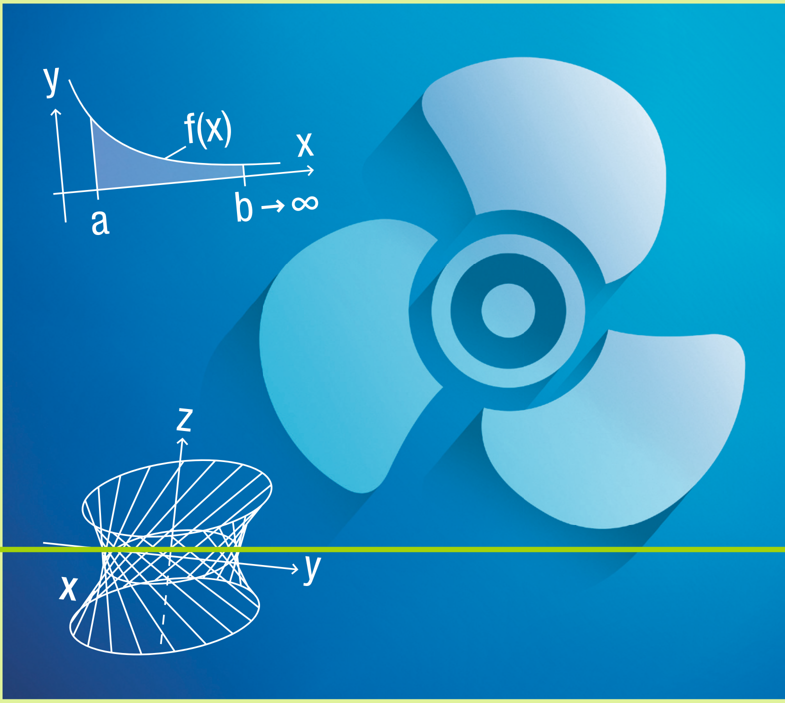
Markus Schmidt-Gröttrup
Katharina Best
Thomas Risse

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Mathe – kann ich

Band 2: Geometrie und Funktionen



HANSER

Schmidt-Gröttrup / Best / Risse

Mathe - kann ich

Markus Schmidt-Gröttrup
Katharina Best
Thomas Risse

Mathe - kann ich

Band 2: Geometrie und Funktionen

HANSER

Über die Autor:innen:
Dr. Markus Schmidt-Gröttrup, Hochschule Osnabrück
Dr. Katharina Best, Hochschule Hamm-Lippstadt
Dr. Thomas Risse, Hochschule Bremen

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-47469-7
E-Book-ISBN: 978-3-446-47475-8

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © Max Kostopoulos, unter Verwendung von Grafiken von © shutterstock.com/ValentinDrul
Satz: Dr. Katharina Best
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Selbstgesteuertes Lernen mit Aufgaben zum SEFI-Curriculum

Dem Buch *Mathe – kann ich, Band 1* liegt die Idee zugrunde, sich mathematische Grundlagen entlang des SEFI-Curriculums in Alpers (2014) selbstgesteuert anzueignen. Die positiven Rückmeldungen zu Band 1 bestärken uns, dieses Projekt fortzusetzen. Studierende haben die Struktur der Kapitel von Band 1 als besonders hilfreich beurteilt. Sie besteht aus Einleitung zum Thema, Kann-Liste zu den Lernzielen, Aufgaben und Lösungen, und bleibt daher unverändert bestehen. Kann-Listen enthalten zum Lernziel Referenzen auf Lerneinheiten, die hier jeweils Aufgaben sind. Der Spaltentitel in den Kann-Listen heißt daher jetzt einfach „Aufgabe". Band 2 setzt die Kapitelnummerierung von Band 1 fort. Da die Bearbeitungsdauern für einzelne Aufgaben individuell sehr verschieden sind, gibt es in diesem Band nur Vielfache von 5 Minuten als Zeitangabe zur ungefähren Orientierung.

B. Alpers. *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education.* European Society for Engineering Education (SEFI), 3. Auflage, 2014

Von Core Zero zu Core Level 1

Das SEFI-Curriculum ist als Schichten-Modell mit Core Zero als Kern aufgebaut, um den sich die drei Schichten Core Level 1, Level 2 und Level 3 legen. Core Zero enthält Material, das idealerweise schon vor dem Beginn eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums erarbeitet wurde. Core Level 1 baut darauf auf und wird als mathematische Grundlage aller Disziplinen aus diesen Studien betrachtet. Level 2 enthält fortgeschrittenes Material, das die Lösung realer technischer Probleme betrifft. Die enthaltenen Themen betreffen nicht mehr jede ingenieurwissenschaftliche Disziplin. Level 3 enthält mathematische Spezialthemen. Jede dieser Schichten führt Themen aus den mathematischen Teilgebieten Algebra, Analysis, Diskrete Mathematik, Geometrie und Statistik auf. Nachdem der Band 1 unserer Reihe die Themen der ersten drei Teilgebiete von Core Zero enthielt, startet dieses Buch jetzt mit Geometrie und Statistik, um ab Kapitel 22 die Themen der Analysis aus Core Level 1 aufzunehmen. Diese setzen inhaltlich die Themen von Band 1 fort. Tabelle 1 zeigt die jeweiligen Fortsetzungen.

Tabelle 1: Fortsetzung der Kapitel aus Band 1 in Band 2

	Kapitel	
Thema	Band 1	Band 2
Funktionen	4, 5, 7	22, 23, 25
Folgen	6	27
Differentiation	8, 9	26
Integration	10, 11	28, 29
Komplexe Z.	12	24

Trotz dieser inhaltlichen Fortsetzung haben wir versucht, die Kapitel selbsterklärend zu machen. Daher gibt es mitunter Wiederholungen und

Aufgaben, die Lernziele der ersten Kapitel aufgreifen. Nicht zu übersehen ist aber, dass der Stoff ab Kapitel 22 anspruchsvoller wird. Das zeigt sich auch an Themen wie der Algorithmik zum näherungsweisen Lösen nicht-linearer Gleichungen.

Auswahl und Themenfolge

Zielgruppen und der Aufbau von Lehrveranstaltungen sind so verschieden, dass die Lernziele des SEFI-Curriculums nicht sequentiell abzuarbeiten sind, sondern Auswahl und Themenfolge dem jeweiligen Bedarf angepasst werden. So wird den Bedürfnissen der Studierenden am ehesten entsprochen: mit der Fokussierung auf den Lernprozess, mit der Rückmeldung zum Lernerfolg und mit der erwünschten Selbststeuerung.

An wenigen Stellen haben wir Lernziele des SEFI-Curriculums ergänzt und auch ausgelassen. So sind Anwendungen rationaler Funktion oder komplexer Zahlen aus unserer Sicht wichtig, während uns die reziproken Funktionen hyperbolischer Funktionen verzichtbar erscheinen. Von uns ergänzte Lernziele sind mit einem Stern markiert. Die Reihenfolge der Themen bleibt die des Curriculums, woraus sich gelegentlich Verweise auf spätere Kapitel ergeben.

Wenn die vorliegenden Bände als Wegweiser, als Motivator, als Orientierung, als Begleitlektüre oder als Nachschlagewerk dienen, können wir Autoren zufrieden sein.

Zusatzmaterial

Kannlisten zum Abhaken finden Sie wieder als separate Dateien auf plus.hanserfachbuch.de. So können Sie diese wiederholt, zum ersten Lernen, zur Vorbereitung auf Klausuren oder zur Wiederholung aktiv verwenden. Viele Aufgaben können mit Hilfe von Software gelöst und vertieft werden. Code in gängigen mathematischen Software-Programmen zu einigen Aufgaben finden Sie ebenfalls online.

Den Zugangscode finden Sie auf Seite 1.

Dank

Ein besonderer Dank geht an Studierenden des Studiengangs Wirtschaftsinformatik am Campus Lingen, die mit ihren Antworten in der Befragung zur Nutzung von Band 1 wichtige Hinweise für die Weiterentwicklung und einen ordentlichen Motivationsschub gegeben haben. Die konstruktive Zusammenarbeit mit unserer Lektorin Frau Silakova macht immer Freude. Wir sind froh, trotz Corona, verschiedener Krankkeiten und familiärer Krisen sowie langer Diskussionen um Inhalte und Form endlich fertig mit diesem Band zu sein. Hoffentlich trägt er dazu bei, dass viele Lernende sagen können: „Mathe - kann ich".

Bremen, Naumburg (Saale), August 2023

Markus Schmidt-Gröttrup, Thomas Risse, Katharina Best

15

Geometrie

15.1 Einleitung

Die Geometrie, ursprünglich die Kunst der Erdvermessung, befasst sich mit der Lehre von Objekten in der Ebene und im Raum und ihren Beziehungen zueinander. In diesem Kapitel werden Punkte und Geraden, Längen und Winkel, Dreiecke und Polygone sowie Kreise vorgestellt. Weiterhin werden dreidimensionale Körper und ihre Projektionen in die Ebene betrachtet. Für eine weitführende Darstellung zur Geometrie und ihren Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften wird in Bär (2001) empfohlen.

G. Bär. *Geometrie*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2 Auflage, 2001

15.1.1 Punkte, Geraden und Längen

Ein Punkt ist ein Objekt ohne Ausdehnung. Gezeichnet wird mit kleiner, gerade noch sichtbarer Ausdehnung oder als Schnittpunkt zweier Linien.

Eine *Gerade* g ist eine gerade, in beide Richtungen unendliche Linie. Sie ist durch zwei Punkte definiert. Werden diese verbunden, entsteht eine *Strecke*. Die Strecke zwischen den Punkten A und B wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet und ihre Länge mit $|\overline{AB}|$. Wird die Linie über einen Punkt hinaus verlängert, entsteht ein *Strahl* in die Richtung und es wird von einer *Halbgeraden* gesprochen.

Winkel werden meistens mit griechischen Buchstaben bezeichnet, meist mit α, β, γ und δ sowie bei Bedarf mit weiteren Buchstaben.

15.1.2 Winkel

Zwei Halbgeraden mit dem selben Anfangspunkt begrenzen einen *Winkel*, die Halbgeraden werden als *Schenkel* bezeichnet. Der Winkel ist definiert durch eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn des einen Schenkels zum anderen. Auf diese Weise werden die zwei Winkel bezüglich der zwei Schenkel unterschieden, siehe Bild 15.1.

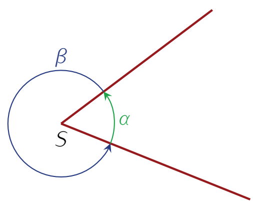


Bild 15.1: Zwei Halbgeraden mit dem Anfangspunkt S definieren den Winkel α und den Winkel $\beta = 360° - \alpha$. Als Innenwinkel wird der Winkel $\leq 180°$ bezeichnet. Der andere Winkel wird Außenwinkel genannt.

Die beiden Winkel in Bild 15.1 drehen den Schenkel einmal vollständig auf sich selbst. Eine solche Volldrehung wird auch als 360°-Drehung bezeichnet, ein Winkel von 360° als *Vollwinkel*. Entsprechend ist eine halbe Drehung 180° und der zugehörige Winkel ein *gestreckter Winkel* sowie eine Vierteldrehung 90° und der zugehörige Winkel ein *rechter Winkel*.

Der rechte Winkel wird mit einem Punkt markiert. Diese Größenzuordnung wird in Tabelle 15.1 zusammengefasst.

Tabelle 15.1: Einordnung von Winkeln.

Winkelname	Wertebereich
Nullwinkel	$0°$
Spitzer Winkel	$(0°, 90°)$
Rechter Winkel	$90°$
Stumpfer W.	$(90°, 180°)$
Gestreckter W.	$180°$
Überstumpfer W.	$(180°, 360°)$
Vollwinkel	$360°$

Die Angabe der Winkel in der Einheit 1°, wie oben verwendet, wird *Gradmaß* genannt.

Zwei Geraden in einer Ebene schneiden sich entweder in einem *Schnittpunkt* oder sie sind *parallel*. Falls sie sich schneiden, entstehen ein Schnittpunkt sowie vier Winkel, siehe Bild 15.2. Da sich α und β zu einem gestreckten Winkel addieren, sind der dritte und der vierte Winkel wieder genauso groß wie α bzw. β. Diese Art der Argumentation lässt sich auf viele Schnittkonstellationen anwenden.

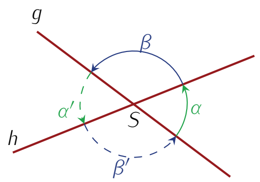


Bild 15.2: Zwei Geraden g und h schneiden sich im Schnittpunkt S mit dem Schnittwinkel α und dem Nebenwinkel β.

Beispiel. In Bild 15.3 schneidet eine dritte Gerade h die zwei parallelen Geraden g_1 und g_2. Welche Winkel sind identisch?

Da g_2 gegenüber g_1 nur verschoben ist, sind die zwei blauen Winkel, die sich im Schnitt mit h ergeben, identisch. Außerdem sind sie auch mit den blau gestrichelten Winkeln identisch, da der blaue mit dem grauen Winkel sich zu 180° Grad ergänzen, genauso wie der blau gestrichelte mit dem grauen.

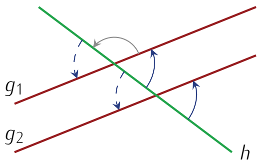


Bild 15.3: Eine Gerade schneidet zwei parallele Geraden. Die blauen Winkel sind nur verschoben (Stufenwinkel) und identisch. Auch die blau gestrichelten Winkel (Wechselwinkel) sind mit diesen identisch.

15.1.3 Dreiecke und Polygone

Ein *Dreieck* besteht aus drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen und ihren Verbindungsstrecken. Die den *Seiten* a, b, c gegenüberliegenden Winkel werden mit α, β, γ bezeichnet (Bild 15.4). Mit h_a, h_b, h_c werden die *Höhen* des Dreiecks über den Seiten a, b, c bezeichnet. Eine Höhe steht auf der zugehörigen Seite senkrecht.

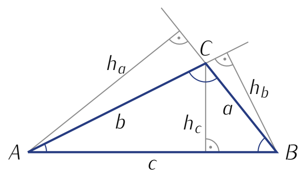


Bild 15.4: Dreieck mit den Seiten a, b, c, seinen Winkeln und den Höhen h_a, h_b und h_c. Zu sehen ist, dass bei den Höhen von Nachbarseiten eines stumpfen Winkels der Höhenfußpunkt außerhalb des Dreiecks liegt, hier bei h_a und h_b.

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel wie im Bild 15.5 wird *rechtwinkliges Dreieck* genannt. Ein Dreieck heißt *spitzwinklig*, wenn sein größter Winkel kleiner als 90° ist. Es heißt *stumpfwinklig*, wenn er größer als 90° ist. Sind zwei der drei Seiten gleich lang, heißt ein Dreieck *gleichschenklig*; sind alle drei Seiten gleich lang, so heißt es *gleichseitig*.

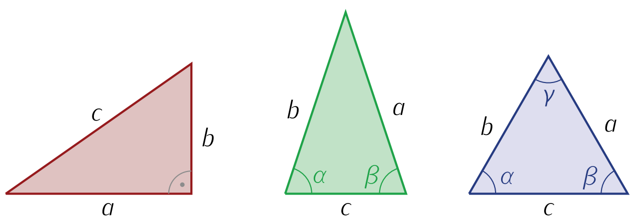


Bild 15.5: Das linke Dreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck. Der rechte Winkel ist mit einem Punkt markiert. Das mittlere Dreieck ist gleichschenklig, es gilt $a = b$ und $\alpha = \beta$. Das rechte Dreieck ist gleichseitig, d.h. $a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma$.

Tabelle 15.2: Flächeninhalte der speziellen Dreiecke mit den Notationen aus Bild 15.5.

Dreieck	Flächeninhalt
rechtwinklig	$\frac{1}{2}ab$
gleichschenklig	$\frac{1}{4}c\sqrt{4a^2 - c^2}$
gleichseitig	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Bei Dreiecken sind der *Flächeninhalt A* und der *Umfang U* interessant. Der Umfang eines Dreiecks ist die Summe seiner Seitenlängen,

$$U = a + b + c.$$

Für den Flächeninhalt gilt

$$A = \tfrac{1}{2} g h,$$

wobei g die Seitenlänge einer Seite ist und h die zugehörige Höhe des Dreiecks, siehe Bild 15.7. Die Flächeninhalte spezieller Dreiecke sind in Tabelle 15.2 zusammengestellt.

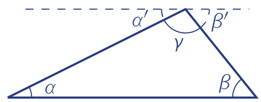


Bild 15.6: Im obigen Dreieck ergänzen sich der Winkel γ, der Wechselwinkel β' zu β und der Wechselwinkel α' zu α zu 180° an der gestrichelten Geraden.

Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt 180°, siehe Bild 15.6. Damit lässt sich aus zwei Winkeln immer der dritte ausrechnen.

Für rechtwinklige Dreiecke gilt der *Satz des Pythagoras*

Vgl. dazu Band 1, Kapitel 13

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wobei a und b die *Katheten* und c die *Hypotenuse* des Dreiecks sind. Wieso das gilt, ist im Bild 15.8 gezeigt. Aus zwei bekannten Seitenlängen lässt sich die dritte zu berechnen.

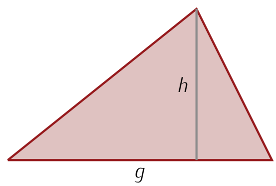


Bild 15.7: Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks wird eine Seite g, Grundseite genannt, und die zugehörige Höhe h benötigt.

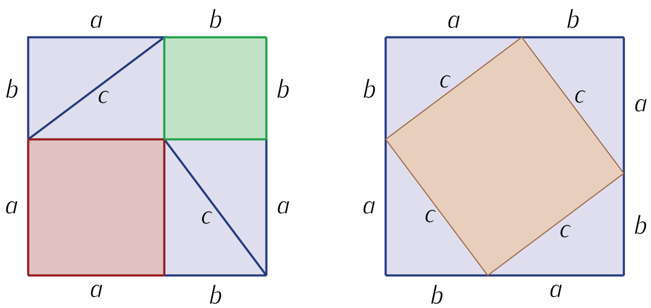


Bild 15.8: Der Satz des Pythagoras: Im linken Bild ist a^2 (rot) $+b^2$ (grün) $+4 \cdot A_D$ (blau), im rechten Bild ist auf der selben Fläche c^2 (gelb) $+4 \cdot A_D$ (blau).

Zwei Dreiecke heißen *kongruent*, wenn sie durch eine Verschiebung, Drehung oder Spiegelung oder eine geeignete Aneinanderreihung dieser Operationen ineinander überführt werden können. Die Seitenlängen des einen Dreiecks finden sich auch im zweiten Dreieck, genauso wie die drei Winkel in beiden Dreiecken gleich groß sind. Zur Überprüfung der Kongruenz muss eine der folgenden Aussagen nachgewiesen werden:

sss: Die Längen der drei Seiten stimmen überein.

sws: Zwei Seitenlängen stimmen überein sowie der eingeschlossene Winkel.

ssw: Zwei Seitenlängen stimmen überein sowie der Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt.

wsw: Eine Seitenlänge stimmt überein sowie die an dieser Seite anliegenden Winkel.

wws: Eine Seitenlänge stimmt überein sowie ein dieser Seite anliegende und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel.

In diesem Fall sind die Dreiecke kongruent und alle Aussagen erfüllt.

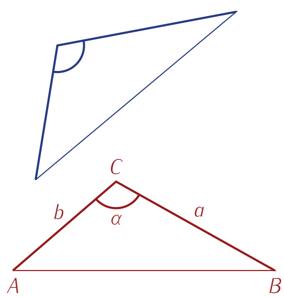


Bild 15.9: Das rote und das blaue Dreieck sind kongruent.

Beispiel. In Bild 15.9 sind im roten Dreieck die Seiten a, b und der Winkel α hervorgehoben, also zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel. Damit kommt die sws-Version der Kongruenzsätze zum Vergleich in Frage. Die entsprechenden Seiten und Winkel sind im blauen Dreieck hervorgehoben. Sie stimmen überein und damit sind die Dreiecke kongruent.

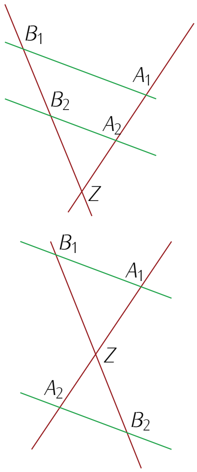


Bild 15.10: Zwei Geraden (rot) schneiden sich im Zentrum Z. Die zwei parallelen Geraden (grün) können auf der gleichen Seite (oben) oder verschiedenen Seiten von Z liegen.

Bei *ähnlichen Dreiecken* müssen nicht die Längen übereinstimmen, sondern nur die Winkelgrößen. Eine wichtige Anwendung hierbei ergibt sich aus dem *Strahlensatz*. Zwei sich schneidende Geraden werden von zwei parallelen Geraden gekreuzt, siehe Bild 15.10.

Über die Verhältnisse der resultierenden Längen in den Dreiecken $\triangle(ZA_1B_1)$ und $\triangle(ZA_2B_2)$ gilt:

$$\frac{|\overline{ZA_1}|}{|\overline{ZA_2}|} = \frac{|\overline{ZB_1}|}{|\overline{ZB_2}|} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{A_2B_2}|}$$

Ein *Polygon* ist ein allgemeines Vieleck und entsteht durch einen geschlossenen Streckenzug durch n Punkte, also eine Verkettung von Strecken, wo der Endpunkt der einen der Anfangspunkt der anderen Strecke ist und außerdem der Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Endpunkt der letzten Strecke zusammenfällt. Falls sich die daraus resultierenden Seiten nicht kreuzen, lässt sich ein Polygon triangulieren, d.h. in Dreiecke aufteilen. Bild 15.11 zeigt, wie ein Polygon mit n Ecken in $n-2$ Dreiecke aufgeteilt werden kann. Aus den Winkelsummen der Dreiecke ergibt sich, dass die Winkelsumme des Polygons mit n Ecken $(n-2)\cdot 180°$ ist.

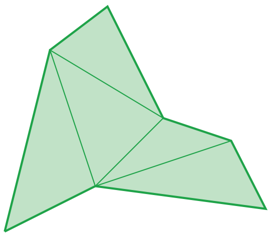


Bild 15.11: Ein 7-Eck mit Aufteilung in fünf Dreiecke.

Beispiel. Welche Summe haben die Winkel eines Siebenecks?
Ein Siebeneck wie z.B. in Bild 15.11 lässt sich in fünf Dreiecke aufteilen, damit ergibt sich $5 \cdot 180° = 900°$ als Winkelsumme.

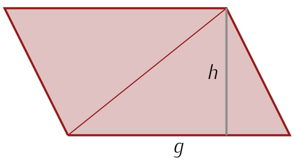


Bild 15.12: Das Parallelogramm wird in zwei kongruente Dreiecke aufgeteilt. Die Höhe h des Dreiecks ist auch die des Parallelogramms.

Ein besonderes Polygon ist das *Viereck*, das sich in zwei Dreiecke teilen lässt. Die Winkelsumme im Viereck beträgt deswegen 360°. Aus den zwei Dreiecken lässt sich der Flächeninhalt bestimmen.

Bei einem *Parallelogramm* sind je zwei der Seiten parallel. Das Parallelogramm lässt sich damit in zwei kongruente Dreiecke zerlegen, wie in Bild 15.12 gezeigt, und damit beträgt der Flächeninhalt

$$A_p = 2\,A_D = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,gh = gh.$$

Ein spezieller Fall eines Parallelogramm ist das *Rechteck*. Dabei stehen die Seiten aufeinander senkrecht. Die Zerlegung ergibt dann zwei rechtwinklige Dreiecke und der Flächeninhalt vereinfacht sich zu $A_R = a\,b$, wenn a und b die Seitenlängen sind, siehe Bild 15.13.

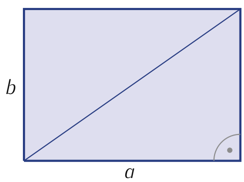


Bild 15.13: Ein Rechteck aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken.

15.1.4 Kreise

Ein *Kreis* ist durch einen Punkt M, den *Mittelpunkt* und einen *Radius* r gegeben als die Menge aller Punkte X einer Ebene, für die gilt:

$$|\overline{MX}| = r,$$

siehe Bild 15.14. Das Innere des Kreises heißt *Kreisfläche* oder *Kreisscheibe*. Die Fläche A_K und der Umfang U_K des Kreises lassen sich mittels der *Kreiszahl* π aus dem Radius r berechnen als

$$\begin{aligned} A_K &= \pi r^2 \\ U_K &= 2\pi r \end{aligned}$$

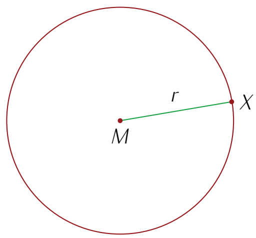


Bild 15.14: Ein Kreis, gegeben durch Mittelpunkt M und Radius r.

Zwei Strahlen, ausgehend vom Mittelpunkt eines Kreises schneiden den Kreis in zwei Teile. Ein von den Strahlen begrenzte Teil des Kreises heißt *Kreisbogen*, die von den Strahlen und dem Kreis begrenzte Fläche *Kreissektor*. Die zwei Schnittpunkte des Kreises mit den beiden Strahlen lassen sich zur *Kreissehne verbinden*, die durch Kreissehne und Kreis begrenzte Fläche ist das *Kreissegment*. Deren Länge bzw. Flächeninhalt lässt sich aus dem Radius und dem Winkel errechnen.

Das Kreissegment lässt sich erst unter Nutzung der trigonometrischen Funktionen aus Kapitel 19 berechnen.

Die Länge des Kreisbogens und der Flächeninhalt des Kreissektor lassen sich aus Radius und Winkel berechnen. Dabei entsprechen die Länge L_B des Kreisbogens und der Flächeninhalt A_S des Kreissektors dem gleichen Anteil am Umfang bzw. am Flächeninhalt des Kreises wie der eingeschlossene Winkel α am Vollwinkel. Ist α im Gradmaß gegeben, gilt

$$\begin{aligned} L_B &= \frac{\alpha}{360^\circ} U_K = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r \\ A_S &= \frac{\alpha}{360^\circ} A_K = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2. \end{aligned}$$

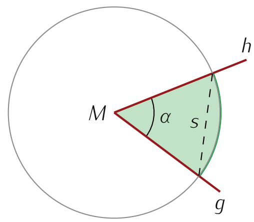


Bild 15.15: Zwei Strahlen g und h gehen vom Mittelpunkt M eines Kreises aus. Grün sind der Kreissektor und der Kreisbogen zu sehen. Sie Sehne s ist schwarz gestrichelt, das Kreissegment ist der rechts der Sehne liegende Teil des Segmentes.

15.1.5 Bogenmaß

Aus der Längenformel des Kreisbogens ergibt sich das *Bogenmaß* als alternative Maßeinheit für Winkel. Dabei wird der Winkel als Länge des Bogens des *Einheitskreises*, das ist der Kreis mit Radius 1, angegeben. Dessen Umfang ist 2π. Dies entspricht dem Bogenmaß des Vollwinkels. Die Einheit wird *Radiant* genannt und als 1 rad geschrieben. Dann gilt für das Verhältnis von Bogenmaß x und Gradmaß γ eines Winkels das Verhältnis

$$\frac{x}{\gamma} = \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{360^\circ}.$$

15.1.6 In die dritte Dimension

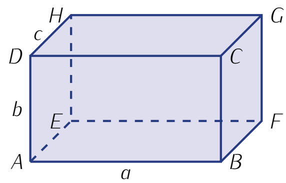


Bild 15.16: Ein Quader. Die Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ sowie $AEHD$ und $BFGC$ und auch $ABFE$ und $DCGH$ sind jeweils gleich groß.

Die wichtigsten Konzepte in der dreidimensionalen Geometrie sind Körper und ihre Lage und Orientierung im Raum. Bei den Körpern selbst interessieren Oberflächen und Volumina. Es gibt verschiedene Arten von Körpern, z.B. Würfel, Kugeln, Zylinder und Pyramiden.

Der rechnerisch einfachste Körper ist der *Quader*. Er ist von sechs Rechtecken begrenzt, diejenigen auf gegenüberliegenden Seiten sind jeweils kongruent. Der Flächeninhalt der Oberfläche ist somit die Summe der Flächeninhalte der sechs Rechtecke. Mit den Seitenlängen a, b und c (wie in Bild 15.16) ergibt sich

$$A_{\text{Quader}} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc),$$

das Volumen ist das Produkt aus einer Grundfläche, also dem Produkt von zwei der drei Seitenlängen, und der Höhe, also der dritten Seitenlänge:

$$V_{\text{Quader}} = abc\,.$$

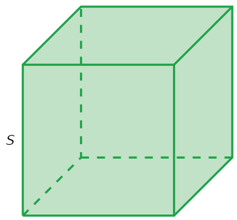


Bild 15.17: Ein Würfel mit der Seitenlänge s.

Ein besonderer Quader ist der Würfel, siehe Bild 15.17. Hier sind alle sechs Seiten kongruente Quadrate. Wenn s deren Seitenlänge ist, vereinfachen sich die obigen Formeln zu

$$A_{\text{Würfel}} = 6s^2 \qquad \text{und} \qquad V_{\text{Würfel}} = s^3\,.$$

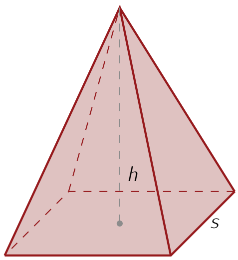


Bild 15.18: Eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche mit der Seitenlänge s und vier gleichen Seiten, mit der Höhe h. Die Spitze liegt mittig oberhalb des Quadrats.

Eine *Pyramide* ist ein dreidimensionaler Körper mit einem Polygon als Grundfläche und Dreiecken, deren eine Seite jeweils eine Kante des Polygons ist, während die anderen Seiten jeweils durch die Verbindungslinien zu einem gemeinsamen Punkt, der *Spitze*, gebildet werden. Der wichtigste Spezialfall ergibt sich, wenn das Grundflächenpolygon regelmäßig ist und die Spitze oberhalb von dessen Mittelpunkt liegt. In diesem Fall sind Dreiecke kongruent und die Pyramide wird *gerade Pyramide* genannt.

Das Volumen einer Pyramide ergibt sich aus der Grundfläche A_G und der Höhe h als

$$V_{\text{Pyramide}} = \tfrac{1}{3} A_G\, h,$$

bei einer Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche, siehe Bild 15.18 ergibt sich das Volumen dann als $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}s^2 h$. Für das Volumen der Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a als Grundfläche (Bild 15.19) gilt entsprechend $V_{\text{Pyramide}} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 h$.

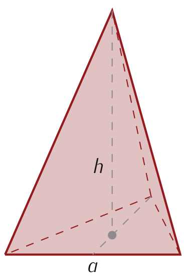


Bild 15.19: Eine gerade Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche. Die Seitenlänge des Dreiecks ist a und die Höhe der Pyramide ist h. Die Spitze liegt mittig oberhalb der Grundfläche, so dass die Seitenflächen der Pyramide kongruente gleichschenklige Dreiecke sind.

Sind dabei die Seitendreiecke zum Dreieck der Grundfläche kongruent, heißt die Pyramide *Tetraeder*.

Mit einem Kreis statt eines Polygons als Grundfläche entsteht ein *Kegel*. Liegt die Spitze oberhalb des Kreismittelpunkts, so wird von einem *geraden* Kegel gesprochen, andernfalls von einem *schiefen* Kegel. Die Berechnung lässt sich genauso übertragen, das Volumen eines Kegels berechnet sich als $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Wird die Seite aufgeschnitten, entsteht ein Kreissektor. Dieser heißt *Mantel*. Der Kreis hat den Radius s, die Länge der Schnittlinie. Mit dem Satz des Pythagoras ist $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. Der Kreisbogen ist gerade der Umfang der kreisförmigen Grundfläche, als $2\pi r$. Damit gilt für den Winkel α des Sektors $\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$, und weiter

$$A_{M_{\text{Kegel}}} = \tfrac{\alpha}{360°}\pi s^2 = \tfrac{r}{s}\pi s^2 = \pi r s.$$

Die gesamte Oberfläche besteht neben dem Mantel noch aus der Grundkreisfläche (Boden des Kegels).

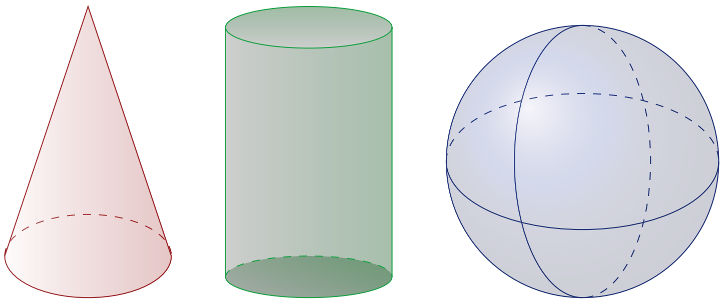


Bild 15.20: Links ein Kegel, in der Mitte ein Zylinder und rechts eine Kugel.

Ein *Zylinder* hat ebenfalls eine kreisförmige Grundfläche sowie eine dazu senkrecht stehende Seitenfläche, als *Mantel* bezeichnet. Nach oben wird der Zylinder von einem zweiten, zum ersten kongruenten und parallelen Kreis begrenzt. Die Höhe des Zylinders h ist die Entfernung zwischen den beiden Grundflächen. Das Volumen ist dann

Der Mantel des Zylinders bildet nach Aufschneiden ein Rechteck.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h.$$

Der Flächeninhalt des Mantels ist $A_{M_{\text{Zylinder}}} = 2\pi r h$. Die gesamte Oberfläche des Zylinders ist

$$A_{\text{Zylinder}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h),$$

da neben dem Mantel noch die beiden Kreisflächen dazu gehören.

Analog zum Kreis ist die *Kugel* gegeben durch einen Mittelpunkt M und einen Radius r als die Menge aller Punkte X im Raum, für die gilt

$$|\overline{MX}| = r.$$

Für das Volumen und den Flächeninhalt der Kugeloberfläche gilt

$$V_{\text{Kugel}} = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$
$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2.$$

15.1.7 Darstellende Geometrie

In einer perspektivischen Darstellung eines dreidimensionalen Körpers wie z.B. in Bild 15.21 wird ein guter Eindruck des Körpers vermittelt. Dabei werden die Raumpunkte auf eine vor oder hinter dem Körper liegende Ebene (Bildebene) projiziert. Es werden die Zentral- und die Parallelprojektion unterschieden. Für eine *Zentralprojektion* wird zunächst ein Zentralpunkt festgelegt. Jeder Raumpunkt wird dann durch eine Gerade mit dem Zentralpunkt verbunden. Der projizierte Punkt ist der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Bildebene. Der Übergang zur *Parallelprojektion* erfolgt durch Verschieben des Zentralpunkts in unendliche Ferne, die projizierenden Geraden stehen somit senkrecht auf der Bildebene. Beide Projektionsarten sind geradentreu, d.h. gerade

Der Zentralpunkt bei der Zentralprojektion kann als das beobachtende Auge gedacht werden.

Linien im Raum bleiben gerade Linien in der Bildebene. Längen bleiben dabei nicht erhalten. Winkel werden nur dann in der wahren Größe abgebildet, wenn sie in einer zur Bildebene parallelen Ebene liegen.

Meistens werden drei aufeinander senkrecht stehende Projektionsebenen verwendet, um einen Gesamteindruck des Körpers zu vermitteln. Manchmal ist es sinnvoll, sowohl vor als auch hinter dem Körper liegende Ebenen zu verwenden, um Eindeutigkeit herzustellen.

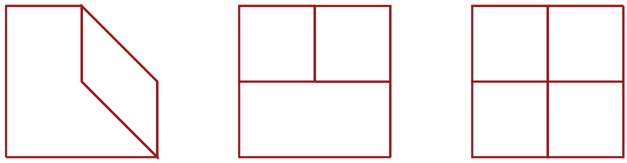


Bild 15.22: Orthogonale Parallelprojektionen des Körpers aus Bild 15.21, links die Projektion auf die $y-z$-Ebene und rechts die Projektion auf die $z-x$-Ebene. In der Mitte ist die Projektion auf $x-y$-Ebene.

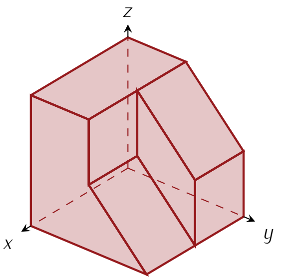


Bild 15.21: Ein Körper, dessen Parallelprojektionen in Bild 15.22 betrachtet werden.

Beispiel. Das Bild 15.21 zeigt einen dreidimensionalen Körper. Wie sehen seine Parallelprojektionen aus? Dazu werden die folgenden drei Sichten eingenommen:

- ▷ von vorne links, auf die $y-z$-Ebene, wie links in Bild 15.22,
- ▷ von vorne rechts, auf die $z-x$-Ebene, wie rechts in Bild 15.22,
- ▷ von oben auf die $x-y$-Ebene, wie in der Mitte in Bild 15.22.

15.1.8 *Geometrische Transformationen der Ebene*

Eine geometrische Figur kann in ihrer Lage oder ihrer Größe verändert oder auch verformt werden. Eine solche Änderung nennt sich *Transformation*. Einige geometrische Transformationen in der Ebene sind beispielsweise die *Translation*, *Rotation*, *Spiegelung*, *Streckung* und *Skalierung*. Komplexere Transformationen können aus diesen aufgebaut werden.

- ▷ Bei der Translation handelt es sich um eine Verschiebung. Dabei ändert sich nur die Lage einer geometrischen Figur. Ihre weiteren Eigenschaften bleiben unverändert. Dazu zählen Form und Größe.
- ▷ Bei der Rotation handelt es sich um eine Drehung um einen festen Punkt. Dieser Drehpunkt kann innerhalb, aber auch außerhalb der Figur liegen. Bei der Rotation werden die Lage und Ausrichtung der Figur verändert, Form und Größe bleiben unverändert.
- ▷ Bei der Spiegelung wird eine Figur an einer Geraden, auch *Spiegelachse* genannt, gespiegelt. Die Form und Grüße der Figur bleiben erhalten, es ändert sich aber ihre Orientierung.
- ▷ Bei der Streckung in eine Richtung wird eine Figur in einer festen Richtung um einen Faktor gestreckt (Faktor > 1) oder gestaucht (Faktor < 1). Dabei verändert sich die Größe der Figur in der gegebenen Richtung. Die Winkel verändern sich im Allgemeinen, die Orientierung der Figur bleibt unverändert, siehe Beispiel in Bild 15.23.
- ▷ Bei der gleichmäßigen Streckung in alle Richtungen werden alle Längen in der Figur mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert und damit entweder *gestreckt* (Faktor > 1) oder *gestaucht* (Faktor < 1). Die Form bleibt dabei gleich. Dies lässt sich durch Hintereinanderausführung zweier Streckungen in senkrecht zueinander stehenden Richtungen mit gleichem Faktor erreichen.

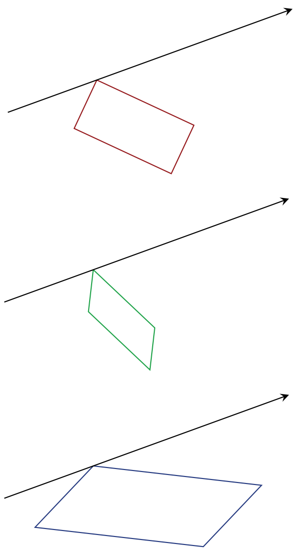


Bild 15.23: Die Richtung (als Pfeil dargestellt), in der das obere Rechteck transformiert wird. Dabei wird es mit einem Faktor < 1 gestaucht (Mitte) oder mit Faktor > 1 gestreckt (unten).

Eine *Isometrie* ist eine geometrische Transformation, bei der die Abstände zwischen den Punkten einer Figur beibehalten werden. Dazu gehören die Translation, die Rotation und die Spiegelung. Streckungen sind keine Isometrien.

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn alle Verhältnisse ihrer Abstände gleich sind. Die Figuren können aber unterschiedlich groß sein. Das ist eine Verallgemeinerung der ähnlichen Dreiecke aus Bild 15.10. Die Ähnlichkeit erhalten die Translation, Rotation, Spiegelung und die gleichmäßige Streckung in alle Richtungen. Die Streckung in eine Richtung führt im Allgemeinen zu nicht ähnlichen Figuren.

15.2 Lernziele

Nr	Ich kann	Aufgabe	√
	Winkel		
146	verschiedene Typen von Winkeln erkennen	15.1	
147	gleiche Winkel beim Schnitt paralleler Geraden erkennen	15.2-b, 15.3, 15.4	
	Dreiecke und Polygone		
148	verschiedene Typen von Dreiecken identifizieren	15.5, 15.6	
149	die Formel für die Winkelsumme im Innern eines Polygons angeben und benutzen	15.6	
150	die Fläche eines Dreiecks berechnen	15.8, 15.11-b	
151	kongruente Dreiecke anhand der Regeln erkennen	15.9, 15.10	
152	die Ähnlichkeit zweier Dreiecke erkennen	15.12, 15.13, 15.14	
153	den Satz des Pythagoras anwenden	15.2-a, 15.15, 15.16, 15.17, 15.18, 15.19, 15.20	
	Winkel messen		
154	die Einheit Radiant verstehen	15.22	
155	Winkel in Grad- und Bogenmaß angeben und umrechnen	15.33, 15.35	
	Kreise		
156	Fläche und Umfang eines Kreises berechnen und als Formel angeben	15.18, 15.21, 15.22	
157	die Länge eines Kreisbogens berechnen	15.30	
158	die Flächen von Kreissektoren oder Kreissegmenten berechnen	15.11-c, 15.22	
	Figuren in der Ebene		
159	die Formeln für Flächen einfacher ebener Figuren angeben	15.20, 15.23	
	Körper		
160	die Formeln für Volumina von Zylinder, Pyramide mit quadratischer oder dreieckiger Grundfläche, Kegel und Kugel angeben	15.24, 15.25, 15.26, 15.28	
161	die Formeln für Oberflächen von Zylinder, Kegel und Kugel angeben	15.25, 15.26	
162	elementare geometrische Körper durch Parallelprojektion skizzieren	15.29	
	Transformationen		
163	geometrische Transformationen in der Ebene verstehen	15.34-a,b	
164	Beispiele von isometrischen und affinen Transformationen erkennen	15.32,15.34-c	
165	das Bild einer ebenen durch geometrische Transformation wie Translation, Rotation, Spiegelung oder Streckung entstandenen Figur ermitteln	15.31	

15.3 Aufgaben

Aufgabe 15.1 (10 Min) Benennen Sie alle in Bild 15.24 gezeigten Winkel.

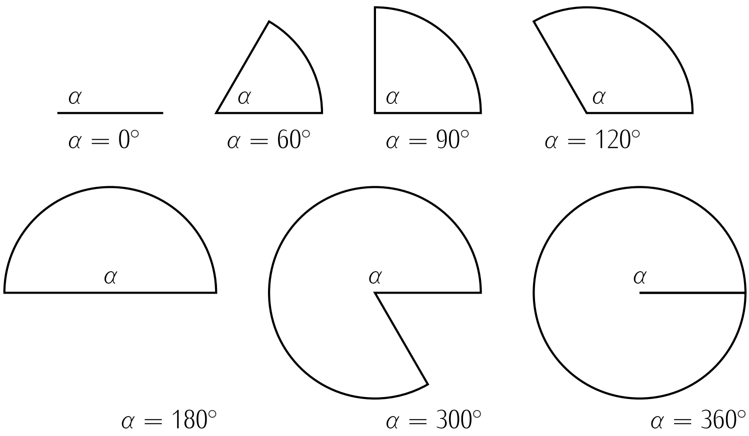


Bild 15.24: Sieben Winkel zur Aufgabe 15.1

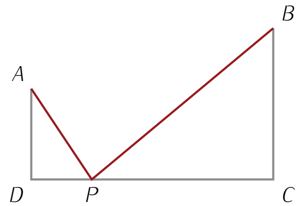


Bild 15.25: Planfigur zur Aufgabe 15.2.

Aufgabe 15.2 (15 Min) Die in Bild 15.25 gezeigte Figur hat die Längen $|\overline{AD}| = 3\text{cm}$, $|\overline{DC}| = 8\text{cm}$, $|\overline{BC}| = 5\text{cm}$ und es gilt $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ und $\overline{BC} \perp \overline{DC}$. Gesucht ist der Punkt P auf $\overline{DC}$, sodass die Summe der Strecken $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$ minimal wird.

a) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung.
b) Finden Sie einen geometrischen Grund für das Ergebnis.

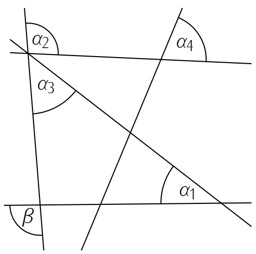


Bild 15.26: In Aufgabe 15.3 soll der Winkel β durch die anderen Winkel ausgedrückt werden.

Aufgabe 15.3 (5 min) Der Winkel β in Bild 15.26 ist mit Hilfe der vorliegenden Winkel α_i auszudrücken.

Aufgabe 15.4 (10 Min) Es sind Aussagen über Winkel gegeben. Kreuzen Sie nur die an, die immer richtig sind.

☐ Scheitelwinkel addieren sich zu 90°.
☐ Nebenwinkel addieren sich zu 180°.
☐ Scheitelwinkel sind gleich groß.
☐ Stufenwinkel sind gleich groß.
☐ Wechselwinkel an parallelen Geraden unterscheiden sich um 90°.
☐ Nebenwinkel unterscheiden sich um 90°.
☐ Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.
☐ Stufenwinkel addieren sich zu 180°.

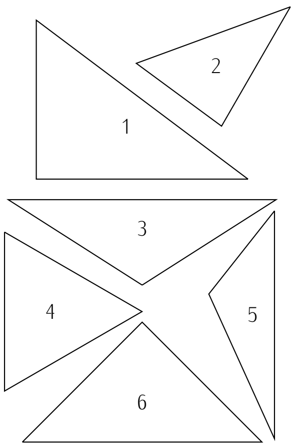


Bild 15.27: Verschiedene Dreieckstypen aus Aufgabe 15.5.

Aufgabe 15.5 (5 Min) Es geht um verschiedene Typen von Dreiecken. Welche sind gleichseitig oder gleichschenklig? Welche sind spitz-, stumpf- oder rechtwinklig? Geben Sie zu jedem der sechs in Bild 15.27 gezeigten Dreiecke an, um welchen Typ es sich handelt.

Aufgabe 15.6 (10 Min) Welche Arten von Dreiecken kennen Sie? Werden Seiten oder Winkel für die Typisierung benutzt? Beschreiben Sie jeden Typ. Welche Kombinationen gibt es?

Aufgabe 15.7 (10 Min) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180° oder π.

a) Berechnen Sie die Summe der Innenwinkel eines Fünfecks. Tipp: Teilen Sie das Fünfeck dazu in Dreiecke ein.
b) Leiten Sie analog eine Winkelsummenformel für einen geschlossenen Polygonzug mit n Ecken ohne Selbstüberschneidung her.

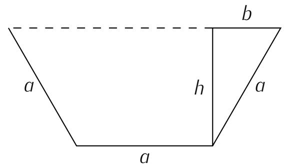


Bild 15.28: Querschnittsfläche der Rinne aus Aufgabe 15.8 als gleichschenkliges Trapez.

Aufgabe 15.8 (10 Min) Aus drei Brettern der Breite a soll eine Rinne hergestellt werden, deren Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez ist. Welche Höhe (in Abhängigkeit von a) muss das Trapez haben, damit der Flächeninhalt des Querschnitts maximal ist?

Aufgabe 15.9 (10 Min) Gegeben sind die Punkte $A = (12, 16)$, $B = (11.2, 15.4)$, $C = (0, 7)$, $D = (11.2, 0.4)$ und $E = (12, 2)$. Stellen Sie fest, ob die Dreiecke $\triangle(ACE)$ und $\triangle(BCD)$ kongruent sind. Vergleichen Sie ebenso die Dreiecke $\triangle(AEB)$ und $\triangle(AED)$.

Die nebenstehenden Aufgaben 15.9 und 15.10 verwenden Koordinatensysteme zur Definition von Eckpunkten von Figuren. Koordinatensysteme werden detailliert in Kapitel 17 behandelt.

Aufgabe 15.10 (5 Min) Gegeben ist ein Dreieck $D = \triangle(A, B, C)$ mit den Eckpunkten $A = (0, 0)$, $B = (4, 3)$, und $C = (1, 4)$. Überprüfen Sie, ob D zum Dreieck $D' = \triangle(A', B', C'$ mit folgenden Angaben $A' = (0, 3)$, $B' = (3, 4)$, $C' = (4, 0)$ kongruent ist.

Für Winkel und Seiten bei Dreiecken wird vereinbart: Winkel α liegt bei Ecke A, β bei B und γ bei C, die Seite a liegt gegenüber Winkel α, b gegenüber β und c gegenüber von γ.

Aufgabe 15.11 (10 Min) Ein Thales-Dreieck verbindet die beiden Eckpunkte eines Halbkreises mit einem Punkt auf dem Kreisbogen. Der Satz des Thales besagt, dass der Winkel bei dem Punkt auf dem Kreisbogen immer ein rechter Winkel ist.

a) Skizzieren Sie einen waagrecht liegenden Halbkreis mit Eckpunkten A und B. Zeichnen Sie eine Linie mit einem Winkel von 60° zur Grundlinie vom Kreismittelpunkt M aus. Der Schnittpunkt der Linie mit dem Kreisbogen ist der Punkt C.
b) Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle(ABC)$ und seine Fläche. Der Radius des Kreises ist r.
c) Bestimmen Sie die Größen des Flächenstücks, das durch die kurze Dreieckseite vom Halbkreis abgetrennt wird.

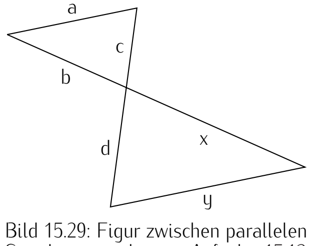


Bild 15.29: Figur zwischen parallelen Strecken a und y zur Aufgabe 15.12.

Aufgabe 15.12 (5 Min) Die Strecken a, b, c und d in Bild 15.29 sind bekannt, a und y sind parallel. Geben sie die Längen von x und y an.

Aufgabe 15.13 (5 Min) Ein Turm wirft einen Schatten von 42 m Länge. Zur gleichen Zeit ist der Schatten einer 1.80 m großen Person 2.25 m lang.

a) Welche Höhe hat der Turm?
b) Neben dem Turm steht ein 19 m hoher Baum. Wie lang ist der Schatten des Baumes?
c) Wie ändert sich die Höhe des Turmes, wenn der Schatten der Person um 15 cm länger wird?

Aufgabe 15.14 (10 Min) Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle(ABC)$. Von A wird das Lot auf die gegenüberliegende Seite gefällt, der dort liegende *Höhenfußpunkt* heiße P. Entsprechend sei Q der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt beider Höhen. Zeichnen Sie den dargestellten Sachverhalt und begründen dann, dass je zwei der vier Dreiecke $\triangle(APC)$, $\triangle(ASQ)$, $\triangle(BCQ)$, $\triangle(BPS)$ einander ähnlich sind.

Aufgabe 15.15 (5 Min) Gegeben ist ein Dreieck, in dem die Winkel α, β, γ den Seiten a, b, c gegenüberliegen.

a) Wann gilt $a^2 + b^2 = c^2$?
   - ☐ Wenn α ein rechter Winkel ist,
   - ☐ wenn β ein rechter Winkel ist,
   - ☐ wenn γ ein rechter Winkel ist,
   - ☐ die Beziehung ist immer richtig.

b) Wann gilt $a + b < c$?
   - ☐ Immer,
   - ☐ wenn a die längste Seite ist,
   - ☐ wenn b die längste Seite ist,
   - ☐ wenn c die längste Seite ist,
   - ☐ niemals.

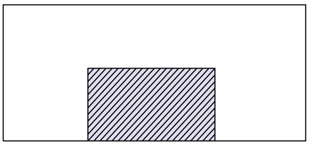


Bild 15.30: Der Schrank aus Aufgabe 15.17 nach dem Zusammenbau im Zimmer.

Aufgabe 15.16 (5 Min) Finden Sie zwei verschiedene Möglichkeiten, um eine Strecke der Länge $\sqrt{5}$ geometrisch zu konstruieren.

Aufgabe 15.17 (5 Min) Ein Schrank wurde seitlich auf dem Boden liegend zusammengebaut, siehe Bild 15.30. Als er aufgerichtet werden soll, ergeben sich Bedenken.

a) Was ist da schiefgegangen?
b) Welche Größen werden zur Lösung benötigt?
c) Die Maße des Schranks sind: $h = 2.10$ m; $b = 1.20$ m; T: 0.90 m. Die Raumhöhe ist $r = 2.25$ m. Lässt sich der Schrank mit diesen Maßen in dem Raum aufrichten?
d) Durch Abschrauben der Füße kann die Höhe des Schranks noch reduziert werden. Welche Höhe müssen die Füsse mindestens haben, damit das Aufrichten erfolgreich wird?

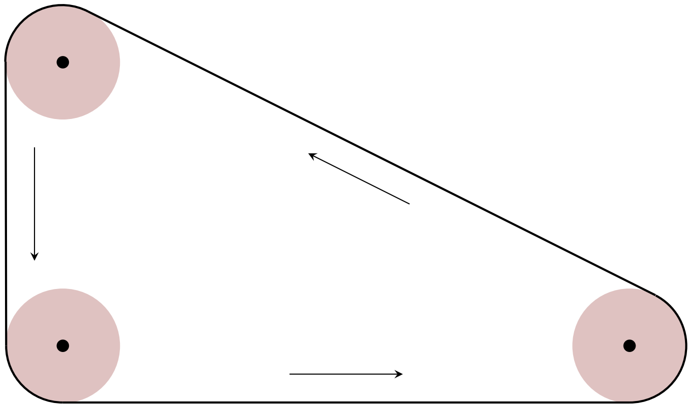


Bild 15.31: Modell des Förderbandes aus Aufgabe 15.18.

Aufgabe 15.18 (10 Min) Ein Förderband für Schüttgut läuft über drei Rollen. Die Rollen haben jeweils einen Radius von $r = 25$ cm. Die Achsen der drei Rollen bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit 10 m Länge und 5 m Höhe. Bild 15.31 verdeutlicht die Geometrie, ist jedoch nicht maßstabsgerecht. Berechnen Sie die Länge des Förderbands, wobei Sie zwischen den Anliegepunkten an den Rollen einen geradlinigen Verlauf annehmen können.

Aufgabe 15.19 (5 Min) Ein rechtwinklig gebauter Hörsaal hat die Abmessungen $l = 11.20$m, $b = 4.40$m, $h = 3.20$m. Wie lang ist die Raumdiagonale?

Aufgabe 15.20 (15 Min) Ein gerader Kreiskegel hat als Grundfläche einen Kreis mit dem Radius r. Genau über dessen Mittelpunkt liegt die Spitze in Höhe h. Die Mantellinie ist eine Verbindungsstrecke von Spitze und Rand des Grundkreises der Länge s.

a) Skizzieren Sie einen Kreiskegel und zeichnen Sie die drei genannten Größen ein.
b) Welche Beziehung besteht zwischen r, h und s? Begründen Sie das.
c) Das Volumen V des Kegels ist durch $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ gegeben. Welches ist das maximale Volumen aller möglichen Kreiskegel bei gegebener Mantellinie s?

Aufgabe 15.21 (5 Min) Welchen Flächeninhalt hat die Fläche, die durch einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung begrenzt wird?

Aufgabe 15.22 (5 Min) Welchen Flächeninhalt A hat ein Kreissektor mit Radius $r = 1$ und Öffnungswinkel $\beta = 1$rad? Welchen Radius hat ein Kreis mit demselben Flächeninhalt?

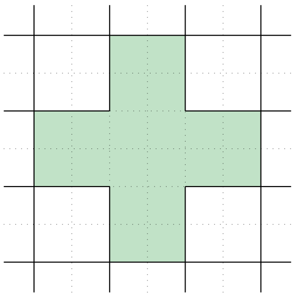


Bild 15.32: Aufgabe 15.23 fragt nach der Quadratur des Pluszeichens.

Aufgabe 15.23 (15 Min) Gegeben ist das Pluszeichen in Bild 15.32.

a) Zerlegen Sie das Pluszeichen mit vier geraden Schnitten so, dass aus den Teilen ein Quadrat zusammengesetzt werden kann.
b) Lösen Sie die Aufgabe mit zwei Schnitten.

Tipp: Welche Größe hat das Quadrat?

Aufgabe 15.24 (5 Min) Der Innendurchmesser d eines dünnen Glasrohrs wird bestimmt, indem dieses mit Quecksilber gefüllt wird. Die Masse des Quecksilbers wird als $m = 0.145\text{g}$ bestimmt. Die Dichte beträgt $\rho_{Hg} = 13.6\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Die Länge des Glasrohrs ist $l = 50\text{cm}$.

Wie berechnet sich das Innenvolumen V aus den vorliegenden Messwerten? Geben Sie eine Formel für den Innendurchmesser d mit Hilfe der vorhandenen Messwerte an.

Aufgabe 15.25 (5 Min) Gegeben ist ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius $r = 20$ cm und einer Länge von $l = 80$ cm.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Zylinders.
b) Bestimmen Sie die Größe der gesamten Zylinderoberfläche.

Aufgabe 15.26 (10 Min) Die Cheops-Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 230 m. Aus dem Neigungswinkel von 52° berechnet sich eine Höhe von 147.19 m. Bestimmen Sie das Volumen dieser ältesten und höchsten Pyramide der Welt.

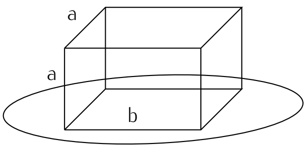


Bild 15.33: Durch eine kreisförmige Öffnung passender Quader zur Aufgabe 15.28.

Aufgabe 15.27 (15 Min) Ein Zylinder mit Boden und Deckel soll bei einem gegebenen Materialverbrauch $A = 10$ ein möglichst großes Volumen umschließen. Berechnen Sie den optimalen Radius r und die optimale Höhe h sowie das daraus resultierende Volumen.

Aufgabe 15.28 (15 Min) Der Quader in Bild 15.33 hat die Bodenfläche $a \cdot b$ und die Höhe a. Er soll mit der Bodenfläche durch eine kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser $d = 1$ passen. Zu bestimmen ist der bezogen auf sein Volumen größt mögliche Quader. Berechnen Sie seine Abmessungen a und b sowie sein Volumen V.

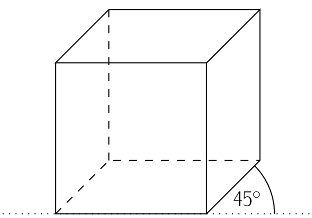


Bild 15.34: Die Kavaliersperspektive aus Aufgabe 15.29 als Parallelprojektion eines Würfels.

Aufgabe 15.29 (15 Min) Die *Kavaliersperspektive* ist eine Parallelprojektion. Der Körper wird so gezeigt, dass horizontal und vertikal verlaufende Linien maßstabsgerecht sind. In die Tiefe verlaufende Linien werden in der Länge auf die Hälfte gekürzt und mit 45° zur Horizontalen dargestellt. Bild 15.34 zeigt einen Würfel in Kavaliersperspektive. Ein Zylinder, dessen Länge doppelt so groß ist wie sein Durchmesser, soll in Kavaliersperspektive dargestellt werden. Erstellen Sie je eine Zeichnung des Zylinders wenn er steht oder wenn er liegt, das einmal die Mantelfläche und einmal die Kreisfläche in Blickrichtung liegt.

Aufgabe 15.30 (10 Min) Der Erdradius am Äquator beträgt 6378 km. Die Städte Quito und Singapur liegen beide fast genau auf dem Äquator und liegen sich auf der Erdkugel beinahe gegenüber. Quito liegt 78.51° westlich vom Nullmeridian, Singapur 103.85° östlich. Wie weit sind Quito und Singapur voneinander entfernt (Luftlinie)? Berechnen Sie beide Bogenlängen auf dem Äquator. Welche ist kürzer?

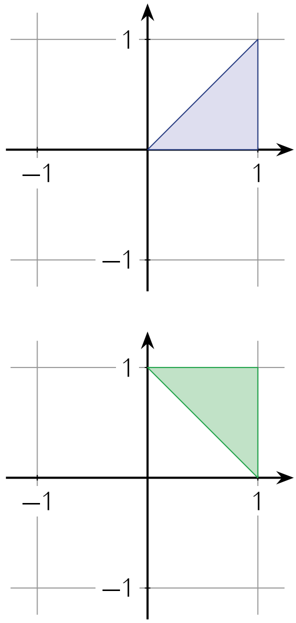


Bild 15.35: Zwei Figuren, die von Transformationen ineinander zu überführen sind, siehe Aufgabe 15.31.

Aufgabe 15.31 (10 Min) Welche Abfolge von zwei Transformationen überführt die obere Figur in Bild 15.35 in die untere Figur? Geben Sie drei verschiedene Varianten an.

Aufgabe 15.32 (5 Min) Die technische Zeichnung eines Bauteils wird

a) vom Maßstab 1 : 10 auf den Maßstab 1 : 20 umgestellt,
b) um 90° gedreht, um die Papiergröße besser auszunutzen,
c) um 2 cm zur Seite geschoben, um Platz für eine Beschriftung zu schaffen.

Benennen Sie die Transformationsschritte. Bei welchem dieser Bearbeitungsschritte handelt es sich um eine Isometrie?

Aufgabe 15.33 (10 Min) Rechnen Sie die folgenden Winkel im Gradmaß ins Bogenmaß um:

□ 90°	□ 135°	□ 80°
□ 30°	□ 150°	□ 45°
□ 60°	□ 20°	□ 75°

Aufgabe 15.34 (10 Min) Gegeben ist das Rechteck $R = \square(A, B, C, D)$ mit den Koordinaten $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$,$C = (2, 1)$, $D = (0, 1)$.

a) Das Rechteck wird rotiert, so dass die neuen Koordinaten des rotierten Rechtecks $R' = \square(A', B', C', D')$ wie folgt sind: $A' = (0, 0)$, $B' = (0, 2)$,$C' = (-1, 2)$, $D' = (-1, 0)$. Geben Sie den Rotationswinkel der zugehörigen Rotation an.
b) Das ursprüngliche Rechteck wird skaliert, sodass die neuen Koordinaten des Rechtecks $R'' = (A'', B'', C'', D'')$ wie folgt sind: $A'' = (0, 0)$, $B'' = (1, 0)$,$C'' = (1, 1)$, $D'' = (0, 1)$. Bestimmen Sie die Skalierungsrichtung und den Skalierungsfaktor und geben Sie an, ob es sich um eine Streckung oder Stauchung handelt.
c) Auf das ursprüngliche Rechteck wird eine Transformation angewendet, so dass eine neue Figur $R''' = \square(A''', B''', C''', D''')$ mit den Eckpunkten $A''' = (0, 2)$, $B''' = (2, 2)$,$C''' = (2, 3)$, $D''' = (0, 3)$. entsteht. Um welche Transformation handelt es sich?

Hinweis: Eine graphische Darstellung erleichtert die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 15.35 (10 Min) Rechnen Sie die folgenden Winkel im Bogenmaß in Gradmaß um:

☐ $\frac{1}{3}\pi$	☐ $\frac{7}{12}\pi$	☐ $\frac{1}{6}\pi$
☐ $\frac{1}{4}\pi$	☐ $\frac{2}{9}\pi$	☐ $\frac{11}{12}\pi$
☐ $\frac{2}{3}\pi$	☐ $\frac{1}{5}\pi$	☐ $\frac{1}{9}\pi$

15.4 Lösungen

Lösung 15.1 $\alpha = 0°$: Nullwinkel, $\alpha = 60°$: spitzer Winkel, $\alpha = 90°$: rechter Winkel, $\alpha = 120°$: stumpfer Winkel, $\alpha = 180°$: gestreckter Winkel, $\alpha = 300°$: überstumpfer (erhabener) Winkel, $\alpha = 360°$: voller Winkel, Vollwinkel (Vollkreis).

Lösung 15.2

a) Sei $x = |\overline{DP}|$ und die zu minimierende Streckensumme $d(x)$. Alle Entfernungen werden in [cm] angegeben. Es gilt im Dreieck $\triangle(ADP)$: $|\overline{AP}| = \sqrt{3^2 + x^2}$, ebenso im Dreieck $\triangle(PCB)$: $|\overline{BP}| = \sqrt{(8-x)^2 + 5^2}$. Dann ist $d(x) = |\overline{AP}| + |\overline{BP}| = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2 - 16x + 89}$ und $d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-8}{\sqrt{x^2-16x+89}}$.
Im Minimum gilt
$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = -\frac{x-8}{\sqrt{x^2-16x+89}} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+9} = \frac{x^2-16x+64}{x^2-16x+89} \Rightarrow$

$1 - \frac{x^2}{x^2+9} = 1 - \frac{x^2-16x+64}{x^2-16x+89} \Rightarrow \frac{9}{x^2+9} = \frac{25}{x^2-16x+89} \Rightarrow$
$9x^2 - 144x + 801 = 25x^2 + 225 \Rightarrow$

$16x^2 + 144x - 576 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \Rightarrow$
$x_{1/2} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = -\frac{9}{2} \pm \frac{15}{2}$ Daraus folgt $x_1 = 3$ oder $x_2 = -12$.

Wegen $d'(x_1) = 0$ und $d'(x_2) < 0$ gibt es nur eine Nullstelle der Ableitung d'. Es muss sich um das Minimum handeln, da $d(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.

b) Die geometrische Auszeichnung der minimalen Stelle P ist durch die Abstände $|\overline{DP}| = |\overline{AD}| = 3$ und $|\overline{BP}| = |\overline{BC}| = 5$ erkennbar. Wird die Spiegelung des Punkt B an $\overline{DC}$ mit B' benannt, geht die kürsteste Verbindung von A nach B' über den minimalen Punkt P. Die Strecken $\overline{BP}$ und $\overline{B'P}$ sind natürlich gleich lang. Geometrisch formuliert, die kürzeste Strecke von A nach B über die Spiegellinie $\overline{DC}$ führt über den Schnittpunkt der Verbindungsstrecke $\overline{AB'}$ mit der Spiegellinie $\overline{DC}$, siehe Bild 15.36.

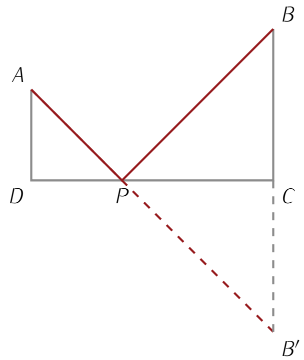


Bild 15.36: Graphische Darstellung zur Lösung der Aufgabe 15.2.

Lösung 15.3 $\beta = 180° - (\alpha_1 + \alpha_3)$. Wenn die beiden ungefähr waagerecht verlaufenden Geraden parallel wären, gälte auch $\beta = \alpha_2$, das ist aber nicht der Fall.

Lösung 15.4

- ☐ Scheitelwinkel addieren sich zu 90°. Erläuterung: Scheitelwinkel sind die gegenüberliegenden Winkel beim Schnittpunkt zweier Geraden, sie sind gleich groß und addieren sich nur zu 90°, wenn sie beide Winkel von 45° sind.
- ☒ Nebenwinkel addieren sich zu 180°. Erläuterung: Nebenwinkel sind die benachbarten Winkel beim Schnittpunkt von zwei Geraden, die sich folglich zu 180° ergänzen.
- ☒ Scheitelwinkel sind gleich groß. Erläuterung siehe oben.
- ☐ Stufenwinkel sind gleich groß. Erläuterung: Stufenwinkel sind die Winkel, die beim Schnitt einer Gerade mit zwei anderen Geraden entstehen und die beide auf der gleichen Seite der ersten Gerade und auf der sich entsprechenden Seite der beiden andern Geraden befinden. Sie sind nur dann gleich groß, wenn die beiden anderen Geraden Parallelen sind.
- ☐ Wechselwinkel an parallelen Geraden unterscheiden sich um 90°. Erläuterung: Wechselwinkel sind die Winkel, die beim Schnitt einer Gerade mit zwei anderen Geraden entstehen und die sich beide auf verschiedenen Seiten der ersten Gerade und auf der entgegengesetzten Seiten der beiden andern Geraden befinden. An zwei parallelen Geraden sind sie gleich groß.
- ☐ Nebenwinkel unterscheiden sich um 90°. Erläuterung: Nebenwinkel unterscheiden sich nur um 90°, wenn einer 45° und der andere 135° beträgt.
- ☒ Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß. Erläuterung: siehe oben.
- ☐ Stufenwinkel addieren sich zu 180°. Erläuterung siehe oben.

Lösung 15.5 Es ist Dreieck 1 rechtwinklig,
Dreieck 2 spitzwinklig,
Dreieck 3 gleichschenklig und stumpfwinklig,
Dreieck 4 gleichseitig mit drei spitzen 60° Winkeln,
Dreieck 5 stumpfwinklig sowie
Dreieck 6 gleichschenklig und rechtwinklig.

Lösung 15.6 Anhand des größten *Winkels* α im Dreieck werden unterschieden:

- ▹ spitzwinklig: $\alpha < 90°$
- ▹ rechtwinklig: $\alpha = 90°$
- ▹ stumpfwinklig: $\alpha > 90°$

Anhand der Seitenlängen werden unterschieden:

- ▹ gleichseitig: alle drei Seiten sind gleich lang.
- ▹ gleichschenklig: zwei Seiten sind gleich lang, die dritte Seite hat eine andere Länge.
- ▹ ungleichseitig: alle drei Seiten haben verschiedene Längen.

Gleichseitige Dreiecke haben drei gleiche Winkel von 60°, sind also spitzwinklig. Gleichschenklige wie ungleichseitige Dreiecke können spitz-, recht- oder stumpfwinkig sein.

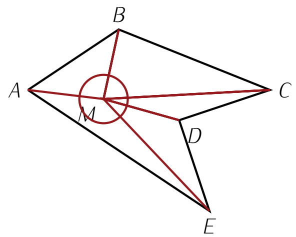


Bild 15.37: Winkelsumme im Fünfeck zur Lösung der Aufgabe 15.7.

Lösung 15.7

a) Eine Möglichkeit, die Winkelsumme eines beliebigen Fünfecks zu berechnen, ist es, einen beliebigen Punkt M in der Mitte zu wählen. Dieser Punkt verbunden mit den Eckpunkten des Fünfecks ergibt fünf Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke besitzt eine Winkelsumme von 180° oder π. In Bild 15.37 wird deutlich, dass alle Winkelsummen der fünf Dreiecke zusammen ($5 \cdot 180° = 5 \cdot \pi$), alle Innenwinkel des Fünfecks beinhalten. Die Winkel der fünf Dreiecke, die sich um den Punkt M befinden, sind allerdings auch mit inbegriffen. In der Grafik wird jedoch zusätzlich deutlich, dass die Summe der Winkel am Punkt M genau 360° oder 2π groß ist. Zusammengefasst werden also die Winkelsummen der fünf Dreiecke aufaddiert und mit 360° oder 2π subtrahiert: $5 \cdot 180° - 360° = 5 \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$ oder $5 \cdot \pi - 2 \cdot \pi = (5-2) \cdot \pi = 3 \cdot \pi$.

b) Für ein Polygon mit n Ecken stimmt die Vorgehensweise mit der der vorherigen Aufgabenstellung überein. Einen beliebigen Punkt in einem Polygon mit n Ecken gewählt und diesen Punkt mit den n Ecken verbunden, ergibt genau n Dreiecke, die das n-Eck darstellen. Werden nun wieder die Winkelsummen aller n Dreiecke aufaddiert, sind darin wie in der vorigen Aufgabenstellung alle Innenwinkel des n-Ecks und zusätzlich alle Winkel um den Punkt M enthalten. Die Summe der Winkel um den Punkt M ist also noch abzuziehen: $n \cdot 180° - 360° = n \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (n-2) \cdot 180°$ oder $n\pi - 2\pi = (n-2)\pi$.

Lösung 15.8 Es bezeichnen h die Höhe der Rinne $0 < h < a$, b die Breite der seitlichen Dreiecke der Rinne und Q den Flächeninhalt des Querschnitts der Rinne, vergleiche Skizze in Bild 15.28.

Die Breite b ergibt sich aus $a^2 = b^2 + h^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{a^2 - h^2}$, Q setzt sich aus den Flächeninhalten des Rechtecks und der beiden Dreiecke zusammen: $Q = ha + 2 \cdot \frac{1}{2} hb = h(a+b)$.

Durch Ersetzen von b wird Q eine Funktion von h: $Q(h) = h(a+b) = ha + h\sqrt{a^2 - h^2}$, und $Q'(h) = a + \sqrt{a^2 - h^2} - h^2 \frac{1}{\sqrt{a^2-h^2}}$ abgeleitet nach h.

Damit die Querschnittsfläche maximal wird, muss $Q'(h) = 0$ sein:

$$a + \sqrt{a^2 - h^2} - h^2 \frac{1}{\sqrt{a^2-h^2}} = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - h^2 - h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{a^2 - h^2} = 2h^2 - a^2 \Leftrightarrow a^4 - a^2h^2 = 4h^4 - 4a^2h^2 + a^4$$

$$\Leftrightarrow -a^2h^2 = 4h^4 - 4a^2h^2 \Leftrightarrow -a^2 = 4h^2 - 4a^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 4h^2$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{4} a \approx 0.866\, a.$$

Die obigen Äquivalenzen gelten in den Schritten, in denen quadriert wurde, da $a, b, h \geq 0$ gilt.

Die Berechnung des maximalen Flächeninhalts des Querschnitts war in der Aufgabenstellung nicht gefordert. Es gilt aber: $Q_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(1+\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1.299\,a^2$

An den Grenzen des Definitionsbereichs für $h = 0$ oder $h = a$ ist $Q(h) = 0$. Da $Q(h)$ im gesamten Intervall differenzierbar ist, stellt der gefundene Wert somit das eindeutige Maximum dar. Die Berechnung von $Q''(h) < 0$ kann entfallen.

Lösung 15.9 Es sind die Seitenlängen $|\overline{AC}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 = |\overline{DB}|$ sowie $|\overline{AE}| = 14 = \sqrt{11.2^2 + 8.4^2} = |\overline{BC}|$ und $|\overline{CE}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 = \sqrt{11.2^2 + 6.6^2} = |\overline{CD}|$. Die Dreiecke sind daher kongruent. Vergleiche Bild 15.38. Beim Dreieck $\triangle(AEB)$ sind die Seitenlängen $14, 13.424, 1$ während sie bei $\triangle(AED)$ die Werte $14, 1.789, 15.62$ haben. Damit sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent.

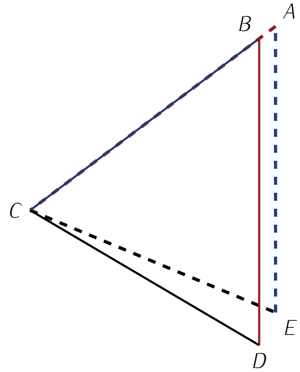


Bild 15.38: Zwei kongruente Dreiecke zur Aufgabe 15.9: gleich lange Seiten sind mit gleichen Farben gezeichnet.

Lösung 15.10 Es werden die Längen der Seiten beider Dreiecke miteinander verglichen. Für Dreieck D gilt

$$a = \sqrt{(C_x - B_x)^2 + (C_y - B_y)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

und dementsprechend $b = \sqrt{17}$ sowie $c = 5$. Für Dreieck D' gilt: $a' = \sqrt{17}$, $b' = 5$, $c' = \sqrt{10}$. Die Dreiecke D und D' sind kongruent, da die Seitenlängen übereinstimmen.

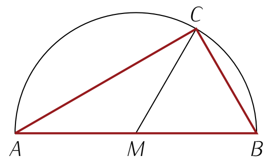


Bild 15.39: Thales-Kreis zur Aufgabe 15.11.

Lösung 15.11

a) Siehe Bild 15.39.

b) Die Strecken $\overline{AM}, \overline{MB}$ und $\overline{MC}$ haben die Länge r, da sie Kreisradien sind, $|\overline{AB}| = 2r$. Wegen $\angle(BMC) = 60°$ ist das Dreieck $\triangle(BMC)$ gleichseitig. Es gilt $\overline{BC} = r$.

   Das Thalesdreieck $\triangle(ABC)$ ist rechtwinklig, damit ist nach Pythagoras $\overline{AC} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$. Die Dreiecksfläche F ist die Hälfte des Produkts der Kathetenlängen mit $F = \frac{1}{2}|\overline{AC}|\,|\overline{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}rr = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \approx 0.866\,r^2$.

c) Das durch $\overline{CB}$ definierte Kreissegment hat den Öffnungswinkel 60°. Deswegen ist sein Anteil an der gesamten Kreisfläche $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ und damit ist sein Flächeninhalt $\frac{1}{6}A_K = \frac{1}{6}\cdot\pi r^2$, wenn A_K der Flächeninhalt des vollen Kreises ist.

   Das Kreissegment setzt sich aus dem Dreieck $\triangle(BMC)$ und dem gesuchten Flächenstück zusammen. Das Dreieck $\triangle(BMC)$ hat den Flächeninhalt $A_D = \frac{1}{2}r\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. Damit ist der gesuchte Flächeninhalt

   $\frac{1}{6}r^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})r^2 \approx 0.0906\,r^2$.