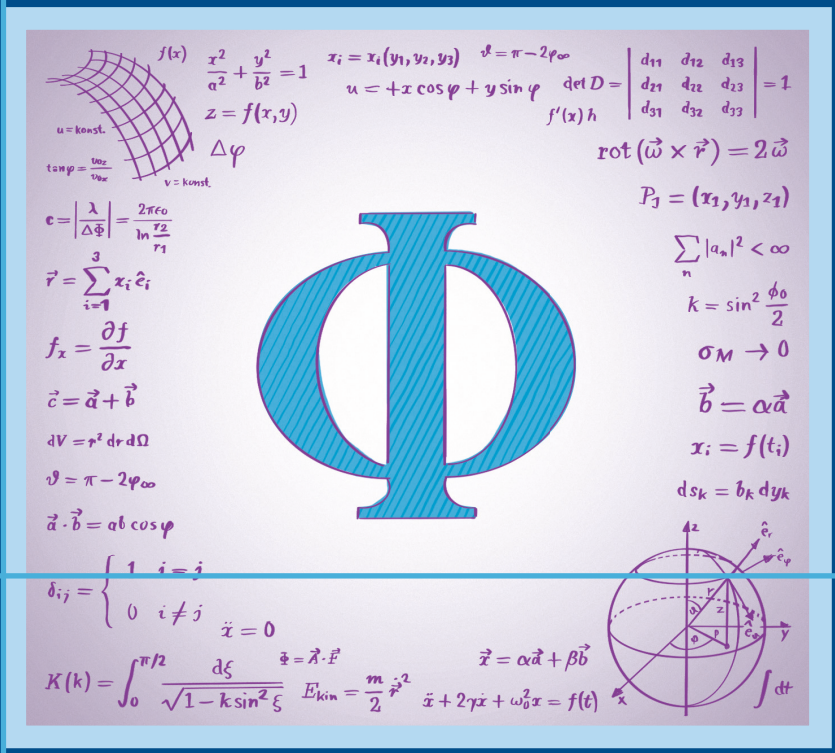
Hans Jürgen Korsch

Mathematische Grundlagen für Physiker

Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik



5., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Korsch

Mathematische Grundlagen für Physiker

Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Hans Jürgen Korsch

Mathematische Grundlagen für Physiker

Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik

5., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Autor:

Prof. Dr. Hans Jürgen Korsch
Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Physik

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
FSC
www.fsc.org

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.
Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Die 1. bis 4. Auflage sind im Verlagsprogramm des © Binomi Verlags, Barsinghausen, erschienen.

© 2021 Carl Hanser Verlag München
Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild:
Satz: Hans Jürgen Korsch
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47134-4
E-Book-ISBN 978-3-446-47152-8

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch richtet sich an Studienanfänger der Physik. Schon zu Beginn des Studiums wird klar, dass wohl das wichtigste Handwerkszeug des Physikers die Mathematik ist. Ja, man kann sogar behaupten, dass die Mathematik die eigentliche Sprache der Physik ist. In dieser Sprache werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten und Theorien formuliert, und zwar auch schon zu Beginn des Studiums. Sehr schnell stellt sich heraus, dass der dazu notwendige mathematische Apparat deutlich über den der Schulmathematik hinausgeht. Man muss seine Kenntnisse und Fertigkeiten kontinuierlich ausbauen, um den Inhalt der Physikvorlesungen zu verstehen.

Die Vorlesungen zur Mathematik, die jeder Physikstudent hören muss, werden ihn sorgfältig und in einem logischen Aufbau in diese Mathematik einführen. Man kann jedoch mit der Physik nicht warten, bis diese Mathematik vermittelt und verfügbar ist.

Der hier beschrittene Weg ist in vielen Aspekten pragmatisch. Dieses Skript enthält den Inhalt einer zweisemestrigen Vorlesung mit einem Umfang von zwei Wochenstunden, die eine vierstündige Vorlesung zur Experimentalphysik begleitet. Ziel dieser Ergänzungsvorlesung ist eine theoretisch-physikalische und mathematische Vertiefung des Stoffes der Grundvorlesungen in Physik. Dabei wird - nach Möglichkeit parallel zu dem Vorgehen in der Experimentalphysik - das mathematische Handwerkszeug des Physikers vermittelt. Solch ein Vorgehen ist nicht unproblematisch: Einerseits muss notgedrungen auf eine volle mathematische Strenge verzichtet werden, um nicht hoffnungslos hinter den experimentellen Teil zurückzufallen. Andererseits sollte dennoch ein (durch die Physik motivierter!) logischer Aufbau geboten werden, der auch ohne die begleitende Experimentalphysik in sich schlüssig ist und der die mathematischen Schwierigkeiten nicht verharmlost.

Die Stoffauswahl orientiert sich an den wesentlichen Inhalten der ersten Grundvorlesungen zur Physik und konzentriert sich in der Hauptsache auf die Mechanik und die Elektrostatik. Dazu werden die Grundlagen der Vektorrechnung, der Vektoranalysis sowie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt.

Einige ergänzende Hinweise:

- Der mathematische Stoff wird dabei nicht in „Reinkultur“ entwickelt, sondern nach Möglichkeit durch physikalische Problemstellungen motiviert und durch physikalische Beispiele verdeutlicht.

- Einige Gebiete aus der Schulmathematik, die oft nur unzureichend bekannt sind, z.B. komplexe Zahlen und Kegelschnitte, werden im Anhang dargestellt.

- Einen größeren Raum nimmt die Behandlung nichtlinearer Phänomene in der Dynamik ein, ein Gebiet, in dem spezielle mathematische Techniken Anwendung finden.

- An einigen Stellen erschien es angebracht erste elementare Techniken der Numerischen Physik anzusprechen. Solche Methoden werden schon im frühen Physik-Studium eingesetzt (z.B. Computersimulationen in der nichtlinearen Dynamik oder bei Auswertungen von Messreihen im Physikalischen Praktikum).

- Abschnitte mit Hintergrundinformation oder weiterführenden Methoden sind mit einem * gekennzeichnet und können bei einem ersten Durchgang übersprungen werden.

- Im gesamten Text sind zahlreiche Beispiele ausführlich behandelt. Die zusätzlichen Aufgaben am Ende jedes Kapitels sollten in eigener Regie gelöst werden. Zur Kontrolle findet man Lösungen am Schluss des Buches.

Die eigentliche Motivation zur Niederschrift dieses Vorlesungsskripts entstand durch unser FiPS-Fernstudienprojekt. FiPS steht für *Früheinstieg ins Physik-Studium*: „... begabten Abiturient(inn)en, die sich während Zivildienst, Bundeswehrdienst, Freiwilligem Sozialen Jahr oder anderer Wartezeiten bereits intensiv mit ihrem angestrebten Studienfach Physik beschäftigen wollen, wird die Möglichkeit geboten, in einem multimedialen Fernstudiengang wesentliche Lehrinhalte der ersten beiden Fachstudiensemester zu erwerben...“ – diese Information und mehr über das FiPS-Fernstudienprojekt findet man unter `http://www-fips.physik.uni-kl.de`. Im Rahmen dieses Projekts wurde – neben dem benutzten Physik-Textbuch[1] – eine schriftliche Ausarbeitung unseres mathematischen Ergänzungskurses als Arbeitsgrundlage benötigt.

Besonders verdient gemacht haben sich unsere ersten externen FiPS-Studenten, die viele Fehler und Ungereimtheiten in der Vorversion dieses Skriptes entdeckt und mich in ihren zahlreichen E-Mails darauf hingewiesen haben; insbesondere wären dabei Alexander André, Benjamin Bahr, Johannes Hecht, Henning Jürgens, Ralf Kaminke, Jan Koch, Aaron Lindner, Frederick Wagner, Karl Wunderle zu nennen. Außerdem hat mich unser FiPS-Team – Christian Bayer,

[1] W. Demtröder: *Experimentalphysik I und II* (Springer-Verlag, 1998/99)

Monika Kantner, Daniel Roth und Frank Schweickert – immer unterstützt und angespornt.

Danken möchte ich auch allen „regulären“ Physikstudenten an der Universität Kaiserslautern, die mit ihrer Kritik und vielen Verbesserungsvorschlägen zu dieser Ausarbeitung beigetragen haben, insbesondere Steffen Blomeier, Michael Deveaux und Eva Schuster.

Mein Dank gilt auch den Studenten und Mitarbeitern aus meiner Forschungsgruppe, Markus Glück, Michael Hankel, Christian Hebell, Frank Keck und Bernd Schellhaaß, die viele Texte korrekturgelesen und kritisch kommentiert haben, sowie Frau Wollscheid für die Mühe, die sie sich mit der Anfertigung der zahlreichen Bilder gemacht hat.

Schließlich möchte ich meiner Frau danken, die die vielen Arbeitswochenenden und -abende mit großer Gelassenheit ertragen hat und die durch ihre Hilfe meine Arbeit an diesem Skript erst möglich gemacht hat.

Das vorliegende Skript ist mit Sicherheit noch verbesserungsbedürftig, deshalb freue ich mich über jeden Vorschlag und Hinweis auf sicherlich noch vorhandene Fehler (möglichst an die unten angegebene E-Mail Adresse).

Kaiserslautern,
September 1999

Hans Jürgen Korsch
FB Physik, Universität Kaiserslautern,
67653 Kaiserslautern
E-Mail: h.j.korsch@gmail.de

Vorwort zur fünften Auflage

Dieses Buch mit dem Titel *Mathematische Grundlagen für Physiker – Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik* ist eine überarbeitete Neuauflage des Buches *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, erschienen im Binomi Verlag. Ich möchte Herrn Gerhard Merziger vom Binomi Verlag für die langjährige Zusammenarbeit herzlich danken und auch für die Anregung zu einer neuen Auflage dieses Textes im Carl Hanser Verlag. Vielen Dank auch an den Carl Hanser Verlag für die Bereitschaft, dieses Buch in ihr Verlagsprogramm zu übernehmen. Ganz besonders geholfen haben mir dabei Herr Frank Katzenmayer, Frau Christina Kubiak und Frau Anne Kurth vom Carl Hanser Verlag mit ihrer kompetenten Betreuung und vielen Verbesserungsvorschlägen.

Für diese fünfte Auflage wurde der Text erneut überarbeitet und ergänzt. Dabei waren die vielen Hinweise aus dem Leserkreis eine wertvolle Hilfe. Besonders zu erwähnen sind auch hier wieder die Anregungen von Stephan Bogendörfer.

Weitere Kommentare, kritische Bemerkungen und Hinweise auf Fehler bitte an die unten angegebene E-Mail Adresse. Eine von Zeit zu Zeit aktualisierte Korrekturliste findet man im Internet unter:

https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch

Dieses Buch wird im Fernstudiengang „Früheinstieg ins Physik-Studium“ (FiPS) der Technischen Universität Kaiserslautern als Lehrbuch benutzt. Weitere Informationen unter

http://www.fernstudium-physik.de/ .

Für Anfänger im Studium der Physik (und teilweise auch in den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften) stellt die Mathematik ein großes Problem dar. Gute Kenntnisse der Schulmathematik werden dabei stillschweigend vorausgesetzt, aber nicht jeder bringt hier die gleichen Voraussetzungen mit. Zum Ausgleich unterschiedlicher mathematischer Vorkenntnisse dienen an vielen Universitäten Vorkurse für Studienanfänger. Ein Skript zu einem solchen Vorkurs in Mathematik, der an der Technischen Universität Kaiserslautern seit vielen Jahren für die Studienanfänger in Physik angeboten wird, ist als Buch erhältlich:

> H. J. Korsch, „Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger der Physik und der Ingenieurwissenschaften“ (Binomi Verlag 2004), 119 Seiten
> http://www.binomi.de.

Dieses Buch ist als Brücke zwischen mathematischem Schulwissen und Anforderungen der Vorlesungen gedacht. Es eignet sich als Begleitliteratur zu einem Universitäts-Vorkurs oder zum Selbststudium und wird allen Studienanfängern der Physik oder der Ingenieurwissenschaften empfohlen.

Kaiserslautern,
August 2021

Hans Jürgen Korsch
E-Mail: h.j.korsch@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren **17**

1.1 Vektoren und Tensoren in der Physik 17

1.2 Vektorrechnung 20

1.2.1 Rechnen mit Vektoren 21

1.2.2 Abstraktion des Vektorbegriffs 23

1.2.3 Das Skalarprodukt 26

1.2.4 Das Vektorprodukt 28

1.2.5 Komponentendarstellung 30

1.2.6 Das Spatprodukt 34

1.2.7 Das doppelte Vektorprodukt 37

1.3 Differentiation 39

1.3.1 Differentiation von Vektorfunktionen 43

1.3.2 Die partielle Ableitung 46

1.4 Krummlinige Koordinaten I 50

1.4.1 Ebene Polarkoordinaten 51

1.4.2 Zylinderkoordinaten 55

1.4.3 Kugelkoordinaten 56

1.4.4 Allgemeine orthogonale Koordinatensysteme 61

1.5 Aufgaben 62

2 Datenanalyse und Fehlerrechnung* **65**
2.1 Messungen und Messfehler . . . 66
2.1.1 Die Normalverteilung . . . 68
2.1.2 Die Lorentz-Verteilung . . . 70
2.1.3 Statistische Maße einer Messreihe . . . 71
2.2 Fehlerfortpflanzung . . . 73
2.3 Ausgleichsrechnung . . . 75
2.4 Aufgaben . . . 78

3 Vektoranalysis I **79**
3.1 Der Gradient . . . 80
3.2 Die Divergenz . . . 85
3.3 Die Rotation . . . 88
3.4 Divergenz und Rotation . . . 89
3.5 Aufgaben . . . 91

4 Grundprobleme der Dynamik **93**
4.1 Gradientenfelder und Energieerhaltung . . . 97
4.1.1 Der schräge Wurf . . . 98
4.1.2 Das Federpendel . . . 101
4.1.3 Das mathematische Pendel . . . 103
4.1.4 Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten . . . 108
4.2 Impulssatz und Drehimpulssatz . . . 111
4.3 Das Zweiteilchensystem . . . 113
4.4 Zentralkraftfelder und Drehimpulserhaltung . . . 115
4.5 Aufgaben . . . 131

5 Matrizen und Tensoren **133**
5.1 Rechnen mit Matrizen . . . 134
5.2 Quadratische Matrizen . . . 136
5.2.1 Taylor-Entwicklung im $\mathbb{R}^n$ . . . 140
5.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 141
5.2.3 Der Trägheitstensor . . . 145

5.3 Drehung des Koordinatensystems 145
5.3.1 Transformation von Vektoren 148
5.3.2 Transformation von Matrizen* 150
5.3.3 Drehungen* 152
5.4 Diagonalisierung und Matrix-Funktionen* 157
5.4.1 Transformation auf Diagonalform 158
5.4.2 Matrix-Funktionen 161
5.5 Aufgaben 165

6 Lineare Differentialgleichungen* 167
6.1 Gleichungen zweiter Ordnung 168
6.2 Systeme erster Ordnung 172
6.3 Aufgaben 176

7 Lineare Schwingungen 177
7.1 Der harmonische Oszillator 178
7.1.1 Die freie Schwingung 179
7.1.2 Erzwungene Schwingungen 185
7.1.3 Energiebilanz 189
7.1.4 Dynamik im Phasenraum* 190
7.2 Gekoppelte Schwingungen 193
7.3 Aufgaben 200

8 Nichtlineare Dynamik und Chaos 203
8.1 Numerische Lösung von Differentialgleichungen 203
8.2 Der Duffing-Oszillator 206
8.3 Die logistische Differentialgleichung 211
8.4 Iterierte Abbildungen 214
8.5 Fraktale 225
8.6 Aufgaben 231

9 Vektoranalysis II **233**

9.1 Integrale über Vektorfelder . . . 235
9.1.1 Kurvenintegrale . . . 236
9.1.2 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen I . . . 241
9.1.3 Flächen- und Volumenintegrale . . . 245
9.1.4 Oberflächenintegrale . . . 250
9.1.5 Funktionaldeterminanten* . . . 256
9.2 Integraldarstellung von Divergenz und Rotation . . . 258
9.2.1 Die Divergenz als Quellenfeld . . . 258
9.2.2 Die Rotation als Wirbelfeld . . . 260
9.3 Integralsätze von Gauß, Stokes und Green . . . 261
9.3.1 Der Satz von Gauß . . . 263
9.3.2 Der Satz von Stokes . . . 264
9.3.3 Die greenschen Sätze . . . 265
9.4 Krummlinige Koordinaten II . . . 265
9.5 Elementare Anwendungen . . . 269
9.5.1 Die Maxwell-Gleichungen . . . 270
9.5.2 Die integrale Form der Maxwell-Gleichungen . . . 270
9.5.3 Der Zylinderkondensator . . . 271
9.5.4 Die Kontinuitätsgleichung . . . 274
9.5.5 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen II . . . 274
9.5.6 Der Zerlegungssatz . . . 275
9.5.7 Die Poisson-Gleichung . . . 276
9.6 Aufgaben . . . 277

10 Die Delta-Funktion **281**

10.1 Elementare Definition der Delta-Funktion . . . 282
10.2 Eigenschaften der Delta-Funktion . . . 285
10.3 Die dreidimensionale Delta-Funktion . . . 289
10.4 Theorie der Distributionen* . . . 292
10.5 Aufgaben . . . 296

11 Lineare partielle Differentialgleichungen der Physik 297
11.1 Die Poisson-Gleichung in der Elektro- und Magnetostatik . . . 298
11.1.1 Die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik 299
11.1.2 Die Multipolentwicklung 303
11.1.3 Die Poisson-Gleichung in der Magnetostatik 306
11.2 Poisson-Gleichung: Numerische Lösung 307
11.2.1 Die eindimensionale Poisson-Gleichung 308
11.2.2 Die zweidimensionale Poisson-Gleichung 312
11.3 Die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen* 314
11.4 Die Diffusionsgleichung 317
11.4.1 Die eindimensionale Diffusionsgleichung 317
11.4.2 Numerische Lösung der Diffusionsgleichung 322
11.4.3 Diffusion und „Random Walk“ 324
11.5 Die Wellengleichung 326
11.5.1 Eindimensionale Wellen 327
11.5.2 Die zweidimensionale Wellengleichung 336
11.5.3 Dreidimensionale ebene Wellen 340
11.6 Aufgaben 341

12 Orthogonale Funktionen 343
12.1 Orthogonale Polynome: 344
12.2 Fourier-Reihen 351
12.2.1 Beispiele für Fourier-Reihen 353
12.2.2 Allgemeine Eigenschaften der Fourier-Reihen 358
12.2.3 Periodisch angetriebener harmonischer Oszillator 359
12.3 Fourier-Transformationen 361
12.3.1 Eigenschaften der Fourier-Transformation 362
12.3.2 Beispiele für Fourier-Transformationen 365
12.3.3 Die Unschärferelation* 368
12.3.4 Anwendungen der Fourier-Transformation 370
12.4 Aufgaben 373

13 Wahrscheinlichkeit und Entropie* **375**
13.1 Wahrscheinlichkeit . . . 375
13.1.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . 376
13.1.2 Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit . . . 382
13.2 Entropie . . . 383
13.2.1 Ein Maß für die Unbestimmtheit . . . 384
13.2.2 Eigenschaften von $S(p_1, \ldots, p_n)$: . . . 388
13.3 Maximale Unbestimmtheit . . . 389
13.4 Die Boltzmann-Verteilung . . . 394
13.4.1 Der harmonische Oszillator . . . 395
13.4.2 Magnetisierung . . . 396
13.4.3 Das ideale einatomige Gas . . . 397
13.5 Entropie und Irreversibilität . . . 401
13.6 Aufgaben . . . 402

A Der Vektorraum der Polynome* **405**

Anhang **405**

B Komplexe Zahlen **409**
B.1 Konjugiert komplexe Zahlen . . . 412
B.2 Die Polardarstellung . . . 414
B.3 Komplexe Wurzeln . . . 416
B.4 Fundamentalsatz der Algebra . . . 418

C Kegelschnitte **419**
C.1 Die Ellipse . . . 419
C.2 Die Hyperbel . . . 424
C.3 Die Parabel . . . 426
C.4 Quadratische Formen . . . 428
C.5 Die Familie der Kegelschnitte . . . 429

Lösungen der Übungsaufgaben **431**

Index **499**

Kapitel 1

Vektoren

1.1 Vektoren und Tensoren in der Physik

Die Physik befasst sich mit der Beschreibung von Vorgängen in Zeit und Raum, genauer: mit ihrer *mathematischen* Beschreibung. Von Raum und Zeit haben wir einige mehr oder weniger vage Grundvorstellungen, die mit zunehmenden physikalischen Kenntnissen präzisiert, korrigiert oder erweitert werden. Hier sollen unsere anschaulichen Vorstellungen aber zunächst ausreichen.

Zu einer mathematischen Formulierung der physikalischen Gesetze (beispielsweise zu einer Beschreibung einer Bewegung im Raum) benötigen wir zunächst ein passendes mathematisches Handwerkszeug. In einer eindimensionalen Welt wäre das kein großes Problem: Die Position im „Raum“ ist durch eine einzige (reelle) Variable (eine „Koordinate“) gekennzeichnet, die wir zum Beispiel mit dem Buchstaben x bezeichnen können, und ein physikalisches Gesetz wie die Bewegungsgleichung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ schreibt sich als $F = ma$. Dabei steht F für die Kraft, m für die Masse und a für die Beschleunigung.

Im dreidimensionalen Raum ist das nicht mehr so einfach. Man kann sich damit helfen, indem man alles auf ein vorgegebenes Koordinatensystem bezieht. Aber dann sind eben nach Konstruktion(!) alle physikalischen Gesetze für dieses eine Koordinatensystem formuliert. Das ist ganz offensichtlich sehr unflexibel, denn die mathematische Form physikalischer Gesetze, bei denen auf Koordinatensysteme bezogene Größen beteiligt sind, kann unmöglich von der (willkürlichen!) Wahl des Koordinatensystems abhängen, denn sonst gäbe es unendlich viele

Formulierungen ein und desselben Gesetzes. Wir benötigen also eine mathematische Beschreibung durch Größen, die unabhängig sind von den speziellen Koordinatensystemen (oder sich nach passenden Regeln transformieren) und so die Invarianz der physikalischen Gesetze gewährleisten.

Mathematische Größen, die das leisten, sind die *Tensoren*, ein einfacher Spezialfall davon sind die *Vektoren*. Neben ihrer Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen erlauben sie auch eine Reihe von Rechenoperationen. Wie wir sehen werden, haben sie eine sehr wichtige mathematische Struktur, *linearer Raum* genannt. Eine Realisierung einer solchen Struktur stellt z.B. die Menge aller Translationen im Raum dar, also ganz anschaulich: die Menge aller parallelgleichen Pfeile. Der Tensorkalkül ist nicht nur nützlich, sondern für die Bewältigung vieler physikalischer Probleme unbedingt notwendig, wie zum Beispiel für Albert Einstein bei der Formulierung seiner Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wie so oft, wird man erst später die oben verlangte Invarianz der Größen gegenüber Transformationen des Koordinatensystems richtig verstehen können. Das liegt auch daran, dass man zur mathematischen Formulierung bequemerweise schon den Tensor-Formalismus benutzen müsste, der ja eigentlich erklärt werden soll! Wir gehen hier heuristisch vor, wobei wir die wesentlichen Gedanken zunächst einmal für den $\mathbb{R}^2$ formulieren, also den zweidimensionalen Raum der Zahlenpaare (x, y). Diese Zahlenpaare lassen sich als Punkte der x,y-Ebene darstellen, und wir würden gerne durch dieses Zahlenpaar einen Vektor erklären, also eine Größe, die einen Betrag und eine Richtung hat, gekennzeichnet durch den Pfeil im Bild 1.1. Wir schreiben solche vektoriellen Größen als $\vec{a}$, wobei der Pfeil über dem Buchstaben auf ihre Richtungseigenschaft hinweisen soll (außerdem findet man in der Literatur auch eine Kennzeichnung von Vektoren durch fett gedruckte Buchstaben). Der Betrag, geschrieben als

$$a = |\,\vec{a}\,|\,, \quad a \in \mathbb{R}\,, \tag{1.1}$$

ist hier die Länge des Vektorpfeils, also $a = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Was geschieht nun, wenn wir zu einem Koordinatensystem übergehen, das um einen Winkel φ gedreht ist? In dem gedrehten Koordinatensystem hat der *gleiche* Vektor $\vec{a}$ statt der Koordinaten (x, y) die Koordinaten (u, v). Man kann sich überlegen, dass man durch

$$\begin{aligned} u &= +x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ v &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.2}$$

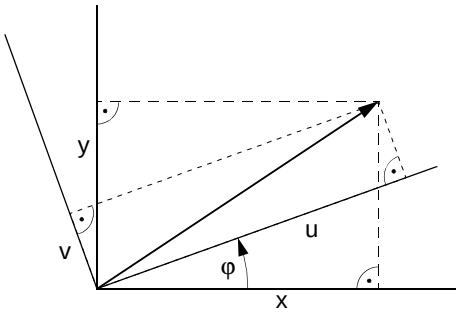


Bild 1.1: Bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Koordinaten (x, y) in die Koordinaten (u, v).

aus den (x, y) die (u, v) berechnen kann. Der Betrag des Vektors $\vec{a}$ in den neuen Koordinaten ist gleich $\sqrt{u^2 + v^2}$, und wir sehen mit

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (+x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 \\ &= x^2\cos^2\varphi + 2xy\cos\varphi\sin\varphi + y^2\sin^2\varphi \\ &\quad + x^2\sin^2\varphi - 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\cos^2\varphi \\ &= x^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + y^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ &= x^2 + y^2\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

dass der Betrag des Vektors $\vec{a}$ sich bei der Drehung des Koordinatensystems nicht ändert. Jetzt dreht man den Spieß um und bezeichnet jede Größe, die durch ein Paar reeller Zahlen beschrieben wird, als einen *Vektor*, falls diese beiden Zahlen, die Koordinaten, sich bei einer Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel φ wie (1.2) transformieren. Eine Größe, die sich bei einer Drehung nicht ändert, nennt man einen *Skalar*. Ein solcher Skalar ist uns schon bekannt: Der Betrag eines Vektors ist ein Skalar.

Ganz genauso kann man jetzt Vektoren im dreidimensionalen Raum als Zahlentripel (x, y, z) der drei Koordinaten bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems darstellen, die sich bei Transformationen (Drehungen) des Koordinatensystems in einer bestimmten Weise transformieren. Allerdings ist hier die Formulierung einer Drehung komplizierter, so dass wir einen anderen Weg einschlagen und uns im nächsten Abschnitt überlegen, dass man mit solchen Vektoren auch rechnen kann.

Wir werden sehen, dass man auch Vektoren in höherdimensionalen Räumen bilden kann. Es ist deshalb zweckmäßig, eine Indexschreibweise zu benutzen

und die Komponenten eines Vektors $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^3$ mit (a_1, a_2, a_3) zu bezeichnen. Unser physikalisches Gesetz „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ kann man dann als $\vec{F} = m\vec{a}$ ausdrücken mit den Vektoren für die gerichteten Größen Kraft und Beschleunigung und einem Skalar für die Masse. Diese Formulierung ist koordinatenfrei.

Es wird leider noch etwas schwieriger, denn es lässt sich später nicht vermeiden mit Größen umzugehen, die noch komplizierter sind als Vektoren: mit *Tensoren*. Das hat allerdings noch etwas Zeit, deshalb hier nur ein Appetitmacher: Ein Tensor k-ter Stufe ist eine k-fach indizierte Größe, die sich in allen Indizes so transformiert wie ein Vektor. Ein Vektor selbst ist also ein Tensor erster Stufe, ein Skalar ein Tensor nullter Stufe. Tensoren zweiter Stufe werden wir als Matrizen kennen lernen, die beispielsweise die erwähnten Drehungen beschreiben. Eigentlich also ganz einfach...

1.2 Vektorrechnung

Im vorangehenden Abschnitt wurde der Vektorbegriff motiviert. Ein zweidimensionaler Vektor ist danach ein Zahlenpaar, ein dreidimensionaler Vektor ein Zahlentripel, die sich bei Transformationen der Koordinatensysteme in geeigneter Weise verhalten.

Wir werden jetzt zeigen, dass man mit solchen Größen rechnen kann, und dann eine präzise Definition des Vektors nachliefern. Ein Beispiel vektorieller Größen liefern die Verschiebungen (oder *Translationen*) der Punkte des Raumes

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \implies P_2 = (x_2, y_2, z_2)\,, \tag{1.4}$$

wobei (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) die Koordinaten der Punkte bezeichnen.

Wir werden im Folgenden die Rechenoperationen und ihre Eigenschaften einführen und am Beispiel der Verschiebungen im dreidimensionalen Raum illustrieren. Der abstrakte und verallgemeinerte Vektorbegriff im n-dimensionalen Raum wird dann definiert mithilfe dieser Rechenoperationen: Eine Menge, in der diese Rechenoperationen mit ihren bestimmten (einfachen und plausiblen!) Eigenschaften erklärt sind, heißt *Vektorraum* oder auch *linearer Raum*, und die Elemente dieser Menge heißen *Vektoren*.

Eine spezielle Klasse von Vektoren kennzeichnen wir durch ein Dachsymbol statt eines Vektorpfeils. Solch ein Vektor $\hat{a}$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag $|\hat{a}\,| = 1$. Man bezeichnet solche Vektoren als *Einheitsvektoren* (siehe Bild 1.2).

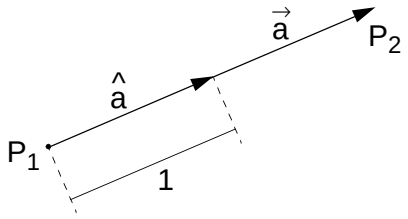


Bild 1.2: Vektor $\vec{a}$ und Einheitsvektor $\hat{a} = \vec{a}/a$.

1.2.1 Rechnen mit Vektoren

Es gibt zwei unterschiedliche Rechenoperationen mit Vektoren, die Multiplikation mit Zahlen (Skalaren), die wir im Folgenden mit griechischen Buchstaben wie α, β,... bezeichnen, und die Addition von Vektoren, die eine Reihe von Verträglichkeitsregeln erfüllen. Im Wesentlichen sagt diese Verträglichkeit aus, dass man rechnen darf „wie gewohnt“. Es geht also hier nicht darum, etwas Besonderes oder gar Außergewöhnliches zu lernen. Als anschaulichen Hintergrund zur Motivation der verschiedenen Rechenoperationen verwenden wir als Bild für die Vektoren die Verschiebungen im Raum in eine bestimmte Richtung um einen bestimmten Betrag.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: Das Produkt eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar α ergibt als Resultat ist wieder einen Vektor

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}\,, \tag{1.5}$$

mit der Eigenschaft, dass der Betrag um den Faktor $|\alpha|$ geändert wird:

$$|\vec{b}\,| = |\alpha|\,|\vec{a}\,|\,. \tag{1.6}$$

Damit kann man schreiben

$$\vec{a} = |\,\vec{a}|\,\hat{a} = a\hat{a}\,. \tag{1.7}$$

Für positives $\alpha > 0$ ist die Richtung von $\vec{b}$ in (1.5) gleich der von $\vec{a}$, für $\alpha < 0$ entgegengesetzt. Das lässt sich schreiben als

$$\hat{b} = \mathrm{sign}(\alpha)\,\hat{a}\,, \tag{1.8}$$

wobei mit sign(α) das Vorzeichen von α bezeichnet wird. Diese Multiplikation ist assoziativ:

$$(\alpha\beta)\,\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}\,)\,. \tag{1.9}$$

Für die Verschiebungen im Raum wird also der Betrag der Verschiebung um den Faktor $|\alpha|$ geändert, die Richtung wird beibehalten ($\alpha > 0$) oder umgekehrt ($\alpha < 0$).

Einige einfache Folgerungen:

(1) Mit $\alpha = 0$ ergibt sich der *Nullvektor* $\vec{0} = 0\,\vec{a}$. Der Nullvektor hat keine bestimmte Richtung.

(2) Mit $\alpha = -1$ erhält man $\vec{b} = -\vec{a}$, einen Vektor gleicher Länge in umgekehrter Richtung (vgl. Bild 1.3).

(3) Mit $\alpha = 1/a$ ($a = |\,\vec{a}| \neq 0$) ergibt sich der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$:

$$\frac{1}{a}\,\vec{a} = \frac{1}{a}\,a\,\hat{a} = \hat{a}\,. \tag{1.10}$$

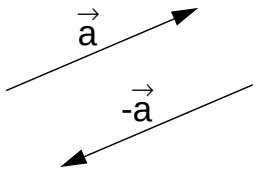


Bild 1.3: Umkehrung der Richtung eines Vektors bei negativem Vorzeichen.

Addition zweier Vektoren: Für die Verschiebungen im Raum lässt sich eine Addition als Hintereinanderausführung der beiden Verschiebungen definieren. Das Ergebnis ist wieder eine Verschiebung. Wir definieren also die Summe zweier Vektoren

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\,, \tag{1.11}$$

wie im Bild 1.4 dargestellt. Die Addition ist kommutativ:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,. \tag{1.12}$$

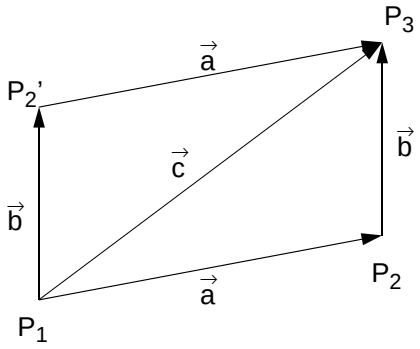


Bild 1.4: Addition von Vektoren $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$.

Die Addition von drei Vektoren erfolgt schrittweise durch aufeinanderfolgende Addition zweier Vektoren; sie ist assoziativ und distributiv:

$$\begin{aligned} \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \\ (\alpha + \beta)\,\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2.2 Abstraktion des Vektorbegriffs

Nachdem wir jetzt anhand der anschaulichen Verschiebungsvektoren die elementaren Rechenregeln von Vektoren erläutert haben, können wir davon abstrahieren. Wir betrachten eine allgemeine Menge, deren Elemente wir mit $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... bezeichnen, in der eine Addition mit den folgenden Eigenschaften erklärt ist:

(G1) Es gilt das Assoziativgesetz $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

(G2) Der Nullvektor $\vec{0}$ ist „neutrales Element“: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$.

(G3) Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein „inverser Vektor“ $\vec{b} = -\vec{a}$, mit $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

(G4) Die Addition ist kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Diese Struktur definiert eine *kommutative Gruppe*, auch *abelsche Gruppe* genannt.

Weiterhin sei eine Multiplikation $\alpha\vec{a}$ mit einem Skalar α (einem Element aus dem „Körper“ der reellen Zahlen) erklärt mit:

(K1) Es gelten die Distributivgesetze $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ und $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

(K2) Es gilt das Assoziativgesetz $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

(K3) Die Zahl 1 (das „Einselement des Zahlenkörpers“) erfüllt die Gleichung $1\vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$.

Man nennt eine solche Menge von Elementen mit Rechenoperationen, die die Regeln (G1) – (G4) und (K1) – (K3) erfüllen, *linearer Raum* (auch *Vektorraum* über dem Körper der reellen Zahlen.

Wenn eine Menge $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ von k Vektoren gegeben ist, so interessiert man sich oft für die Menge der Linearkombinationen

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{x}_j \;, \alpha_j \in \mathbb{R}\,, \tag{1.14}$$

die durch diese Vektoren erzeugt werden können. Man nennt diese Menge die *lineare Hülle* dieser Vektoren, die von ihnen *aufgespannt* wird.

Falls einer der Vektoren, z.B. x_m, als Linearkombination der restlichen dargestellt werden kann,

$$\vec{x}_m = \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \gamma_j\,\vec{x}_j \;, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}\,, \tag{1.15}$$

oder bequemer: wenn man schreiben kann

$$\beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots + \beta_k\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\vec{x}_j = \vec{0}\,, \quad \beta_j \in \mathbb{R}\,, \tag{1.16}$$

mit irgendwelchen Koeffizienten $\beta_j \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich null sind, dann ist zumindest einer dieser Vektoren in einer gewissen Weise überflüssig, denn auch ohne ihn wird die gleiche lineare Hülle erzeugt. Man nennt die Vektoren $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ in einem solchen Fall *linear abhängig* und anderenfalls *linear unabhängig*.

Die Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes, die diesen Vektorraum aufspannen, ist stets dieselbe und heißt *Dimension* dieses Vektorraums, und eine solche linear unabhängige Menge heißt *Basis* dieses Raumes.

Beispiele von Vektorräumen:

Die Translationen: Die Translationen oder Verschiebungen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ bilden den wohl bekanntesten Vektorraum, der meist schon in der Schule behandelt wird. Eine solche Translation T_a verschiebt alle Punkte parallel. Insbesondere wird der Nullpunkt mit den Koordinaten $(0, 0, 0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem in einen Punkt mit den Koordinaten (a_1, a_2, a_3) verschoben. Diese drei Zahlen a_i, $i = 1, 2, 3$, charakterisieren die Verschiebung in eindeutiger Weise. Ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten (r_1, r_2, r_3) wird durch T_a in den Punkt $(r_1 + a_1, r_2 + a_2, r_3 + a_3)$ verschoben.

Eine Addition zweier Verschiebungen T_a und T_b erklärt man durch die Hintereinanderschaltung der beiden Operationen. Dabei wird der Nullpunkt zuerst durch T_a nach (a_1, a_2, a_3) und dann durch T_b, beschrieben durch (b_1, b_2, b_3), nach $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ verschoben. Formal schreibt man das als

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,. \tag{1.17}$$

Eine Multiplikation einer Translation T_a mit einer Zahl α ist eine Verschiebung in die gleiche Richtung wie T_a, aber um den Faktor α skaliert. Dadurch entsteht eine Translation, die den Nullpunkt nach $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$ verschiebt. Formal schreibt man das als

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)\,. \tag{1.18}$$

Es ist offensichtlich, dass diese Operationen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) erfüllen: Die Translationen bilden einen Vektorraum. Dieser Vektorraum ist dreidimensional: Die drei Translationen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sind linear unabhängig (Beweis?) und jede Translation (a_1, a_2, a_3) lässt sich durch eine Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen (Beweis?). Die drei Vektoren bilden also eine Basis.

Weiterhin kann man sich leicht davon überzeugen, dass man in genau der gleichen Weise Translationen in einem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ erklären kann, die man durch die n Koordinaten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ beschreibt.

Die Polynome: Neben den Translationen erfüllen eine Reihe anderer mathematischer Strukturen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) und bilden folglich

einen Vektorraum. Viele dieser Vektorräume sind in der Physik von Bedeutung. Ein Beispiel eines solchen abstrakten Vektorraums ist die Menge aller Polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{1.19}$$

mit Grad $\leq n$. In Anhang A wird gezeigt, dass diese Menge eine Vektorraumstruktur besitzt. Sie bildet einen Vektorraum der Dimension $n+1$, und man kann daher mit diesen Polynomen rechnen wie mit Vektoren.

1.2.3 Das Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt*, das auch *inneres Produkt* genannt wird, ist ein Produkt zweier Vektoren, dessen Resultat eine Zahl ist, ein Skalar. Man kennzeichnet dieses Produkt durch einen Punkt. Es ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\varphi \,. \tag{1.20}$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren (vgl. Bild 1.5). Zunächst sollten wir uns überlegen, dass das Resultat dieses Produkts wirklich einen Skalar liefert, denn sowohl die Beträge der beiden Vektoren als auch der Winkel zwischen ihnen bleiben bei einer Drehung des Koordinatensystems unverändert, und dies war ja die Forderung an eine skalare Größe (vgl. Seite 19).

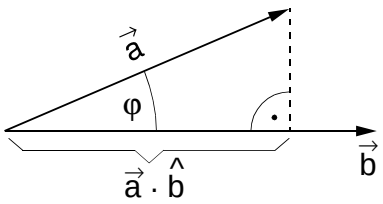


Bild 1.5: Skalarprodukt zweier Vektoren. Die Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b}$ hat die Länge $\vec{a} \cdot \hat{b} = a \cos\varphi$.

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \quad \text{(kommutativ)} \tag{1.21}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \quad \text{(distributiv)} \tag{1.22}$$

$$\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) \quad \text{(homogen)}\,. \tag{1.23}$$

Einige Spezialfälle:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} &\implies \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\\
\vec{a} \text{ parallel } \vec{b} &\implies \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\\
\vec{a} \text{ antiparallel } \vec{b} &\implies \vec{a}\cdot\vec{b} = -ab\\
\vec{a} = \vec{b} &\implies \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2\\
\vec{a} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \vec{0} &\implies \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Zwei Vektoren sind also *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Weiterhin gilt die *schwarzsche Ungleichung*

$$-ab \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le ab\,. \tag{1.25}$$

Man kann mithilfe des Skalarprodukts sehr einfach die *Projektion* eines Vektors $\vec{a}$ auf eine Richtung (beschrieben durch einen Einheitsvektor $\hat{b}$) definieren. Für den Wert dieser Projektion gilt

$$a_\mathrm{b} = a\cos\varphi = \vec{a}\cdot\hat{b} \tag{1.26}$$

($|\hat{b}| = 1$). Um den projizierten Vektor zu erhalten, multipliziert man einfach den Einheitsvektor $\hat{b}$ mit dem Betrag a_b:

$$\vec{a}_\mathrm{b} = a_\mathrm{b}\,\hat{b} = \left(\vec{a}\cdot\hat{b}\right)\hat{b}\,. \tag{1.27}$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Skalarprodukts beweisen wir den Kosinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,, \tag{1.28}$$

wobei der Winkel γ der Seite c gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Der Beweis ist sehr einfach:

$$\begin{aligned}
c^2 &= \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a} = a^2+b^2-2ab\cos\gamma\,.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

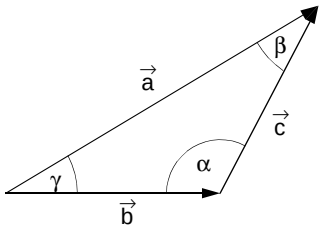


Bild 1.6: Dreieck aus den Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Man kann sogar sagen, dass man – sobald man das Skalarprodukt zur Verfügung hat – den Kosinus-Satz vergessen kann.

Hier sind wir bei der Definition des Skalarprodukts von der anschaulichen Bedeutung eines Vektors ausgegangen, der insbesondere eine Richtung im Raum besitzt. Der Winkel zwischen zwei solchen Vektoren ist dabei anschaulich klar. In einer abstrakteren Definition eines Vektorraums (vgl. Abschnitt 1.2.2) ist das aber nicht der Fall. Hier kann man das Skalarprodukt durch die Eigenschaften (1.21) – (1.23) sowie $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ *definieren*. Allerdings existiert ein solches Skalarprodukt nicht für jeden Vektorraum. Ein Beispiel für einen abstrakten Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist der Vektorraum der Polynome in Anhang A. Dort wird gezeigt, dass man sogar in abstrakter Weise einen „Winkel“ zwischen zwei Polynomen definieren kann.

1.2.4 Das Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt zweier Vektoren existiert im dreidimensionalen Fall $\mathbb{R}^3$ noch ein zweites Produkt, dessen Resultat aber ein Vektor ist. Man nennt dieses *Vektorprodukt* auch *Kreuzprodukt* oder *äußeres Produkt*. Es ist definiert als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{mit} \quad c = ab\,|\sin\varphi|\,, \tag{1.30}$$

das heißt, der Betrag des Vektors $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Diese Fläche ist das Produkt der Länge der Grundseite a und der Höhe $h = b\,|\sin\varphi|$:

$$\text{Fläche} = ah = ab\,|\sin\varphi|\,. \tag{1.31}$$

Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht. Dabei wird diejenige der beiden dabei möglichen Richtungen von $\vec{c}$ durch die *Rechtsschraubenregel* festgelegt: Dreht man den ersten Vektor, $\vec{a}$, des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ auf dem

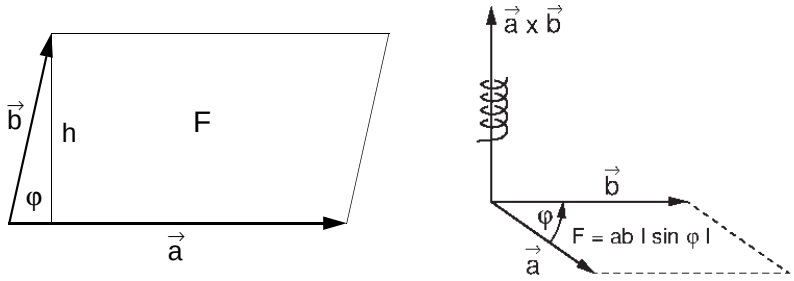


Bild 1.7: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms, seine Richtung wird bestimmt durch die Rechtsschraubenregel.

kürzestem Weg in Richtung des zweiten Vektors, $\vec{b}$, so hat der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ die Richtung, in der sich eine Rechtsschraube bei dieser Drehung fortbewegen würde. Alternativ kann man sich diese Richtung auch mittels der „Daumenregel der rechten Hand“ merken: Orientiert man die rechte Hand so, dass die Finger der Richtung vom ersten Vektor zum zweiten folgen, so zeigt der Daumen in Richtung des Vektorprodukts.

Eigenschaften des Vektorprodukts:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{(antikommutativ)} \tag{1.32}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{(distributiv)} \tag{1.33}$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) \quad \text{(homogen)}\,. \tag{1.34}$$

Bis auf den Vorzeichenwechsel bei der Vertauschung der Reihenfolge stimmen alle diese Rechenregeln mit denen des Skalarprodukts überein.
Einige Spezialfälle:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} &\implies \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \\
\vec{a} \text{ parallel } \vec{b} &\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\
\vec{a} \text{ antiparallel zu } \vec{b} &\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\
\vec{a} = \vec{b} &\implies \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \\
\vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} &\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}\,.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Vektorprodukts beweisen wir den Sinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,, \tag{1.36}$$

wobei der Winkel α bzw. β der Seite a bzw. b gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Entsprechendes gilt für die anderen Seiten und Winkel. Der Beweis ist wieder einfach:

$$\begin{aligned} 2\times \text{ Fläche des Dreiecks} &= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{c}\right| \\ &= ab\sin\gamma = cb\sin\alpha = ac\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Die letzte Gleichung liefert beispielsweise $cb\sin\alpha = ac\sin\beta$ und nach Division durch c die gesuchte Gleichung (1.36).

1.2.5 Komponentendarstellung

Wir definieren im dreidimensionalen Raum drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, die wir mit

$$\hat{x}\ ,\ \hat{y}\ ,\ \hat{z} \tag{1.38}$$

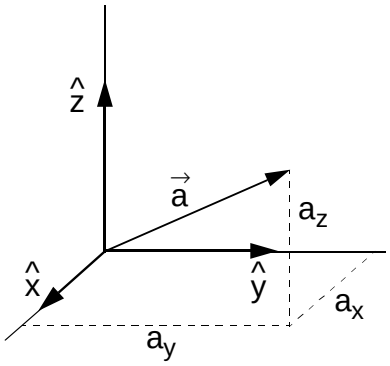


Bild 1.8: Die drei Einheitsvektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$ und $\hat{z}$ stehen paarweise aufeinander senkrecht.

bezeichnen. Wie Bild 1.8 illustriert, wird dadurch das bekannte kartesische Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ erzeugt. Man sollte außerdem die Bezeichnungen so wählen, dass $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ gilt (ein so genanntes *Rechtssystem*). Es gilt also

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \\ \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \end{aligned} \tag{1.39}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}\ ,\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}\ ,\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \\ \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}\ ,\ \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}\ ,\ \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Man sollte sich auch an andere Schreibweisen dieser Einheitsvektoren gewöhnen, die oft benutzt werden, wie etwa

$$\vec{e}_x\ ,\ \vec{e}_y\ ,\ \vec{e}_z \quad \text{oder} \quad \vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2\ ,\ \vec{e}_3\,, \quad \text{oder auch} \quad \hat{e}_1\ ,\ \hat{e}_2\ ,\ \hat{e}_3\,. \tag{1.41}$$

Dabei steht das e für „Einheitsvektor“ (in der englischsprachigen Literatur erscheint dann entsprechend u für „unit vector“). Weiterhin findet man auch $\hat{1}\ ,\ \hat{2}\ ,\ \hat{3}$, oder allgemein $\hat{\imath}\ ,\ \hat{\jmath}\ ,\ \hat{k}\,$.

An dieser Stelle ist es angebracht, den dreidimensionalen Raum unserer Anschauung zu verallgemeinern. In einem Vektorraum der Dimension n (vgl. Seite 25) bildet ein System von n orthonormierten Vektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ eine orthonormierte *Basis*.

Wir notieren zur Übung einmal die Gleichungen (1.39) und (1.40) mithilfe der $\hat{e}_i$ als

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad = \quad \delta_{ij}\,, \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k \quad \text{für} \quad i,j,k \ \in \{1,2,3\} \text{ zyklisch} \tag{1.42}$$

mit der zweckmäßigen Abkürzung

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\,, \tag{1.43}$$

dem *Kronecker-Symbol*. Dabei nennt man eine Reihenfolge $(i\,j\,k)$ zyklisch, wenn sie eine gerade Permutation[1] von (1 2 3) darstellt, antizyklisch bei einer ungeraden Permutation; z.B. ist (3 1 2) eine gerade (zyklisch) und (2 1 3)

[1] Eine Permutation ist eine Umordnung von Elementen. Man kann jede Permutation durch eine Folge von Vertauschungen zweier Elemente erzeugen. Ist deren Anzahl (un)gerade, nennt man die Permutation (un)gerade.

eine ungerade Permutation (antizyklisch); die Kombination (2 3 2) ist keines von beiden. Es gilt dann also auch

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = -\hat{e}_k \quad \text{für} \quad i,j,k \ \in \{1,2,3\} \text{ antizyklisch}\,. \tag{1.44}$$

Man kann nun jeden Vektor durch seine Komponenten bezüglich der orthogonalen Basis darstellen:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z} \tag{1.45}$$

mit

$$a_x = \vec{a}\cdot\hat{x}\ ,\ a_y = \vec{a}\cdot\hat{y}\ ,\ a_z = \vec{a}\cdot\hat{z}\,. \tag{1.46}$$

In einer abgekürzten Schreibweise notiert man nur die Komponenten in der Form

$$\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)\ . \tag{1.47}$$

Man rechnet mit solchen Vektoren in der verkürzten Schreibweise wie

$$\begin{aligned} \alpha\vec{a} &= \alpha\,(a_x,\, a_y,\, a_z) = \alpha(a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}) \\ &= (\alpha a_x)\,\hat{x} + (\alpha a_y)\,\hat{y} + (\alpha a_z)\,\hat{z} = (\alpha a_x,\, \alpha a_y,\, \alpha a_z) \end{aligned} \tag{1.48}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b} &= (a_x,\, a_y,\, a_z) + (b_x,\, b_y,\, b_z) \\ &= a_x\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z} + b_x\hat{x} + b_y\,\hat{y} + b_z\,\hat{z} \\ &= (a_x+b_x)\hat{x} + (a_y+b_y)\,\hat{y} + (a_z+b_z)\,\hat{z} = (a_x+b_x,\, a_y+b_y,\, a_z+b_z)\,. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Operationen für die Translationen im $\mathbb{R}^3$ in (1.17) und (1.18) zeigt die Verwandtschaft dieser Darstellungen.

Die Komponentendarstellung des Skalarprodukts ist

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z})\cdot(b_x\,\hat{x} + b_y\,\hat{y} + b_z\,\hat{z}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{1.50}$$

und speziell

$$a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{1.51}$$

oder

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.52}$$

Zur Übung formulieren wir diese Gleichungen noch einmal in einer alternativen kompakteren Schreibweise. Mit

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \hat{e}_i = \sum_i a_i \, \hat{e}_i \tag{1.53}$$

haben wir

$$\alpha\vec{a} \quad = \quad \alpha \sum_i a_i \, \hat{e}_i = \sum_i (\alpha a_i) \, \hat{e}_i \, , \tag{1.54}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_i a_i \, \hat{e}_i + \sum_i b_i \, \hat{e}_i = \sum_i (a_i + b_i) \, \hat{e}_i \, , \tag{1.55}$$

und

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i \, \hat{e}_i \cdot \sum_j b_j \, \hat{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \, \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \, \delta_{ij} = \sum_i a_i b_i \, . \tag{1.56}$$

Die Komponentendarstellung des Vektorprodukts gestaltet sich etwas umfangreicher, ist aber problemlos. Zunächst schreiben wir ausführlich

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \, \hat{x} + a_y \, \hat{y} + a_z \, \hat{z}) \times (b_x \, \hat{x} + b_y \, \hat{y} + b_z \, \hat{z}) \\ &= a_x b_x \, \hat{x} \times \hat{x} + a_x b_y \, \hat{x} \times \hat{y} + a_x b_z \, \hat{x} \times \hat{z} \\ &\quad + a_y b_x \, \hat{y} \times \hat{x} + a_y b_y \, \hat{y} \times \hat{y} + a_y b_z \, \hat{y} \times \hat{z} \\ &\quad + a_z b_x \, \hat{z} \times \hat{x} + a_z b_y \, \hat{z} \times \hat{y} + a_z b_z \, \hat{z} \times \hat{z} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \, \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \, \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \, \hat{z} \end{aligned} \tag{1.57}$$

mit $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$ und $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$.
Den Ausdruck (1.57) kann man sich leichter merken mithilfe einer Schreibweise als Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \, . \tag{1.58}$$

Wenn man den formalen Ausdruck (1.58) nach den Regeln der 3×3-Determinanten auswertet (mehr über Determinanten findet man in Kapitel 5 auf Seite 137), erhält man genau das Ergebnis von (1.57).

In der Theoretischen Physik schreibt man das Vektorprodukt in der Komponentendarstellung auch gerne in der kompakten, aber etwas gewöhnungsbedürftigen Form

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j\, \hat{e}_k\,, \tag{1.59}$$

wobei die i, j, k unabhängig von 1 bis 3 laufen. Die $\hat{e}_k$ sind die Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten. Die dreifach indizierten Größen ϵ_{ijk} sind durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,\, j,\, k \text{ zyklisch} \\ -1 & i,\, j,\, k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.60}$$

definiert, das *Levi-Civita-Symbol*. Für die Komponenten des Vektorprodukts, z.B. der Komponente bezüglich $\hat{e}_2$, bestätigt man leicht, dass gilt

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \sum_{ij=1}^{3} \epsilon_{ij2}\, a_i b_j = a_3 b_1 - a_1 b_3 \tag{1.61}$$

(vgl. (1.57)), und genauso für die anderen Komponenten.

Man sagt (aber das muss man jetzt noch nicht genauer verstehen): Die ϵ_{ijk} sind die „Komponenten des total-antisymmetrischen Tensors dritter Stufe“. Hier bedeutet total-antisymmetrisch, dass ϵ_{ijk} bei einer beliebigen Vertauschung zweier Indizes das Vorzeichen wechselt, und die dritte Stufe weist auf eine dreifach indizierte Größe hin. Mehr dazu in Kapitel 5. Zum Abschluss sei noch die nützliche Summationsregel

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl} \tag{1.62}$$

erwähnt. Von der Gültigkeit dieser Gleichung sollte man sich überzeugen, um noch etwas besser mit dem ϵ_{ijk}-Symbol vertraut zu werden. Eine Demonstration für den Umgang mit dieser Summationsregel findet man auf Seite 38.

1.2.6 Das Spatprodukt

Mit dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt haben wir zwei wichtige Produkte von Vektoren kennen gelernt. Das *Spatprodukt* ist kein weiteres Produkt,

sondern eine nützliche Kombination aus einem Skalar- und einem Vektorprodukt:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}. \tag{1.63}$$

Wie im Bild 1.9 dargestellt, spannen die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ einen Körper auf (*Parallelepiped*, *Parallelflächner* oder auch einfach *Spat* genannt; Kristalle wie Kalkspat kristallisieren in dieser Form.). Mathematisch werden wir die Menge aller Punkte innerhalb des „Spates“ beschreiben als die Menge aller Vektoren $\vec{r}$, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$\vec{r} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1\,. \tag{1.64}$$

Im Moment wollen wir jedoch nur das Volumen dieses „Spates“ berechnen. Wir erinnern uns noch daran, dass wir das Volumen eines Körpers, der in „gleichen Höhen über der Grundfläche gleiche Schnittflächen besitzt“, mithilfe der Formel

$$\textit{Volumen} = V = \textit{Grundfläche mal Höhe}$$

berechnen können. Die Grundfläche ist hier gleich $|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|$ und die Höhe ist gleich der Projektion $h = |\,\vec{c} \cdot \hat{e}|$ von $\vec{c}$ auf einen Einheitsvektor $\hat{e}$, der senkrecht auf der Grundfläche steht. Solch ein Vektor ist gegeben durch

$$\hat{e} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|}\,, \tag{1.65}$$

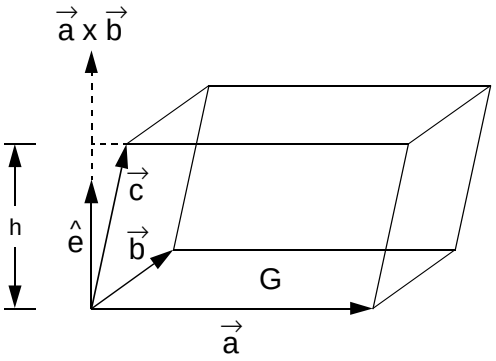


Bild 1.9: Das Spatprodukt.

und man erhält das Spatvolumen als

$$V = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| h = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \left|\vec{c}\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}\right| = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \tag{1.66}$$

Dieses Volumen ist wegen der Betragsstriche in Gleichung (1.66) nicht-negativ, aber das Spatprodukt selbst kann natürlich sowohl positiv als auch negativ sein. Das sieht man sofort wegen der Antikommutativität des Vektorprodukts (1.32):

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}. \tag{1.67}$$

Man kann drei Objekte auf sechs verschiedene Arten anordnen, also können wir mit den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sechs verschiedene Spatprodukte bilden, deren Betrag gleich ist (der aufgespannte Spat ist immer gleich). Wegen (1.67) haben drei der sechs Produkte unterschiedliches Vorzeichen. Es gilt

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}, \tag{1.68}$$

d.h. das Spatprodukt ist invariant bei zyklischer Vertauschung der Vektoren, und wegen (1.67) wechselt es das Vorzeichen bei einer antizyklischen Vertauschung. Ein Beweis dieser Formel ergibt sich ein paar Zeilen weiter.

Ausserdem können wir in (1.68) mithilfe der Kommutativität des Skalarprodukts umordnen,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right), \tag{1.69}$$

d.h. es gilt eine Vertauschungsrelation von Vektor- und Skalarprodukt:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \tag{1.70}$$

Es ist sehr nützlich, einen expliziten Ausdruck für das Spatprodukt in einer Komponentendarstellung zur Verfügung zu haben. Eine kurze Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\\
&= \left(\,(a_x\,\hat{x}+a_y\,\hat{y}+a_z\,\hat{z}\,)\times(b_x\,\hat{x}+b_y\,\hat{y}+b_z\,\hat{z}\,)\,\right)\cdot(c_x\,\hat{x}+c_y\,\hat{y}+c_z\,\hat{z}\,)\\
&= \left(\,(a_yb_z-a_zb_y)\,\hat{x}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\hat{y}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\hat{z}\,\right)\cdot(c_x\,\hat{x}+c_y\,\hat{y}+c_z\,\hat{z}\,)\\
&= (a_yb_z-a_zb_y)c_x+(a_zb_x-a_xb_z)c_y+(a_xb_y-a_yb_x)c_z\,.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Die letzte Zeile identifiziert man mit dem Wert einer 3×3-Determinante (vgl. Abschnitt 5.2), die zeilenweise aus den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgebaut ist:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \;=\; \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \tag{1.72}$$

Man sieht aus dieser Formel, dass der Vorzeichenwechsel des Spatprodukts bei einer Vertauschung zweier Vektoren dem Vorzeichenwechsel einer Determinante bei Vertauschung zweier Zeilen entspricht. Damit folgt Gleichung (1.68).

Wir können jetzt eine sehr einfache Antwort auf die folgende Frage geben: Wann liegen die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in einer Ebene? – Eine Lösung liefert die Überlegung, dass in diesem Fall der von den drei Vektoren aufgespannte „Spat“ zu einer Fläche, einem Parallelogramm, degeneriert. Sein Volumen V ist daher gleich null, was man testen kann durch Berechnung des Spatprodukts:

$$V = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0\,, \tag{1.73}$$

d.h. die Vektoren liegen genau dann in einer Ebene, wenn das Spatprodukt verschwindet.

Eine andere Antwort ist: Alle Vektoren $\vec{x}$, die in einer von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene liegen, lassen sich schreiben als

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\,. \tag{1.74}$$

Man nennt $\vec{x}$ eine *Linearkombination* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (vgl. Bild 1.10). Wenn also der Vektor $\vec{c}$ in dieser Ebene liegt, muss es Zahlen α und β geben mit

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\,. \tag{1.75}$$

Man prüft sofort nach, dass dann auch das Spatprodukt verschwindet:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a} + \beta\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = 0\,. \tag{1.76}$$

Die drei Vektoren sind in diesem Fall linear abhängig.

1.2.7 Das doppelte Vektorprodukt

Neben dem Spatprodukt (1.63) lässt sich noch ein weiteres Mehrfachprodukt aufschreiben, das *doppelte Vektorprodukt*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}. \tag{1.77}$$

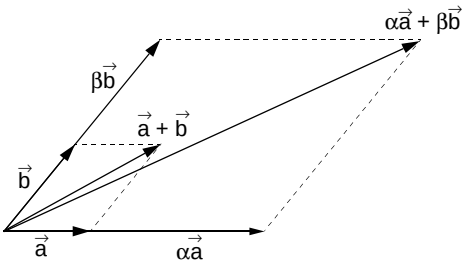


Bild 1.10: Die Menge aller Linearkombinationen $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ spannt eine Ebene auf.

Man überzeugt sich leicht, dass im Allgemeinen gilt

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right), \tag{1.78}$$

denn es ist zum Beispiel

$$\left(\hat{x} \times \hat{x}\right) \times \hat{y} = \vec{0} \times \hat{y} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \hat{x} \times \left(\hat{x} \times \hat{y}\right) = \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}\,. \tag{1.79}$$

Der *Entwicklungssatz*

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\,\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{c}\,(\,\vec{a} \cdot \vec{b}\,) \tag{1.80}$$

(manchmal auch als die *bac-cab-Regel* bezeichnet) wird oft benutzt, um ein doppeltes Vektorprodukt in Formeln zu vereinfachen. Zur Übung beweisen wir diesen Satz mithilfe der Formel (1.59) für das Vektorprodukt (1.59), die das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} enthält. Das gibt uns auch Gelegenheit, die Summationsregel (1.62) auszuprobieren. Man sollte sich durch die vielen Indizes nicht abschrecken lassen, denn der Vorteil dieses Vorgehens ist die simple Tatsache, dass alles (fast) automatisch abläuft:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\,\vec{b} \times \vec{c}\,) &= \vec{a} \times \Big(\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \hat{e}_k\Big) = \Big(\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j\Big)\Big(\sum_{\ell mn} \epsilon_{\ell mn} a_\ell \delta_{mk} \hat{e}_n\Big) \\
&= \sum_{ijk\ell n} \epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell kn} a_\ell b_i c_j \hat{e}_n = \sum_{ij\ell n} \Big(\sum_k \epsilon_{kij}\epsilon_{kn\ell}\Big) a_\ell b_i c_j \hat{e}_n \\
&= \sum_{ij\ell n} \big(\delta_{in}\delta_{j\ell} - \delta_{jn}\delta_{i\ell}\big) a_\ell b_i c_j \hat{e}_n = \sum_{ij} a_j b_i c_j \hat{e}_i - \sum_{ij} a_i b_i c_j \hat{e}_j \\
&= \Big(\sum_i b_i \hat{e}_i\Big)\Big(\sum_j a_j c_j\Big) - \Big(\sum_j c_j \hat{e}_j\Big)\Big(\sum_i a_i b_i\Big) = \vec{b}\,(\,\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{c}\,(\,\vec{a} \cdot \vec{b}\,)\,.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Wir haben dabei in der ersten Formelzeile die Komponenten des Einheitsvektors $\hat{e}_k$ als δ_{mk} ausgedrückt und in der zweiten Formelzeile die Indizes zyklisch vertauscht, um dann die Summationsregel (1.62) anzuwenden.

Für das doppelte Vektorprodukt gilt die *Jacobi-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}\,. \tag{1.82}$$

Wenn man also die doppelten Vektorprodukte der drei möglichen zyklischen Anordnungen dreier Vektoren summiert, so erhält man die Null. Der Beweis dieser Identität ist einfach und folgt direkt aus dem Entwicklungssatz (1.80). Für die drei Produkte gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \;& \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \;& \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \;& -\vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})\,. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Summation dieser Gleichungen liefert dann (1.82).

1.3 Differentiation

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Differentiation in einem dreidimensionalen Raum. Dabei geht es zunächst um die Ableitung von vektorwertigen Funktionen. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist eine Bahnkurve im Raum, also ein Vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$, der von einem Parameter t abhängt, der beispielsweise als die Zeit gewählt sein kann. Die Ableitungen dieser Funktion nach t liefern die Geschwindigkeit und Beschleunigung. Weiterhin betrachten wir im folgenden Abschnitt Funktionen, die von den drei Raumkoordinaten abhängen und werden den Ableitungsbegriff auf Funktionen erweitern, die von mehreren Variablen abhängen.

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ nach der Variablen x in einem Punkt x_0 ist definiert durch den Differentialquotienten

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \tag{1.84}$$

mit $x = x_0 + \Delta x$. Der Differentialquotient ist also der Grenzwert des Differenzenquotienten $[f(x) - f(x_0)]/\Delta x$ für einen beliebig kleinen Zuwachs Δx (vorausgesetzt natürlich, dass dieser Grenzwert existiert). Anschaulicher ausgedrückt: Die Ableitung ist die Steigung der Funktion im Punkt x_0, definiert als Grenzwert der Steigung im Intervall $[x_0, x]$ (vgl. Bild 1.11).

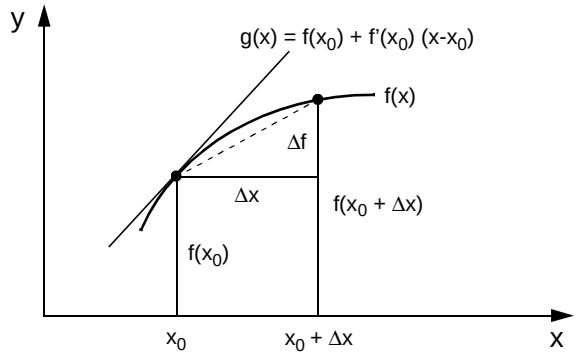


Bild 1.11: Die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist der Grenzwert der Intervallsteigung für $\Delta x \to 0$.

Die Taylor-Entwicklung: In vielen Anwendungen in der Physik benutzen wir die Ableitung einer Funktion auch, um einen Funktionswert an einer Stelle x durch den Funktionswert an der Stelle $x_0 \approx x$ zu approximieren. Für kleines $\Delta x = x - x_0$ gilt näherungsweise

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \tag{1.85}$$

oder umgeformt

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{1.86}$$

Das bedeutet eine Approximation von $f(x)$ durch die lineare Funktion

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,, \tag{1.87}$$

die mit $f(x)$ und ihrer ersten Ableitung an der Stelle x_0 übereinstimmt. Man kann diese Näherung noch verbessern durch

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2\,, \tag{1.88}$$

also durch die Approximation von $f(x)$ durch ein Polynom zweiten Grades. Durch Differenzieren sieht man, dass in dieser Näherung auch noch die zweiten Ableitungen bei x_0 übereinstimmen.

Eine Verallgemeinerung liefert die *Taylor-Entwicklung*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_m(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \,, \end{aligned} \tag{1.89}$$

falls diese Reihe konvergiert, und dass das Restglied der Reihe, das man schreiben kann als

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0+\eta(x-x_0))}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} \,, \qquad 0<\eta<1 \,, \tag{1.90}$$

mit wachsendem m gegen null geht. Weiterhin ist die Taylor-Entwicklung eindeutig, d.h. es existiert in der Umgebung von x_0 keine andere Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Ein Beispiel ist die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ um den Punkt $x_0 = 0$. Mit der Ableitung $f'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$ sehen wir, dass alle Ableitungen übereinstimmen. Ihr Wert an der Stelle $x_0 = 0$ ist gleich

$$f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1 \,. \tag{1.91}$$

Damit ergibt sich die Taylor-Reihe

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,, \tag{1.92}$$

da das Restglied für $m \to \infty$ gegen null geht:

$$R_m(x) = \tfrac{\mathrm{e}^\eta}{(m+1)!}\, x^{m+1} \le \tfrac{\mathrm{e}^x}{(m+1)!}\, x^{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \,. \tag{1.93}$$

In gleicher Weise findet man die Taylor-Reihen für die Sinus- und Kosinus-Funktionen in (B.34). In vielen Anwendungen werden diese Reihenentwicklungen schon nach wenigen Termen abgebrochen, d.h. man benutzt dann Nähe-

rungen wie

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + x^2/2 \tag{1.94}$$

$$\sin x \approx x - x^3/6 \tag{1.95}$$

$$\cos x \approx 1 - x^2/2 \tag{1.96}$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \tag{1.97}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2\,. \tag{1.98}$$

Man sollte sich aber auch klarmachen, dass es Funktionen gibt, die sich *nicht* in dieser Weise approximieren lassen. Das wohl bekannteste Beispiel ist die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$. Man überzeugt sich leicht, dass $f(x) \to 0$ für $x \to 0$. Wenn wir also definieren

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \tag{1.99}$$

so ist $f(x)$ in $x = 0$ stetig, ja sogar differenzierbar, und zwar beliebig oft. Allerdings ist $f(x)$ bei $x = 0$ extrem flach: Alle Ableitungen verschwinden dort, und damit natürlich auch alle Terme der Taylor-Reihe. Da nun gilt $f(x) > 0$ für $x \neq 0$, konvergiert das Restglied niemals gegen null, sondern ist immer gleich der Funktion selbst.

Das Differential: Neben der Ableitung einer Funktion benutzt man (nicht nur) in der Physik so genannte *Differentiale*. Anwendungen finden sich z.B. bei Integraltransformationen, der Behandlung von Differentialgleichungen und in der Fehlerrechnung. In allen Fällen lässt sich die Verwendung von derartigen Differentialen vermeiden, aber wegen ihrer Zweckmäßigkeit werden sie mehr oder weniger kommentarlos in vielen Lehrbüchern und Vorlesungen benutzt. Deshalb hier einige Klarstellungen. Zunächst wieder die Anschauung. Es sei Δx eine kleine Differenz der Größe x, also $\Delta x = x_2 - x_1$, was man sich als „Rütteln“ an der Größe x vorstellen kann. Wenn nun eine andere Größe, wie z.B. y, mit x zusammenhängt, geschrieben als $y = f(x)$, dann ändert sich diese Größe auch, d.h. die Änderung Δy ist starr mit Δx verknüpft. Es gilt

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \tag{1.100}$$

(dabei ist das Argument x von $f'(x)$ aus dem Intervall $[x_1, x_2]$). Wenn man jetzt das Intervall immer kleiner macht, dann wird aus dem $\approx$ ein $=$ und aus

den kleinen Differenzen Δx und Δy werden die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$. Das einzige Problem, das man hier noch zu bewältigen hat, ist die Tatsache, dass diese Differentiale dann wegen $\Delta x \to 0$ null werden. Man benötigt also einen Trick, um das zu umgehen.

Will man den Formalismus isolierter Differentiale streng mathematisch einführen, benötigt man etwas mehr höhere Mathematik, hat dann aber auch ein wesentlich flexibleres Handwerkszeug zur Verfügung (Differentialformen, Nonstandard-Analysis). Hier versuchen wir erste Schritte in diese Richtung. Ist die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x differenzierbar, so nennt man das Produkt

$$f'(x)\,h \tag{1.101}$$

das zu dem beliebigen(!) h gehörige *Differential* von $f(x)$ an der Stelle x und bezeichnet es mit

$$\mathrm{d}y \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}f(x)\,, \tag{1.102}$$

wobei es meist nicht nötig ist, h gesondert anzugeben. Wichtig ist, dass h nicht „klein“ sein muss; $x + h$ braucht nicht einmal dem Definitionsbereich von f anzugehören.

Betrachtet man insbesondere die Funktion $f(x) = x$, so ist ihre Ableitung gleich 1 und es gilt

$$\mathrm{d}x = h \tag{1.103}$$

(statt h verwendet man oft auch Δx). Dann gilt auch

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1.104}$$

und die Ableitung ist damit *exakt* gleich dem Quotienten der Differentiale

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,, \tag{1.105}$$

wodurch sich auch der Name *Differentialquotient* für die Ableitung rechtfertigt.

1.3.1 Differentiation von Vektorfunktionen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Vektoren $\vec{r} = (x, y, z)$, die von einer skalaren Größe t abhängen, also

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\,. \tag{1.106}$$

Als konkretes Beispiel kann man sich die Bahn eines Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t vorstellen (vgl. Bild 1.12).

Die Differenz der Positionen zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ ist

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\,, \tag{1.107}$$

und die komponentenweise Differentiation (bei einer zeitunabhängigen Basis)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned} \tag{1.108}$$

ist die Ableitung des Vektors $\vec{r}\,(t)$ nach dem Skalar t. Es sei erwähnt, dass diese Ableitung natürlich nur dann existiert, wenn die Komponenten x, y, z des Vektors $\vec{r}$ nach t differenzierbar sind. Man nennt $\dot{\vec{r}}$ auch die *Geschwindigkeit* und schreibt $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Der Geschwindigkeitsvektor ist ein Tangentialvektor an die Bahnkurve.

Da die Geschwindigkeit im Allgemeinen wieder von der Zeit t abhängt, können wir abermals nach t differenzieren und erhalten damit die *Beschleunigung*

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{1.109}$$

Für die Ableitung von Vektorfunktionen nach einem Skalar gelten die folgenden Rechenregeln, die sich direkt aus den Differentiationsregeln für die Summe und

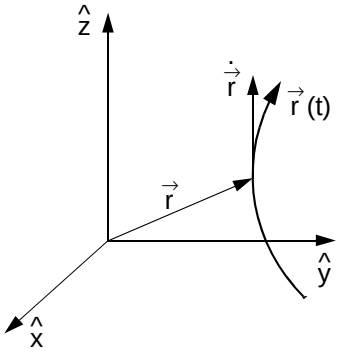


Bild 1.12: Bahnkurve der Bewegung eines Massepunktes. Die Bahngeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ steht tangential zur Bahn.

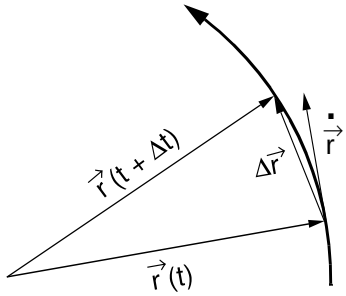


Bild 1.13: Die Differenz der Positionen zur Zeit t und $t + \Delta t$ dividiert durch Δt liefert für $\Delta t \to 0$ die Bahngeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$.

das Produkt von Funktionen ergeben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1.110}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1.111}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1.112}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f\,\vec{a}\right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\vec{a}+f\,\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \tag{1.113}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{1.114}$$

Man kann also mit derartigen Ausdrücken rechnen wie gewohnt, allerdings unter Beachtung der Reihenfolge der Vektoren in den Produkten.

Man beweist diese Beziehungen durch direkte Berechnung. Als Beispiel sei der Beweis für (1.111) angeführt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i a_i b_i = \sum_i\left(\dot{a}_i b_i + a_i\dot{b}_i\right)\\ &= \sum_i \dot{a}_i b_i + \sum_i a_i\dot{b}_i = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}},\end{aligned} \tag{1.115}$$

sowie der Beweis von Gleichung (1.112):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,\vec{a}\times\vec{b}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\,a_i b_j\,\hat{e}_k = \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\,\left(\dot{a}_i b_j + a_i\dot{b}_j\right)\,\hat{e}_k \\ &= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\,\dot{a}_i b_j\,\hat{e}_k + \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\,a_i\dot{b}_j\,\hat{e}_k = \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}}\,. \quad (1.116)\end{aligned}$$

1.3.2 Die partielle Ableitung

Für die Differentiation von Funktionen von mehreren Variablen $f(x,y,z)$ ist der Begriff der *partiellen Ableitung* $\partial f/\partial x$ von großer Bedeutung. Kurz gesagt wird hierbei nach der Variablen x so differenziert, als ob f nur eine Funktion von x allein wäre und alle anderen Variablen als Konstanten betrachtet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\,. \quad (1.117)$$

Entsprechend definiert man

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y} \quad (1.118)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}\,. \quad (1.119)$$

Falls es irgendeinen Zweifel geben sollte, welche Variable oder welche Variablen bei der partiellen Differentiation konstant gehalten werden, kann man das durch die folgende Schreibweise festhalten:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\,. \quad (1.120)$$

Dies bedeutet, dass nach x differenziert wurde, wobei die Werte von y und z festgehalten wurden. Man schreibt die partiellen Ableitungen auch alternativ in der Kurzform

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\,,\quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}\quad\text{und}\quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad (1.121)$$

wobei allerdings Verwechslungen (z.B. mit den Komponenten eines Vektors) möglich sind. Entsprechend lassen sich auch höhere partielle Ableitungen bilden, wie zum Beispiel

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{1.122}$$

oder – und das ist neu im Vergleich zu der Differentiation von Funktionen mit nur einer Variablen – auch gemischte Ableitungen, wie

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,, \tag{1.123}$$

d.h. die zweite partielle Ableitung, die sich ergibt, wenn man zuerst nach x und danach nach y partiell differenziert.

Als Beispiel berechnen wir alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = 4x^5 + 2x^2 y + 9xy^3 \tag{1.124}$$

von zwei Veränderlichen x und y. Für die ersten Ableitungen ergibt sich

$$f_x = 20x^4 + 4xy + 9y^3\,, \quad f_y = 2x^2 + 27xy^2 \tag{1.125}$$

und für die zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 80x^3 + 4y\,, \quad & f_{yy} &= 54xy\,, \\ f_{xy} &= 4x + 27y^2\,, \quad & f_{yx} &= 4x + 27y^2. \end{aligned} \tag{1.126}$$

Man beobachtet hier, dass die beiden gemischten Ableitungen unabhängig sind von der Reihenfolge der Differentiation, also $f_{xy} = f_{yx}$. Das gilt mit recht großer Allgemeinheit nach dem *Satz von Schwarz* unter der Voraussetzung, dass die zweiten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

Wenn nun die Variablen x, y und z von einer skalaren Variablen t abhängen:

$$f(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,, \tag{1.127}$$

so kann man die Funktion $f(t)$ wie bekannt nach t differenzieren. Es gilt dabei eine erweiterte *Kettenregel*:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.128}$$

Das beweist man mithilfe von

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{f\big(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)\big) - f(x,y,z)}{\Delta t}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta t} \qquad \text{(vgl. (1.107))}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\Big\{ f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$$

$$+ f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z) + f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)\Big\}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z+\Delta z)}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.129}$$

Unter Verzicht auf das explizite Hinschreiben der Differentiation nach der Variablen t lässt sich (1.128) auch abgekürzt schreiben als

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.130}$$

Dieses *totale Differential* gibt die Änderung des Wertes der Funktion f an, falls die Variable x um $\mathrm{d}x$ verändert wird, y um $\mathrm{d}y$ und z um $\mathrm{d}z$ (vgl. dazu auch Seite 42).

Bei manchen Anwendungen möchte man diese Beziehung für *endliche*, nicht infinitesimale Größen benutzen. Man schreibt dann Δ statt d, also

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta z\,, \tag{1.131}$$

wobei natürlich aus dem „=“ ein „≈“ wurde (vgl. Bild 1.14).

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x,y,z) = (1+z)\,\mathrm{e}^{x+y^2}\,. \tag{1.132}$$

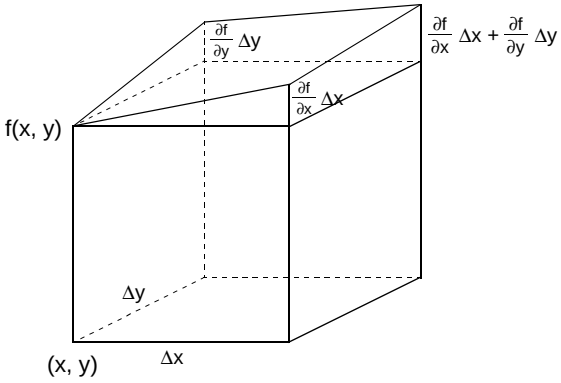


Bild 1.14: Zuwachs einer Funktion $f(x, y)$ bei Änderung von x um Δx und y um Δy.

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1+z)\,\mathrm{e}^{x+y^2}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(1+z)\,\mathrm{e}^{x+y^2}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathrm{e}^{x+y^2}\,. \tag{1.133}$$

An der Stelle $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ist der Funktionswert $f(0, 0, 0) = 1$ bekannt. Bei einem Zuwachs um $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0.1, 0.1, 0.1)$ ändert sich der Funktionswert nach Gleichung (1.131) näherungsweise um

$$\Delta f \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0 \Delta z\,. \tag{1.134}$$

Dabei bezeichnet $\partial f/\partial x\big|_0$ den Wert der partiellen Ableitung an der Stelle $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Wir erhalten

$$\Delta f = 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 = 0.2 \tag{1.135}$$

und daher nach Gleichung (1.86) einen approximativen Funktionswert von $f(0.1, 0.1, 0.1) \approx f(0, 0, 0) + \Delta f = 1 + 0.2 = 1.2$. Ein Vergleich mit der exakten Berechnung von $f(0.1, 0.1, 0.1) = (1 + 0.1)\,\mathrm{e}^{0.1+0.01} \approx 1.227$ zeigt eine recht gute Übereinstimmung.