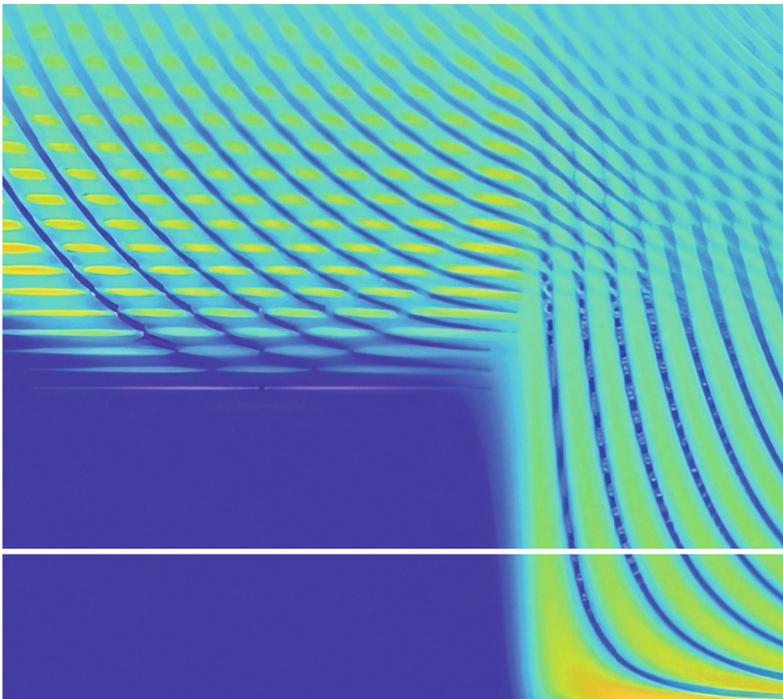


Alexander Klös

Nanoelektronik

Bauelemente der Zukunft



2., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER



bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Alexander Klös

Nanoelektronik

Bauelemente der Zukunft

2., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Über den Autor:

Prof. Dr.-Ing. Alexander Klös, Technische Hochschule Mittelhessen,
Fachbereich Elektro- und Informationstechnik

Print-ISBN: 978-3-446-47899-2

E-Book-ISBN: 978-3-446-47900-5

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2024 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Frauke Schafft

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelmotiv: © Alexander Klös

Satz: Alexander Klös

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Vorwort

Die Anforderungen an das Fachgebiet der Mikroelektronik in der Lehre haben sich in den letzten Jahrzehnten stark verändert. Bis in das Jahr 2000 reichte für eine Vermittlung von Inhalten, welche nicht nur die Systemebene, sondern auch die Funktionsweise der integrierten Bauelemente betrachten, häufig eine semiklassische Beschreibung aus. Die stetige Verkleinerung der Strukturgrößen bis in den Bereich weniger Nanometer macht inzwischen eine tiefer gehende Betrachtung notwendig, welche Quanteneffekte wie beispielsweise den Tunneleffekt mit einbeziehen muss. Das Fachgebiet der *Nanoelektronik* ist entstanden. Die Lehre auf diesem Gebiet steht vor der Herausforderung, sowohl die physikalischen Grundlagen zum Verständnis dieser Effekte als auch das Klemmenverhalten von Bauelementen für eine Betrachtung im Schaltungsverbund zu vermitteln. Für Bachelor- und Masterstudierende der Elektrotechnik bleibt im Studium wenig Zeit, sich in die Grundlagen der Halbleiterphysik einzuarbeiten. Studierende der Physik decken diesen Teil zwar mit großer Tiefe ab, erreichen aber oft nicht eine Sichtweise in Bezug auf das Bauelement in einem Netzwerk.

Hier soll das vorliegende Buch einen Beitrag liefern. Es ist auf Grundlage von Vorlesungen entstanden, welche ich seit vielen Jahren auf den Gebieten der *Nanoelektronik* und *Festkörperelektronik* für Studierende der Elektrotechnik in Bachelor- und Masterstudiengängen an der Technischen Hochschule Mittelhessen halte. Bei der Konzeption des Buchs stand im Vordergrund, dass es als alleinige Grundlage für eine Vorlesung auf dem Gebiet mikroelektronischer oder nanoelektronischer Bauelemente geeignet ist.

Die Erläuterungen einer Vielzahl physikalischer Effekte in Halbleitern verlangen keine Vorkenntnisse, welche über die Grundlagen der Elektrotechnik hinausgehen. Das Buch enthält eine Einführung in die Grundlagen der Halbleiterphysik und -technologie bis zu einer Tiefe, wie sie zum Verständnis für den Einfluss von Quanteneffekten auf das Klemmenverhalten der Bauelemente notwendig ist. Dies erlaubt auch Bachelorstudierenden, einen Einblick in die besondere Funktionsweise von Schaltelementen der Nanoelektronik zu erhalten. Für Studierende von Masterstudiengängen sind detaillierte Ableitungen quantenmechanischer Grundlagen und der Kennliniengleichungen von Bauelementen enthalten.

Zur Unterstützung des Lernerfolgs schließen die meisten Kapitel mit Wiederholungsfragen, welche die erläuterten Zusammenhänge ohne notwendige Berechnungen abfragen. Übungsaufgaben mit Musterlösungen dienen der weiteren Vertiefung des Lernstoffs.

In Ergänzung zu den Rechenbeispielen wird in einigen Kapiteln auf die Simulationsplattform <http://nanohub.org> der Purdue University (USA) verwiesen. Hier stehen (nach kostenloser Registrierung) eine Vielzahl von Online-Simulationstools für das Gebiet der Nanoelektronik zur Verfügung, welche das Verständnis der Inhalte zusätzlich unterstützen.

Das Buch umfasst mit den Kapiteln 2, 3, 4 und 5 eine für Elektrotechnikstudierende geeignete Einführung in die Grundlagen der Halbleiterphysik, welche die in Bauelementen der Nanoelektronik in Erscheinung tretenden besonderen Effekte enthält. Kapitel 6 gibt einen kurzen Überblick über die Grundlagen der Halbleitertechnologie, wie er zum Verständnis der im Buch vorgestellten Bauelementstrukturen notwendig ist. Studierende der Physik können von

der Beschreibung der Funktionsweise einer Vielzahl klassischer Bauelemente der Mikroelektronik in Kapitel 7, ausgehend von den zugrunde liegenden physikalischen Effekten bis hin zu ihrem Klemmenverhalten, profitieren. Kapitel 8 gibt eine Einführung die wichtige CMOS-Schaltungstechnik und Speichertechnologien.

Kapitel 9 führt nach Darstellung der technologischen Entwicklung der klassischen CMOS-Technologie in die heutige Großintegration ein und erläutert ihre Grenzen. Dabei steht das elektrische Verhalten des MOS-Transistors als immer noch wichtigstes Schaltelement im Vordergrund. Kapitel 10 stellt schließlich Bauelementstrukturen vor, welche als Ergänzung oder Ersatz des klassischen MOS-Transistors angedacht sind. Zum heutigen Zeitpunkt werden sie zwar bereits experimentell gefertigt, haben aber noch keinen Einzug in die Serienfertigung erhalten.

An dieser Stelle möchte ich den Doktoranden und Studierenden der Arbeitsgruppe *Nanoelektronik/Bauelementmodellierung* an der TH Mittelhessen danken, welche mit ihren wissenschaftlichen Arbeiten im Rahmen öffentlich geförderter Projekte auf dem Gebiet der Simulation und Modellbildung neuartiger Transistorkonzepte einen wichtigen Beitrag zu deren Verständnis und Beschreibung geleistet haben. Besonderer Dank gilt Dr.-Ing. Mike Schwarz für das Korrekturlesen der Inhalte dieses Buchs.

Schließlich einen besonderen Dank an meine Familie für die vielfältige Unterstützung meiner Arbeit in all den Jahren.

Gießen, im Mai 2018

Alexander Klös

Vorwort zur 2. Auflage

Kaum ein Gebiet der Ingenieurwissenschaften entwickelt sich so rasant wie die Nanoelektronik. Seit der Drucklegung der ersten Auflage dieses Buchs wurden neue Bauelementkonzepte entwickelt, die für die weitere Entwicklung der Großintegration sehr vielversprechend sind. Heute bereiten die drei wirtschaftlich größten Halbleiterhersteller den Übergang zu sogenannten Nanosheet-Transistoren vor. Durch konsequente Weiterentwicklung dieses Konzepts haben 2D-Materialien in der Nanoelektronik inzwischen eine große Bedeutung erlangt und werden für neue Transistorstrukturen erforscht. Diese Entwicklungen sind jetzt in der neuen Auflage des Buchs enthalten.

Weiterhin wurden die Grundlagenkapitel zur Halbleiterphysik erweitert, um dem Anspruch des Buchs als umfassendes und alleiniges Begleitbuch für Vorlesungen auch in Masterstudiengängen gerecht zu werden. Hierbei wird insbesondere der Einführung der Bandstruktur von Halbleitern und der Berechnung von Tunnelströmen mehr Raum gewidmet. Eine Vielzahl von kleineren Änderungen und Aktualisierungen in allen sonstigen Kapiteln und eine Übersicht der empfohlenen Simulationstools auf der Plattform nanohub.org runden die neue Auflage ab.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass aus Gründen einer einheitlichen Darstellung im Text und in den grafischen Darstellungen der Punkt als Dezimaltrennzeichen entsprechend dem englischen Sprachraum verwendet wird.

Gießen, im Januar 2024

Alexander Klös

Inhalt

1	Einführung in die Nanoelektronik	15
1.1	Bedeutung der Mikroelektronik	15
1.2	Chancen der Nanoelektronik	16
2	Eigenschaften von Halbleitern	19
2.1	Struktur von Halbleitern	19
2.1.1	Bandstruktur	19
2.1.2	Atomarer Aufbau von Silizium	22
2.1.3	Kristallgitter	23
2.1.4	2D-Materialien	25
2.2	Eigenleitung	26
2.3	Fremdleitung	27
2.3.1	n-dotiertes Silizium	28
2.3.2	p-dotiertes Silizium	28
2.3.3	Ladungsbilanz	29
2.4	pn-Übergang	30
2.4.1	Sperrwirkung der pn-Diode	30
2.4.2	Lösung der Poisson-Gleichung am pn-Übergang	33
2.5	Wiederholungsfragen	36
2.6	Übungen	37
2.7	Lösungen	38
3	Teilchen und Wellen	39
3.1	Dualismus von Welle und Teilchen	39
3.2	Die Schrödinger-Gleichung	41
3.2.1	Fourier-Transformation	42
3.2.2	Materiewellen	43
3.2.3	Eindimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung	45
3.3	Der Potenzialtopf	46
3.4	Quantenstrukturen	52
3.5	Orbitale des Wasserstoffatoms	54
3.6	Transmission, Reflexion und Tunneleffekt	56
3.6.1	Rechteckbarriere	57

3.6.2	WKB-Approximation.....	59
3.7	Wiederholungsfragen	60
3.8	Übungen	60
3.9	Lösungen	61
4	Bandstruktur und Bändermodell	65
4.1	Wellenfunktion und Bandstruktur im Kristall	65
4.2	Effektive Masse	71
4.3	Generation und Rekombination	73
4.3.1	Generationsprozesse	74
4.3.2	Rekombinationsprozesse	74
4.4	Bändermodell	76
4.4.1	Intrinsisches Silizium	76
4.4.2	Dotiertes Silizium	79
4.5	Metallurgische Übergänge	81
4.5.1	pn-Übergang.....	81
4.5.1.1	Thermisches Gleichgewicht	81
4.5.1.2	Flussrichtung.....	84
4.5.1.3	Sperrrichtung.....	86
4.5.2	Schottky-Übergang	87
4.5.2.1	Thermisches Gleichgewicht	87
4.5.2.2	Flussrichtung.....	89
4.5.2.3	Sperrrichtung.....	91
4.5.2.4	Effektive Barrierenhöhe.....	91
4.5.3	Heteroübergänge.....	91
4.5.4	Allgemeine Vorgehensweise zur Konstruktion eines Bändermodells.....	93
4.6	Fermi-Integral und Zustandsdichte.....	94
4.6.1	Dreidimensionales System.....	95
4.6.2	Zweidimensionales System	98
4.6.3	Eindimensionales System	98
4.7	Wiederholungsfragen	99
4.8	Übungen	100
4.9	Lösungen	101
5	Ladungstransport in Halbleitern	105
5.1	Driftstrom	105
5.2	Diffusionsstrom.....	111
5.3	Kontinuitätsgleichungen	112

5.4	Tunnelstrom.....	113
5.4.1	Tunneln durch Potenzialbarrieren.....	113
5.4.2	Band-zu-Band-Tunneln.....	115
5.4.3	Veränderung von Zustandsgrößen.....	116
5.4.4	Tunnelstromberechnung.....	118
5.5	Wiederholungsfragen.....	121
5.6	Übungen.....	122
5.7	Lösungen.....	123
6	Grundlagen der Halbleitertechnologie.....	125
6.1	Silizium-Planartechnologie.....	125
6.2	Herstellung einkristalliner Wafer.....	127
6.3	Chemische Depositionsverfahren.....	128
6.3.1	CVD-Prozesse.....	128
6.3.2	Epitaxie.....	130
6.4	Physikalische Depositionsverfahren.....	130
6.4.1	Aufdampfen.....	130
6.4.2	Sputtern.....	131
6.4.3	Materialien zur Metallisierung.....	132
6.4.3.1	Aluminium.....	132
6.4.3.2	Kupfer-Metallisierung.....	132
6.5	Lithografie.....	132
6.5.1	Fotolithografie.....	133
6.5.2	Elektronenstrahlolithografie.....	135
6.5.3	Röntgenlithografie.....	136
6.6	Ätzprozesse.....	136
6.6.1	Nasschemisches Ätzen.....	137
6.6.2	Trockenätzen.....	137
6.6.2.1	Plasmaätzen.....	137
6.6.2.2	Reaktives Ionenätzen.....	138
6.6.2.3	Sputter-Ätzen.....	138
6.7	Thermische Oxidation.....	138
6.8	Dotierung.....	141
6.8.1	Diffusion.....	141
6.8.2	Ionenimplantation.....	142
6.9	CMOS-Prozess.....	142
6.10	Wiederholungsfragen.....	145

7	Klassische Bauelemente der Mikroelektronik	147
7.1	Diodenstrukturen	147
7.1.1	pn-Diode	148
7.1.1.1	Schwache Injektion.....	148
7.1.1.2	Hohe Injektion	152
7.1.1.3	Sperrverhalten	153
7.1.1.4	Sperrschichtkapazität	154
7.1.1.5	Diffusionskapazität.....	155
7.1.1.6	Kleinsignalersatzschaltbild	156
7.1.2	Esaki-Tunneldiode	157
7.1.3	Resonante Tunneldiode	159
7.1.4	Schottky-Diode	160
7.1.4.1	Thermischer Emissionsstrom	161
7.1.4.2	Tunnelstrom	163
7.2	Bipolartransistor.....	165
7.2.1	Funktionsweise in eindimensionaler Näherung.....	165
7.2.2	Early-Effekt	168
7.2.3	Stromgleichungen und Kennlinien	169
7.2.4	Ebers-Moll-Modell	171
7.2.5	Kleinsignalersatzschaltbild	173
7.2.6	Strukturbezogenes Ersatzschaltbild im SBC-Prozess	174
7.3	MOS-Feldeffekttransistor	176
7.3.1	Prinzipielle Funktionsweise	177
7.3.2	Schwellspannung	180
7.3.2.1	Flachbandzustand	180
7.3.2.2	Starke Inversion	182
7.3.2.3	Schwellspannungsimplantation.....	183
7.3.2.4	Substrateffekt	184
7.3.2.5	Transistortypen	184
7.3.3	MOS-Kapazität	186
7.3.4	Vereinfachtes Strommodell	188
7.3.4.1	Gradual-Channel-Approximation	188
7.3.4.2	Kanallängenmodulation	189
7.3.4.3	Kennlinien	190
7.3.4.4	Extraktion der Schwellspannung	192
7.3.5	Kleinsignalverhalten	192
7.3.5.1	Kleinsignalleitwerte	192
7.3.5.2	Kapazitive Effekte	194

7.3.5.3	Meyer-Modell	196
7.3.5.4	Kleinsignalersatzschaltbild	198
7.3.6	Grenzen Bulk-MOSFET	199
7.4	Optoelektronische Bauelemente	200
7.4.1	Strahlungsbauelemente	200
7.4.1.1	Lumineszenzdiode	200
7.4.1.2	Halbleiterlaser	202
7.4.2	Absorptionsbauelemente	204
7.4.2.1	Fotodiode	204
7.4.2.2	Solarzelle	207
7.5	Wiederholungsfragen	208
7.6	Übungen	210
7.7	Lösungen	214
8	Digitale CMOS-Schaltungstechnik	223
8.1	Logikgatter	223
8.1.1	Inverter	224
8.1.2	NAND und NOR	229
8.2	Leistungsaufnahme	230
8.3	Speicherbausteine	231
8.3.1	DRAM	232
8.3.2	6T-SRAM-Zelle	233
8.3.3	Flash-Speicher	235
8.4	Wiederholungsfragen	239
8.5	Übungen	240
8.6	Lösungen	241
9	Nanostruktur-Feldeffekttransistoren	243
9.1	Skalierung der CMOS-Technologie	244
9.1.1	Moore'sches Gesetz	244
9.1.2	Selbstjustiertes Polysilizium-Gate	246
9.1.3	Kupferverdrahtung und Low-k-Dielektrikum	247
9.1.4	Verspanntes Silizium	248
9.1.5	High-k-Metal-Gate-Technologie	249
9.1.6	Multi-Gate-Transistoren	250
9.2	Kleingeometrie-Bulk-MOSFET	250
9.2.1	Bändermodell Source-Kanal-Drain	250
9.2.2	Ableitung verbesserter Stromgleichungen	252

9.2.2.1	Starke Inversion	252
9.2.2.2	Schwache Inversion	255
9.2.3	Kurzkanaleffekte	259
9.2.3.1	Schwellspannungsverschiebung	260
9.2.3.2	Leckstrom.....	262
9.2.3.3	Verschlechterung des Subthreshold-Swing	262
9.2.3.4	Bahnwiderstände	264
9.2.3.5	LDD-Strukturen.....	265
9.2.3.6	Ladungsträgerinjektion	266
9.2.3.7	Weitere Kurzkanaleffekte	267
9.2.4	Schmalkanaleffekte	267
9.2.4.1	Standard-LOCOS-Isolation	267
9.2.4.2	Trench-Isolation	268
9.3	UTB-Technologie	270
9.3.1	SOI-Substrat	270
9.3.2	UTB-MOSFETs.....	272
9.3.2.1	Partially Depleted SOI.....	273
9.3.2.2	Fully Depleted SOI.....	274
9.4	Multiple-Gate-MOSFET	275
9.4.1	Double-Gate-MOSFET	275
9.4.1.1	Bändermodell	276
9.4.1.2	Stromgleichung	279
9.4.1.3	Diskrete Dotierstoffverteilung	282
9.4.1.4	Ultra-Kurzkanal-FET	284
9.4.2	Dreidimensionale Effekte in Multiple-Gate-MOSFETs	289
9.4.2.1	Bauelementstrukturen	289
9.4.2.2	Strompfad.....	291
9.4.2.3	Skalierung im Schaltungsdesign.....	296
9.4.3	Nanosheet-MOSFET	297
9.4.3.1	Grundstruktur	297
9.4.3.2	CMOS-Technologie.....	298
9.5	Wiederholungsfragen	299
9.6	Übungen	301
9.7	Lösungen	301

10	Alternative Nanostruktur-MOSFETs	303
10.1	Ziele für alternative Transistorstrukturen	303
10.2	High-Mobility-Channel-FET	306
10.3	Junctionless-MOSFET	307
10.3.1	Funktionsweise	308
10.3.2	Kennlinie	310
10.3.3	Vorteile.....	311
10.3.4	Nachteile	312
10.4	Schottky-Barrier-MOSFET	312
10.4.1	Funktionsweise	313
10.4.2	Kennlinie	316
10.4.3	Vorteile.....	317
10.4.4	Nachteile	317
10.5	Reconfigurable-FET	318
10.6	Tunnel-FET	320
10.6.1	Funktionsweise	320
10.6.2	Optimierung der Kennlinie	322
10.6.2.1	Einschaltstrom	322
10.6.2.2	Ambipolarer Strom	324
10.6.2.3	Subthreshold-Swing.....	326
10.6.3	Vorteile.....	327
10.6.4	Nachteile	327
10.7	Weitere Steep-Slope-Switches	329
10.7.1	Impact-Ionization-FET	329
10.7.2	Negative-Capacitance-MOSFET	330
10.8	2D-MOSFET	331
10.9	Wiederholungsfragen	333
	Konstanten und Materialparameter	335
	Simulationstools	337
	Formelzeichen	345
	Literatur	351
	Index	355

1

Einführung in die Nanoelektronik

In diesem Kapitel wird zunächst die Bedeutung der Mikroelektronik für technologischen Fortschritt erläutert. Anschließend wird das Gebiet der *Nanoelektronik* davon abgegrenzt. Die hierbei wichtigen grundlegenden physikalische Effekte der Mikrophysik werden benannt.

Lernziele

Die Lernenden ...

- kennen die technologische Entwicklung der Mikroelektronik,
- kennen die Abgrenzung von Mikro- zur Nanoelektronik,
- können die in der Nanoelektronik gegenüber der Mikroelektronik zusätzlich in Erscheinung tretenden physikalischen Effekte benennen.

■ 1.1 Bedeutung der Mikroelektronik

Die in den vergangenen Jahrzehnten erreichte enorme Steigerung der Leistungsfähigkeit elektronischer Systeme beruht in hohem Maße auf dem Fortschritt der Mikroelektronik. Maßgeblich hierbei ist die Silizium-Technologie, welche durch kontinuierliche Verkleinerung der hergestellten Strukturgrößen einen stetigen Anstieg der Komplexität integrierter Schaltkreise bei immer geringerer Leistungsaufnahme ermöglichte (vgl. Bild 1.1). Damit wurden moderne mobile Anwendungen mit langer Akkulaufzeit bei hoher Rechenleistung wie beispielsweise das Smartphone geschaffen. Aber auch die Steigerung der Leistungsfähigkeit in Multi-Core-Prozessorsystemen wäre ohne die Vergrößerung der Integrationsdichte nicht möglich.

Als wichtigstes Schaltelement einer digitalen Schaltung auf einem VLSI-Chip (VLSI: engl. für *very large scale integration*) gilt seit vielen Jahrzehnten der MOS-Feldeffekttransistor (MOS-FET), da mit ihm die geringste Leistungsaufnahme und höchste Integrationsdichte für ein komplexes System zu erzielen ist.

Die Silizium-Planartechnologie basiert auf der schrittweisen Abscheidung dünner Schichten auf einem *Silizium-Wafer* (einkristalline dünne Siliziumscheibe) und deren laterale Strukturierung. Daraus werden ausschließlich auf der Oberfläche des Wafers die funktionalen Bauelemente geschaffen. Die Dicke der abgeschiedenen Schichten ist schon seit Jahrzehnten im Bereich weniger Nanometer bis Mikrometer. Die lateralen Strukturen sind ebenfalls schon seit den neunziger Jahren im Submikrometerbereich. Dennoch spricht man erst seit ca. 15 Jahren im Bereich höchstintegrierter Schaltkreise von „Nanoelektronik“.

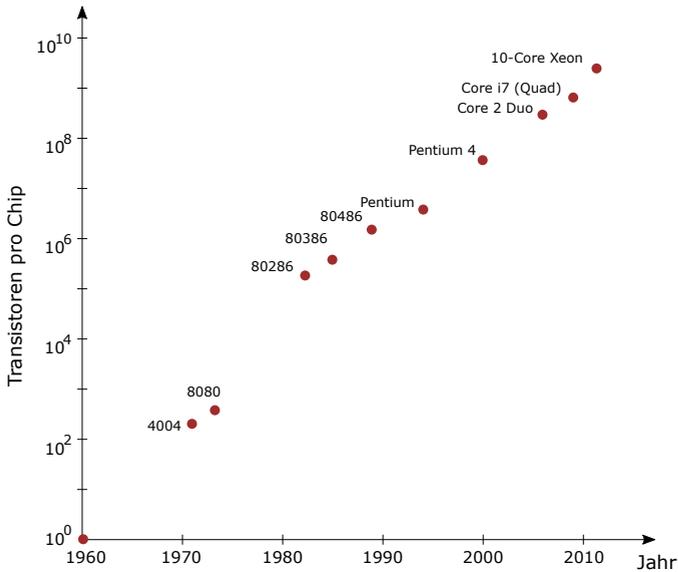


Bild 1.1 Historische Entwicklung der Anzahl integrierter Schaltelemente je Chip am Beispiel von Prozessorgenerationen

Die möglichst defektfreie technologische Realisierung von Strukturen im Bereich weniger Nanometer über die gesamte Obedfläche eines Wafer hinweg, der heute einen Durchmesser von bis zu 450 mm hat, verlangt hochtechnologische Herstellungsprozesse im Reinraum. Der Bau einer Halbleiterfabrik kostet daher mehrere Milliarden US\$, sodass weltweit nur noch wenige Unternehmen in der Lage sind, dieses finanzielle Risiko zu tragen.

Die Entwicklungskosten eines Mikrochips und die Auftragsfertigung in einer Halbleiterfabrik können bis zu mehreren Millionen US\$ betragen. Nur mit genügend großer Stückzahl eines Integrierten Schaltkreises können die Entwicklungskosten so auf die einzelnen Chips umgelegt werden, dass ein Verkaufspreis von wenigen US\$ erreicht wird.

■ 1.2 Chancen der Nanoelektronik

Was unterscheidet *Nanoelektronik* von *Mikroelektronik*? In der Fachwelt spricht man von Nanoelektronik, wenn in Halbleiterbauelementen physikalische Effekte in Erscheinung treten, die in älteren Technologien überhaupt nicht erkennbar oder zumindest vernachlässigbar waren. Diese Effekte sind quantenmechanischer Natur und verlangen zu deren Beschreibung ein tiefgehendes Verständnis für die Betrachtung von Elektronen als Wellen oder Teilchen. Zwar basiert die gesamte Festkörperphysik im Kern auf dem Dualismus zwischen Welle und Teilchen, jedoch erlaubt die Einführung des sogenannten Bändermodells für kristalline Halbleiter in den meisten Fällen eine Beschreibung der elektrischen Effekte in mikroelektronischen Bauelementen auf Grundlage der klassischen Physik.

Für die Nanoelektronik ist diese Vereinfachung nicht mehr möglich; die Wellennatur des Elektrons hat einen wesentlichen Einfluss. Bei Abmessungen im Nanometerbereich hat man die Größenordnung der Wellenlänge von Elektronen im Bauelement erreicht. Dadurch wird insbesondere das *Tunneln* von Ladungsträgern durch Barrieren ermöglicht.

In Bauelementen der Nanoelektronik tritt der Tunneleffekt in zwei Arten in Erscheinung:

- Der Tunneleffekt kann als unerwünschter, parasitärer Effekt das elektrische Verhalten des Schaltkreises verschlechtern und verhindert damit auch die weitere Miniaturisierung der Bauelemente. Beispielsweise steigen Leckströme an, sodass ein energieeffizienter Betrieb bei Steigerung der Integrationsdichte nicht mehr erreicht werden kann.
- Der Tunneleffekt kann aber auch zur Steigerung der elektrischen Leistungsfähigkeit in neuartigen Bauelementen gezielt genutzt werden. Hierzu ist es notwendig, in einer Technologie Strukturabmessungen im Bereich weniger Nanometer kontrolliert herstellen zu können. Die heutige Technologie ist hierzu in der Lage.

Aber nicht nur das gezielte Nutzen quantenmechanischer Effekte macht neuartige Bauelemente der Nanoelektronik aus. Die Fähigkeit, in einer Technologie Strukturen von wenigen Nanometern Abmessung mit ausreichender Genauigkeit und Ausbeute herzustellen, erlaubt die Realisierung ganz neuartiger Transistorgeometrien. Als Beispiel sei die im Jahr 2011 eingeführte *FinFET-Technologie* genannt, welche einen grundlegenden Wandel der jahrzehntelang vergleichsweise ähnlich gebliebenen Herstellung des MOS-Transistors bedeutete. Führende Hersteller setzten mit dieser Technologie auf eine weitere Verkleinerung des einzelnen Schaltelements. Heute werden Konzepte für neue Transistorstrukturen mit funktionalen Schichten entwickelt, welche nur noch eine Dicke von wenigen Nanometern aufweisen, sogenannte *Nanosheets*. All diese weltweiten Forschungsanstrengungen in Industrie und Hochschulen zielen darauf ab, den Bedarf der Industriegesellschaft nach immer höherer Leistungsfähigkeit integrierter Schaltkreise zu decken.

Auch unter Verwendung dieser neuartigen Transistorstrukturen ist das Ende der Miniaturisierung beinahe erreicht. Die Funktionsweise des MOS-Transistors verschlechtert sich bezüglich seines Schaltverhaltens so immens, dass intensiv nach alternativen Konzepten für einen elektronischen Schalter geforscht wird. Die in Nanostrukturen in den Vordergrund tretenden Effekte können hierbei vielleicht als Grundlage für neuartige Transistorprinzipien genutzt werden.

2

Eigenschaften von Halbleitern

Nanoelektronische Bauelemente bestehen zum größten Teil aus Halbleitermaterialien. Daher sind für das Verständnis ihrer Funktionsweise Kenntnisse über die elektrische Leitfähigkeit dieser Materialien und der darin auftretenden Ladungen essenziell.

Lernziele

Die Lernenden ...

- können Metalle – Halbleiter – Isolatoren anhand ihrer Bandstruktur unterscheiden,
- kennen die Ursachen elektrischer Leitfähigkeit in Halbleitern,
- kennen die Ursache der Sperrwirkung einer Diode,
- verstehen die Grundlagen der Elektrostatik an einem pn-Übergang.

■ 2.1 Struktur von Halbleitern

Die Leitfähigkeit eines Festkörpers wird durch die Konzentration an freien, beweglichen Ladungsträgern bestimmt, welche für einen Stromfluss zur Verfügung stehen. Im nächsten Abschnitt wird zunächst der grundsätzliche Unterschied in der Bandstruktur verschiedener Festkörper erläutert. Aufgrund der Bedeutung von Silizium für die Mikroelektronik und auch die Nanoelektronik werden in den nachfolgenden Abschnitten elektrische Eigenschaften von Halbleitern am Beispiel dieses Elements erläutert. Darauf aufbauend wird dann in späteren Kapiteln auf die Besonderheiten anderer Halbleiter hingewiesen.

2.1.1 Bandstruktur

Die Unterschiede in der sogenannten *Bandstruktur* von Isolatoren, Halbleitern und Metallen verdeutlicht Bild 2.1. Aufgrund der Ausbildung und Interferenz von Wellenfunktionen der Elektronen im Festkörper befinden sich nur in den sogenannten Energiebändern erlaubte Energieniveaus der Elektronen. In den dazwischenliegenden Bandlücken findet sich kein erlaubtes Energieniveau.

Nur Ladungsträger mit einer Energie entsprechend dem *Leitungsband* können sich im Festkörper frei bewegen. Wirkt nun ein elektrisches Feld auf diese Ladungsträger ein, dann entsteht eine gerichtete Bewegung und es fließt ein Strom.

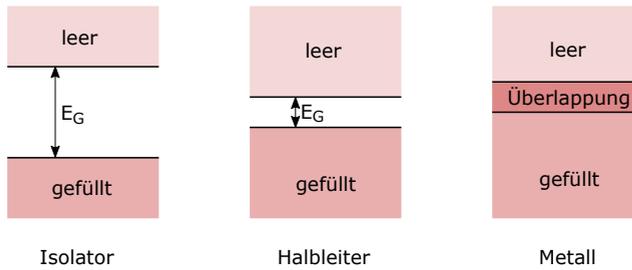


Bild 2.1 Schematische Darstellung der Bandstruktur von Isolatoren, Halbleitern und Metallen

Ladungsträger im *Valenzband* eines Atoms (wie auch Elektronen in Bändern mit geringerer Energie) sind an dieses gebunden und können daher nicht zum Stromfluss beitragen. Gelangen Elektronen aus dem Valenzband jedoch durch Aufnahme von Energie in Höhe der Bandlücke E_G in das Leitungsband, dann können diese die Leitfähigkeit des Materials erhöhen. Ein Übergang vom Valenz- in das Leitungsband ist beispielsweise durch Aufnahme thermischer Energie oder Absorption von Photonen möglich.

Bei Isolatoren besteht zwischen Valenz- und Leitungsband eine Bandlücke von mehr als 5 eV. Das Valenzband ist von Elektronen besetzt, wogegen das Leitungsband unbesetzt ist. Daher kann im Isolator kein Stromfluss stattfinden.



Die Einheit eV (*Elektronenvolt*) steht für die Energie $1.602 \cdot 10^{-19}$ VAs. Ein Elektronenvolt ist damit die Menge an potenzieller Energie, welche ein Elektron bei Bewegung in einem elektrostatischen Feld mit der Potenzialdifferenz von 1 V aufnimmt oder abgibt.

In Metallen befinden sich bereits ohne Zufuhr thermischer Energie, das heißt bei einer Temperatur von $T = 0$ K, Elektronen im Leitungsband. Damit ist eine grundsätzliche Leitfähigkeit von Metallen gegeben.

Halbleiter liegen mit ihren Eigenschaften zwischen Isolatoren und Metallen. Wir betrachten hier zunächst den *intrinsischen*, das heißt reinen Halbleiter, ohne Verunreinigungen durch Fremdatome. Beim absoluten Nullpunkt der Temperatur befinden sich alle Elektronen im Valenzband und in darunterliegenden Bändern. Das Leitungsband ist unbesetzt. Der Halbleiter verhält sich also als Isolator. Wird die Temperatur erhöht, dann können Elektronen zusätzliche thermische Energie aufnehmen und den Übergang in das Leitungsband schaffen. Hierzu ist die Aufnahme von Energie in mindestens der Größe der Bandlücke E_G notwendig. Damit steigt die elektrische Leitfähigkeit der Halbleiter bei Erwärmung und sie verhalten sich zunehmend entsprechend den Metallen.

Der Unterschied zwischen Isolatoren und Halbleitern ist also im Wesentlichen in der Größe der Bandlücke E_G begründet. Bei Isolatoren ist diese so groß ($E_G > 5$ eV), dass die Aufnahme thermischer Energie nicht genügt, eine für einen Stromfluss ausreichende Anzahl von Elektronen in das Leitungsband zu bringen. Dagegen gelingt dies bei Halbleitern aufgrund ihrer geringeren Bandlücke.

Gruppe \ Periode	II	III	IV	V	VI
2	Be	B	C	N	O
3	Mg	Al	Si ₁₄	P	S
4	Zn	Ga	Ge	As	Se
5	Cd	In	Sn	Sb	Te
6	Hg	Tl	Pb	Bi	Po

Bild 2.2 Ausschnitt aus dem Periodensystem mit den wichtigsten Elementen der Halbleitertechnologie



Aus der mit einer Erwärmung ansteigenden Anzahl von Elektronen, welche vom Valenz- in das Leitungsband gelangen, folgt für die elektrische Leitfähigkeit im intrinsischen Halbleiter direkt eine *exponentielle Abhängigkeit von der Temperatur*.

Wichtige chemische Elemente der Halbleitertechnologie sind in Bild 2.2 dargestellt. Man unterscheidet zwischen sogenannten *Elementhalbleitern* aus der IV. Hauptgruppe wie Silizium und Germanium und *Verbindungshalbleitern* wie beispielsweise Legierungen aus Elementen der III. und V. Hauptgruppe.

Der wichtigste Halbleiter ist hierbei Silizium aufgrund seiner Verwendung in der historisch langjährigen und ausgereiften Technologie. Silizium weist mit einer Bandlücke von $E_G = 1.12$ eV bereits bei Raumtemperatur eine geringe elektrische Leitfähigkeit auf. Die exponentielle Zunahme von Ladungsträgern im Leitungsband verbietet allerdings einen Betrieb siliziumbasierter Schaltkreise bei Umgebungstemperaturen von mehr als 150 °C.

Bei Verbindungshalbleitern ist insbesondere Galliumarsenid (GaAs) mit weiteren Anteilen von Aluminium (Al), Indium (In), Phosphor (P), Stickstoff (N) oder Antimon (Sb) für optoelektronische Bauelemente von Bedeutung. Galliumnitrid (GaN) findet aufgrund der in speziellen Strukturen erreichbaren hohen Schaltgeschwindigkeit Anwendung als Material in der Hochfrequenztechnik. Aber auch in der Leistungselektronik hat GaN in den letzten Jahren eine große Bedeutung erlangt. Die große Bandlücke mehr als 3 eV und ein niedriger Verlustwiderstand erlaubt die Realisierung von Konvertern mit Spannungen bis zu 600 V und Leistungen bis zu 10 kW. Daher sind GaN-basierte Transistoren in DC/DC-Wandlern im Bereich von Elektroklein-geräten bis hin zur industriellen Stromversorgung sehr verbreitet.

Auch Legierungen von Elementen in der IV. Hauptgruppe werden in der Technologie für spezielle Anwendungen verwendet: Siliziumkarbid (SiC) beispielsweise weist je nach strukturellem Aufbau eine Bandlücke von 2.4 eV...3.3 eV auf und eignet sich daher zum Beispiel für die Realisierung von Hochtemperaturelektronik, welche Betriebstemperaturen von mehreren hundert Grad Celsius erlaubt. Die große Bandlücke ermöglicht auch hier das Schalten hoher Spannungen. SiC-basierte Transistoren zunehmend in der Leistungselektronik zum Schalten von Leistungen bis in den Bereich von mehr als 100 kW eingesetzt.

Im Zuge der Nanoelektronik werden vermehrt Elementhalbleiter mit Verbindungshalbleitern in sogenannten *Heterostrukturen* kombiniert. Die Abscheidung extrem dünner Schichten wechselnder Materialien in einer Dicke von nur wenigen Nanometern erlaubt das kontrollier-

te Auftreten quantenmechanischer Effekte, die man sich zur Steigerung der Leistungsfähigkeit von Bauelementen zunutze macht.

2.1.2 Atomarer Aufbau von Silizium

Bild 2.3 zeigt für Silizium das vollständige *Atommodell nach Bohr*¹ und eine vereinfachte Darstellung. Im Bohr'schen Atommodell werden die Elektronen auf unterschiedliche Energieniveaus, die sogenannten stationären Zustände oder Schalen gesetzt. Wenn man die Schalen durchnummeriert (1...7), erhält man die Hauptquantenzahl n . Die Schalen können immer nur mit einer bestimmten Anzahl Elektronen besetzt werden; die maximale Anzahl beträgt $2 \cdot n^2$. Eine innere Schale muss immer erst voll besetzt sein, bevor die nächsthöhere Schale besetzt werden kann.

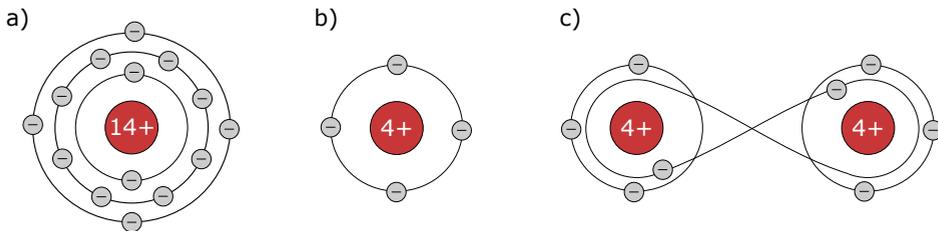


Bild 2.3 Atommodell nach Bohr für Silizium: a) vollständig mit allen Schalen, b) vereinfachte Darstellung, nur die äußere Schale der Valenzelektronen ist dargestellt, c) vereinfachte Darstellung der Elektronenpaarbindung zweier benachbarter Siliziumatome (Austausch eines Valenzelektrons)

Ein Elektron kann von einer Schale in eine andere springen. Dieser als Quantensprung bezeichnete Vorgang lässt sich mit der klassischen Mechanik und Elektrodynamik nicht erklären. Beim Quantensprung zwischen stationären Zuständen mit verschiedener Energie kann elektromagnetische Strahlung in Form eines Photons emittiert oder absorbiert werden. Die Energie des Photons entspricht der Energiedifferenz zwischen den beiden Zuständen. Alternativ kann auch eine Umwandlung in Wärmeenergie erfolgen.

Mit seiner Kernladungszahl 14 besitzt ein Siliziumatom 14 Elektronen auf den Schalen (vgl. Bild 2.3a). Entsprechend der IV. Hauptgruppe des Periodensystems befinden sich auf der äußersten besetzten Schale vier sogenannte *Valenzelektronen*. Nur diese können unter Zuführung geringer Energie das Atom verlassen. Für die elektrischen Eigenschaften des Halbleiters sind diese Valenzelektronen maßgeblich, daher verwenden wir nachfolgend eine vereinfachte Darstellung des Siliziumatoms. Es reicht die Betrachtung der vier Valenzelektronen zusammen mit einem vierfach positiv geladenen Kern, damit das gesamte Atom elektrisch neutral bleibt (Bild 2.3b).

Mit seinen vier Valenzelektronen kann das Siliziumatom mit vier benachbarten Atomen eine Elektronenpaarbindung eingehen (Bild 2.3c).

¹ Niels Bohr (1885–1962), dänischer Physiker, gelang 1922 durch Annahme eines Schalenmodells eine Erklärung für den Aufbau des Periodensystems der Elemente. Er erhielt 1922 für seine Forschungen über die Atomstruktur sowie die von den Atomen ausgehende Strahlung den Nobelpreis für Physik.

2.1.3 Kristallgitter

In Halbleitern wird die Energie zum Aufbau der Kristallgitter durch die Bindungsenergie der Valenzelektronen aufgebracht. Silizium und Germanium kristallisieren aus der Schmelze im sogenannten *Diamantgitter*. Bild 2.4 verdeutlicht dies und zeigt schematisch eine Elementarzelle des Kristallgitters. Die Abmessungen einer Elementarzelle bezeichnen wir mit der *Gitterkonstanten* a_0 . Für Silizium beträgt $a_0 = 0.543 \text{ nm}$, wobei eine Zelle acht Siliziumatome enthält. Das Kristallgitter besteht aus zwei kubisch-flächenzentrierten Gittern, wobei das zweite um $1/4$ der Würfeldiagonalen in der Diagonalrichtung gegenüber dem ersten Gitter verschoben ist.

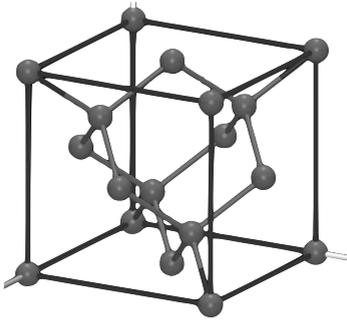


Bild 2.4 Elementarzelle eines Silizium-Kristalls (Diamantgitter)

Die Verbindungshalbleiter Galliumarsenid und Galliumphosphid kristallisieren im *Zinkblendegitter*. Es entspricht dem Diamantgitter, bei dem das erste kubisch-flächenzentrierte Gitter aus Galliumatomen, das zweite Gitter aus Arsenatomen besteht.

Die Eigenschaften eines Halbleiters hängen von der Kristallstruktur ab. Innerhalb eines Materials sind verschiedene Größen abhängig von der Richtung im Kristall. Zur Definition verschiedener Ebenen und Richtungen in Kristallgittern wurden die *Miller'schen Indizes* eingeführt. Sie können in folgenden Schritten bestimmt werden (vgl. Bild 2.5):

1. Man zeichnet die kubische Elementarzelle in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Die drei Kanten des Würfels müssen auf den Achsen x , y , z liegen.
2. Die Schnittpunkte der Kristallebene mit den Achsen x , y , z werden in Einheiten der Gitterkonstanten ausgedrückt.
3. Anschließend wird der Kehrwert der erhaltenen Zahlen gebildet. Die Komponenten werden mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert, sodass sich die drei kleinsten ganzen Zahlen h , k , l ergeben, welche im gleichen Verhältnis stehen wie die ursprünglichen Kehrwerte.
4. Das Ergebnis wird in runde Klammern gesetzt: $(h \ k \ l)$.
5. Negative Indizes werden durch Querbalken über dem Index dargestellt (z. B. $(1 \ \bar{1} \ 0)$).

Beispiel 2.1 Bestimmung der Miller'schen Indizes

Zur Bestimmung der Miller'schen Indizes der in Bild 2.5 gezeigten Ebene gehen wir wie folgt vor:

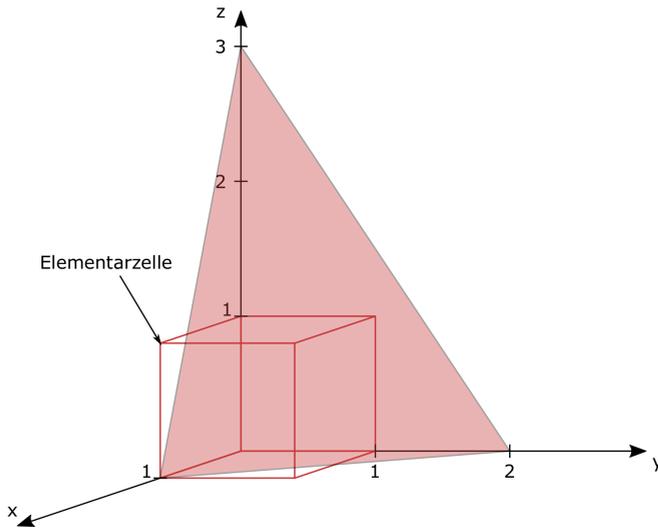


Bild 2.5 Beispiel einer Kristallebene mit Darstellung der Elementarzelle im Koordinatensystem

- Die Achsenabschnitte der Ebene betragen:
 x -Achse: 1, y -Achse: 2, z -Achse: 3
- Wir bilden den Kehrwert und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Wir erweitern mit dem Faktor 6, damit alle Zahlen ganzzahlig werden. Die gesuchten Miller-Indizes der Kristallebene lauten daher:

$$(6 \ 3 \ 2)$$

■

Beispiele für Kristallebenen, welche in der Halbleitertechnologie häufig verwendet werden, zeigt Bild 2.6.

Kristallrichtungen werden durch die Gruppe kleinster Zahlen ausgedrückt, welche dasselbe Verhältnis zueinander haben wie die Komponenten eines Vektors in der gewünschten Richtung. Zur Bezeichnung der Richtung werden diese Zahlen in eckige Klammern gesetzt.

In kubischen Kristallen ist die Gitterkonstante in den drei Richtungen gleich. Daher stehen hier die Richtungen $[h \ k \ l]$ senkrecht auf der Ebene $(h \ k \ l)$ mit den gleichen Indizes. Die Richtung entspricht also dem Normalenvektor der zugehörigen Kristallebene.

Sind anstatt einer spezifischen Netzebene alle symmetrisch äquivalenten Ebenen gemeint, so wird die Notation $\{h \ k \ l\}$ verwendet. Beispielsweise bezeichnet man im kubischen Kristallsystem mit $\{1 \ 0 \ 0\}$ die äquivalenten Ebenen $(1 \ 0 \ 0)$, $(\bar{1} \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0)$, $(0 \ \bar{1} \ 0)$, $(0 \ 0 \ 1)$, $(0 \ 0 \ \bar{1})$, was den sechs Oberflächen eines Würfels entspricht. Die Notation $\langle h \ k \ l \rangle$ bezeichnet alle zum Vektor $[h \ k \ l]$ symmetrisch äquivalenten Richtungen. Die Angabe $\langle 1 \ 1 \ 1 \rangle$ steht daher für alle Raumdiagonalen.

In der Siliziumtechnologie wird vorwiegend $(1 \ 0 \ 0)$ -orientiertes Material verwendet. Das heißt, dass die Oberfläche des Wafers der $(1 \ 0 \ 0)$ -Ebene entspricht.

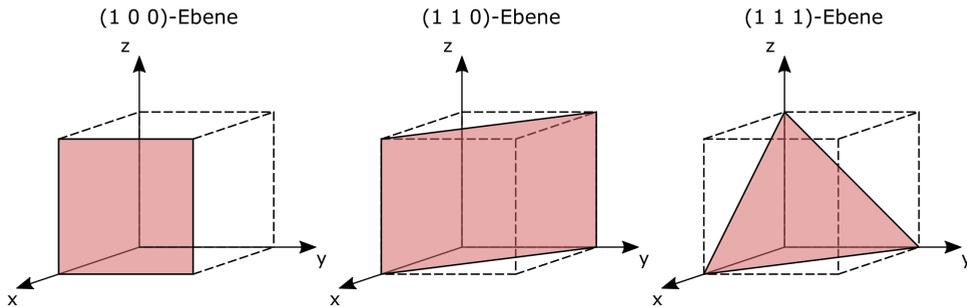


Bild 2.6 Darstellung verschiedener Kristallebenen

2.1.4 2D-Materialien

In der Nanoelektronik finden sogenannte *2D-Materialien* eine immer größere Bedeutung. Diese kristallinen Materialien bestehen aus einzelnen Schichten, welche im Extremfall nur aus einer Lage von Atomen oder Molekülen bestehen. Mehrere solcher Lagen können schichtweise gestapelt sein und werden durch *Van-der-Waals-Kräfte*, benannt nach dem Physiker Johannes van der Waals², zusammengehalten.

Schon lange bekannt war *Graphen* (engl. *Graphene*) als zweidimensionaler Kristall aus Kohlenstoffatomen (siehe Bild 2.7). Im Jahr 2004 gelang Andre Geim und Konstantin Novoselov³ die Herstellung von Graphen im Labor. Seine vergleichsweise hohe spezifische Leitfähigkeit hat ein großes Interesse an diesem Material in der Mikroelektronik hervorgerufen. Denkbar sind Mikrochips mit hoher Geschwindigkeit, denn für Verbindungsleitungen aus Graphen ergibt sich ein verschwindend kleiner Widerstandsbelag.

Aber auch als Material in den integrierten Bauelementen selbst wurde Graphen intensiv untersucht. Neben einer zu erwartenden hohen Schaltfrequenz einzelner Bauelemente lässt die Verwendung von wenigen Lagen oder im Idealfall nur einer Lage Graphen in Nanostrukturtransistoren eine drastische Verbesserung der Leistungsfähigkeit erwarten. Allerdings steht dieser Anwendung zunächst entgegen, dass Graphen keine Bandlücke aufweist, diese aber, wie wir in Abschnitt 2.4 sehen werden, notwendig für das Sperrverhalten eines Schaltelements ist.

Die Arbeiten mit Graphen haben umfangreiche Forschungen auf dem Gebiet auch weiterer 2D-Kristalle angeregt. *Schwarzer Phosphor* beispielsweise zeigt in der Kristallstruktur eine gewellte Doppelschicht und weist im Gegensatz zu Graphen eine Bandlücke und damit halbleitende Eigenschaften auf. Eine Vielzahl von weiteren Möglichkeiten bieten die Übergangsmetall-Dichalkogenide, abgekürzt TMD (von engl. *Transition Metal Dichalcogenide*), welche daher von besonderem Interesse sind [13]. Sie bestehen aus einer Legierung von zwei Elementen, die in dem 2D-Kristall in drei Atomlagen gestapelt sind: Eine Monolage aus Übergangsmetallatomen, welche umgeben ist von zwei Monolagen aus Chalkogenatomen.

² Johannes Diderik van der Waals (1837–1923), niederländischer Physiker, erforschte unter anderem das Verhalten von Molekülen. Er erhielt 1910 für seine Forschungen über Aggregatzustände für Gase und Flüssigkeiten den Nobelpreis für Physik.

³ Andre Geim und Konstantin Novoselov erhielten im Jahr 2010 für grundlegende Experimente mit dem zweidimensionalen Material Graphen den Nobelpreis für Physik.

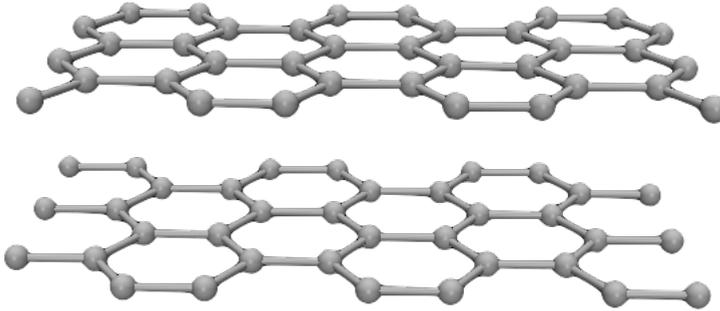


Bild 2.7 Darstellung zweier Atomlagen Graphen

Beispielsweise werden heute TMD-Monolagen von MoS_2 oder WS_2 als Materialien für Transistoren intensiv untersucht (siehe Abschnitt 10.8).



Verwenden Sie zur Darstellung der Kristallgitter unterschiedlicher Halbleiter das *Crystal Viewer Tool* auf <http://nanohub.org/tools/crystalviewer>.

■ 2.2 Eigenleitung

Für die folgende Betrachtung reicht eine vereinfachte schematische Darstellung des Silizium-Kristallgitters in einer Ebene, wie in Bild 2.8a gezeigt, aus. Die Punkte symbolisieren Elektronenpaarbindungen, bestehen aus je einem Elektron der benachbarten Atome. Alle dargestellten Elektronen befinden sich im Valenzband, daher stehen keine freien Ladungsträger im Leitungsband für einen Stromfluss zur Verfügung. Diese Darstellung zeigt den Zustand bei einer Temperatur $T = 0$ K. Der Halbleiter wirkt als Isolator.

Wird die Temperatur erhöht, dann gerät das Kristallgitter zunehmend in Schwingungen. Diese Gitterschwingungen führen dazu, dass vereinzelt Elektronenpaarbindungen aufgebrochen werden. Damit kann ein Elektron sein Wirtsatom verlassen und sich frei im Kristall bewegen. Hierzu muss allerdings mindestens eine Energie in Höhe der Bandlücke zwischen Leitungs- und Valenzband dem Elektron zugefügt werden, damit es das Leitungsband erreichen kann.

Das Abwandern des freien Elektrons mit einer negativen Elementarladung $-q$ hat ein Siliziumatom ionisiert; eine Elektronenpaarbindung ist unvollständig (vgl. Bild 2.8b). Es ist ein sogenanntes *Loch* (oder auch *Defektelektron*) entstanden. Das Loch kann auch wandern, indem es von einem Elektron einer benachbarten Doppelbindung „aufgefüllt“ wird. Eine Wanderung des Lochs in eine Richtung ist also immer verbunden mit der Wanderung eines Elektrons in der entgegengesetzten Richtung.

Aufgrund der nun lokal nicht mehr gegebenen Ladungsneutralität besitzt das Loch eine positive Ladung $+q$. Mithilfe der Quantenmechanik kann das Loch auch als Teilchen mit einer eigenen Masse (ungleich der Elektronenmasse) und einer Ladung $+q$ aufgefasst werden, wel-

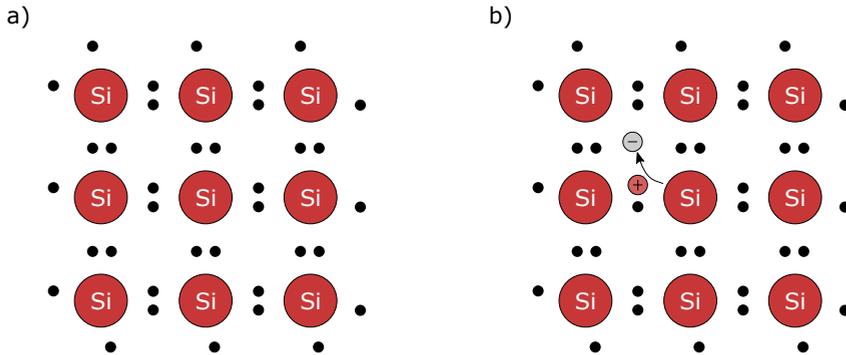


Bild 2.8 a) Schematische Darstellung des Silizium-Kristallgitters in der Ebene bei $T = 0$ K. b) Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares bei Eigenleitung

ches sich frei im Kristall bewegen kann. Seine Energie entspricht der des Valenzbandes. Diese Tatsache erlaubt in vielen Fällen eine Beschreibung seines Verhaltens mit den Grundsätzen der klassischen Physik und der Elektrostatik.



Mit der Erhöhung der Temperatur werden vermehrt Elektron-Loch-Paare im Halbleiter erzeugt. Die Konzentration n der Elektronen im Leitungsband und die Konzentration p der Löcher im Valenzband sind gleich der *intrinsischen Ladungsträgerdichte* oder *Eigenleitungsdichte* n_i . Diese Ladungsträger können sich frei im Kristall bewegen. Wirkt ein elektrisches Feld auf den Halbleiter ein, so bewegen sich Elektronen entgegen den Feldlinien, Löcher dagegen aufgrund ihrer positiven Ladung in Richtung der Feldlinien. Es fließt ein Strom, zu dem Elektronen und Löcher beitragen. Diese Eigenschaft wird *Eigenleitung* genannt.

In Silizium beträgt bei einer Temperatur von $T = 300$ K die intrinsische Ladungsträgerkonzentration ca. $n = p = n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Sie steigt mit einer Zunahme der Temperatur T und Verkleinerung der Bandlücke E_G exponentiell an.

■ 2.3 Fremdleitung

In der Technologie wird die Leitfähigkeit eines Halbleiters gezielt erhöht. Hierzu werden Fremdatome in das Kristallgitter eingebaut. Dieses Verfahren nennt man *Dotieren* des Halbleiters. Das Ziel ist dabei nicht nur, eine gewünschte und im Betriebsbereich des Schaltkreises weitgehend konstante Leitfähigkeit einzustellen. Vielmehr entsteht durch das Zusammenspiel eines Stromtransports durch Löcher oder Elektronen erst die aktive Funktion des Bauelements.

Als Dotierstoffe kommen bei Silizium Elemente der III. (Bor) oder V. Hauptgruppe (Phosphor, Arsen) zur Anwendung (siehe Bild 2.2).

2.3.1 n-dotiertes Silizium

Elemente der V. Hauptgruppe besitzen nur fünf Valenzelektronen. Wird beispielsweise ein Phosphor-Atom in das Kristallgitter eingebaut, so benötigt es nur vier seiner Valenzelektronen, um mit vier benachbarten Siliziumatomen eine vollständige Bindung einzugehen. Bild 2.9a illustriert dies in einer schematische Darstellung in der Ebene. Das fünfte Valenzelektron ist quasi „überflüssig“. Es ist nur gering an sein Wirtsatom gebunden und kann dieses schon bei Zuführung geringer thermischer Energie verlassen. Es erreicht dann das Leitungsband und kann sich frei im Kristall bewegen und zur Leitfähigkeit beitragen. Im Unterschied zur Eigenleitung ist hierbei kein zusätzliches Loch entstanden.

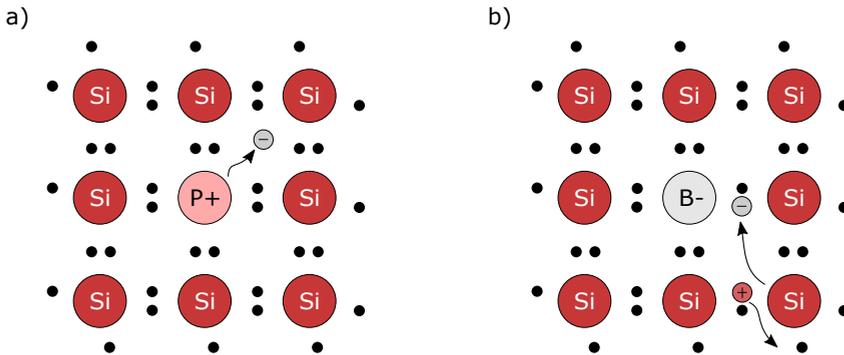


Bild 2.9 Schematische Darstellung eines mit Fremdatomen dotierten Silizium-Kristallgitters in der Ebene. a) Erzeugung eines freien Elektrons durch Dotierung mit einem Phosphor-Atom, b) Erzeugung eines freien Lochs durch Dotierung mit einem Bor-Atom



Dotierstoffatome der V. Hauptgruppe in der Konzentration N_D werden durch die Abgabe ihres fünften Valenzelektrons positiv ionisiert. Sie werden als *Donatoren* (aus dem Lateinischen: *donator – Geber, Spender*) bezeichnet. Sie sind fest in das Kristallgitter eingebaut und können daher beim Anlegen eines elektrischen Feldes nicht zum Stromfluss beitragen. Die ins Leitungsband abgegebenen freien Elektronen können sich dagegen frei bewegen und zum Stromfluss beitragen. Diese Eigenschaft nennen wir *Fremdleitung* in einem *n-dotierten Halbleiter*. Man nennt ihn *n-leitend*.

2.3.2 p-dotiertes Silizium

Ein Element der III. Hauptgruppe besitzt nur drei Valenzelektronen. Typischerweise wird bei Silizium Bor verwendet. Bild 2.9b zeigt schematisch den Einbau eines Bor-Atoms in einen Siliziumkristall. Für eine vollständige Bindung mit vier benachbarten Siliziumatomen werden vier Valenzelektronen benötigt, es stehen im Bor-Atom jedoch nur drei zur Verfügung. Schon bei Zuführung geringer thermischer Energie löst sich ein Elektron aus einer benachbarten Doppelbindung und vervollständigt die Einbindung des Dotierstoffatoms in den Kristall.

An der aufgelösten Doppelbindung fehlt jetzt ein Elektron; lokal ist hier eine positive Ladung, also ein Loch, entstanden. Dieses Loch kann jedoch wieder durch ein Elektron von einer be-

nachbarten Doppelbindung *aufgefüllt* werden, sodass dieses Loch als quasi positiver Ladungsträger durch den Kristall wandern kann. Das Loch hat eine Energie entsprechend dem Valenzband.



Dotierstoffatome der III. Hauptgruppe in der Konzentration N_A werden durch die Aufnahme eines zusätzlichen Elektrons negativ ionisiert. Sie werden als *Akzeptor* (für *akzeptieren, aufnehmen*) bezeichnet, sind fest im Kristallgitter eingebaut und können daher nicht zu einem Stromfluss beitragen. Die entstandenen Löcher im Valenzband dagegen können sich frei bewegen und zum Stromfluss beitragen. Diese Eigenschaft nennen wir *Fremdleitung* in einem *p-dotierten Halbleiter*. Man nennt ihn *p-leitend*.

Wird ein Halbleiter sowohl mit Donatoren in der Konzentration N_D als auch mit Akzeptoren der Konzentration N_A dotiert, so werden beide ionisiert. Maßgeblich für den Leitfähigkeitstyp ist der Dotierstoff, welcher in höherer Konzentration eingebracht wurde. Wirksam ist dann die sogenannte *Nettodotierung* $N = |N_A - N_D|$.

2.3.3 Ladungsbilanz

In der Halbleiterelektronik ist es üblich, Dotierstoffkonzentrationen mit der Anzahl Fremdatome pro Kubikzentimeter anzugeben. Typische Konzentrationen bewegen sich im Bereich von 10^{15} cm^{-3} bis zu 10^{20} cm^{-3} . Silizium besteht aus ca. $5 \cdot 10^{22}$ Atomen pro 1 cm^3 . Demnach kann maximal ungefähr jedes 500. Siliziumatom durch ein Dotierstoffatom ersetzt werden. Die Einbringung höherer Konzentrationen verbietet die maximale Löslichkeit der Elemente im Festkörper.

In einem Halbleiter entstehen durch Eigenleitung sowohl freie Elektronen als auch Löcher. Werden Dotierstoffatome in das Kristallgitter eingebaut, entstehen zusätzliche freie Elektronen im Leitungsband (Dotierung mit Donatoren) oder zusätzliche freie Löcher im Valenzband (Dotierung mit Akzeptoren). Die freien Ladungsträger, welche in der höheren Konzentration auftreten, werden als *Majoritäten*, diese in geringerer Konzentration als *Minoritäten* bezeichnet. Entsprechend stellen in einem n-dotierten Halbleiter Elektronen die Majoritäten dar, dagegen in einem p-dotierten Halbleiter die Löcher.

In einem elektrisch neutralen Kristall muss die Konzentration der ortsfesten und beweglichen positiven Ladungsträger (Donatoren und Löcher) gleich der Konzentration der ortsfesten und beweglichen negativen Ladungsträger (Akzeptoren und Elektronen) sein:

$$N_D^+ + p = N_A^- + n \quad (2.1)$$

Dieser Zusammenhang ist für das nachfolgende Verständnis einer Kombination aus p- und n-leitenden Zonen in einem Halbleiter von großer Wichtigkeit.

Steigt aufgrund einer Dotierung mit Donatoren die Konzentration an freien Elektronen an, so bleibt die Löcherkonzentration nicht konstant auf ihrem Wert n_i eines intrinsischen Halbleiters. Die Vielzahl an Elektronen reduziert die Anzahl Löcher. Umgekehrt reduziert die Vielzahl an Löchern in einem p-Halbleiter die Anzahl der freien Elektronen.



Befindet sich der Halbleiter im thermischen Gleichgewicht, dann gilt das *Massenwirkungsgesetz*:

$$n \cdot p = n_i^2 \quad (2.2)$$

Das Produkt aus Elektronen- und Löcherkonzentration ist bei gegebener Temperatur konstant.

Beispiel 2.2 Ladungsträgerkonzentration im dotierten Halbleiter

Ein Siliziumkristall sei mit Phosphor (Donator) in der Konzentration $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ dotiert. Bei einer Temperatur von $T = 300 \text{ K}$ betrage die intrinsische Ladungsträgerdichte $n_i \approx 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Gesucht sind die Elektronen- und Löcherkonzentration.

Bei $T = 300 \text{ K}$ sind alle Dotierstoffatome ionisiert. Jedes Phosphor-Atom hat somit ein freies Elektron in das Leitungsband abgegeben. Die Konzentration der Dotierstoffatome ist um einige Größenordnungen größer als die intrinsische Ladungsträgerkonzentration. Für die Elektronenkonzentration gilt also:

$$n \approx N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad (2.3)$$

Die Löcherkonzentration folgt aus dem Massenwirkungsgesetz (2.2):

$$p = \frac{n_i^2}{n} \approx \frac{n_i^2}{N_D} = \frac{(1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3})^2}{10^{18} \text{ cm}^{-3}} = 225 \text{ cm}^{-3} \quad (2.4)$$

In einem Kubikzentimeter befinden sich also 10^{18} freie Elektronen im Leitungsband, aber nur 225 freie Löcher im Valenzband. ■

■ 2.4 pn-Übergang

Der pn-Übergang stellt die einfachste Form eines elektronischen Bauteils dar, an welchem die Ladungsbilanz und Potenzialverteilung in einem Halbleitermaterial grundlegend betrachtet werden kann.

2.4.1 Sperrwirkung der pn-Diode

Treten ein p- und ein n-dotierter Halbleiter in Kontakt, so ergibt sich an der Grenzfläche eine Sperrwirkung, welche einen Stromfluss nur noch in eine Richtung zulässt. Den Aufbau und die Kennlinie dieser Halbleiterdiode zeigt Bild 2.10. Wird eine positive Spannung U in Flussrichtung (von p zu n) angelegt, so steigt der Strom durch die Diode exponentiell mit der Spannung an. Wird dagegen eine negative Spannung in Sperrichtung angelegt, so blockiert die Diode nahezu den Stromfluss; es fließt lediglich der relativ kleine Sperrstrom I_s . Das Verhalten lässt

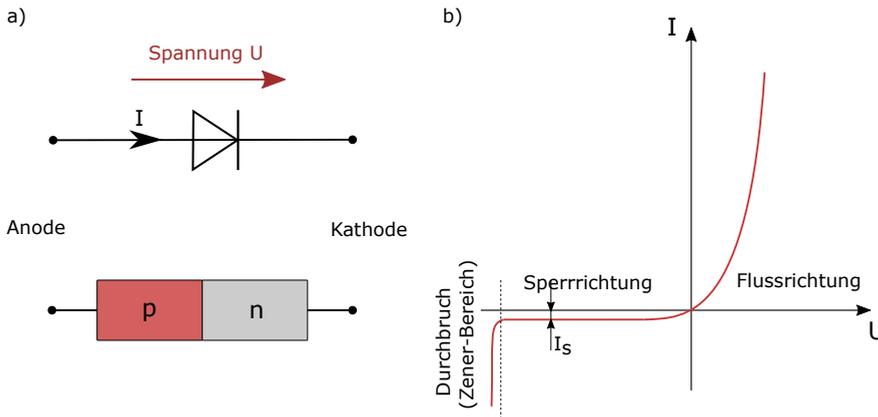


Bild 2.10 a) Schaltbild und schematischer Aufbau einer pn-Halbleiterdiode. b) Verlauf der Strom-Spannungs-Kennlinie

sich durch die *Shockley'sche*⁴ *Diodengleichung* beschreiben:

$$I = I_s \left(e^{\frac{U}{u_{th}}} - 1 \right) \quad (2.5)$$

Hierbei ist u_{th} die sogenannte *Temperaturspannung*. Sie lässt sich aus der *Boltzmann-Konstanten*⁵ $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$, Temperatur T und der Elementarladung q bestimmen:

$$u_{th} = \frac{k_B T}{q} \quad (2.6)$$

Bei $T = 300 \text{ K}$ gilt $u_{th} \approx 26 \text{ mV}$.

Überschreitet die Spannung in Sperrrichtung eine gewisse Grenze, so kommt es zum Durchbruch der Sperrschicht (*Lawinendurchbruch* oder *Zener*⁶-*Bereich*), der allerdings in (2.5) nicht beschrieben ist.

Bild 2.11a zeigt schematisch den Aufbau einer pn-Halbleiterdiode im Querschnitt. Sie besteht aus einem p-dotierten Halbleiter, welcher negativ geladene ortsfeste Akzeptoren im Kristallgitter aufweist. Jeder Akzeptor trägt mit einem freien Loch zu den Majoritäten bei. Entsprechend (2.2) existieren im p-dotierten Halbleiter auch einige wenige freie Elektronen, welche die Minoritäten darstellen. In gleicher Weise tragen die im n-dotierten Halbleiter ortsfesten und positiv ionisierten Donatoren zu den freien Elektronen als Majoritäten bei, wogegen hier Löcher die Minoritäten darstellen. Jeder Bereich verhält sich nach außen elektrisch neutral.

Aufgrund der unterschiedlichen Konzentration an Elektronen und Löchern kommt es im Bereich der Grenzfläche zu einem Fluss von Ladungsträgern. Dieser Effekt aufgrund eines Gradienten der Konzentration wird als *Diffusion* bezeichnet. Löcher aus dem p-dotierten Gebiet

⁴ William Shockley (1910–1989), britisch-amerikanischer Physiker, entdeckte zusammen mit John Bardeen und Walter Brattain 1947 während der Tätigkeit bei den Bell Telephone Laboratories den Transistoreffekt. Zusammen erhielten sie 1956 den Nobelpreis für Physik.

⁵ Benannt nach Ludwig Boltzmann (1844–1906), österreichischer Physiker und Philosoph, lieferte bedeutende Beiträge zur Thermodynamik und statistischen Mechanik.

⁶ Benannt nach Clarence Zener (1905–1993), amerikanischer Physiker.

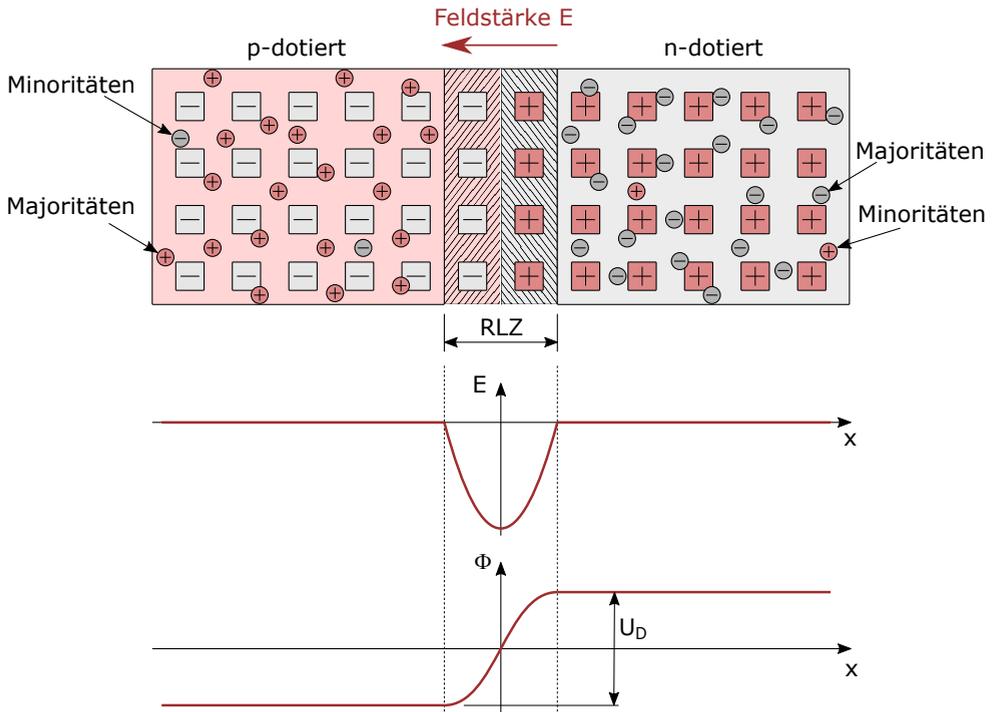


Bild 2.11 Struktureller Aufbau einer pn-Halbleiterdiode mit Darstellung der Ladungen und Ausbildung der Raumladungszone (RLZ) als Sperrschicht. Darunter ist der Verlauf der elektrischen Feldstärke und des Potentials gezeigt.

diffundieren in das n-Gebiet. Genauso findet umgekehrt eine Diffusion von Elektronen aus dem n- in das p-Gebiet statt. Im Bereich der Grenzfläche rekombinieren diese Ladungsträger miteinander, sodass eine von freien Ladungsträgern geräumte Zone entsteht. In diesem Bereich verbleiben im p-Halbleiter nur noch die negativ geladenen Akzeptoren, im n-Halbleiter die positiv geladenen Donatoren. Diese beiden Bereiche sind nicht mehr elektrisch neutral und werden daher als *Raumladungszone* (auch: *Verarmungszone*, engl. *depletion region*) bezeichnet.

Innerhalb der Raumladungszone ist ein elektrisches Feld entstanden. Freie Ladungsträger, ob Elektronen oder Löcher, werden im elektrischen Feld entgegen ihrer Diffusionsrichtung beschleunigt. Daher kommt es bei Ausbildung einer bestimmten Dicke der Raumladungszone und der damit verbundenen Feldstärke zu einem Stoppen des Ladungsausgleichs. Bild 2.11b zeigt den Verlauf der Feldstärke und des elektrostatistischen Potentials entlang einer Schnittlinie von p- zu n-Zone. Die entstandene Potentialdifferenz wird als *Diffusionspotential* U_D bezeichnet und verursacht die Sperrwirkung der Diode.

Wird die Diode mit $U > 0$ in Flussrichtung gepolt (positive Spannung von p- zu n-Zone), dann verringert sich die Potentialdifferenz über der Raumladungszone; sie beträgt dann $U_D - U$. Als Folge kann wieder ein Diffusionsstrom von Ladungsträgern fließen. In Sperrichtung ($U < 0$) dagegen wird die Potentialbarriere noch vergrößert und die Diode sperrt den Stromfluss.



Das elektrische Feld in der Raumladungszone ist in jedem Betriebszustand (thermisches Gleichgewicht, Fluss- oder Sperrrichtung) grundsätzlich immer von der n-dotierten zur p-dotierten Zone gerichtet. Es wird von den Akzeptoren und Donatoren in der an freien Ladungsträgern verarmten Zone hervorgerufen (engl. *depletion region*).

Die Dicke der Raumladungszone d_{RLZ} hängt von den jeweiligen Dotierungskonzentrationen ab und liegt in der Größenordnung weniger Mikrometer. Die verbleibenden Zonen des Halbleiters (exklusive der Raumladungszone) sind elektrisch neutral und tragen zur eigentlichen Funktion der Diode nicht bei. Diese sogenannten *Bahnzonen* sind lediglich zur Kontaktierung des pn-Übergangs notwendig und stellen in einer realen Diode einen Serienwiderstand dar.

Sind die n- und p-leitenden Zonen jeweils homogen dotiert, dann ist die Gesamtdicke der Raumladungszone gegeben durch

$$d_{RLZ} = \sqrt{\frac{2 \varepsilon (N_A + N_D)}{q N_A N_D} (U_D - U)} \quad (2.7)$$

Hierbei ist ε die Dielektrizitätskonstante des Halbleitermaterials (für Silizium: $\varepsilon_{Si} = 11.7 \varepsilon_0$).

Je geringer die Dotierungskonzentrationen sind, desto dicker ist die ausgebildete Raumladungszone. Die gesamte Raumladungszone verhält sich nach außen elektrisch neutral, daher müssen innerhalb dieser Zone gleich viele positive und negative Ladungen sich gegenüberstehen. Ist beispielsweise die p-Zone geringer dotiert als die n-Zone, so muss daher in der p-Zone ein größeres Volumen als im n-Gebiet umschlossen werden, damit die Gesamtzahl an Akzeptoren in der Raumladungszone gleich der Anzahl Donatoren ist.



Für die Ausdehnung $d_{RLZ,p}$ in das p-leitende Gebiet mit der Dotierungskonzentration N_A bzw. die Ausdehnung $d_{RLZ,n}$ in das n-leitende Gebiet der Dotierung N_D gilt der Zusammenhang:

$$d_{RLZ,n} \cdot N_D = d_{RLZ,p} \cdot N_A \quad (2.8)$$

Die Raumladungszone an einem pn-Übergang dehnt sich zum größten Teil in das niedriger dotierte Gebiet aus.

Sind die Dotierungskonzentrationen unterschiedlich und gilt beispielsweise $N_A \ll N_D$, so lässt sich vereinfachen:

$$d_{RLZ} \approx \sqrt{\frac{2 \varepsilon}{q N_A} (U_D - U)} \quad \text{mit: } d_{RLZ,p} \approx d_{RLZ} \quad \text{und} \quad d_{RLZ,n} \approx 0 \quad (2.9)$$

2.4.2 Lösung der Poisson-Gleichung am pn-Übergang

Zur Herleitung von Gleichung (2.7) zeigt Bild 2.12 eine schematische Darstellung eines pn-Übergangs entlang einer Koordinate x als eindimensionale Betrachtungsweise. Beide Zonen

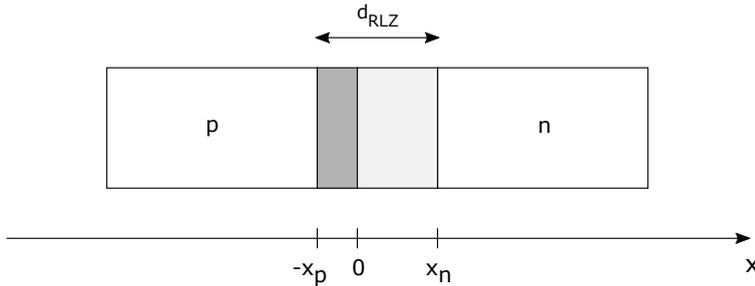


Bild 2.12 Schematische Darstellung der Raumladungszonenausdehnung am pn-Übergang

seien jeweils homogen dotiert. Im p-Gebiet betrage die Dotierungskonzentration N_A , im n-Gebiet N_D . Der metallurgische Übergang liege an der Stelle $x = 0$.

Zur Berechnung der Ausdehnung der Raumladungszone d_{RLZ} und der dabei entstehenden Diffusionsspannung U_D ist die *Poisson-Gleichung* des elektrostatischen Potentials φ zu lösen:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.10)$$

Für das elektrische Feld in x -Richtung gilt:

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} \quad (2.11)$$

Die Raumladung ρ ist mit der jeweiligen Konzentration an ionisierten Dotierstoffen gegeben. Außerhalb der Raumladungszone sind die Halbleiterzonen elektrisch neutral, sodass die folgenden Randbedingungen gelten:

$$E(x < -x_p) = E(x > x_n) = 0$$

Das elektrisch neutrale p-Gebiet liege auf Potential V_p , das neutrale n-Gebiet auf V_n :

$$\varphi(x < -x_p) = V_p \quad \varphi(x > x_n) = V_n$$

Die Lösung der Differenzialgleichung innerhalb der Raumladungszone erfolgt zunächst getrennt für n- und p-Gebiet.

p-Gebiet: $-x_p \leq x \leq 0$

Für die Raumladungsdichte gilt (negativ geladene Akzeptoren):

$$\rho_n = -qN_A$$

Die Poisson-Gleichung lautet:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{dE}{dx} = -\frac{\rho_p}{\varepsilon} = \frac{qN_A}{\varepsilon}$$

Nach Trennung der Veränderlichen lässt sich in den Grenzen $x = -x_p$ bis $x = 0$ integrieren:

$$\begin{aligned} -\int_0^{E(x)} dE &= \frac{qN_A}{\varepsilon} \int_{-x_p}^x dx \\ \Rightarrow E(x) &= -\frac{qN_A}{\varepsilon} (x + x_p) \end{aligned}$$

n-Gebiet: $0 < x \leq x_n$

Mit $\rho_p = +qN_D$ (positiv geladene Donatoren) folgt in gleicher Weise:

$$E(x) = -\frac{qN_D}{\epsilon}(x_n - x)$$

Stetigkeit des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld an der Stelle $x = 0$ muss stetig sein. Daher ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $E(x = 0)$ unmittelbar die in Gleichung (2.8) formulierte Regel:

$$\frac{qN_A}{\epsilon}x_p = \frac{qN_D}{\epsilon}x_n$$

Die Ausdehnung in die p-leitende Zone lässt sich also ausdrücken durch

$$x_p = \frac{N_D}{N_A}x_n$$

Nun erfolgt durch weitere Integration die Berechnung der Potenziällösung in den jeweiligen Gebieten.

p-Gebiet: $-x_p \leq x \leq 0$

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{qN_A}{\epsilon}(x + x_p)$$

$$\int_{V_p}^{V(0)} d\varphi = \frac{qN_A}{\epsilon} \int_{-x_p}^0 (x + x_p) dx$$

$$V(0) - V_p = \frac{qN_A}{\epsilon} \left(\frac{1}{2}x^2 + x_p \cdot x \right) \Big|_{-x_p}^0$$

$$\Rightarrow V(0) = V_p + \frac{qN_A}{2\epsilon}x_p^2$$

n-Gebiet: $0 < x \leq x_n$

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{qN_D}{\epsilon}(x_n - x)$$

Integration in den Grenzen $x = 0$ bis $x = x_n$ liefert:

$$\Rightarrow V(0) = V_n - \frac{qN_D}{2\epsilon}x_n^2$$

Stetigkeit des Potentials

An der Stelle $x = 0$ muss auch das Potenzial φ stetig sein:

$$V(0) = V_n - \frac{qN_D}{2\epsilon}x_n^2 = V_p + \frac{qN_A}{2\epsilon}x_p^2$$

Unter Verwendung der Beziehung $x_p = x_n \cdot N_D / N_A$ lässt sich schreiben:

$$V_n - V_p = \frac{qN_D}{2\epsilon} \left(\frac{N_D}{N_A} + 1 \right) x_n^2$$