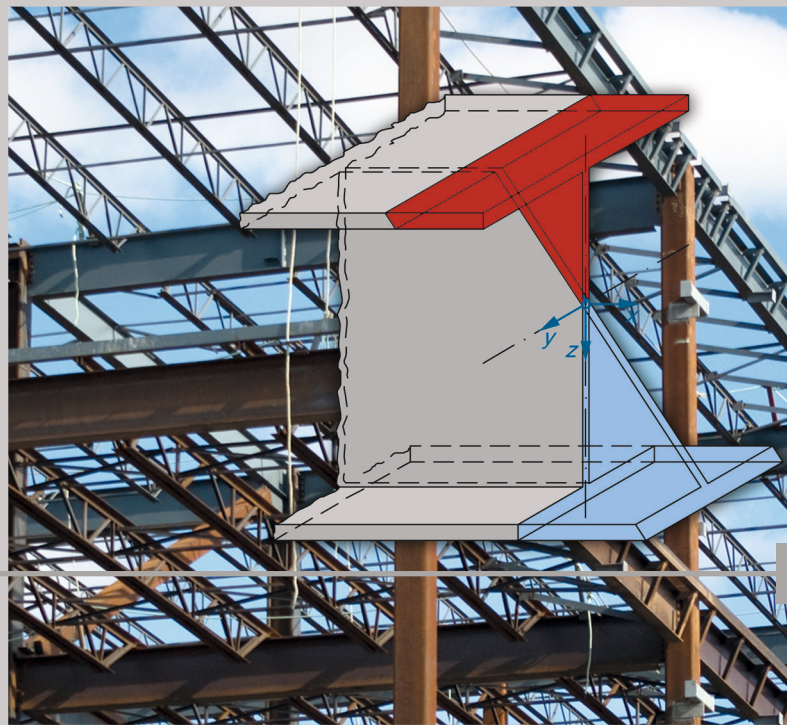


Jens J. Götsche  
Maritta Petersen

# Festigkeitslehre – klipp und klar

Ein Lehr- und Übungsbuch für  
Studierende des Bauingenieurwesens



4., aktualisierte Auflage

HANSER



**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**

# Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp • *Aufgabensammlung zur Baustatik*

Dallmann • *Baustatik*

Band 1: Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

Band 2: Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

Band 3: Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Engel/Lauer • *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Engel/Al-Akel • *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Fouad/Zapke • *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann • *Hydraulik für Bauingenieure*

Göttsche/Petersen • *Festigkeitslehre – klipp und klar für Studierende des Bauingenieurwesens*

Jochim/Lademann • *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke • *Physik im Bauwesen*

Malpricht • *Schalungsplanung*

Rjasanowa • *Mathematik für Bauingenieure*

Rjasanowa • *Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen*

Jens Götttsche

Maritta Petersen

# Festigkeitslehre - klipp und klar

Ein Lehr- und Übungsbuch für Studierende des Bauingenieurwesens

4., aktualisierte Auflage

HANSER

**Autoren:**

Prof. Dr.-Ing. Jens Götttsche  
hochschule 21, private und staatlich anerkannte Fachhochschule, Buxtehude  
Studienbereich Bauwesen  
<http://www.goettsche-web.de>

Prof. Dr.-Ing. Maritta Petersen  
hochschule 21, private und staatlich anerkannte Fachhochschule, Buxtehude  
Studienbereich Bauwesen



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2020 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Satz: Jens Götttsche, Maritta Petersen, Buxtehude

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH und Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46288-5

E-Book-ISBN 978-3-446-46356-1

# Vorwort zur 4. Auflage

Dieses Lehrbuch richtet sich vorrangig an Studierende des Bauingenieurwesens im Grundstudium. Aber auch Studierenden aus anderen Ingenieurfächern kann das Buch nützlich sein. Die Festigkeitslehre ist häufig ein ungeliebtes Teilgebiet der Statik, in dem viele Studierende häufig Formeln anwenden, ohne deren Grundlagen zu kennen. Dieses Buch hat sich zum Ziel gesetzt, die Festigkeitslehre und deren grundlegende Zusammenhänge durch gründliche Aufbereitung der theoretischen Grundlagen in vielen Teilschritten zu verdeutlichen. Dabei wird klargestellt, dass die Festigkeitslehre nicht eine so exakte Wissenschaft ist wie die Mathematik, sondern auf vielen Vereinfachungen, Hypothesen und Reglementierungen basiert. Viele anschauliche Grafiken sowie zahlreiche Anwendungsbeispiele tragen zum Verständnis bei.

Das Buch gliedert sich inhaltlich in sieben Kapitel. Zunächst werden die Grundbegriffe der Festigkeitslehre und die wichtigsten mechanischen Zusammenhänge erläutert. *Kapitel 2* beschäftigt sich mit der Ermittlung von Querschnittswerten von stabförmigen Bauteilen. In den drei nachfolgenden *Kapiteln 3 bis 5* werden die grundlegenden Beanspruchungsarten des Stabes, nämlich Biegung mit und ohne Normalkraft, Querkraft und Torsion angesprochen. Dabei werden Wege zur Spannungsberechnung aufgezeigt und das zugehörige Tragverhalten von Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten erklärt. Die Stabilität von stabförmigen Bauteilen wird in *Kapitel 6* behandelt. Dabei werden unterschiedliche Stabilitätsphänomene beschrieben und die Schnittgrößenermittlung am verformten System vorgestellt. *Kapitel 7* behandelt ergänzend Sonderprobleme der Festigkeitslehre. Begriffe wie „klaffende Fuge“, Hauptspannungen, Spannungszustände, Vergleichsspannung oder Mohrscher Spannungskreis und Festigkeitshypothesen werden eingehend erläutert.

Jedes Kapitel enthält einige praktische Übungsaufgaben, die die Studierenden zum selbstständigen Bearbeiten und Vertiefen des Lehrstoffes ermutigen sollen. Dazu werden im letzten *Kapitel 8* die Lösungen aufgezeigt. Zur weiteren Anregung und Unterstützung beim Lernen stehen unter <http://www.hanser-fachbuch.de/9783446462885> einige überarbeitete Excel-Dateien zum Download bereit, mit denen typische Aufgaben der Festigkeitslehre gelöst werden können.

Bestärkt durch die zahlreichen und dankbar aufgenommenen Zuschriften unserer Leser haben wir die inhaltliche Schwerpunktsetzung, das Layout und die Struktur der vorherigen Auflagen beibehalten. Aufmerksame Leser haben uns auf kleinere Fehler hingewiesen, die wir gerne korrigiert haben. Uns ist bewusst, dass bestimmte Themengebiete wie z.B. die Wölbkrafttorsion mit Blick auf die Zielsetzung dieses Buches nur knapp behandelt werden können. Für den interessierten Leser verbleibt hier nur der Hinweis auf weiterführende Literatur.



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung</b> .....	<b>9</b>
1.1	Warum Festigkeitslehre? .....	9
1.2	Modellbildung .....	12
1.3	Einwirkungen, Beanspruchungen .....	14
1.4	Schnittgrößen, Spannungen .....	16
1.5	Verzerrungen, Verformungen .....	20
1.6	Werkstoffverhalten .....	25
<b>2</b>	<b>Querschnittskennwerte</b> .....	<b>33</b>
2.1	Vorbemerkung .....	33
2.2	Flächenmomente .....	33
2.3	Transformation auf ein gedrehtes Achsensystem .....	41
2.4	Hauptträgheitsmomente, Hauptachsen .....	43
2.5	Widerstandsmomente .....	46
2.6	Trägheitsradien .....	47
<b>3</b>	<b>Balkenbiegung</b> .....	<b>50</b>
3.1	Allgemeines .....	50
3.2	Symmetrische Querschnitte mit einachsiger Biegung .....	52
3.3	Symmetrische Querschnitte mit zweiachsiger Biegung .....	58
3.4	Beliebige Querschnitte mit zweiachsiger Biegung .....	62
3.5	Biegung mit Normalkraft .....	64
3.6	Biegelinie .....	70
<b>4</b>	<b>Querkraft</b> .....	<b>74</b>
4.1	Allgemeines .....	74
4.2	Schub in einfach symmetrischen, dünnwandigen offenen Querschnitten .....	77
4.3	Schub in geschlossenen symmetrischen Querschnitten .....	89
4.4	Schubmittelpunkt .....	90
<b>5</b>	<b>Torsion</b> .....	<b>93</b>
5.1	Allgemeines .....	93
5.2	St.-Venantsche Torsion .....	97
5.3	Wölbkrafttorsion .....	109



---

<b>6</b>	<b>Stabilitätsprobleme</b> .....	<b>111</b>
6.1	Allgemeine Betrachtungen .....	111
6.2	Elastisches Knicken gerader Stäbe .....	118
6.3	Biegeknicken im plastischen Bereich .....	127
6.4	Weitere Versagensfälle durch Instabilität .....	132
<b>7</b>	<b>Ergänzende Themen</b> .....	<b>135</b>
7.1	Ausfall der Zugzone .....	135
7.2	Spannungszustände, Hauptspannungen .....	142
7.3	Verzerrungszustände, Elastizitätsgesetz .....	152
7.4	Festigkeithypothesen .....	161
7.5	Sicherheitskonzept .....	165
<b>8</b>	<b>Lösungen</b> .....	<b>170</b>
8.1	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 1 .....	170
8.2	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 2 .....	174
8.3	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 3 .....	182
8.4	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 4 .....	187
8.5	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 5 .....	188
8.6	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 6 .....	190
8.7	Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 7 .....	196
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>202</b>
	<b>Index</b> .....	<b>203</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Warum Festigkeitslehre?

Die Festigkeitslehre ist ein Grundlagenfach in allen Ingenieurwissenschaften. Sie stellt den planenden Ingenieuren Methoden zur Verfügung, mit denen sie dauerhafte und gebrauchstaugliche Tragwerke mit einer ausreichenden Tragsicherheit entwerfen, berechnen und bemessen können.

Im Bereich des Bauwesens ist die Festigkeitslehre ein Grundlagenfach in der Statik, auf dem alle konstruktiven Fächer wie beispielsweise Stahlbetonbau, Stahlbau, Holzbau, Mauerwerksbau oder Geotechnik aufbauen. Mithilfe der Festigkeitslehre gelingt es,

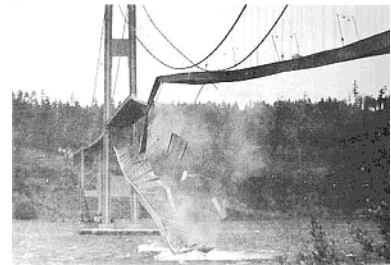
- die **Beanspruchungen** im Inneren eines Bauteils infolge der einwirkenden Lasten zu bestimmen,
- die **Abmessungen der Bauteile** eines Tragwerks unter Beachtung der Festigkeit der verwendeten Werkstoffe und einer angemessenen Sicherheit festzulegen,
- die **Beanspruchbarkeit** bestehender Bauteile oder Tragwerke bei gegebener Geometrie und bekannten Werkstoffparametern zu ermitteln,
- und die **Verformungen** des Tragwerks bzw. seiner Bauteile aufgrund der Beanspruchungen zu berechnen und gegebenenfalls durch Änderung von Bauteilgeometrie und/oder Werkstoffen zu begrenzen.

Die Festigkeitslehre darf nicht als isoliertes Lehrfach begriffen werden. Sie steht im Wechselspiel mit der Statik und liefert wichtige Grundlagen für Statiker und Tragwerksplaner.

*Bild 1.2* zeigt die Bedeutung der Festigkeitslehre während des Planungsprozesses eines Bauwerks. Bei allen an der Planung, Bemessung und Konstruktion von Bauwerken Beteiligten wird ein umfassendes Verständnis über das Tragverhalten von Bauwerken vorausgesetzt. Eigenschaften und Grenzen der verwendeten Baustoffe müssen bekannt und die mechanischen Zusammenhänge zwischen den Lasten, die auf ein Tragwerk einwirken, und den Reaktionen des Tragwerks darauf wie z.B. Verformungen, Materialversagen oder Stabilitätsversagen (Knicken, Kippen) verstanden sein.

Im Zuge der Tragwerksplanung werden mehrere **Planungsphasen** durchlaufen, in denen die Festigkeitslehre entscheidende Beiträge liefert. Bei der Modellierung des Tragsystems müssen idealisierende, jedoch geeignete und mechanisch sinnvolle Annahmen hinsichtlich des Werkstoffs, der Geo-

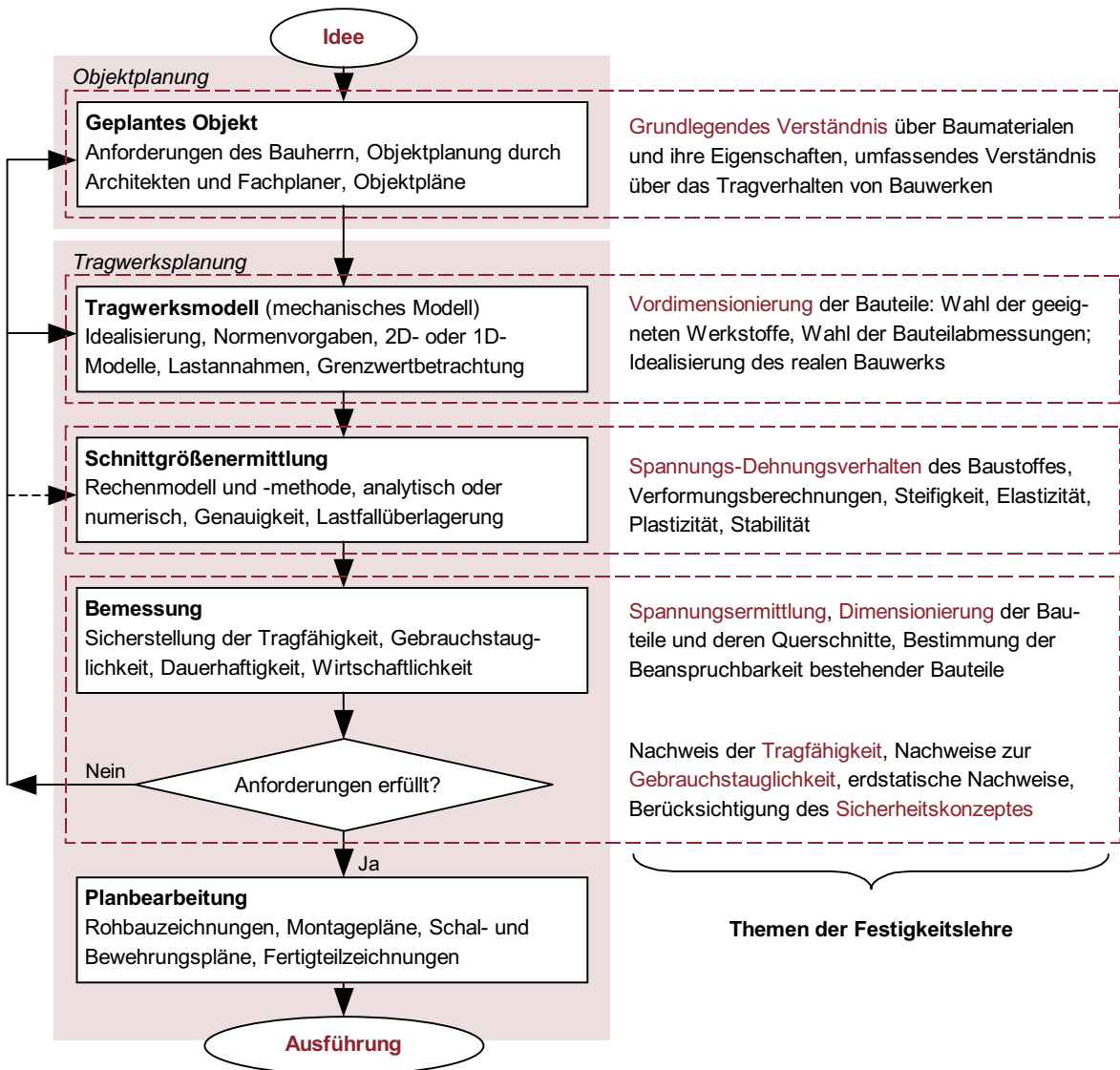
Studierende, die sich erstmalig mit der Festigkeitslehre befassen, müssen Grundkenntnisse in der Baustofflehre und der Mathematik besitzen. Sie sollten wissen, was Schnittgrößen sind und wie man sie an einfachen Tragsystemen ermittelt.



**Bild 1.1** „So etwas sollte vermieden werden!“ – Tacoma-Narrows-Bridge, 1940.

Unter einem **Tragwerk** versteht man die planmäßige Anordnung miteinander verbundener tragender und aussteifender Bauteile (z. B. Fundamente, Stützen, Decken oder Wände), die so entworfen sind, dass sie ein bestimmtes Maß an Beanspruchbarkeit (Tragwiderstand) aufweisen.

metrie des Tragwerks sowie der Abmessungen und des Zusammenwirkens seiner Bauteile getroffen werden. Das dabei entstehende **Tragwerksmodell** ist die Grundlage der statischen Berechnung und anschließenden Bemessung und verlangt den Tragwerksplanern – neben praktischen Erfahrungen – fundierte Kenntnisse der Festigkeitslehre ab.



**Bild 1.2** Bedeutung der Festigkeitslehre während des Planungsprozesses

Bei der statischen Berechnung werden **Auflagerreaktionen** und **Schnittgrößen** ermittelt. Bei statisch bestimmten Tragsystemen reichen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen aus, um die Schnittgrößen in jedem Punkt des Systems zu bestimmen. Dabei wird das Tragwerk als starres System betrachtet. Diese Idealisierung muss bei statisch unbestimmten Tragsystemen aufgegeben werden. Die Schnittgrößen können in diesem Fall nur dann korrekt ermittelt werden, wenn das Verformungsverhalten des Tragwerks zutreffend beschrieben werden kann. Dazu müssen Statiker die genauen Abmessungen der Tragwerksteile und die maßgebenden Werkstoffparameter kennen und der statischen Berechnung zugrunde legen.

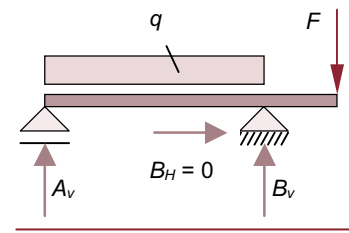
Die Schnittgrößen allein lassen jedoch keine Aussage über die **Beanspruchbarkeit** (Tragwiderstand) des Bauteils oder des Tragwerks insgesamt zu. So wird ein typischer Holzsparren bei einer anderen Beanspruchung versagen als ein Doppel-T-Träger aus hochwertigem Stahl. Im Zuge der Bemessung muss also in jedem Ort des Tragwerks geprüft werden, ob die Beanspruchungen sicher und schadensfrei aufgenommen werden können. Es wird der **Nachweis der Tragfähigkeit** geführt.

Neben den Beanspruchungen sind die **Verformungen** (Deformationen) von großer praktischer Bedeutung. Ein Tragwerk und seine Bauteile sind zwar feste, aber keine starren Gebilde. Man spricht allgemein von deformierbaren Körpern. Manchmal wird im Zusammenhang mit der Festigkeitslehre auch von der „Statik deformierbarer Körper“ gesprochen. Reagiert der Körper aufgrund seiner Werkstoffeigenschaften elastisch (wie z. B. eine Uhrfeder), so wird die Festigkeitslehre auch mit dem Begriff „**Elastostatik**“ gleichgesetzt. Die Tragwerksplaner haben somit auch den Nachweis zu führen, dass die Verformungen bestimmte, durch Bau Normen oder Bauherren vorgegebene Grenzwerte nicht überschreiten. Es wird auf diese Weise sichergestellt, dass die **Gebrauchstauglichkeit** gegeben ist.

Größere Verformungen können darüber hinaus das Tragverhalten eines stabilitätsgefährdeten Tragwerks nachteilig beeinflussen und die **Tragsicherheit** herabsetzen. In einem solchen Fall müssen die Schnittgrößen nicht mehr am unverformten, sondern am verformten System neu ermittelt und die Bemessung entsprechend angepasst werden.

Werden die Anforderungen an die **Tragfähigkeit** und die **Gebrauchstauglichkeit** im ersten Ansatz des Planungsprozesses nicht erfüllt, so sind gegebenenfalls Konstruktionsänderungen (z. B. bei den Bauteilabmessungen oder Werkstoffparametern) vorzunehmen (*Bild 1.2*). In manchen Fällen gelingt es, durch Verfeinerungen am Tragwerksmodell oder durch Auswahl eines genaueren Berechnungsverfahrens bei der Schnittgrößenermittlung, die Bemessung erfolgreich abzuschließen und damit alle Vorgaben für die Planbearbeitung bereitzustellen.

**Aufgabe 1.1:** Die Schnittgrößen eines vertikal belasteten Trägers lassen sich mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen  $\Sigma V = 0$  und  $\Sigma M = 0$  ermitteln. Stimmt das wirklich? Wenn ja, unter welchen Bedingungen?



Die **Tragfähigkeit** ist die Fähigkeit des Tragwerks und seiner tragenden Teile, allen auftretenden Einwirkungen zu widerstehen, denen es während der Errichtungs- und Nutzungsdauer planmäßig standhalten soll.

Die **Gebrauchstauglichkeit** ist die Fähigkeit des Tragwerks und seiner Bestandteile, die planmäßige Nutzung entsprechend festgelegter Bedingungen zu ermöglichen.

**Fassen wir zusammen:** Die Festigkeitslehre vermittelt wichtige Kenntnisse zur Bewältigung der oben geschilderten Aufgaben. Sie beschäftigt sich mit deformierbaren, festen Körpern mit dem Ziel, ein Versagen eines beanspruchten Systems und seiner Teile durch Bruch, zu große Verformungen oder Instabilität zu vermeiden.

## 1.2 Modellbildung

Ausgangspunkt für jeden Planungs- und Konstruktionsprozess ist das **Tragwerksmodell**. Es ist die gedankliche Umsetzung des realen Bauwerks in ein berechenbares Modell, für das Annahmen getroffen werden im Hinblick auf

- einwirkende Lasten bzw. Lastkombinationen,
- das statische System und dessen Auflagerbedingungen,
- das Tragverhalten
- und das Werkstoffverhalten.

Das Erstellen eines Tragwerksmodells ist eine der entscheidenden und anspruchsvollen Aufgaben der konstruktiv gestaltenden Ingenieure. Die Meinung, auch diese Aufgabe dem Computer alleine zu überlassen, führt in die Irre.

Auch wenn es heute computergestützte Rechenmethoden gibt, mit denen die stets dreidimensionalen Bauteile auch als dreidimensionale Körpermodelle aufwändig berechnet werden können, so werden in der Tragwerksplanung überwiegend zwei- und eindimensionale Tragwerksmodelle (2D- bzw. 1D-Modelle) gewählt. Mit ihnen lässt sich bei vertretbarem Aufwand eine gute Abbildung der Wirklichkeit darstellen. In *Bild 1.3* werden typische Tragwerksmodelle gezeigt. Sie zeichnen sich durch einen einfachen geometrischen Aufbau aus.

Für besonders massive oder dickwandige Tragwerke, deren Abmessungen in allen drei Dimensionen vergleichbare Größenordnungen erreichen, sind aufwändige Körpermodelle notwendig. Für flächige Tragwerke, bei denen die Längenabmessungen die Dicke weit übersteigen, werden zweidimensionale Modelle mit geringer Wandstärke eingesetzt. Typische **Flächentragwerke** sind Platten, Scheiben und Falwerke sowie – in gekrümmter Form – die Schalen. Für diese Modelltypen werden wegen der geringen Wandstärke Näherungsvoraussetzungen getroffen. Sie ermöglichen eine sinnvoll vereinfachte, aber dennoch ausreichend genaue Berechnung sowie eine anschauliche Ergebnisinterpretation.

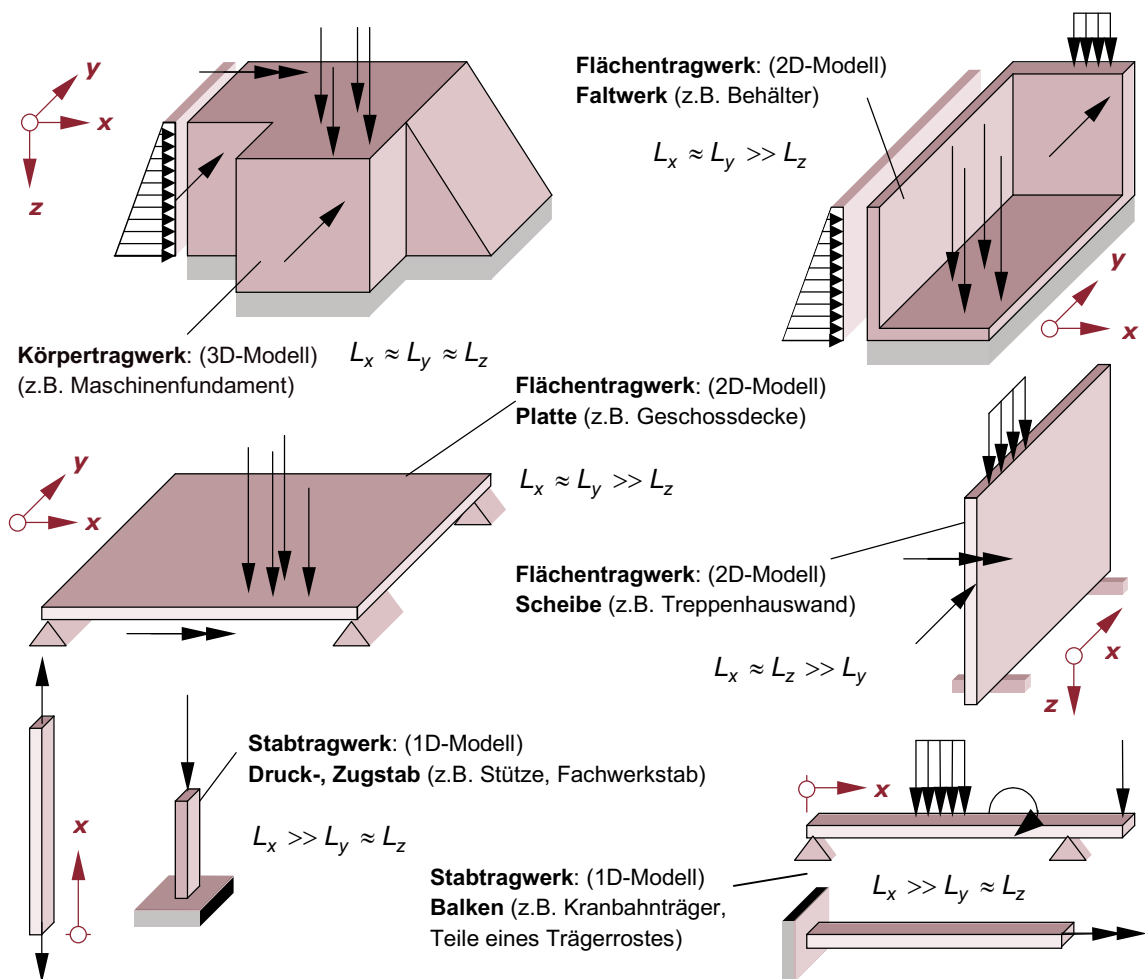
Bei der Einführung in die Grundlagen der Festigkeitslehre werden vorzugsweise eindimensionale Tragwerksmodelle behandelt wie

- der Zug- bzw. Druckstab,
- der Biegebalken,
- der Torsionsstab
- und der Knickstab.

Eindimensionale Tragwerksmodelle, bei denen die Längenausdehnung die Querabmessungen um ein Vielfaches übertrifft, werden auch als **Linientragwerke** bezeichnet. Typische Modelltypen sind in dieser Gruppe die Stabtragwerke (Druck- oder Zugstab, Biegeträger, Torsionsstab). Bei komplexeren Tragwerken müssen die vorgestellten Modelle kombiniert werden. Ein Beispiel ist der Rahmen, der sich aus biegebeanspruchten Riegeln und

Stützen zusammensetzt. Durch die Dimensionsreduktion bei 2D- bzw. 1D-Modellen entstehen die spezifischen Scheiben-, oder Plattentheorien bzw. Stab- und Balkentheorien, die in der Statik näher behandelt werden. Durch diese Reduktion wird das Tragverhalten durch charakterisierende Begriffe wie **Dehnung, Biegung, Torsion, Schub, Verwölbung** oder **Knicken** beschreibbar.

**Fassen wir zusammen:** Tragwerksplaner müssen Tragwerksmodelle entwickeln, um die Realität berechenbar zu machen. Dabei sind Annahmen zu treffen und Vereinfachungen in Kauf zu nehmen. Typische Tragwerksmodelle sind Flächen- und Stabmodelle. Die Analyse des Tragverhaltens dieser Modelle erfolgt heute mithilfe des Computers.

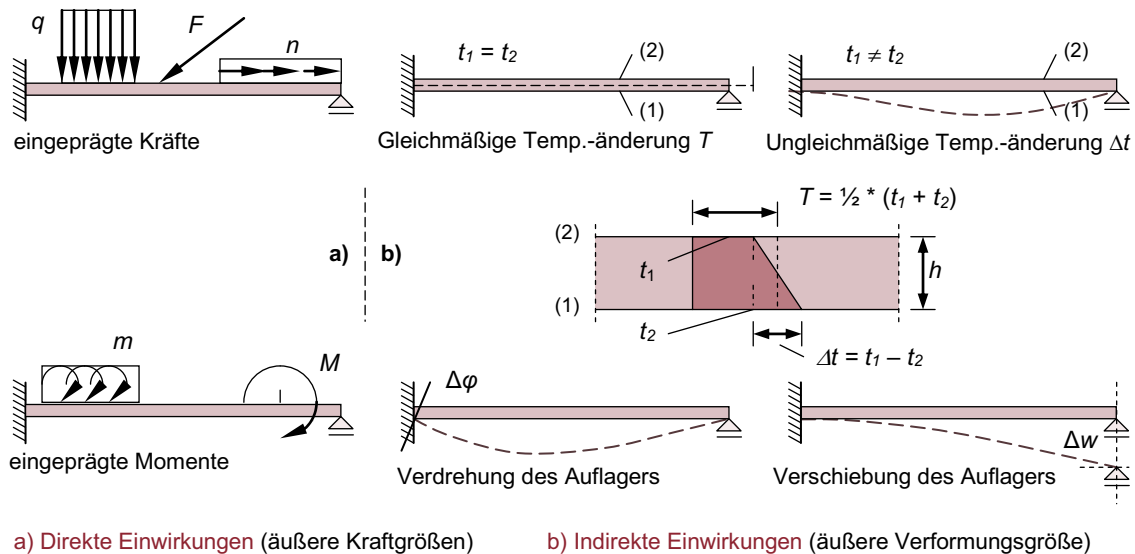


**Bild 1.3** Typische Tragwerksmodelle

### 1.3 Einwirkungen, Beanspruchungen

Aus der Statik ist der Begriff **Einwirkung** bekannt. Es handelt sich hierbei meist um eine auf das Tragwerk einwirkende Last (Kraftgröße), die auch als **direkte** Einwirkung bezeichnet wird. Daneben gibt es **indirekte** Einwirkungen, die dem Tragwerk eine Verformung (Verdrehung oder Verschiebung) aufzwingen (Bild 1.4).

Typische indirekte Einwirkungen sind Temperaturänderungen, Temperaturdifferenzen zwischen Unter- und Oberseite eines Bauteils oder ungleiche Setzungen an den Auflagern. Bei statisch unbestimmten Tragsystemen entstehen aufgrund der Verformungsbehinderungen so genannte **Zwangsschnittgrößen**, die mit der gleichen Wertigkeit wie die Schnittgrößen aus direkt einwirkenden Lasten behandelt werden müssen. Bild 1.4 zeigt – nach der Ursache unterteilt – verschiedene Einwirkungen.



**Bild 1.4** Ursachen für verschiedene Einwirkungen

Als indirekte Einwirkungen werden auch das Kriechen (Formänderung des Materials mit dem Ziel, sich einer dauerhaft wirkenden Beanspruchung zu entziehen) und das Schwinden (Schrumpfung durch Austrocknung) angesehen.

Bei Einwirkungen unterscheidet man neben der Ursache auch nach der Art der Wirkung. So ist eine **vorwiegend ruhende Einwirkung** eine Einwirkung, die keine (wesentlichen) Beschleunigungen des Tragwerks oder des Bauteils hervorruft. Typische Einwirkungen dieser Art sind:

- ständige oder zeitlich unveränderliche Einwirkungen wie Eigengewicht, Erddruck oder Vorspannung,

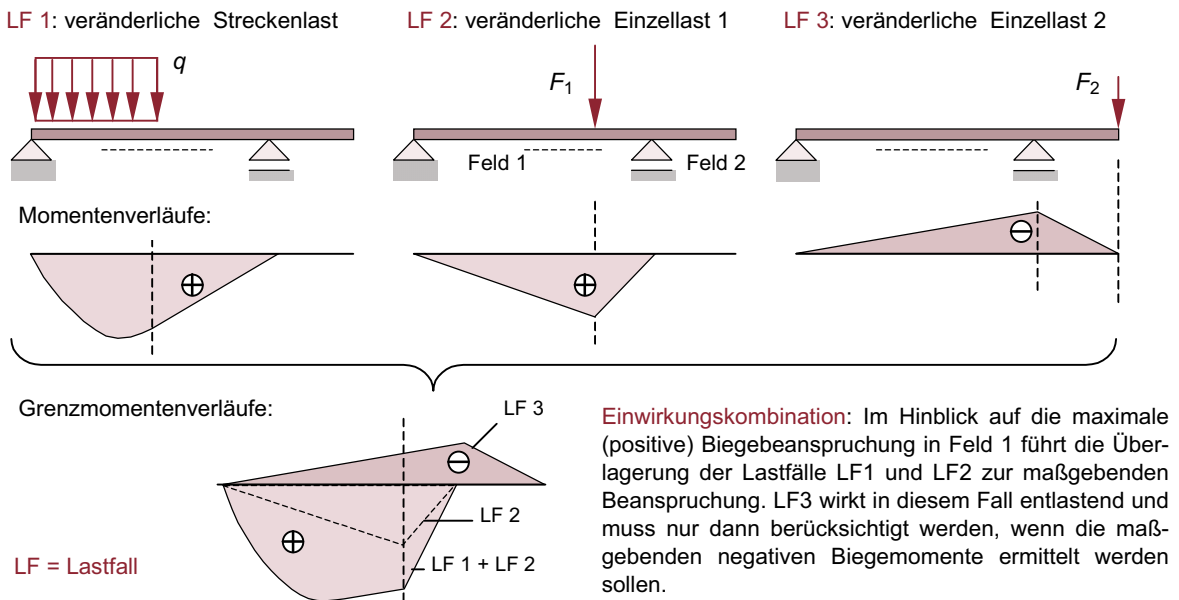
- zeitlich veränderliche Einwirkungen wie Nutzlasten aus Verkehr und Lagerung, Schnee- oder Windlasten. Obwohl zeitlich veränderlich, so werden diese Einwirkungen für die Tragwerksplanung dennoch als vorwiegend ruhende Einwirkungen angesehen.

Bei **dynamischen Einwirkungen** handelt es sich um stoßende oder sich häufig wiederholende Belastungen, die wesentliche Beschleunigungen hervorrufen wie z.B. Kranbahnlasten.

Eine Einwirkung kann allein oder gleichzeitig in Kombination mit anderen, von ihr unabhängigen Einwirkungen auftreten. Man spricht dann von einer **Einwirkungskombination**. Als Folge der gleichzeitig zu betrachtenden Einwirkungen bzw. einer Einwirkungskombination ergibt sich die **Beanspruchung** des Tragwerks oder seiner Teile oder die Beanspruchung an einem betrachteten Ort (Querschnitt) des Tragwerks.

Ein für die Bemessung maßgebender Wert einer Beanspruchung lässt sich mithilfe der ungünstigsten Einwirkungskombination bestimmen. Diese muss den Kombinationsregeln der einschlägigen Baunormen gehorchen. In *Bild 1.5* wird dieser Hergang exemplarisch an einem Biegeträger gezeigt, allerdings ohne auf weiterführende Regeln des **Sicherheitskonzepts** nach DIN EN 1990:2012-12 im Hinblick auf die Bemessung einzugehen.

**Aufgabe 1.2:** Wie müssen die Lastfälle in *Bild 1.5* kombiniert werden, um die maßgebende Auflagerkraft des rechten Lagers zu erhalten?



**Bild 1.5** Ermittlung der maßgebenden Beanspruchung durch Lastfallkombinationen



## 1.4 Schnittgrößen, Spannungen

Ein Maß für die Beanspruchung auf der Ebene des Tragwerkmodells sind die **Schnittgrößen**. Bei Stabtragwerken sind es im allgemeinen Fall die Längs- oder Normalkraft  $N$ , die Querkräfte  $V_y$  und  $V_z$  sowie das Torsionsmoment  $M_x$  um die Längsachse des Stabes und die beiden Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  (vgl. Bild 1.6). Wirkt eine besondere Belastung in einer Ebene bzw. in einer Richtung, so ergeben sich bestimmte Schnittgrößen zu null.

**Aufgabe 1.3:** In Bild 1.3 sind einige Stabtragwerke (also 1D-Modelle) unter besonderen Beanspruchungen dargestellt. Welche Schnittgrößen ergeben sich bei diesen Systemen zu null und müssen nicht weiter beachtet werden?

Die Festlegung, was positive oder negative Schnittgrößen sind, erfolgt mithilfe eines am Tragwerk ausgerichteten **Koordinatensystems** und der Positivdefinition der Schnittufer. Schnittgrößen sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnittufer im positiven Sinne des Koordinatensystems wirken. Das positive Schnittufer einer Schnittstelle ist jenes, welches man vom Ursprung ausgehend zuerst erreicht. Die Einführung von Schnittstellen ist eine Methode der Statik (**Schnittprinzip**), um Beanspruchungen an einer beliebigen Stelle des Tragwerkmodells „sichtbar“ und damit berechenbar zu machen.

Alle Schnittgrößen beziehen sich bei Stabtragwerken auf die **Stabachse**, die eine Idealisierung des dreidimensionalen Bauteils darstellt. Die Schnittgrößen werden auch als innere Kräfte bezeichnet und stehen mit den äußeren Kräften (einwirkende Lasten und Auflagerreaktionen) im **Gleichgewicht**. Sie wirken auf die gesamte Schnittfläche und verteilen sich nach mechanischen Gesetzmäßigkeiten in Abhängigkeit von der Querschnittsgeometrie und den Werkstoffparametern.

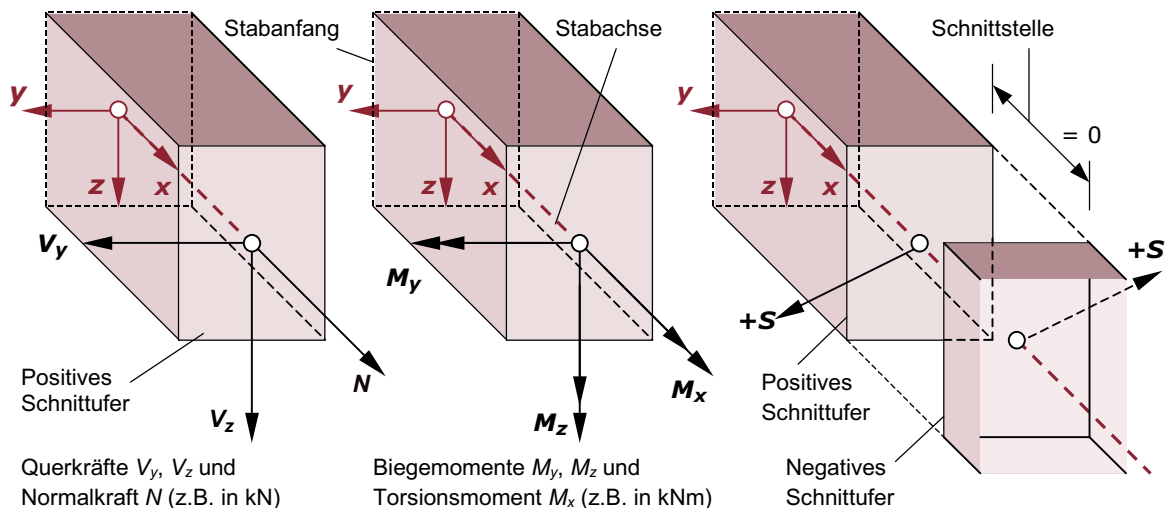


Bild 1.6 Definition positiver Schnittgrößen am Stabtragwerk

Der je Flächeneinheit wirkende Kraftanteil dieser Schnittgrößen wird als **Spannung** bezeichnet und ist ein Maß für die Beanspruchung im Körperinneren des (realen) Tragwerks.

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraftanteil}}{\text{Flächeneinheit}} \left( \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}; \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right)$$

Die Flächeneinheit kann sich aus einer endlichen Querschnittsfläche, einer Teilfläche im Schnitt oder aus einer infinitesimal kleinen Schnittfläche bilden. Mathematisch korrekt wird deshalb die Spannung als Differentialquotient aus innerer Kraft  $dF$  und zugehöriger Fläche  $dA$  beschrieben; es gilt:

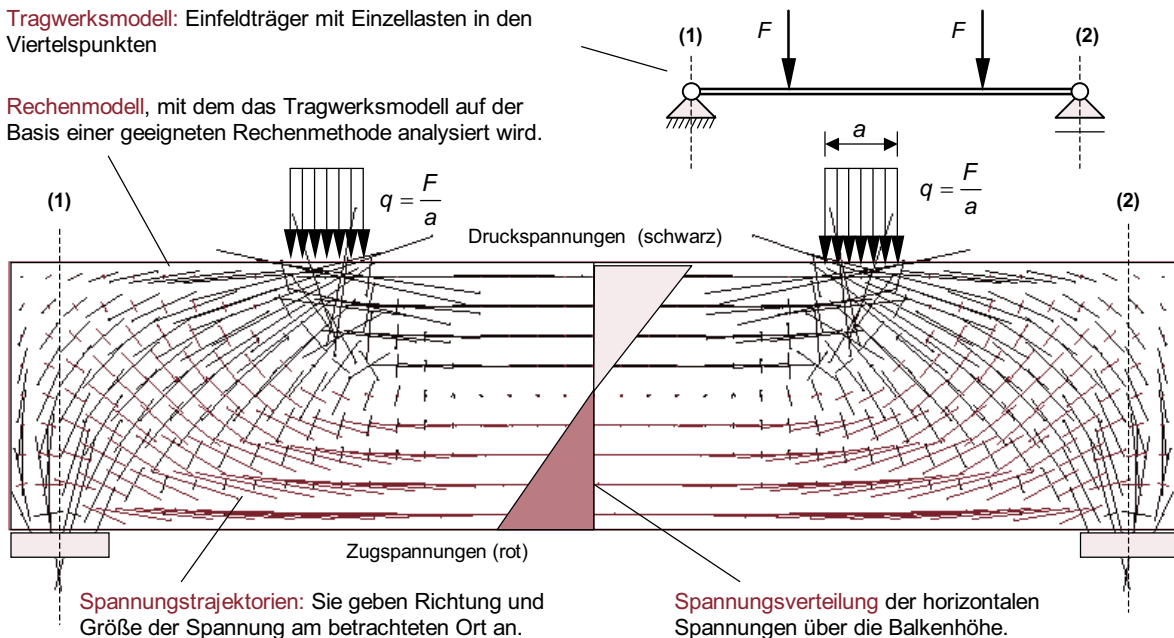
$$\text{Spannung} = \frac{dF}{dA}$$

Die Spannung ist ebenso wie die Kraft ein Vektor. Sie ist eindeutig durch die Wirkungslinie, den Betrag und ihren Richtungssinn definiert. Stellt man derartige Spannungsvektoren für verschiedene Schnitte und Querschnittspunkte zeichnerisch zusammen, so wird der innere Kraftfluss in einem Tragwerk deutlich. *Bild 1.7* zeigt einen solchen Zustand für einen durch zwei Einzellasten beanspruchten Einfeldträger.

Spannungen mit positivem Vorzeichen nennt man Zugspannungen. Sie dehnen das Material. Negative Spannungen sind Druckspannungen, die das Material zusammenpressen.

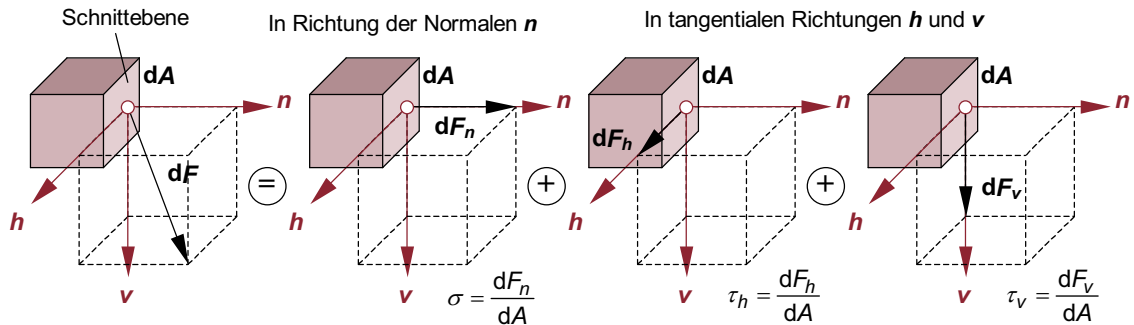
**Tragwerksmodell:** Einfeldträger mit Einzellasten in den Viertelpunkten

**Rechenmodell,** mit dem das Tragwerksmodell auf der Basis einer geeigneten Rechenmethode analysiert wird.



**Bild 1.7** Innerer Kraftfluss in einem Einfeldträger unter Querkraftbiegung, berechnet mit einem Scheibenmodell

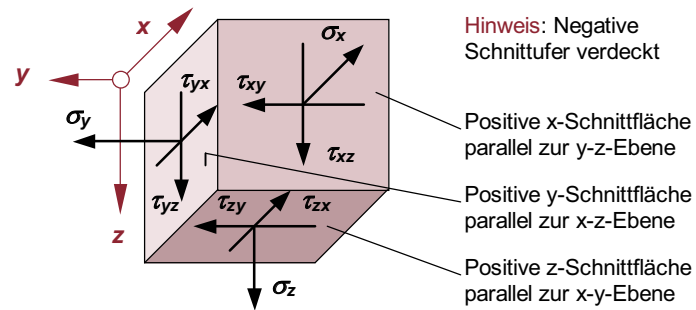
Für die weitere Betrachtung der Spannungen ist es üblich, den Spannungsvektor in seine Komponenten zu zerlegen. Die Komponente, die senkrecht (normal) zur Schnittfläche steht, wird als **Normalspannung**  $\sigma$ , die in der Schnittfläche liegende Komponente als **Tangentialspannung**  $\tau$  (auch als Schubspannung oder Scherspannung) bezeichnet (*Bild 1.8*). Die Tangentialspannung  $\tau$  wird darüber hinaus in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten  $\tau_v$  und  $\tau_h$  zerlegt, wenn das Bezugskordinatensystem dieses erfordert.



**Bild 1.8** Zerlegung des Spannungsvektors in drei orthogonale Spannungskomponenten

Wird aus einem allgemein beanspruchten Körper ein Würfel mit infinitesimalem Volumen und beliebiger Raumorientierung herausgeschnitten, so ergeben sich in jeder Schnittfläche eine **Normalspannung** und zwei **Tangentialspannungen**. Zur Unterscheidung ihrer Wirkungsrichtung erhalten die Normalspannungen die Richtungsindizes  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

Die Tangentialspannungen werden, da sie paarweise pro Schnittfläche vorliegen, doppelt indiziert. Der 1. Index gibt die Richtung der Flächennormalen, der 2. Index die Richtung der jeweiligen  $\tau$ -Spannung an (*Bild 1.9*).



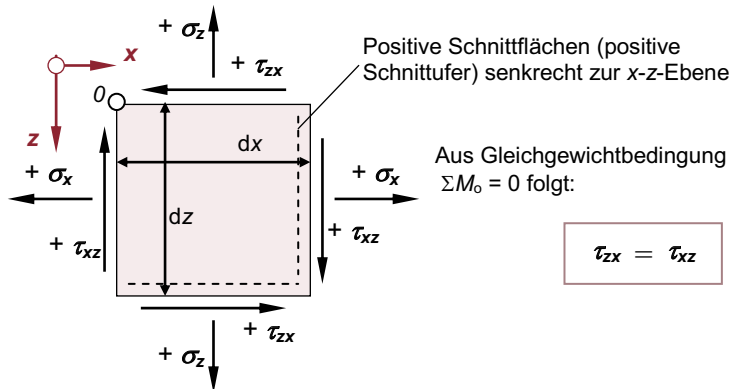
**Bild 1.9** Positive Spannungskomponenten am Volumenelement

**Aufgabe 1.4:** Durch die perspektivische Darstellung in *Bild 1.9* sind die negativen Schnittufer nicht zu sehen. Stellen Sie alle neun positiven Spannungskomponenten an allen negativen Schnittufern in einer eigenen Skizze dar.

Die Festlegung der Vorzeichendefinition ergibt sich aus der Lage der Schnitthufler in Bezug auf das Koordinatensystem und den Richtungssinn der Spannungskomponenten. Spannungen sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnitthufler in Richtung der positiven Koordinatenachsen des Bezugssystems wirken. Am negativen Schnitthufler weisen positive Spannungen in entgegengesetzte Richtungen.

Wie aus *Bild 1.9* ersichtlich, ergeben sich insgesamt neun Spannungskomponenten. Durch Gleichgewichtsbetrachtungen lässt sich belegen, dass zwei aufeinander zulaufende Tangentialspannungen an benachbarten Schnitthuflern gleichen Vorzeichens gleich groß sind. *Bild 1.10* zeigt dies für die  $x$ - $z$ -Ebene. Es gilt generell:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (1.1)$$



**Bild 1.10** Gleichheit zugeordneter Tangentialspannungen

Ein allgemeiner dreiachsiger (räumlicher) **Spannungszustand** lässt sich somit durch sechs voneinander unabhängige Spannungskomponenten beschreiben:

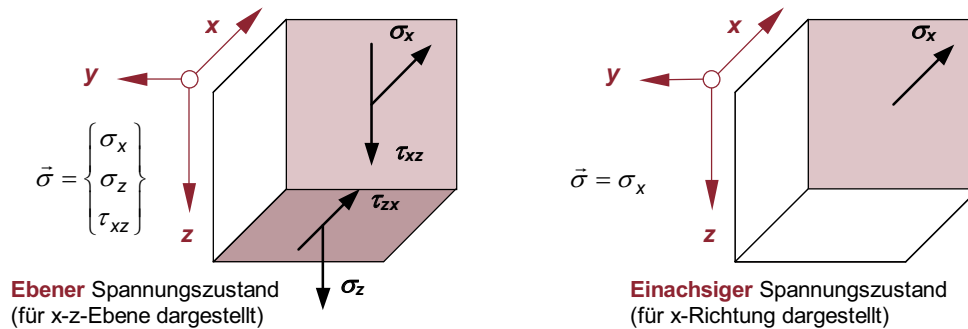
$$\vec{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \quad (1.2)$$

Sind in besonderen Fällen zwei gegenüberliegende Schnitthufler spannungsfrei (*Bild 1.11*), so spricht man von einem zweiachsigen (ebenen) Spannungszustand. Ein solcher Spannungszustand ist typisch für eine Scheibe, die nur in ihrer Ebene Lasten aufzunehmen hat. Quer zur Scheibenebene wirken weder Lasten, noch liegen hier Verformungsbehinderungen vor. Ein einachsiger Spannungszustand ist typisch für einen Stab unter einer Zug- oder Druckbeanspruchung. Hier tritt nur in der Schnittfläche normal zur Stabachse eine von null verschiedene  $\sigma$ -Spannung auf (*Bild 1.11*). Gleiches trifft auch für einen Balken unter reiner Biegung zu.

Durch die Verwendung der Buchstaben  $\sigma$  und  $\tau$  wird der Eindruck erweckt, als ob es sich um verschiedenartige Spannungen handelt. Normal- und Tangentialspannungen sind gleichartige Komponenten einer resultierenden Spannung. Die Zerlegung in  $\sigma$ - und  $\tau$ -Spannungen ist lediglich eine Frage der Schnittführung.

In *Abschn. 7.2* werden die Spannungen ein weiteres Mal eine besondere Rolle spielen. Wir werden die Spannungen unter anderen Schnittwinkeln betrachten und auf andere Bezugskordinatensysteme transformieren. Dabei werden wir auch die sogenannten **Hauptspannungen** kennen lernen.

**Aufgabe 1.5:** In *Bild 1.7* ist der innere Kraftfluss eines Einfeldbalkens unter zwei Einzellasten in den Viertelpunkten dargestellt. Gibt es bei diesem Balken Bereiche, in denen ein einachsiger Spannungszustand vorherrscht?



**Bild 1.11** Zweiachsiger und einachsiger Spannungszustand

**Fassen wir zusammen:** Spannungen sind ein Maß für die Beanspruchungen im Körperinneren. Sie werden nach Maßgabe der Schnittführung je Schnittfläche unterteilt in eine Normalspannungs- und zwei Tangentialspannungskomponenten. Schnittgrößen sind ein Maß für die Beanspruchungen auf der Ebene des Tragwerkmodells. Sie repräsentieren den Spannungszustand der Querschnittsfläche in Form von Spannungsergebnissen.

## 1.5 Verzerrungen, Verformungen

Last- und Temperatureinwirkungen führen zu einer Formänderung des Tragwerks und seiner Bauteile. Formänderungen werden z.B. sichtbar als Durchbiegung eines Balkens, als eine Verdrehung eines Trägers an einem gelenkigen Auflager oder als eine Längenänderung eines Zugstabes. Sie sind das Resultat von **Verzerrungen**, die sich an jedem Ort im Inneren des Tragwerks in Abhängigkeit vom jeweils herrschenden Spannungszustand einstellen.

Eine Druckbeanspruchung führt zu einer Verkürzung des Körpers. Die Dehnung ist negativ und wird als Stauchung bezeichnet.

Verzerrungen sind Formänderungen eines infinitesimalen Körpers und eine Reaktion auf die Spannungen, die auf ihn wirken. Verzerrungen werden nach **Dehnung**  $\varepsilon$  und **Gleitung**  $\gamma$  unterschieden. Als Dehnung wird das Verhältnis zwischen der Längenänderung des Körpers in Richtung einer Normalspannung und seiner ursprünglichen Länge im spannungsfreien Zustand bezeichnet (relative Längenänderung; *Bild 1.12*). Von einer Gleitung spricht man, wenn sich der Körper infolge einer Tangentialspannung rauhenartig deformiert (relative Winkeländerung; *Bild 1.13*).

Betrachten wir zunächst die **Dehnung**. Sie lässt sich an einem Zugstab mit konstantem Querschnitt unter zentrischer und gleichbleibender Normalkraft anschaulich herleiten. Unter der Normalkraftbeanspruchung längt sich der