

Leseprobe

Raimond Dallmann

Baustatik 2

Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

ISBN (Buch): 978-3-446-44502-4

ISBN (E-Book): 978-3-446-44507-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44502-4>

sowie im Buchhandel.

Vorwort

Der vorliegende zweite Band dieses Lehrbuches vermittelt die grundlegenden Kenntnisse zur Berechnung von Formänderungen sowie der Kraft- und Verformungszustände statisch unbestimmter Tragwerke. Der überwiegende Teil des Inhalts ist aus den von mir an der Fachhochschule in Wismar gehaltenen Lehrveranstaltungen entstanden. Das Buch richtet sich an Studierende des Bauingenieurwesens. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Berechnung statisch bestimmter Tragwerke, die im Band 1 behandelt wurden.

Es werden in *Kapitel 1* zunächst die Grundlagen zur Berechnung von Formänderungen stabförmiger Tragwerke vermittelt. Ausgehend von den der Berechnung stabförmiger Bauteile zugrunde liegenden Hypothesen werden die Grundgleichungen der Stabtheorie hergeleitet. Ein weiteres Thema dieses Kapitels ist die Berechnung einzelner Verformungen mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte und die Ermittlung von Biegelinien.

Die klassischen Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme sind das Kraftgrößenverfahren und das Weggrößenverfahren. Beide Methoden werden auf anschaulichem Wege ausführlich erläutert. Das Kraftgrößenverfahren wird in *Kapitel 2* dargestellt, das Drehwinkelverfahren als Spezialfall des allgemeinen Weggrößenverfahrens ist Inhalt von *Kapitel 3*. Sowohl beim Kraftgrößen- als auch beim Drehwinkelverfahren werden neben der Beanspruchung durch äußere Kraftgrößen auch Verformungseinwirkungen ausführlich behandelt.

Die Ermittlung von Einflusslinien für Schnittgrößen und Verformungen statisch unbestimmter Systeme wird in *Kapitel 4* dargestellt und erfolgt auf der Grundlage beider Berechnungsmethoden.

Anhand vieler vollständig durchgerechneter Beispiele wird die Anwendung der theoretischen Grundlagen in jedem Kapitel anschaulich erläutert.

Obwohl das Lehrgebiet der Baustatik durch den Einsatz des Computers einen Wandel erfahren hat, ist die Baustatik als Grundlagenfach für den Konstruktiven Ingenieurbau nach wie vor unverzichtbar. Das Verständ-

nis des Trag- und Verformungsverhaltens einer Konstruktion kann nicht durch den Einsatz von Software ersetzt werden. Nur solide Kenntnisse der Baustatik ermöglichen den Entwurf sicherer, gebrauchstauglicher und wirtschaftlicher Tragwerke.

Es ist nicht Ziel dieses Buches, die Statik der Stabtragwerke umfassend darzustellen, sondern vielmehr in die Methoden zur Berechnung von Verformungen und statisch unbestimmter Tragwerke einzuführen und damit die Grundlage für ein vertieftes Studium der Baustatik zu schaffen. Um einen anschaulichen Zugang zu den Berechnungsverfahren zu ermöglichen und um den Abstraktionsgrad niedrig zu halten, wird auf die Darstellung matrizieller Methoden bewusst verzichtet.

Die klassischen Verfahren fördern durch ihre Anschaulichkeit das Verständnis des Tragverhaltens insbesondere statisch unbestimmter Systeme. Es ist daher wichtig, dass die Vermittlung der Berechnungsmethoden nicht auf die Anwendung rezeptartiger Algorithmen ausgerichtet ist. Spezielle Methoden, die darauf abzielen, die Auflösung von Gleichungssystemen mit vielen Unbekannten zu vermeiden, werden nicht behandelt, da dieser Aspekt heutzutage bedeutungslos ist.

Es wird beim Lesen dieses Buches sicher manche Stellen geben, bei denen sich das erwünschte Verständnis nicht unmittelbar einstellt. Oft ist es dann hilfreich, die Zusammenhänge zunächst in der Anwendung auf ein konkretes Beispiel zu betrachten und danach den nicht richtig verstandenen Abschnitt nochmals zu lesen.

Selbst wenn die Berechnung der Beispiele nachvollzogen werden kann, ist es doch etwas völlig anderes, vor dem leeren Blatt Papier zu sitzen und den richtigen Ansatz zur Lösung finden zu müssen. Darum enthält auch dieses Buch zahlreiche Übungsaufgaben, die die so wichtige eigenständige Übung des Lehrstoffes ermöglichen. Die Lösungen sind am Ende des Buches angegeben. Die vollständigen Lösungswege sind im Internet unter <http://www.bau.hs-wismar.de/Dallmann> zu finden.

Ich wünsche mir, dass dieses Buch den Lesern zu dem erhofften Lernerfolg verhilft und würde mich über Hinweise, und Anregungen zur Verbesserung des Inhalts sehr freuen.

Dank gebührt Frau Franziska Kaufmann und ganz besonders Frau Christine Fritsch vom Carl Hanser Verlag für die sehr freundliche und angenehme Zusammenarbeit.

Für die Kontrolle der Beispiele und Aufgaben sowie für die wertvollen Hinweise bei der Durchsicht des Manuskripts danke ich Frau Bianca Hennings ganz herzlich.

Abschließend möchte ich mich wieder ganz besonders bei meiner Frau Nanette bedanken, die auch beim Entstehen des zweiten Buches viel Geduld und Verständnis aufbringen musste und mich in vielerlei Hinsicht beim Schreiben unterstützte.

Die vorliegende dritte Auflage dieses Buches ist inhaltlich unverändert, es wurden jedoch bekannt gewordene Fehler korrigiert.

Ich danke für die zahlreichen Hinweise sowie für die überwiegend sehr positive Beurteilung des Buches.

Tressow, im Frühjahr 2012

Raimond Dallmann

Vorwort zur vierten Auflage

Auch die dritte Auflage ist von den Lesern sehr positiv aufgenommen worden. In der vorliegenden vierten Auflage wurden immer noch vorhandene Fehler korrigiert.

Weitere Hinweise und Anregungen aus dem Leserkreis zur Verbesserung des Inhalts sind stets willkommen

Ich danke Herrn Philipp Thorwirth vom Lektorat des Carl Hanser Verlages für die gute und angenehme Zusammenarbeit.

Tressow, im Juli 2015

Raimond Dallmann

Inhaltsverzeichnis

1	Berechnung der Weggrößen stabförmiger Tragwerke	11
1.1	Einführung	11
1.2	Weggrößen	12
1.3	Formänderungen	12
1.3.1	Formänderungen infolge Dehnung	12
1.3.1.1	Kinematik	12
1.3.1.2	Stoffgesetz	12
1.3.1.3	Verträglichkeit	13
1.3.1.4	Gleichgewicht	13
1.3.2	Formänderungen infolge Biegung und Temperaturdifferenz	15
1.3.2.1	Kinematik	15
1.3.2.2	Stoffgesetz	16
1.3.2.3	Verträglichkeit	17
1.3.2.4	Gleichgewicht	18
1.3.3	Formänderungen infolge Querkraft	18
1.3.4	Formänderungen infolge Torsion	22
1.3.4.1	Kinematik	22
1.3.4.2	Stoffgesetz	23
1.3.4.3	Verträglichkeit	23
1.3.4.4	Gleichgewicht	23
1.4	Analogien	24
1.4.1	Analogie zwischen Dehn- und Torsionsstab und Balkengleichgewicht	24
1.4.2	Mohrsche Analogie	26
1.5	Formänderungsarbeiten	28
1.5.1	Äußere Eigenarbeiten	28
1.5.2	Äußere Verschiebungsarbeiten	28
1.5.3	Innere Verschiebungsarbeit	29
1.5.4	Innere Eigenarbeit	32
1.6	Ermittlung einzelner Verformungen	32
1.6.1	Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Kräfte	32
1.6.1.1	Federn	33
1.6.1.2	Eingeprägte Auflagerverformungen	33
1.6.1.3	Gleichgewichtsbedingung des virtuellen Kraftgrößenzustands	34

1.6.1.4	Anwendung der Arbeitsgleichung	35
1.6.1.5	Berechnung der Integrale	36
1.6.2	Einheiten	37
1.6.3	Grundfälle der Einzelverformungsberechnung	37
1.6.4	Größenordnung der Verformungsanteile	43
1.7	Ermittlung von Biegelinien	51
1.7.1	Ermittlung der Biegelinie aus der Differenzialgleichung	51
1.7.2	Ermittlung der Biegelinie mithilfe der w-Zahlen	53
1.8	Der Satz von Betti	59
1.9	Der Satz von Maxwell	60
	Aufgaben 1.1 bis 1.13	61
2	Das Kraftgrößenverfahren	63
2.1	Grundlagen	63
2.1.1	Einführung	63
2.1.2	Statisch bestimmtes Hauptsystem	66
2.1.3	Lastspannungszustand	67
2.1.4	Einheitsspannungszustände	67
2.1.5	Ermittlung der d-Werte	67
2.1.6	Verformungsbedingungen	68
2.1.7	Ermittlung der Schnittgrößen	68
2.1.8	Einheiten	68
2.1.9	Kontrollen	68
2.1.10	Verformungsbeanspruchungen	69
2.1.10.1	Eingeprägte Auflagerverschiebung	69
2.1.10.2	Eingeprägte Auflagerdrehung	71
2.1.10.3	Temperaturdifferenz, oben wärmer	72
2.2	Allgemeines Vorgehen	73
2.3	Einfluss der Steifigkeiten, Ersatzfedern	80
2.4	Wahl des Hauptsystems	93
2.5	Verformungsberechnung bei statisch unbestimmten Systemen	94
2.6	Verallgemeinerung des Kraftgrößenverfahrens	108
	Aufgaben 2.1 bis 2.16	111
3	Das Drehwinkelverfahren	114
3.1	Grundlagen	114
3.1.1	Einführung	114

3.1.2	Drehwinkelverfahren und allgemeines Weggrößenverfahren	116
3.1.3	Kinematisch bestimmtes Hauptsystem	116
3.1.3.1	Grundelemente	116
3.1.3.2	Ermittlung der erforderlichen Festhaltungen	116
3.1.4	Lastverformungszustand	118
3.1.5	Einheitsverformungszustände	118
3.1.5.1	Knotendrehungen	118
3.1.5.2	Stabsehnendrehungen	119
3.1.6	Vorzeichen des Drehwinkelverfahrens	119
3.1.7	Gleichgewichtsbedingungen	119
3.1.8	Ermittlung der Schnittgrößen	121
3.1.9	Kontrollen	122
3.2	Vorgehensweise beim Drehwinkelverfahren	122
3.3	Vergleich von Drehwinkel- und Kraftgrößenverfahren	149
	Aufgaben 3.1 bis 3.10	150
4	Einflusslinien statisch unbestimmter Systeme	152
4.1	Einflusslinien für Schnittgrößen	152
4.1.1	Einführung	152
4.1.2	Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren	153
4.1.3	Auswertung der Einflusslinien	158
4.1.3.1	Analytische Integration	158
4.1.3.2	Numerische Integration	159
4.1.4	Einflusslinien bei Durchlaufträgern	163
4.1.5	Einflusslinien bei verzweigten Systemen	164
4.1.6	Berechnung nach dem Drehwinkelverfahren	169
4.2	Einflusslinien für Weggrößen	173
	Aufgaben 4.1 bis 4.6	175
Lösungen		176
Anhang: Tafeln		182
Literaturverzeichnis		190
Sachwortverzeichnis		191

2 Das Kraftgrößenverfahren

2.1 Grundlagen

2.1.1 Einführung

Ein statisch bestimmtes System ist dadurch gekennzeichnet, dass die Bilanz zwischen unbekanntem Kraftgrößen und den für die Berechnung zur Verfügung stehenden Gleichungen ausgewogen ist. Diese Bilanz wird durch das Abzählkriterium geprüft. Wenn alle Auflager- und Schnittgrößen mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können, ist ein System statisch bestimmt.

Sind mehr unbekannte Auflager- und Schnittgrößen als Gleichgewichtsbedingungen vorhanden, so ist das System statisch unbestimmt. Die Unbekannten können nicht allein durch Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden, es müssen zusätzlich Verformungen betrachtet werden, um die Lösung zu ermitteln.

Wir betrachten zur Erläuterung der Zusammenhänge den einseitig eingespannten Balken in *Bild 2.1*.

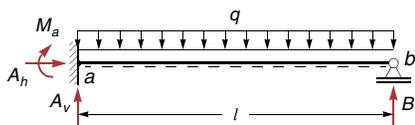


Bild 2.1 Einseitig eingespannter Balken

Durch die dreiwertige Lagerung im Punkt *a* sowie die einwertige Lagerung in *b* sind insgesamt vier unbekannte Auflagerreaktionen vorhanden. Das Abzählkriterium ergibt:

$$n = a + z - 3p = 4 + 0 - 3 \cdot 1 = 1$$

Das System ist also einfach statisch unbestimmt. Um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, sind nur drei Auflagerreaktionen erforderlich. Ist eine der vier Unbekannten gleich null, so lassen sich die anderen drei Kraftgrößen mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermitteln.

Damit nur drei unbekannte Kraftgrößen vorhanden sind, setzen wir eine der vier Unbekannten gleich null. Wir

wählen zunächst die Auflagerkraft *B*. Wenn *B* gleich null ist, entspricht dies einem einfachen Kragträger.

Das Nullsetzen der Auflagerkraft *B* entspricht also dem Lösen einer kinematischen Bindung, hier dem Entfernen des einwertigen Auflagers.

Das durch das Lösen der Bindung entstandene veränderte System nennt man *statisch bestimmtes Hauptsystem*, es ist in *Bild 2.2* dargestellt.

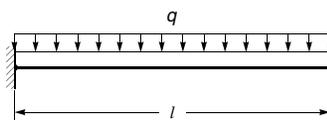


Bild 2.2 Statisch bestimmtes Hauptsystem

An diesem System können nun alle Auflagerkräfte und Schnittgrößen ermittelt werden. Die Momentenlinie sowie die Verformung infolge der Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem zeigt *Bild 2.3*. Diese Lösung nennt man *Lastspannungszustand*. Durch die Verformung des Kragträgers infolge der Belastung entsteht eine vertikale Verschiebung des Punktes *b*, die am wirklichen System nicht auftreten kann, da dort ein Auflager vorhanden ist.

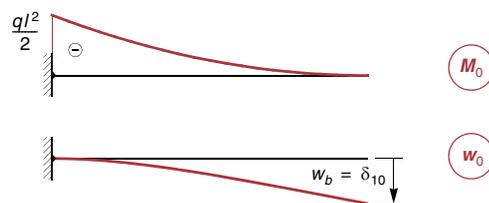


Bild 2.3 Momentenlinie und Verformung infolge der Streckenlast am statisch bestimmten Hauptsystem

Durch das Entfernen des Auflagers, also das Lösen der Bindung, wird eine Verformungsbedingung verletzt, in diesem Fall die Bedingung, dass die Verschiebung des Auflagerpunktes *b* gleich null sein muss.

Die Verformungsbedingung wird verletzt, weil durch das Lösen der Bindung eine Kraftgröße zu null gesetzt wurde, die tatsächlich nicht gleich null ist.

Die Idee des Kraftgrößenverfahrens besteht nun darin, die im Punkt b wirkende, noch unbekannte Auflagerkraft in ihrer Größe so zu bestimmen, dass die Verformung infolge der Belastung wieder rückgängig gemacht wird. Dafür wird die Verformung des Punktes b benötigt. Um die Verschiebung infolge der Streckenlast mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte zu berechnen, wird eine virtuelle Kraft $\bar{1}$ im Punkt b aufgebracht, siehe *Bild 2.4*. Durch Auswertung der Arbeitsgleichung folgt die gesuchte Verformung:

$$\bar{1} \cdot \delta'_{10} = \delta'_{10} = \frac{l_c}{l} \int \bar{M} M_0 dx = 1 \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l = -\frac{ql^4}{8}$$

Der Grund für die Bezeichnung der Verformung mit einer Doppelindizierung wird später deutlich werden.

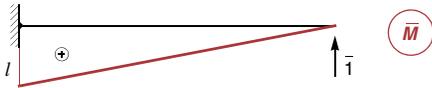


Bild 2.4 Virtueller Zustand

Die berechnete Verformung δ'_{10} muss nun mit einer Kraft an der Spitze des Kragträgers rückgängig gemacht werden. Wie groß muss diese Kraft sein, damit sie den Punkt b wieder in die Ausgangslage zurückschiebt?

Um zu ermitteln, welche Verformung eine Einzelkraft im Punkt b am Kragträger bewirkt, bringen wir eine Kraft der Größe eins auf, siehe *Bild 2.5*. Es wäre jedoch grundsätzlich auch möglich, einen anderen Wert anzusetzen. Die Lösung infolge der angesetzten Einheitskraftgröße bezeichnet man als *Einheitsspannungszustand*.

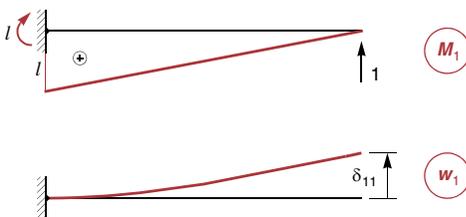


Bild 2.5 Einheitskraft am statisch bestimmten Hauptsystem

Um die Verformung infolge der Einheitskraft zu ermitteln, verwenden wir wieder den virtuellen Zustand aus *Bild 2.4*:

$$\bar{1} \cdot \delta'_{11} = \delta'_{11} = \frac{l_c}{l} \int \bar{M} M_1 dx = 1 \cdot \frac{l}{3} \cdot l \cdot l = \frac{l^3}{3}$$

Wirkt im Punkt b eine Kraft der Größe X_1 , ist die daraus folgende Verformung das X_1 -fache der Verformung infolge der Einheitskraft. Unter der gleichzeitigen Wirkung der Streckenlast sowie der Einzelkraft muss sich im Punkt b eine Verformung von null ergeben. Diese Aussage ist die Verformungsbedingung zur Bestimmung des Faktors X_1 :

$$\delta'_{11} \cdot X_1 + \delta'_{10} = 0$$

Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten X_1 und Einsetzen der berechneten Verformungen δ'_{10} und δ'_{11} führt auf:

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-\frac{ql^4}{8}}{\frac{l^3}{3}} = \frac{3}{8} ql$$

Dieser Wert entspricht der gesuchten Auflagerkraft im Punkt b . Die endgültige Momentenlinie erhalten wir durch Superposition beider Teillösungen:

$$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$$

Im Auflagerpunkt a ergibt sich:

$$M_a = \frac{3}{8} ql \cdot l + \left(-\frac{ql^2}{2} \right) = -\frac{ql^2}{8}$$

Damit kann die gesamte Momentenlinie durch Einhängen der $q \cdot l^2/8$ -Parabel gezeichnet werden, siehe *Bild 2.6*.

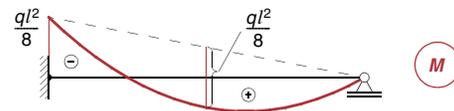


Bild 2.6 Endgültige Momentenlinie

Die endgültige Momentenlinie am statisch unbestimmten System in *Bild 2.6* kann als Lösung am statisch bestimmten Hauptsystem infolge der gleichzeitigen Wirkung von Streckenlast und Einzelkraft am Ende des Kragträgers aufgefasst werden. Wirken die in *Bild 2.7* dargestellten Belastungen, ergibt sich die Lösung in *Bild 2.6*.

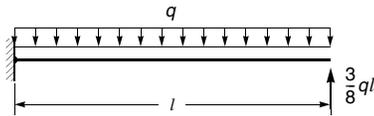


Bild 2.7 Statisch bestimmtes Hauptsystem unter der Wirkung von Streckenlast und Einzelkraft

Um zu überprüfen, ob die Verschiebung des Punktes *b* gleich null ist, werten wir für den virtuellen Zustand in *Bild 2.4* die Arbeitsgleichung aus:

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \delta'_1 &= \delta'_1 = \frac{1}{l} \int \bar{M} M dx \\ &= 1 \cdot \frac{l}{3} \cdot l \cdot \left(-\frac{ql^2}{8} \right) + 1 \cdot \frac{l}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} = 0 \end{aligned}$$

Mit dieser Kontrolle der Verformung im Punkt *b* ist die Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren bestätigt worden. Die Verformungsbedingung wird also erfüllt.

Bei der obigen Berechnung wurde die zunächst zu null gesetzte Auflagerkraft im Punkt *b* als Einheitsgröße vorgegeben. Dieser Einheitsspannungszustand ist in *Bild 2.5* dargestellt. Um die Verformungsbedingung zu erfüllen, war es erforderlich, die Verschiebung des Punktes *b* zu ermitteln. Der für die Verformungsberechnung benötigte virtuelle Zustand in *Bild 2.4* unterscheidet sich vom Einheitssystem in *Bild 2.5* nur durch den Querstrich der virtuellen Größen. Beide Zustände sind formal identisch. Es wird daher im Folgenden der Einheitsspannungszustand auch als virtueller Zustand für die Berechnung der Verformungen benutzt.

Wir führen nun die Berechnung nochmals mit einem anderen Hauptsystem durch. Das Nullsetzen der Auflagerkraft, also das Entfernen des Auflagers im Punkt *b* ist nur eine von unendlich vielen Möglichkeiten, das Hauptsystem zu wählen. Wir lösen nun eine kinematische Bindung so, dass ein Moment gleich null gesetzt wird. Dies entspricht dem Einlegen eines Momentengelenkes. Es bietet sich in diesem Fall der Punkt *a* an. Durch das Einlegen eines Gelenkes in diesem Punkt wird aus dem dreiwertigen ein zweiwertiges Auflager, das nur Kräfte aufnehmen kann. Das daraus resultierende statisch bestimmte Hauptsystem ist der einfache Balken auf zwei Stützen. Das Hauptsystem sowie die Momenten- und Biegelinie infolge der Streckenlast sind in *Bild 2.8* darge-

stellt. Durch das Lösen der Bindung, also dem Einlegen des Gelenkes kann sich der Stab im Auflagerpunkt *a* frei verdrehen. Am wirklichen System ist eine Einspannung vorhanden, sodass die Biegelinie in diesem Punkt eine horizontale Tangente haben müsste. Die Drehung der Tangente im Punkt *a* verletzt daher die Verformungsbedingungen des wirklichen Systems.

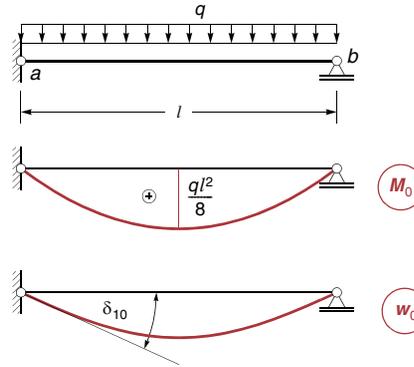


Bild 2.8 Lastspannungszustand am beidseitig gelenkigen Balken

Das im Punkt *a* zu null gesetzte Biegemoment wird nun als Einheitsgröße angesetzt, dies ergibt den Einheitsspannungszustand in *Bild 2.9*. Das Einheitsdoppelmoment im Punkt *a* erzeugt in diesem Punkt den Knick δ_{11} . Wie groß muss das Doppelmoment in diesem Punkt sein, damit es den durch die Belastung in diesem Punkt erzeugten Knick wieder aufhebt?

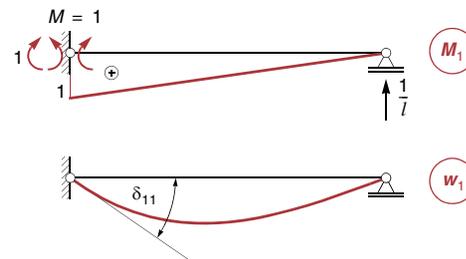


Bild 2.9 Einheitsspannungszustand

Um die Größe des Doppelmomentes zu bestimmen, müssen die Knicke infolge der Belastung sowie des Einheitsdoppelmomentes berechnet werden. Die Berechnung dieser Einzelverformung erfordert einen virtuellen

Zustand, der mit dem Einheitszustand formal identisch ist. Wir benutzen daher den Einheitsspannungszustand auch als virtuellen Zustand, um die Knicke zu berechnen. In der Arbeitsgleichung wird daher \bar{M} durch M_1 ersetzt. Damit ergibt sich der Knick in a infolge der Streckenlast zu:

$$\bar{1} \cdot \delta'_{10} = \delta'_{10} = \frac{l_c}{l} \int M_1 M_0 dx = 1 \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot 1 = \frac{ql^3}{24}$$

Wie aus obiger Gleichung zu erkennen ist, entspricht die Indizierung des δ' -Wertes den Indizes der Momentenfunktionen unter dem Integralzeichen. Beide Indizes werden getrennt gesprochen. δ'_{10} also delta-eins-null-strich und nicht etwa delta-zehn-strich! Die Indizes geben Ort und Ursache der Verformung an. Der Index „0“ bezeichnet die Belastung, der andere Index den Einheitsspannungszustand. δ'_{10} ist also die Verformung an der Stelle, an der die erste Bindung gelöst wurde (Ort), infolge der Belastung (Ursache).

Analog berechnen wir den Knick in a infolge des Doppelmomentes mit:

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \delta'_{11} = \delta'_{11} &= \frac{l_c}{l} \int M_1 M_1 dx = \frac{l_c}{l} \int M_1^2 dx \\ &= 1 \cdot \frac{l}{3} \cdot 1^2 = \frac{l}{3} \end{aligned}$$

Dadurch, dass \bar{M} durch M_1 ersetzt wird, sind die tatsächliche Momentenlinie, also der Einheitszustand und die virtuelle Momentenlinie gleich. Der Wert δ'_{11} ist die Verformung an der ersten gelösten Bindung (Ort) infolge der Einheitsdoppelgröße an der ersten gelösten Bindung (Ursache). Für die Ermittlung der δ -Werte mit gleichen Indizes kann die letzte Spalte der Integraltafel A7 vorteilhaft genutzt werden.

Die Verformungsbedingung zur Ermittlung der Größe des Doppelmoments im Punkt a lautet wiederum:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

Anschaulich bedeutet dies, dass der Knick im Auflagerpunkt a gleich null sein muss. Aus dieser Gleichung folgt die Unbekannte X_1 :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{ql^3}{24}}{\frac{l}{3}} = -\frac{ql^2}{8}$$

Die daraus durch Superposition folgende endgültige Momentenlinie entspricht der aus *Bild 2.6*.

Es wurden zwei Varianten für die Bildung des statisch bestimmten Hauptsystems betrachtet, wobei jeweils eine Schnittgröße gleich null gesetzt wurde, die einer Auflagerkraftgröße entspricht. Wie schon erwähnt wurde, existieren unendlich viele Möglichkeiten, das Hauptsystem zu bilden, weil es unendlich viele Schnittgrößen (an jeder Stelle x) gibt. Es ist jedoch unbedingt auszuschließen, dass durch das Lösen einer Bindung ein kinematisch verschiebliches System entsteht, da hierfür kein Gleichgewichtszustand ermittelt werden kann.

Bei dem vorliegenden beidseitig eingespannten Träger dürfte von den drei Auflagerkraftgrößen nicht die horizontale Auflagerkraft gleich null gesetzt werden, wie es in *Bild 2.10* dargestellt ist. Obwohl das Abzählkriterium $n = 0$ ergibt, ist das System verschieblich, da es sich spannungsfrei horizontal verschieben kann.

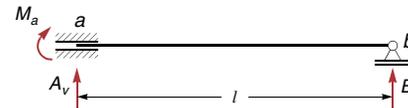


Bild 2.10 Kinematisch verschiebliches Hauptsystem

2.1.2 Statisch bestimmtes Hauptsystem

Wie anhand des Einführungsbeispiels erläutert wurde, besteht der Grundgedanke des Kraftgrößenverfahrens darin, das tatsächliche System so zu verändern, dass es statisch bestimmt ist, also nur mithilfe von Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden kann.

Ist ein System n -fach statisch unbestimmt, so gibt es n Kraftgrößen, die zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen nicht benötigt werden. Es werden so viele kinematische Bindungen gelöst, d. h. Kraftgrößen gleich null gesetzt, bis das System statisch bestimmt ist. Bei einem n -fach statisch unbestimmten System sind demnach n Bindungen zu lösen.

An den gelösten Bindungen entstehen Relativverformungen, die am tatsächlichen System nicht vorhanden sind. Diese Relativverformungen verletzen die Verformungsbedingungen.

Das in *Bild 2.11* dargestellte zweifach statisch unbestimmte System wird durch das Lösen zweier Bindungen statisch bestimmt. Im Punkt a wird ein Gelenk eingefügt und im Punkt c wird das einwertige Auflager entfernt. An diesem Hauptssystem entsteht durch die Kraft ein Knick im Punkt a sowie eine Verschiebung des Punktes c . Diese Verformungen können am wirklichen System nicht auftreten.

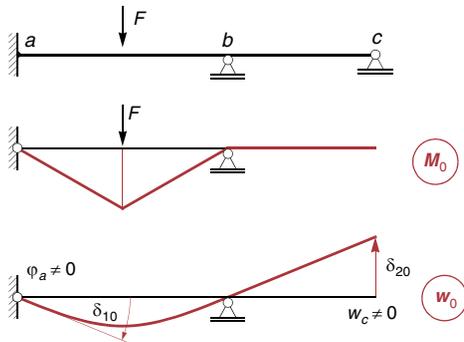


Bild 2.11 Zweifach statisch unbestimmtes System und Lastspannungszustand

2.1.3 Lastspannungszustand

Die Zustandsgrößen infolge der Belastung am statisch bestimmten Hauptssystem bilden den Lastspannungszustand, siehe *Bild 2.11*. Die Biegelinie wird für die Berechnung nicht benötigt, sie dient nur der Veranschaulichung.

Die Momentenlinie M_0 infolge der Belastung am statisch bestimmten Hauptssystem folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen. Bei Berücksichtigung von Normal- und Querkraftverformungen sind zusätzlich auch N_0 und Q_0 zu berechnen. Bei Verformungsbeanspruchungen entfällt dieser Punkt, da alle Schnittgrößen gleich null sind.

2.1.4 Einheitsspannungszustände

Die durch das Lösen der Bindungen zu null gesetzten Kraftgrößen werden unabhängig voneinander als Einheitsgrößen angesetzt, um ihre Größe so zu bestimmen, dass die Verformungsbedingungen erfüllt werden. Im Allgemeinen erzeugt jede der Einheitskraftgrößen an allen gelösten Bindungen Relativverformungen.

Es sind n Momentenlinien M_i (gegebenenfalls auch N_i und V_i) infolge der Einheitsdoppelgrößen am statisch bestimmten Hauptssystem zu ermitteln.

Bild 2.12 zeigt die Einheitsspannungszustände für das zweifach statisch unbestimmte System aus *Bild 2.11*.

Es wird zunächst ein Doppelmoment der Größe „1“ im Punkt a angesetzt. Dieses bewirkt einen Knick im Punkt a sowie eine Verschiebung des Punktes c .

Die zweite anzusetzende Einheitsgröße ist die Auflagerkraft im Punkt c . Durch diese Kraft ergibt sich eine Verschiebung des Punktes c sowie ein Knick im Punkt a .

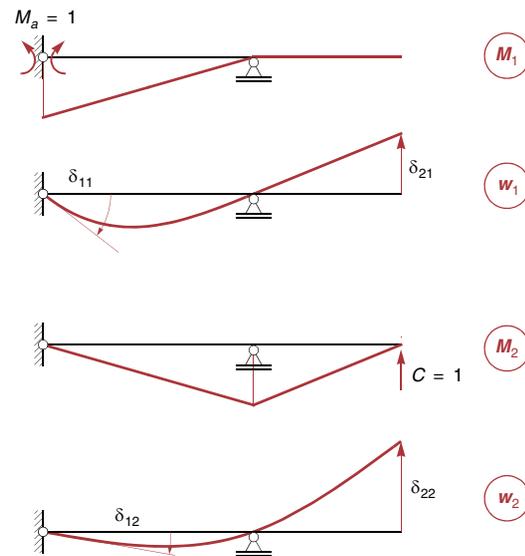


Bild 2.12 Einheitsspannungszustände

2.1.5 Ermittlung der δ -Werte

Die an den gelösten Bindungen auftretenden Relativverformungen infolge der Belastung (δ_{j0}) sowie der Einheitsdoppelgrößen (δ_{jk}) werden durch Auswertung der Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Kräfte berechnet. Die hierfür benötigten virtuellen Zustände sind formal mit den Einheitsspannungszuständen identisch. Für die Berechnung der Verformungen werden daher die Einheitszustände gleichzeitig als virtuelle Zustände benutzt.

Sachwortverzeichnis

- A**
 Abzählkriterium 63
 Adjungiertes System 25
 Analoge Randbedingungen 25
 Analogien 24
 Analytische Integration 158
 Arbeitsgleichung 32, 35, 36
 Auflagerdrehung 33
 Auflagerverschiebung 33
 Äußere Arbeiten 28
 Äußere Verschiebungsarbeit 28
 Äußere Weggrößen 12
 Auswertung der Einflusslinien 158
 Axialverschiebung 12
- B**
 Bandstruktur 93
 Bernoulli-Hypothese 15, 16
 Biegelinien 51
 Biegesteifigkeit 17
 Biegung 15
- D**
 Dehnstarrheit 116
 Dehnung 12
 Drehfeder 82
 Drehfedersteifigkeit 82
 Drehfesthaltung 114, 117
 Drehwinkelverfahren 114, 116
 δ -Werte 67
- E**
 Eigenarbeiten 28
 Einflusslinien 152
 Einflusslinien für Schnittgrößen 152
 Einflusslinien für Weggrößen 173
 Eingeprägte Auflagerdrehung 71, 96
 Eingeprägte Auflagersenkung 96
 Eingeprägte
 Auflagerverformungen 33
 Eingeprägte
 Auflagerverschiebung 69
 Einheiten 37, 68
 Einheitsdoppelgrößen 67
 Einheitskraftgröße 64
 Einheitsspannungszustand 64, 67, 73
 Einheitsverdrehung 115
 Einheitsverformungszustand 115, 118
 Einzelverformungsberechnung 37
- Elastische Einspannung 82
 Elastische Länge 119
 Elastizitätsgleichungen 68
 Elastizitätsmodul 12, 18
 Energiesatz 29
 Ersatzfedern 80
- F**
 Fachwerkssystem 85, 86
 Federn 33
 Federsteifigkeit 82, 84
 Festhaltung 116, 117
 Formänderungen 12
 Formänderungsarbeit 28
 Formänderungsenergie 30
- G**
 Gebrauchstauglichkeit 11
 Gelenkfigur 118
 Gelenkssystem 118
 Gleichgewichtsbedingung 115
 Gleichgewichtsbedingungen 119
 Gleichmäßige Erwärmung 96
 Grundelement 114, 116
- H**
 Hauptachsensystem 16, 31
 Hauptsystem 93
 Hookesches Gesetz 12, 16, 23
 Hypothesen 12
- I**
 Innere Arbeiten 28
 Innere Eigenarbeit 32
 Innere Verschiebungsarbeit 29, 30
 Innere Weggrößen 12
- K**
 Kinematisch bestimmt 114, 116
 Kinematisch bestimmtes
 Hauptsystem 114, 116
 Kinematisch unbestimmt 114
 Kinematische Kette 120, 152
 Kinematische Methode 152
 Knotendrehungen 118
 Knotenmoment 119
 Koeffizientenmatrix 93
 Konjugierte Größen 31
 Kontrollen 68, 122
 Kraftgrößenverfahren 63
 Krümmung 15, 16
 Krümmungskreis 15
- Krümmungsradius 16
- L**
 Lagrangesche Befreiung 120, 152
 Lastspannungszustand 63, 67, 73
 Lastverformungszustand 115, 118
- M**
 Materialgesetz 17
 Mohrsche Analogie 26
- N**
 Numerische Integration 159
- P**
 Polplan 130
 Prinzip der virtuellen Kräfte 32
 Prinzip der virtuellen
 Verschiebungen 120, 152
- Q**
 Querkraftverformung 21
- R**
 Reduktionssatz 94, 95
 Relativverformung 66, 67, 68
- S**
 Satz von Betti 59
 Satz von Maxwell 60, 173
 Schubdeformation 31
 Schubgleitung 21
 Schubmodul 18
 Schubverformung 18, 19, 21
 Schubverzerrung 18, 19, 22
 St. Venantsche Torsion 22
 Stabendmomente 115
 Stabsehnendrehung 119
 Stabsehnendrehwinkel 119
 Statisch bestimmtes
 Hauptsystem 63, 66, 73
 Statisch unbestimmt 63
 Steifigkeiten 80
 Stoffgesetz 12, 16
 Superposition 68, 121
- T**
 Temperaturänderung 13
 Temperaturexpansionskoeffizient 13
 Temperaturdifferenz 15, 17, 72
 Temperaturverlauf 17
 Theorie I. Ordnung 11

Theorie II. Ordnung 11
Torsion 22
Trapezregel 159

U

Überlagerung 37

V

Verdrillung 23
Verformungsbeanspruchungen 69

Verformungsbedingung 63, 64, 68
Verformungsbedingungen 66
Verformungskontrollen 69
Vergleichssteifigkeit 36
Verschiebungsarbeit 28, 29
Verschiebungsfesthaltung 116, 117
Verwölbung 18
Verzerrungen 12
Virtuell 32
Virtuelle Arbeit 120

Virtuelle Stabdrehung 120

W

w - Zahlen 53
Wanderlast 153
Weggrößen 12
Weggrößenverfahren 116
Werkstoffgesetz 12
Wölbkrafttorsion 22