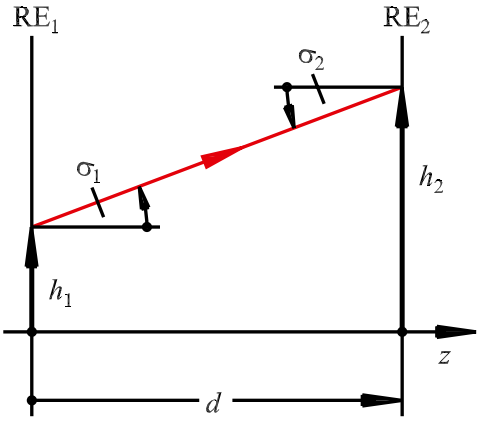


Bild 2.45
Transfer eines Strahls zwischen zwei Referenzebenen im Abstand d in einem homogenen Medium

Die neue Höhe h_2 ist nach Bild 2.45

$$h_2 = h_1 + d \cdot \tan\ \sigma_1$$

Nun ist in paraxialer Näherung $\tan \sigma_1 \approx \sigma_1$ und daher

$$h_2 = h_1 + d \cdot \sigma_1 = A \cdot h_1 + B \cdot \sigma_1$$

Daraus ergeben sich die Matrixelemente $A = 1$ und $B = d$. Die *Transfermatrix* lautet somit

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

Die Determinante der Transfermatrix ist $\det \boldsymbol{T} = 1$.

Brechungsmatrix

Bei der Brechung eines Strahls an einer Kugelfläche (Bild 2.46) sind die Höhen h und h' gleich. Damit ergibt sich nach Formel 2.79 und Formel 2.81 für die Matrixelemente $A = 1$ und $B = 0$. Für die Winkel gilt $\sigma = \varphi + \varepsilon$ und $\sigma' = \varphi + \varepsilon'$. Das **Snellius**'sche Brechungsgesetz (Formel 2.13) lautet in paraxialer Form $n\,\varepsilon = n'\,\varepsilon'$. Damit ergibt sich

$$\sigma' = \varphi + \frac{n}{n'}\varepsilon = \varphi + \frac{n}{n'}(\sigma - \varphi) = \varphi\,\left(1 - \frac{n}{n'}\right) + \frac{n}{n'}\sigma$$

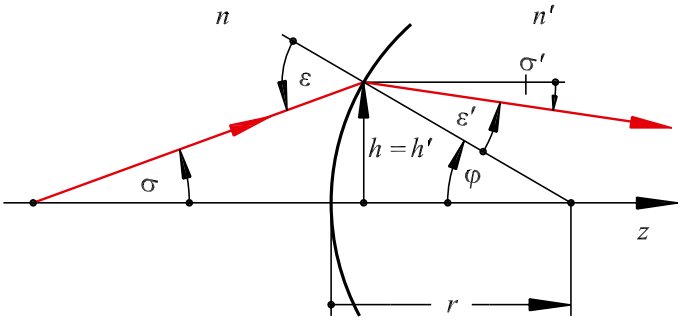


Bild 2.46 Brechung an einer sphärischen Grenzfläche zwischen den Gebieten mit Brechzahlen n und n'

Mit $\tan\,\varphi \approx \varphi \approx -\frac{h}{r}$ wird daraus

$$\sigma' = \frac{n}{n'} \cdot \frac{h}{r} - \frac{h}{r} + \frac{n}{n'}\sigma = \left(\frac{n}{n'} - 1\right) \cdot \frac{h}{r} + \frac{n}{n'}\sigma$$

oder

$$\sigma' = \frac{n - n'}{n'r} \cdot h + \frac{n}{n'}\sigma = C \cdot h + D \cdot \sigma$$

Damit lautet die Brechungsmatrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{n'r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

Ihre Determinante ist $\det\,\boldsymbol{B} = \frac{n}{n'}$.

Reflexionsmatrix

Nach Bild 2.47 gilt bei einer Reflexion bei paraxialem Strahlengang $h = h'$. Damit werden nach Formel 2.79 und Formel 2.81 die Matrixelemente $A = 1$ und $B = 0$.

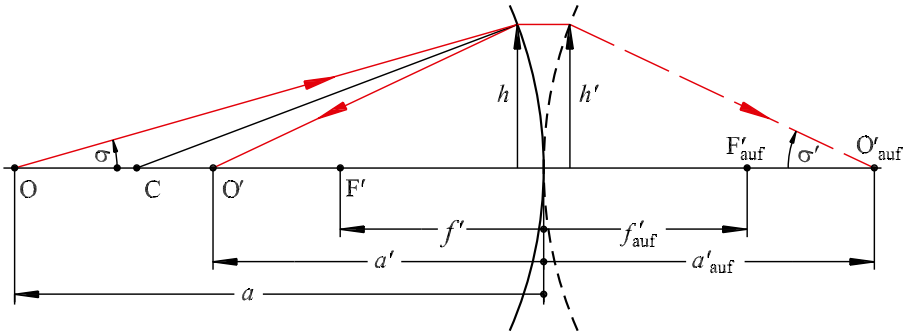


Bild 2.47 Reflexion eines Strahls an einem sphärischen Spiegel mit tatsächlichem und aufgefaltetem Strahlengang

Die Abbildungsgleichung (Formel 2.8) für den aufgefalteten Strahlengang lautet

$$\frac{1}{a'_{\text{auf}}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'_{\text{auf}}} = -\frac{2}{r}$$

Nun ist $\tan\sigma \approx \sigma \approx -\frac{h}{a}$ und $\tan\sigma' \approx \sigma' \approx -\frac{h}{a'_{\text{auf}}}$. Setzt man diese Beziehungen in die Abbildungsgleichung ein, so ergibt sich

$$-\frac{\sigma'}{h} + \frac{\sigma}{h} = -\frac{2}{r}$$

oder

$$\sigma' = \frac{2}{r}h + \sigma = C \cdot h + D \cdot \sigma$$

Damit lautet die Reflexionsmatrix für den aufgefalteten Strahlengang

$$\boldsymbol{R}_{\text{auf}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/r & 1 \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

mit der Determinante $\det \boldsymbol{R}_{\text{auf}} = 1$.

2.7.2 Matrizen für Linsen

Dicke Linse

Die Strahlmatrix einer dicken Linse (Bild 2.48) setzt sich zusammen aus drei Matrizen:

- Brechung an der Fläche S_1: $\begin{pmatrix} h'_1 \\ \sigma'_1 \end{pmatrix}_{S_1} = \boldsymbol{B}_{S_1} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}_{S_1}$,
- Transfer im Linseninneren: $\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}_{S_2} = \boldsymbol{T}_{S_1S_2} \begin{pmatrix} h'_1 \\ \sigma'_1 \end{pmatrix}_{S_1}$,
- Brechung an der Fläche S_2: $\begin{pmatrix} h'_2 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix}_{S_2} = \boldsymbol{B}_{S_2} \begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}_{S_2}$.

Insgesamt gilt nach Formel 2.81

$$\begin{pmatrix} h'_2 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix}_{S_2} = \boldsymbol{L}_{\text{dick}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}_{S_1} = \boldsymbol{B}_{S_2} \cdot \boldsymbol{T}_{S_1S_2} \cdot \boldsymbol{B}_{S_1} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}_{S_1}$$

Somit lautet die Strahlmatrix der dicken Linse

$$\boldsymbol{L}_{\text{dick}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n'}{n' r_2} & \frac{n_L}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L r_1} & \frac{n}{n_L} \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

Ihre Determinante ist $\det \boldsymbol{L}_{\text{dick}} = \frac{n}{n'}$.

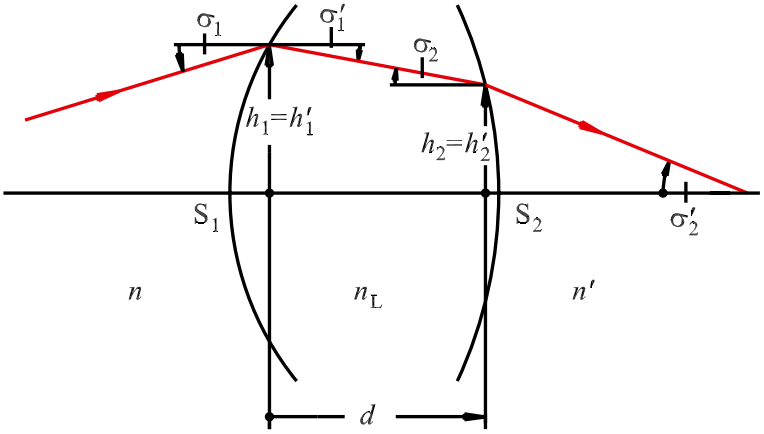


Bild 2.48 Strahlengang durch eine dicke Linse, umgeben von Medien mit den Brechungsindizes n und n'

Beispiel 2.15

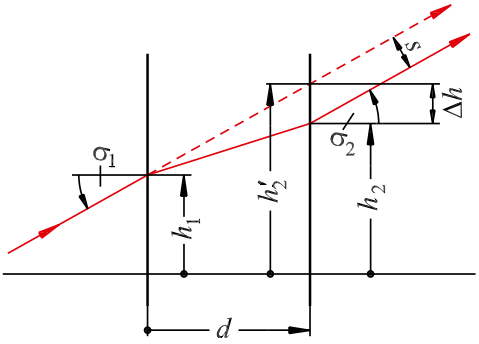
Wie lautet die Strahlmatrix einer planparallelen Platte der Dicke d mit Brechungsindex n_P, die beiderseits von Luft umgeben ist?

Nach Formel 2.85 gilt mit $r_1 = r_2 = \infty$ und $n = n' = 1$:

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{Platte} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_\mathrm{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n_\mathrm{P} \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplikation der Matrizen ergibt sich $\boldsymbol{L}_\mathrm{Platte} = \begin{pmatrix} 1 & d/n_\mathrm{P} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt für die Höhen und Winkel: $h_2 = h_1 + \frac{d}{n_\mathrm{P}}\sigma_1$ und $\sigma_2 = \sigma_1$.



Die Brechkraft der Platte ist null. Der Strahl wird lediglich parallel versetzt. Die Verlängerung des eintretenden Strahls ist gestrichelt gezeichnet. Sie schneidet die rechte Plattenseite in der Höhe $h_2' = h_1 + d\,\sigma_1$. Damit ist der Höhenversatz

$$\Delta h = h_2' - h_2 = d\,\sigma_1 \left(1 - \frac{1}{n_\mathrm{P}}\right)$$

Der senkrecht gemessene Abstand der beiden Strahlen beträgt

$$s = \Delta h \cos \sigma_1 = d\,\sigma_1 \left(1 - \frac{1}{n_\mathrm{P}}\right) \cos \sigma_1$$

Dies ist die paraxiale Näherung der exakten Gleichung

$$s = d \sin \sigma_1 \left(1 - \frac{\cos \sigma_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \sigma_1}}\right)$$

Dünne Linse an Luft

Für den Spezialfall der Linse mit vernachlässigbarer Dicke ($d = 0$), die beidseitig von Luft ($n = n' = 1$) umgeben ist, vereinfacht sich die Formel 2.85 zu

$$\boldsymbol{L}_{\text{dünn, Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_\mathrm{L}-1}{r_2} & n_\mathrm{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n_\mathrm{L}}{n_\mathrm{L} r_1} & \frac{1}{n_\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

Führt man die beiden Matrizenprodukte aus, so ergibt sich für die Linsenmatrix

$$\boldsymbol{L}_{\text{dünn, Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_\mathrm{L} - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Linsenmachergleichung (Formel 2.45) ist das Matrixelement C gleich der negativen Brechkraft der dünnen Linse. Damit vereinfacht sich die Linsenmatrix weiter zu

$$\boldsymbol{L}_{\text{dünn, Luft}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D' & 1 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

Die Determinante der Linsenmatrix ist $\det \boldsymbol{L}_{\text{dünn,Luft}} = 1$.

GRIN-Linse

Der Strahlenverlauf im Innern einer GRIN-Linse wird durch Formel 2.70 beschrieben. Mit der Abkürzung $\alpha = \frac{2\pi}{p} = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a}$ lautet die Gleichung mit den Koordinaten h und σ (Bild 2.49):

$$h(z) = h_1 \cos \alpha z + \frac{\sigma_1}{\alpha} \sin \alpha z$$

Dabei werden h_1 und σ_1 im Innern der Frontfläche gemessen. Am Ende des Stäbchens der Länge d ist die Strahlhöhe

$$h_2 = h(d) = \cos \alpha d \cdot h_1 + \frac{1}{\alpha} \sin \alpha d \cdot \sigma_1 = A \cdot h_1 + B \cdot \sigma_1$$

Damit werden die Matrixelemente $A = \cos \alpha d$ und $B = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha d$.

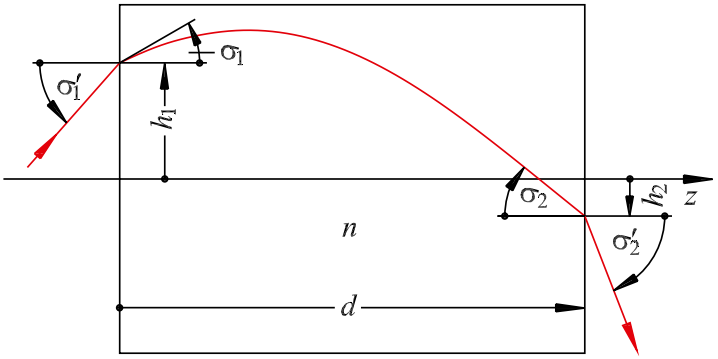


Bild 2.49 Strahlenverlauf in einer GRIN-Linse

Der Strahlwinkel am Ende der Linse folgt aus der Steigung der Kurve, d. h. aus der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = -h_1\alpha\,\sin\,\alpha z + \sigma_1\,\cos\,\alpha z = \tan\,\sigma \approx \sigma$$

Am Ende der Linse beträgt der Winkel zur optischen Achse

$$\sigma_2 = -\alpha\,\sin\,\alpha d \cdot h_1 + \cos\,\alpha d \cdot \sigma_1 = C \cdot h_1 + D \cdot \sigma_1$$

Die weiteren Matrixelemente betragen somit $C = -\alpha \sin \alpha d$ und $D = \cos \alpha d$.

Die komplette Matrix für das Innere einer GRIN-Linse ist

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{GRIN,\,innen}} = \begin{pmatrix} \cos\,\alpha d & \frac{1}{\alpha}\sin\,\alpha d \\ -\alpha\,\sin\,\alpha d & \cos\,\alpha d \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

Wenn die Winkel außerhalb des Stäbchens gemessen werden, muss noch die Brechung an den beiden Endflächen durch jeweils eine Brechungsmatrix berücksichtigt werden. Für den Fall, dass sich im Außenraum Luft befindet, ergibt sich

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{GRIN,\,außen}} = \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{GRIN,\,innen}} \cdot \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\,\alpha d & \frac{1}{\alpha}\sin\,\alpha d \\ -\alpha\,\sin\,\alpha d & \cos\,\alpha d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplikation der Matrizen folgt die Matrix der GRIN-Linse:

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{GRIN,\,außen}} = \begin{pmatrix} \cos\,\alpha d & \frac{1}{n\alpha}\sin\,\alpha d \\ -n\alpha\,\sin\,\alpha d & \cos\,\alpha d \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

Beispiel 2.16

Auf eine $p/2$-GRIN-Linse (Bild 2.39) fällt ein Strahl unter dem Winkel $\sigma_1' = 15°$ in der Höhe $h_1 = 0{,}5$ mm. Unter welchem Winkel σ_2' und in welcher Höhe verlässt er die Linse?

Die Koordinaten am Ende des Stäbchens bestimmen sich aus

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}_{\text{GRIN, außen}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1' \end{pmatrix}$$

Das in Formel 2.88 auftretende Argument ist $\alpha d = \pi$. Damit wird die Strahlmatrix

$$\boldsymbol{L}_{\text{GRIN, außen}} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \frac{1}{n\alpha}\sin\pi \\ -n\alpha\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Koordinaten am Ende $\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 \\ -\sigma_1' \end{pmatrix}$.

Der Strahl verlässt demnach die Linse auf der Höhe $h_2 = -0{,}5$ mm unter dem Winkel $\sigma_2' = -15°$ in Übereinstimmung mit dem Strahlengang in Bild 2.39.

2.7.3 Eigenschaften der Systemmatrix

In einem optischen System ergibt sich die Systemmatrix durch Multiplikation mehrerer Matrizen, welche den Strahltransfer sowie die Brechung oder Reflexion an verschiedenen Flächen beschreiben. Finden k derartige Aktionen statt, dann sind die Höhen und Winkel der Strahlen an zwei Referenzebenen durch k Matrizen verknüpft. Die Systemmatrix ist das Matrixprodukt der k Matrizen, wobei im optischen System von hinten nach vorne multipliziert wird:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_k \cdot \boldsymbol{M}_{k-1} \cdots \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 \begin{pmatrix} h_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \tag{2.89}$$

Wie bei den vorausgegangenen Rechnungen gezeigt wurde, haben die Determinanten der auftretenden Matrizen entweder den Wert 1 oder n_1/n_2. Da die Determinante eines Produkts von Matrizen gleich ist dem Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen, besitzt die Systemmatrix stets die Determinante

$$\det \boldsymbol{M} = AD - BC = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.90}$$

wobei n_1 der Brechungsindex an der Referenzebene RE_1 und n_2 jener an der Referenzebene RE_2 ist. Alle etwaigen anderen Werte im Zwischenbereich kürzen sich heraus. Ist insbesondere an RE_1 und RE_2 dasselbe Medium, z. B. Luft, so gilt

$$\det \boldsymbol{M} = 1 \tag{2.91}$$

Dies ist eine wichtige Eigenschaft, mit der die Berechnung der Matrizenprodukte auf mögliche Rechenfehler überprüft werden kann.

Bedeutung der Matrixelemente

Eine Betrachtung der Formel 2.79 zeigt folgende Dimensionseigenschaften der Matrixelemente:

- A: dimensionslos,
- B: Dimension einer Länge,
- C: Dimension einer reziproken Länge,
- D: dimensionslos.

Falls eines oder mehrere Elemente der Systemmatrix null sind, ergeben sich interessante Folgerungen (Bild 2.50).

- $A = 0$ bewirkt $h_2 = B \cdot \sigma_1$. Das bedeutet, dass alle Strahlen eines parallelen Strahlenbündels bei RE_1 sich in einem Punkt auf der RE_2 treffen müssen. Dann muss aber die RE_2 die bildseitige Brennebene sein, die den Brennpunkt F′ enthält.

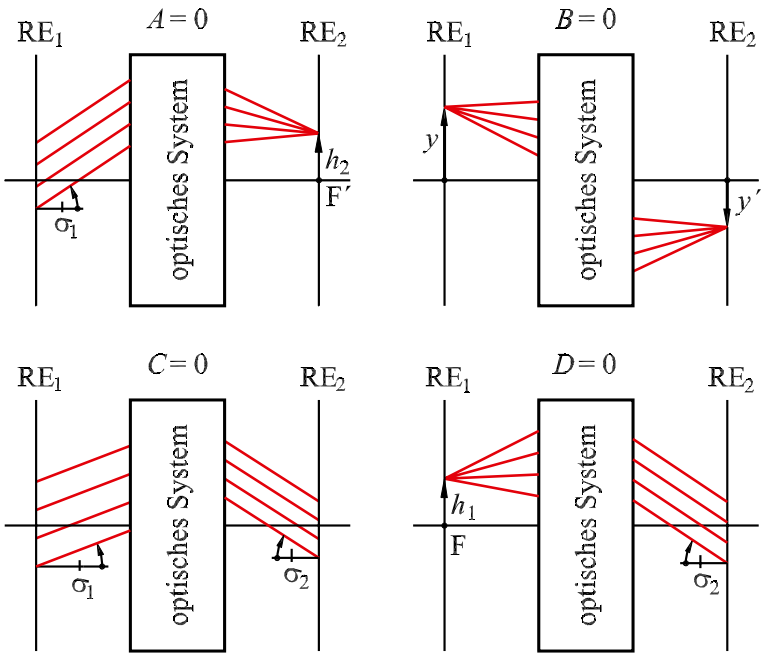


Bild 2.50 Eigenschaften der Strahlengänge beim Verschwinden verschiedener Matrixelemente

- $B = 0$ bewirkt $h_2 = A \cdot h_1$. Alle Strahlen, die von einem Punkt auf RE_1 unter beliebigen Winkeln ausgehen, treffen sich in einem Punkt auf RE_2. Dies ist aber die Definition einer optischen Abbildung. Mit anderen Worten: Die beiden Punkte und die beiden Ebenen sind zueinander konjugiert. Der Abbildungsmaßstab der optischen Abbildung beträgt

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{h_2}{h_1} = A \tag{2.92}$$

- $C = 0$ bewirkt $\sigma_2 = D \cdot \sigma_1$. Das bedeutet, dass ein paralleles Strahlenbündel mit Winkel σ_1 an RE_1 wieder in ein paralleles Bündel mit Winkel σ_2 an RE_2 abgebildet wird. Das System ist also *afokal*. Das *Winkelverhältnis* beträgt

$$\gamma' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = D \tag{2.93}$$

- $D = 0$ bewirkt $\sigma_2 = C \cdot h_1$. Alle Strahlen, die von einem Punkt auf der RE_1 ausgehen, schneiden die RE_2 als paralleles Bündel. Daher muss in diesem Fall die RE_1 die gegenstandseitige Brennebene sein, die den Brennpunkt F enthält.

Eine weitere interessante Folgerung ergibt sich bei der Betrachtung der Abbildung eines Objektpunktes O auf der optischen Achse in einen Bildpunkt O′ (Bild 2.51). Da die beiden Punkte konjugiert sind, muss das Matrixelement $B = 0$ sein.

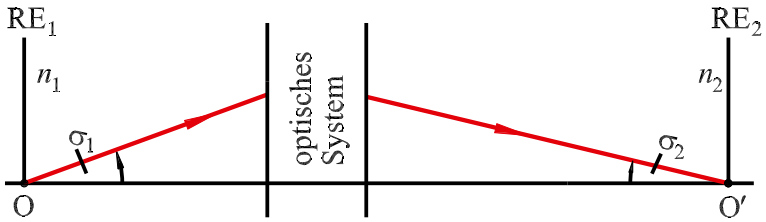


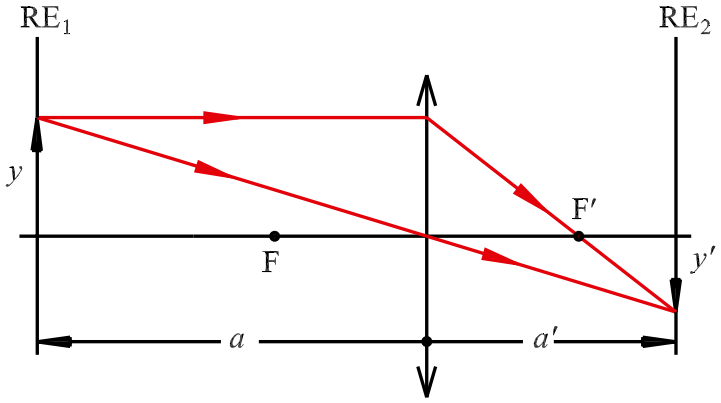
Bild 2.51 Zur Ableitung der **Helmholtz-Lagrange**-Invariante

Das Winkelverhältnis ist $\gamma' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{Ch_1 + D\sigma_1}{\sigma_1} = D$, da $h_1 = 0$ ist. Mit Formel 2.92 lässt sich daher die Systemmatrix schreiben als $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \beta' & 0 \\ C & \gamma' \end{pmatrix}$ mit der Determinante $\det \boldsymbol{M} = \beta' \cdot \gamma' = n_1/n_2$ nach Formel 2.90.

Damit gilt $\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{n_1}{n_2}$ oder umgeformt die *Helmholtz-Lagrange-Invariante* (Formel 2.35) für beliebige Systeme: $n_1 y_1 \sigma_1 = n_2 y_2 \sigma_2$.

Beispiel 2.17

Wie lautet die Systemmatrix für eine Abbildung eines Gegenstandes durch eine dünne Linse?



Zweckmäßigerweise legt man die Referenzebenen in die Objekt- bzw. Bildebene. Die Systemmatrix besteht aus zwei Transfermatrizen und einer Linsenmatrix:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{L2}} \cdot \boldsymbol{L}_{\mathrm{dünn,\,Luft}} \cdot \boldsymbol{T}_{\mathrm{1L}} = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 - a'/f' & -a + a\,a'/f' + a' \\ -1/f' & a/f' + 1 \end{pmatrix}$$

Nun muss, wenn die beiden Referenzebenen konjugiert sein sollen, das Matrixelement $B = 0$ sein. Aus $-a + aa'/f' + a' = 0$ folgt die bekannte Abbildungsgleichung (Formel 2.47) $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$ sowie der Abbildungsmaßstab (Formel 2.44) $\beta' = A = 1 - \frac{a'}{f'} = \frac{a'}{a} = \frac{y'}{y}$.

2.7.4 Lage der Kardinalpunkte eines optischen Systems

Als Kardinalpunkte bezeichnet man die Brenn-, Haupt- und Knotenpunkte. Ihre Lage kann aus der Systemmatrix bestimmt werden. Im Folgenden wird die Lage dieser Punkte relativ zu zwei Referenzebenen RE_1 und RE_2 angegeben.

Objektseitiger Brennpunkt F und Hauptpunkt H

Ein Strahl, der nach Bild 2.52 a) durch den objektseitigen Brennpunkt F geht, verlässt die Hauptebene H als achsenparalleler Strahl (Abschnitt 2.6.2 und Abschnitt 2.6.6). Aus Formel 2.79 $h_1 = -\frac{D}{C}\sigma_1$ und $\sigma_2 = C \cdot h_1 + D \cdot \sigma_1$ folgt für $\sigma_2 = 0$

$$h_1 = -\frac{D}{C}\sigma_1$$

Für kleine Winkel gilt aber $h_1 = -\sigma_1 \cdot s_{1,\mathrm{F}}$. Der Abstand von RE_1 zum Brennpunkt F ergibt sich heraus zu

$$s_{1,\mathrm{F}} = \frac{D}{C} \tag{2.94}$$

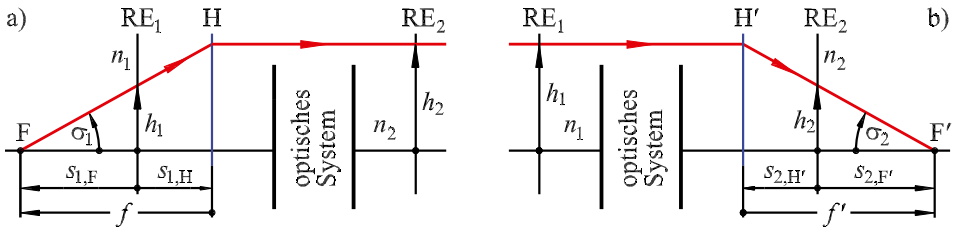


Bild 2.52 Abstände der Hauptpunkte und Brennpunkte von den Referenzebenen; a) Objektseite, b) Bildseite

Durch Anwendung des Strahlensatzes folgt $\frac{h_2}{h_1} = \frac{-f}{-s_{1,\mathrm{F}}}$ oder $f = s_{1,\mathrm{F}}\frac{h_2}{h_1}$. Unter Verwendung von Formel 2.79 und Formel 2.94 folgt

$$f = \frac{D}{C}\left(A + B\frac{\sigma_1}{h_1}\right) = \frac{D}{C}\left(A - B\frac{C}{D}\right) = \frac{AD - BC}{C}$$

Der Zähler entspricht der Determinante der Systemmatrix, und daher wird nach Formel 2.90 die gegenstandseitige Brennweite

$$f = \frac{n_1/n_2}{C} \tag{2.95}$$

Umgekehrt gilt für das Matrixelement $C = \frac{n_1/n_2}{f}$.

Da die Brennweite f von der Hauptebene H aus gemessen wird, ist die Entfernung von RE_1 zu H gegeben durch $s_{1,\mathrm{H}} = -f + s_{1,\mathrm{F}} = -\frac{n_1/n_2}{C} + \frac{D}{C}$ oder

$$s_{1,\mathrm{H}} = \frac{D - n_1/n_2}{C} \tag{2.96}$$

Bildseitiger Brennpunkt F′ und Hauptpunkt H′

Ein Strahl, der nach Bild 2.52 b) parallel zur optischen Achse auf die Hauptebene H′ trifft, geht von dort weiter durch den bildseitigen Brennpunkt F′ (Abschnitt 2.6.2 und

Abschnitt 2.6.6). Aus Formel 2.79 folgt für $\sigma_1 = 0$: $h_2 = A \cdot h_1$ und $\sigma_2 = C \cdot h_1$. Nun ist $-\sigma_2 = \frac{h_2}{s_{2,F'}}$ oder $s_{2,F'} = -\frac{h_2}{\sigma_2} = -\frac{A \cdot h_1}{C \cdot h_1}$. Damit beträgt die Entfernung $s_{2,F'}$ von RE_2 zu F'

$$s_{2,F'} = -\frac{A}{C} \tag{2.97}$$

Aus dem Strahlensatz $\frac{h_1}{h_2} = \frac{f'}{s_{2,F'}} = \frac{1}{A}$ folgt für die bildseitige Brennweite

$$f' = -\frac{1}{C} \tag{2.98}$$

Umgekehrt ist das Matrixelement $C = -1/f'$.

Der Abstand zwischen Hauptebene H' und Referenzebene RE_2 folgt aus $-s_{2,H'} + s_{2,F'} = f'$ zu

$$s_{2,H'} = \frac{1 - A}{C} \tag{2.99}$$

Knotenpunkte

Nach DIN 1335 sind die Knotenpunkte K und K' dasjenige konjugierte axiale Paar, für welches das Winkelverhältnis $\gamma' = 1$ ist. Mit anderen Worten: Ein Strahl, der schief zur optischen Achse auf den Knotenpunkt K trifft, verlässt den Knotenpunkt K' parallel versetzt, d. h. mit $\sigma_2 = \sigma_1$ (Bild 2.53).

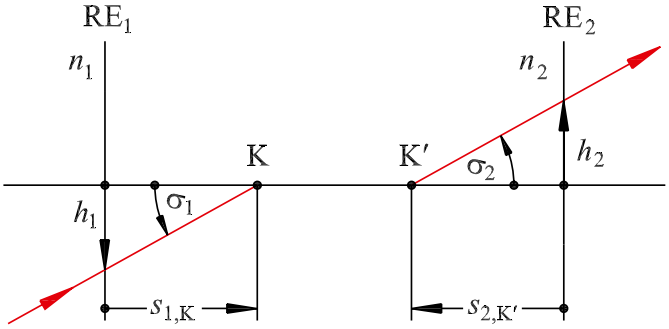


Bild 2.53 Definition der Knotenpunkte

Aus Bild 2.53 folgt für den Winkel $\sigma_1 = -h_1/s_{1,K}$ oder $h_1/\sigma_1 = -s_{1,K}$. Der Winkel an RE_2 beträgt nach Formel 2.79 $\sigma_2 = C \cdot h_1 + D \cdot \sigma_1 = \sigma_1$.

Aus $C \cdot \frac{h_1}{\sigma_1} + D = 1$ folgt mit der obigen Beziehung der Abstand des Knotenpunktes K von der Referenzebene RE_1:

$$s_{1,K} = \frac{D - 1}{C} \tag{2.100}$$

An der Referenzebene RE_2 gilt $\sigma_2 = -h_2/s_{2,K'}$ und $h_2 = -\sigma_2 \cdot s_{2,K'} = -\sigma_1 \cdot s_{2,K'}$. Mit $h_2 = A \cdot h_1 + B \cdot \sigma_1$ folgt $-\sigma_1 \cdot s_{2,K'} = A \cdot h_1 + B \cdot \sigma_1$ sowie $-s_{2,K'} = A \cdot h_1/\sigma_1 + B$ und mit Formel 2.100 und Formel 2.90 schließlich

$$s_{2,K'} = \frac{n_1/n_2 - A}{C} \tag{2.101}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Orte der Kardinalpunkte sind zusammengefasst in Tabelle 2.7 in Verbindung mit Bild 2.54 dargestellt.

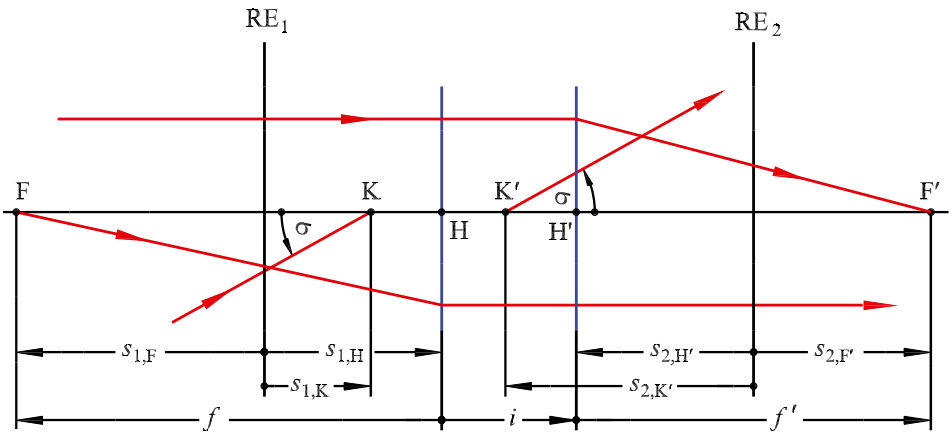


Bild 2.54 Lage der Kardinalpunkte eines optischen Systems

Tabelle 2.7 Entfernungen der Kardinalpunkte eines optischen Systems von den Referenzebenen RE_1 im Objektraum bzw. RE_2 im Bildraum

Kardinalpunkt	Beziehung	
Objektseitiger Brennpunkt F	$s_{1,F} = D/C$	Formel 2.94
Bildseitiger Brennpunkt F′	$s_{2,F'} = A/C$	Formel 2.97
Objektseitiger Hauptpunkt H	$s_{1,H} = (D - n_1/n_2)/C$	Formel 2.96
Bildseitiger Hauptpunkt H′	$s_{2,H'} = (1 - A)/C$	Formel 2.99
Objektseitiger Knotenpunkt K	$s_{1,K} = (D - 1)/C$	Formel 2.100
Bildseitiger Knotenpunkt K′	$s_{2,K'} = (n_1/n_2 - A)/C$	Formel 2.101
Brennweiten		
Objektseitige Brennweite f	$f = \frac{n_1/n_2}{C}$	Formel 2.95
Bildseitige Brennweite	$f' = -\frac{1}{C}$	Formel 2.98

Die Gleichungen der Tabelle 2.7 erlauben einige allgemeingültige Folgerungen:

- Für den am häufigsten vorkommenden Fall, dass $n_1 = n_2$ ist, wenn z. B. das optische System von Luft umgeben ist, fallen die Knotenpunkte und die Hauptpunkte zusammen. Ferner gilt in diesem Fall, dass die objektseitige und die bildseitige Brennweite betragsmäßig gleich groß sind: $f = -f'$.
- Der Abstand zwischen den Hauptebenen bzw. -punkten, das sogenannte *Interstitium i*, ist gleich dem Abstand der beiden Knotenpunkte: $i = \mathrm{HH'} = \mathrm{KK'}$.



Beispiel 2.18

Das *Cooke'sche Triplet*, das bei einfachen Kameraobjektiven eingesetzt wird, soll näherungsweise als Triplet aus drei dünnen Linsen behandelt werden. Die Brennweiten betragen $f_1' = 30{,}5\,\mathrm{mm}$, $f_2' = -17{,}2\,\mathrm{mm}$ und $f_3' = 26{,}8\,\mathrm{mm}$. Die Abstände zwischen den Linsen sind $e_{12} = 6{,}9\,\mathrm{mm}$ und $e_{23} = 7{,}3\,\mathrm{mm}$. Wie lautet die Systemmatrix? Wo liegen die Hauptebenen? Der Film oder der Bildsensor befindet sich am Ort des Brennpunktes F', sodass Objekte, die im Unendlichen stehen, scharf abgebildet werden. Zur Abbildung von Objekten im Nahbereich wird lediglich die erste Linse weiter herausgedreht. Wie hängt die erfasste Gegenstandsweite a vom Linsenabstand e_{12} bzw. vom *Objektivauszug* Δe ab?

Die Referenzebenen RE_1 und RE_2 legt man zweckmäßigerweise in die Linsen L_1 und L_3. Die Systemmatrix besteht aus folgenden zwei Transfer- und drei Linsenmatrizen (alle Maße in mm):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/26{,}8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7{,}3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/17{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6{,}9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/30{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

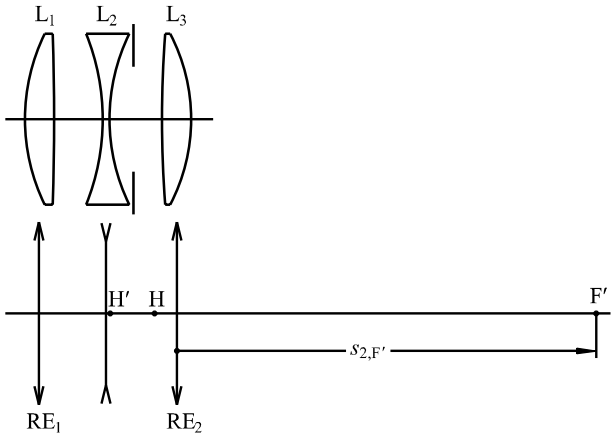
Nach Ausmultiplikation ergibt sich

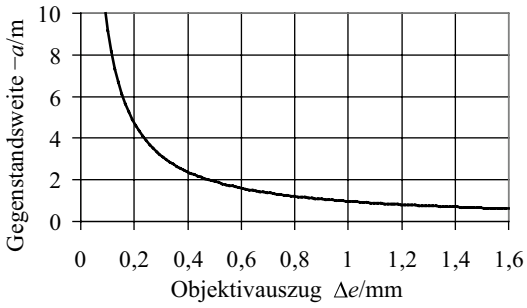
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8628 & 17{,}13 \\ -0{,}01999 & 0{,}7620 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{M} = 1$$

Die Systembrennweite beträgt $f' = -1/C = 50{,}01\,\mathrm{mm}$. Die nominelle Brennweite des Objektivs ist $f' = 50\,\mathrm{mm}$. Die Entfernungen zu den Kardinalpunkten betragen

$s_{2,\mathrm{F'}} = \dfrac{-A}{C} = 43{,}15\,\mathrm{mm}$	(40,22 mm)
$s_{2,\mathrm{H'}} = \dfrac{1-A}{C} = -6{,}86\,\mathrm{mm}$	(–9,35 mm)
$s_{1,\mathrm{F}} = \dfrac{D}{C} = -38{,}11\,\mathrm{mm}$	(–38,04 mm)
$s_{1,\mathrm{H}} = \dfrac{D-1}{C} = 11{,}90\,\mathrm{mm}$	(11,52 mm)





Der Film oder Bildsensor hat den festen Abstand $s_{2,F'} = 43{,}15\,\text{mm}$ von RE_2. Wird der Abstand zwischen L_1 und L_2 vergrößert, z. B. auf 8 mm (*Objektivauszug* $\Delta e = 1{,}1\,\text{mm}$), dann sind die entsprechenden Entfernungen oben in Klammern angegeben. Die Bildweite wird jetzt $a' = 43{,}15\,\text{mm} + 9{,}35\,\text{mm} = 52{,}50\,\text{mm}$. Aus der Abbildungsgleichung folgt der zugehörige Gegenstandsabstand von der Hauptebene H: $a = a'\,f'/(f' - a') = -0{,}89\,\text{m}$. Die Abhängigkeit der Gegenstandsweite vom Objektivauszug ist im beigefügten Diagramm dargestellt.

Beispiel 2.19

Die Gleichungen, die in Abschnitt 2.6.6 (Bild 2.43) ohne Herleitungen angegeben wurden, sollen mithilfe der Matrixmethode bewiesen werden.

Die Referenzebenen RE_1 und RE_2 werden in die beiden Linsen L_1 und L_2 gelegt. Die Systemmatrix setzt sich aus zwei Linsenmatrizen und einer Transfermatrix zusammen:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}_2 \cdot \boldsymbol{T}_{12} \cdot \boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{e}{f_1'} & e \\ -\frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_2'} + \frac{e}{f_1' f_2'} & 1 - \frac{e}{f_2'} \end{pmatrix}$$

Die Brechkraft des Systems ist damit

$$D' = D'_1 + D'_2 - e\,D'_1\,D'_2$$

Die Brennpunktsabstände betragen

$$\frac{1}{s_{1,\mathrm{F}}} = \frac{C}{D} = -\frac{1}{f'_1} - \frac{1}{f'_2 - e}$$

und

$$\frac{1}{s_{2,\mathrm{F}'}} = -\frac{C}{A} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_1 - e}$$



Beispiel 2.20

Ein paralleles Strahlenbündel fällt wie in Bild 2.40 c) auf eine 0,23 *p*-GRIN-Linse mit Brechzahl $n = 1{,}602$ und Periodenlänge $p = 27{,}2\,\mathrm{mm}$. In welchem Abstand von der Endfläche ist ein Lichtwellenleiter zu platzieren, damit er im Fokus der Linse steht?

Nach Formel 2.88 ist die Systemmatrix $\boldsymbol{L}_{\mathrm{GRIN,\,außen}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha d & \frac{1}{n\alpha}\sin\alpha d \\ -n\alpha\,\sin\alpha d & \cos\alpha d \end{pmatrix}$.

Der Abstand des Brennpunktes F′ von der rechten Referenzebene ist nach Formel 2.97 $s_{2,\mathrm{F}'} = -\frac{A}{C} = \frac{\cos\alpha d}{n\alpha\,\sin\alpha d}$.

In unserem Fall ist $\alpha d = 0{,}46 \cdot \pi = 1{,}445$ und $n\alpha = 0{,}370\,\mathrm{mm}^{-1}$. Damit ergibt sich $s_{2,\mathrm{F}'} = \frac{\cot 1{,}445}{0{,}37}\,\mathrm{mm} = 0{,}34\,\mathrm{mm}$.

2.7.5 Lage der Referenzebenen

Die Lagen der Referenzebenen RE_1 und RE_2 werden je nach Fragestellung zweckmäßig gewählt. Legt man sie z. B. auf den ersten und letzten Linsenscheitel, dann liefern die Gleichungen der Tabelle 2.7 die Schnittweiten. Legt man sie in die Objekt- bzw. Bildebene, dann folgt aus der Bedingung für konjugierte Ebenen, dass $B = 0$ sein muss, eine Abbildungsgleichung, die Objektort und Bildort verknüpft. Weitere interessante Beziehungen ergeben sich, wenn die Referenzebenen in die Haupt- oder Brennebenen gelegt werden.

Referenzebenen liegen in den Hauptebenen

Für diesen Fall muss die bisherige Systemmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ erweitert werden um zwei Transfermatrizen, und zwar von RE_2 um $+s_{2,\mathrm{H}'}$ und von RE_1 um $-s_{1,\mathrm{H}}$:

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{H,H}'} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2,\mathrm{H}'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s_{1,\mathrm{H}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-A}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{n_1/n_2 - D}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt sich mit Formel 2.90 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{H,H'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & n_1/n_2 \end{pmatrix}$ mit der Determinante det $\boldsymbol{M}_{\mathrm{HH'}} = n_1/n_2$.

Weil $B = 0$ ist, sind die Hauptpunkte H und H′ – wie bereits bekannt – zueinander konjugiert. Der Abbildungsmaßstab ist nach Formel 2.92 $\beta' = A = 1$ (siehe Abschnitt 2.6.2 und DIN 1335).

Referenzebenen liegen in den Brennebenen

Für diesen Fall muss die bisherige Systemmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ erweitert werden um zwei Transfermatrizen, und zwar von RE_2 um $+s_{2,\mathrm{F'}}$ und von RE_1 um $-s_{1,\mathrm{F}}$. Damit wird die neue Systemmatrix

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F,F'}} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2,\mathrm{F'}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s_{1,\mathrm{F}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -A/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -D/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplikation der Matrizen ergibt sich mithilfe von Formel 2.90

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F,F'}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{BC-AD}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-n_1/n_2}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

Für $n_1 = n_2$, z. B. an Luft, gilt

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F,F'}} = \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f' \\ -1/f' & 0 \end{pmatrix}$$

Da das Matrixelement B nicht null ist, können die Brennebenen keine konjugierten Ebenen sein. Ein Objektpunkt, der beim Brennpunkt F steht, wird bekanntlich nicht in F′, sondern ins Unendliche abgebildet.

Beschreibt man eine optische Abbildung mit Koordinaten z und z', die von den Brennpunkten aus gemessen werden (Bild 2.29), so lautet die neue Systemmatrix

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{Newton}} = \boldsymbol{T}_2 \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{F,F'}} \cdot \boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & z' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-n_1/n_2}{C} \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der schließlich mit $C = -1/f'$ folgt

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{Newton}} = \begin{pmatrix} -\frac{z'}{f'} & \frac{zz'}{f'} + \frac{n_1}{n_2} f' \\ -\frac{1}{f'} & \frac{z}{f'} \end{pmatrix}$$

Für eine optische Abbildung muss $B = 0$ sein, d. h.

$$z\, z' = -\frac{n_1}{n_2} f'^2 \tag{2.102}$$

Dies ist die *Newton'sche Abbildungsgleichung*, die an Luft die von Formel 2.51 her bekannte Form $z\,z' = -f'^2$ annimmt.

Der Abbildungsmaßstab beträgt $\beta' = A = -\frac{z'}{f'}$.

Damit ist bewiesen, dass die **Newton**'sche Abbildungsgleichung bei beliebigen Systemen gilt und nicht nur, wie in Abschnitt 2.6.1, bei dünnen Linsen.

2.8 Strahlbegrenzungen

2.8.1 Blenden und Pupillen

Die Strahlenbündel, die an einer optischen Abbildung beteiligt sind, werden immer auf irgendeine Weise durch Blenden festgelegt. Die bisher meist benutzten Konstruktionsstrahlen, z. B. achsenparalleler Strahl und Strahl durch die Linsenmitte, kommen häufig bei der tatsächlichen Abbildung gar nicht vor, weil sie gegen eine Blende laufen, so auch in Bild 2.55 a).

Eine körperliche Blende, beispielsweise ein Lochblech oder eine Linsenfassung, die den Öffnungswinkel des abbildenden Strahlenkegels begrenzt, der von einem Objektpunkt auf der optischen Achse ausgeht, wird als *Aperturblende* (AB) bezeichnet. Sie bestimmt die Helligkeit der Abbildung und besitzt deshalb häufig einen veränderbaren Durchmesser wie beim Fotoapparat oder der Irisblende des Auges.



Als *Eintrittspupille* (EP) wird das Bild der Aperturblende bezeichnet, wenn man von der Objektseite in das optische System blickt. Sie bestimmt den maximalen Öffnungswinkel $2\sigma_{max}$ des Strahlenkegels, der von einem Objektpunkt auf der optischen Achse ausgeht.

Steht die Aperturblende im Gegenstandsraum wie in Bild 2.55 a), dann ist sie selbst die Eintrittspupille. Steht sie im Bildraum wie in Bild 2.55 b), dann ist ihr durch die Linse entworfenes Bild die EP. Im Falle von Bild 2.55 b) ist dieses Bild virtuell.

Das optische System (die Linse im Fall von Bild 2.55) bildet nicht nur den Gegenstand ab, sondern auch die Aperturblende.

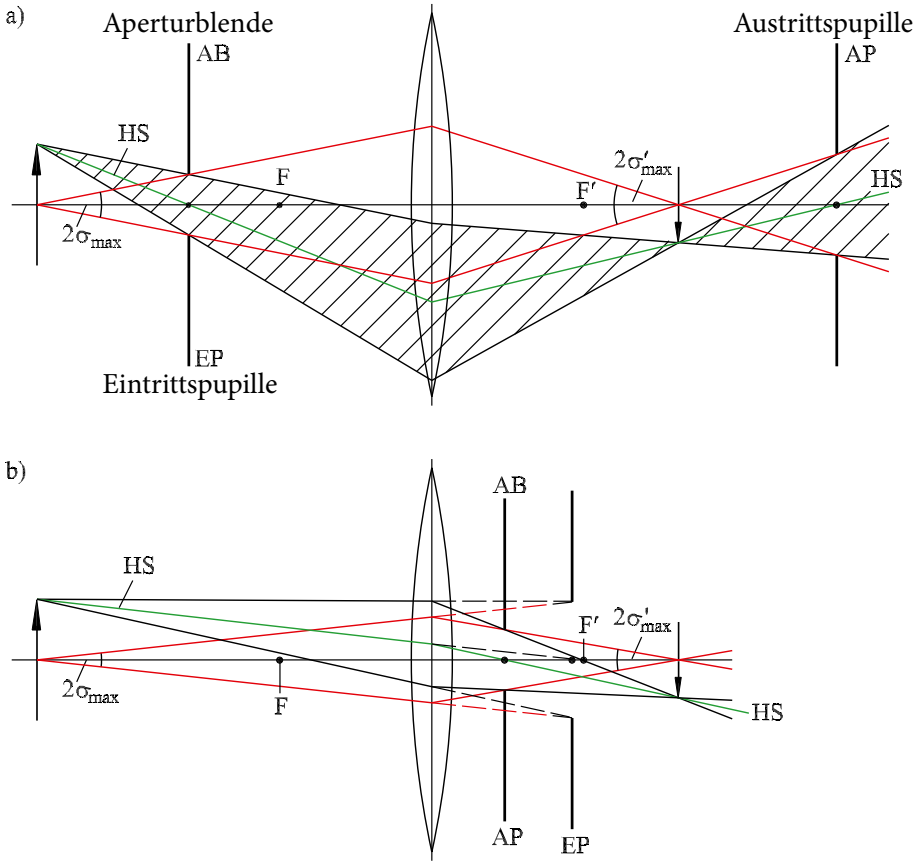


Bild 2.55 Zur Definition von Blenden und Pupillen; a) Aperturblende (EP) im Objektraum mit reellem Bild (AP), b) Aperturblende (AP) im Bildraum mit virtuellem Bild (EP)
AB: Aperturblende, EP: Eintrittspupille, AP: Austrittspupille, HS: Hauptstrahl.



Als *Austrittspupille* (AP) wird das Bild der Aperturblende bezeichnet, wenn man von der Bildseite in das optische System blickt. Sie bestimmt den maximalen Öffnungswinkel $2\sigma'_{max}$ des Strahlenkegels, der von einem Bildpunkt auf der optischen Achse ausgeht.

Auch die Austrittspupille ist entweder die physische Blende selbst (Bild 2.55 b) oder das Bild derselben (Bild 2.55 a).

In Bild 2.55 a) ist der Strahlenkegel, der von der Pfeilspitze des Objekts ausgeht, schraffiert. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die Linse mindestens die gezeichnete Größe haben muss, damit alle Strahlen die Linse durchqueren können. Ist der Linsendurchmesser kleiner, sodass Randstrahlen nicht mehr an der Abbildung teilnehmen, wird das Bild nach außen hin abgeschattet. Man spricht von einer *Vignettierung*.

Bei einem System mit mehreren Linsen bzw. Blenden ist nicht von vornherein klar, welches die Strahlen begrenzende Aperturblende ist. Um dieses herauszufinden, kann man entweder konstruktiv oder rechnerisch den Strahlenkegel mit größtem Öffnungswinkel suchen und so entscheiden, welche Blende die maßgebende ist bzw. wo die Eintrittspupille des Systems liegt.

Beispiel 2.21

Zwei dünne Linsen im Abstand $e = 50\,\text{mm}$ bilden ein optisches System. Beide Linsenfassungen haben den lichten Durchmesser $d = 30\,\text{mm}$. Die Linse L_1 hat die Brennweite $f_1' = 120\,\text{mm}$. Welche der beiden Linsen wirkt als Aperturblende für einen Objektpunkt im Abstand $s_O = -80\,\text{mm}$?

In der zeichnerischen Lösung wurde konstruktiv das von der Linse L_1 entworfene virtuelle Bild der Linsenfassung L_2 ermittelt. Dieses in der Abbildung gestrichelte Bild fungiert als Eintrittspupille, denn der gestrichelte Strahlenkegel hat einen kleineren Öffnungswinkel als der ausgezogene.

Die Rechnung wird mithilfe der Matrixmethode durchgeführt. Um den maximalen Öffnungswinkel zu bestimmen, den die Linse L_1 zulässt, werden die Referenzebenen in die Objektebene und die Linse L_1 gelegt. Die Systemmatrix besteht lediglich aus der Transfermatrix zwischen den beiden Referenzebenen:

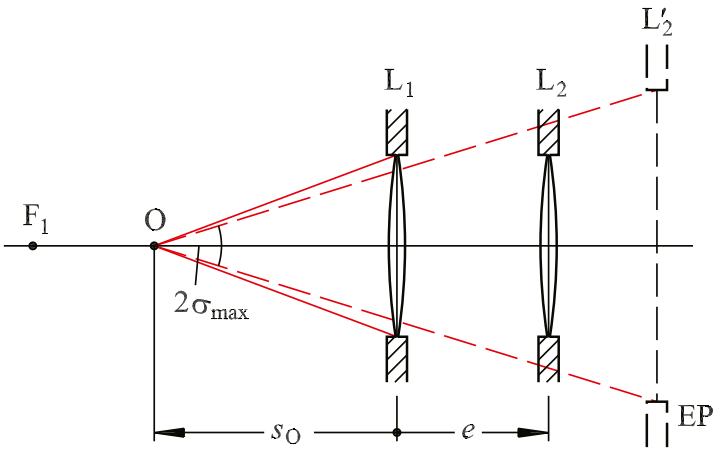
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T}_{O,1} = \begin{pmatrix} 1 & -s_O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Formel 2.79 beträgt die Strahlhöhe an der Stelle der Linse L_1 für einen Strahl, der von einem Objektpunkt auf der optischen Achse kommt,

$$h_2 = B \cdot \sigma_1$$

Damit ist der größte Öffnungswinkel

$$\sigma_{1,\max} = \frac{d/2}{B} = \frac{d/2}{-s_O} = 0{,}188\,\text{rad} = 10{,}7°$$



Zur besseren Sichtbarkeit ist der Maßstab in *y*-Richtung um den Faktor 2 gestreckt relativ zur *z*-Richtung.

Um den größten Öffnungswinkel zu berechnen, den die Linse L_2 zulässt, wird die Referenzebene RE_2 in die Linse L_2 gelegt. Die Systemmatrix besteht damit aus zwei Transfermatrizen und einer Linsenmatrix:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T}_{1,2} \cdot \boldsymbol{L}_{\text{dünn}} \cdot \boldsymbol{T}_{\text{O},1} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s_\text{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{e}{f_1'} & e - s_\text{O} + \frac{e s_\text{O}}{f_1'} \\ -\frac{1}{f_1'} & \frac{s_\text{O}}{f_1'} + 1 \end{pmatrix}$$

Auch hier ist der größtmögliche Öffnungswinkel

$$\sigma_{1,\max} = \frac{d/2}{B} = \frac{d/2}{e - s_\text{O} + \frac{e s_\text{O}}{f_1'}} = 0{,}155\,\text{rad} = 8{,}9^\circ$$

Damit ist bestätigt, dass die Linse L_2 die Aperturblende darstellt und ihr Bild die Eintrittspupille. Für größere Abstände ändern sich die Verhältnisse. Durch Vergleich der beiden Ergebnisse folgt, dass für Gegenstandsweiten $-s_\text{O} > f_1'$ die Linse L_1 die Aperturblende wird und zugleich die Eintrittspupille.

Wenn der Blendendurchmesser gegen null geht, bleibt vom abbildenden Strahlenkegel nur noch der sogenannte *Hauptstrahl* (HS in Bild 2.55) übrig.



Hauptstrahlen sind Strahlen, die als Repräsentanten der tatsächlichen Strahlenbündel von Objektpunkten durch die Mitte der Eintrittspupille gehen und im Bildraum durch die Mitte der Austrittspupille.

Da die Pupillen Bilder der physischen Aperturblende sind, geht der Hauptstrahl auch durch die Mitte der Aperturblende.

In komplizierten Strahlengängen werden zur Vereinfachung häufig nur die Hauptstrahlen gezeichnet.

2.8.2 Kenngrößen der Strahlenbegrenzung

Um den Öffnungswinkel und damit die Bildhelligkeit in einem optischen System zu beschreiben, werden verschiedene Kenngrößen benutzt (Bild 2.56).