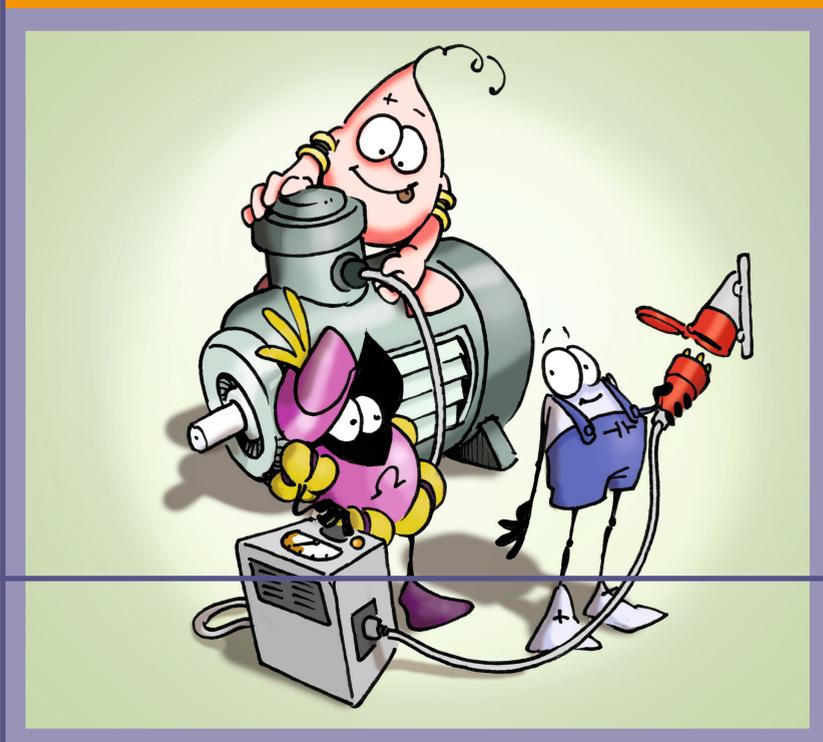


Christian Kral



Grundlagen der Antriebstechnik

Ein einführendes Lehrbuch



HANSER



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial.

Geben Sie auf plus.hanser-fachbuch.de einfach diesen Code ein:

plus-4K5en-Z3ntr



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Christian Kral

Grundlagen der Antriebstechnik

Ein einführendes Lehrbuch

HANSER

Der Autor:

Dipl.-Ing. Dr. Christian Kral lehrt am Technologischen Gewerbemuseum (TGM), Wien/Österreich. Sein Fachgebiet sind elektrische Maschinen und Antriebe einschließlich deren Modellbildung und Simulation.



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2023 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelbild und Illustrationen: Michi Fleischmann, MF-Illustrationen, <https://www.cromagnon.at>

Satz: Christian Kral, mit LaTeX

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47375-1

E-Book-ISBN 978-3-446-47820-6

Vorwort

Zur elektrischen Antriebstechnik gibt es viele gute Bücher auf hohem und damit meist universitärem Niveau. Ebenso gibt es eine Reihe von Lehrbüchern die eine Fülle an Überblickswissen vermitteln, mit wenig Mathematik und Hintergrund. Der Platz dazwischen ist ziemlich leer. Mit diesem Buch soll dieser Platz gefüllt werden, damit der Einstieg in die Antriebstechnik für angehende Ingenieurinnen und Ingenieure gelingt. Dabei folge ich einem einfachen Prinzip: Das grundlegende Verständnis ist das Wichtigste. Es geht um die Grundlagen. Wer die Grundlagen versteht, kann sich alles andere erarbeiten.

Sobald man in die Welt der elektrischen Antriebstechnik eintaucht, betritt man eine neue, fremde Welt. Sich in dieser Welt mit ihren Begriffen und Darstellungen zurechtzufinden ist schwierig. Daher ist es meiner Ansicht nach wichtig, gute Vorstellungen zu entwickeln. Erst wenn ich mir etwas gut vorstellen kann, kann ich es verstehen und dann auch damit arbeiten. Dafür braucht es auch gute Bilder. Einen besonderen Beitrag dazu leisten in diesem Buch die drei Figuren Farad, Henry und Ohm. Sie helfen mit, technische Sachverhalte und Zusammenhänge in Illustrationen zu veranschaulichen und auch ein bisschen unterhaltsam darzustellen.

Ich habe in diesem Lehrbuch die Inhalte oft ausgehend von Bildern entwickelt. Zusätzlich wollte ich ausreichend Erläuterung bereitstellen, ganz im Sinne eines Lehrbuchs. Daher ist dieses Lehrbuch auch sehr textlastig. Um monoton erscheinende Textblöcke zu vermeiden, habe ich die Texte meist stark strukturiert, übersichtlich gestaltet und mit Illustrationen aufgelockert.

Ja, ich bin ein Formalist. Darum ist es mir auch wichtig, Begriffe möglichst klar zu definieren und zu verwenden. Ebenso habe ich eine möglichst einheitliche Bildsprache bei den Ersatzschaltbildern und Diagrammen umgesetzt. Formelzeichen sind in einer möglichst vereinheitlichten Form verwendet, wodurch sich auch einige Abweichungen gegenüber der klassischen Literatur ergeben. So gesehen breche ich auch mit einigen Konventionen zugunsten einer konsistenten Darstellung der Inhalte.

Mein grundsätzlicher Zugang zur elektrischen Antriebstechnik ist sehr mathematisch geprägt. Erst durch die Mathematik verstehe ich persönlich, wie etwas funktioniert. Gleichzeitig weiß ich, dass das so nicht immer zumutbar ist. Dennoch ist es aus meiner Sicht wichtig, grundlegende Berechnungen durchführen zu können, da die mathematischen Gleichungen wesentliche Zusammenhänge verknüpfen und sichtbar machen.

In diesem Lehrbuch finden sich praktisch keine Übungsaufgaben und Rechenbeispiele. Damit Übung jedoch die Meisterin und den Meister macht, gibt es dennoch viele Aufgaben

zu diesem Lehrbuch, die online zur Verfügung stehen. Auf der ersten Seite dieses Buches steht der Code, den Sie einfach auf <https://plus.hanser-fachbuch.de> eingeben. Sie kommen damit zur Online-Plattform, auf der alle Aufgaben in LeTTo bereitgestellt sind. Diese Aufgaben sind frei verfügbar und können daher auch auf dem LeTTo-Server einer beliebigen Bildungseinrichtung uneingeschränkt verwendet und modifiziert werden.

Dieses Buch enthält Fehler, so wie andere Bücher auch. Da ich ein großer Befürworter von transparenten Prozessen bin, gibt es die Möglichkeit, mit mir in Angelegenheiten dieses Lehrbuchs über <https://github.com/christiankral/Grundlagen-der-Antriebstechnik> in Kontakt zu treten. Dazu gehören beispielsweise Fehler, die sich eingeschlichen haben, Unklarheiten, die bereinigt werden sollten, oder Probleme mit LeTTo-Aufgaben. Um auf GitHub ein neues »Issue« zu einem Anliegen zu erstellen, ist es einmalig erforderlich, einen kostenfreien GitHub-Account anzulegen.

Meinem Illustrator und gutem Freund, Michi Fleischmann, danke sehr für die – aus meiner Sicht – grandiose Umsetzung der drei Figuren in den vielen unterschiedlichen Szenen und Situationen. Besonders erfreulich waren immer die Augenblicke, als wieder Illustrationen fertiggestellt waren und in das Manuskript eingearbeitet werden konnten.

Ein großes Dankeschön geht an meine Kollegen Thomas Jäger, Norbert Salomon und Franz Raschbacher für die vollständige und überaus gründliche Durcharbeitung des Manuskripts. Ihre kritischen Anmerkungen haben zu vielen tiefgehenden Diskussionen geführt, die allesamt zum guten Gelingen des Buchs beigetragen haben. Ganz besonders danke ich auch Anton Haumer, Peter Macheiner, Daniel Asch, Wolfgang Brandl und Günter Mika für die inhaltlich wichtigen Rückmeldungen und Gespräche.

Ganz herzlich danke ich meinem Schüler Julian Chirila für seine differenzierte Auseinandersetzung mit den technischen Inhalten und den Formulierungen dieses Lehrbuchs. Seine genauen und kritischen Rückmeldungen waren für mich im Erstellungsprozess des Manuskripts von hohem Wert.

Dank der freundlichen Unterstützung durch viele Firmen, ist es möglich, sehr hochwertige technische Fotos in diesem Lehrbuch zu verwenden. Diese Firmen sind in den Bildunterschriften zu den Fotos genannt. Den Firmen mitsamt ihren Mitarbeitern, die mich tatkräftig unterstützt haben, möchte ich auch ein besonderes Dankeschön aussprechen.

Meinen Lektoren Frank Katzenmayer und Tyll Leyh vom Carl Hanser Verlag danke ich für die stets konstruktive und gute Zusammenarbeit.

Lichtenegg, im Mai 2023

Christian Kral

Inhalt

Schreibweisen und Gezeichnetes	1
1 Grundlegendes Handwerkszeug	5
1.1 Trigonometrie	5
1.1.1 Winkel	6
1.1.2 Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen	7
1.1.3 Allgemeines Dreieck	11
1.2 Vektorrechnung	12
1.2.1 Zweidimensionale Vektoren	12
1.2.2 Dreidimensionale Vektoren	14
1.3 Komplexe Rechnung	21
1.4 Bezugspfeile	25
1.5 Einphasenwechselstrom	27
1.5.1 Komplexe Effektivwert-Zeitzeiger	27
1.5.2 Impedanz und Admittanz	28
1.5.3 Leistungsbegriffe	31
1.6 Drehstrom	34
1.6.1 Sternschaltung	35
1.6.2 Dreieckschaltung	36
1.6.3 Leistungsbegriffe	36
1.7 Leistungselektronik	37
1.7.1 Bauelemente	38
1.7.2 Grundlegende Kennwerte periodischer Größen	40
2 Mechanik	43
2.1 Statik	43
2.1.1 Kraft	44
2.1.2 Axiome der Statik	46

2.1.3	Zentrales ebenes Kraftsystem	48
2.1.4	Gewichtskraft	48
2.1.5	Äußere und innere Kräfte	49
2.1.6	Kraftübertragungselemente	51
2.1.7	Auflager	52
2.1.8	Drehmoment	53
2.1.9	Allgemeines ebenes Kraftsystem	56
2.1.10	Steigung	56
2.1.11	Reibung	58
2.1.12	Statischer Fahrwiderstand	61
2.2	Kinetik	62
2.2.1	Translatorische Kinetik	62
2.2.2	Rotatorische Kinetik	68
2.2.3	Elemente translatorischer und rotatorischer Systeme	75
2.2.4	Gemischt translatorische und rotatorische Kinetik	80
3	Betriebsumfeld	81
3.1	Klassifikation	82
3.2	Ausführungsformen	84
3.2.1	Baugröße und Flanschgröße	84
3.2.2	International Mounting	85
3.2.3	Schutzart	86
3.3	Verluste, Erwärmung, Kühlung	87
3.3.1	Verluste in elektrischen Maschinen	87
3.3.2	Verluste in Leistungselektronik	88
3.3.3	Wirkungsgradklassen von Drehstrommotoren	89
3.3.4	Wärmetransport und Wärmespeicherung	90
3.3.5	Wärmeklasse	93
3.3.6	Betriebsarten elektrischer Maschinen	94
3.3.7	Überlast	96
3.3.8	Kühlung elektrischer Maschinen	98
3.4	Typenschild	101
3.5	Normen	102
4	Magnetfeld	107
4.1	Feldvektoren	107
4.2	Magnetischer Widerstand	109
4.3	Durchflutungssatz	111
4.4	Induktionsgesetz	113

4.5	Induktivität	119
4.6	Lorentzkraft	119
4.7	Eisenverluste	120
5	Einphasen-Transformator	123
5.1	Idealer Transformator	123
5.1.1	Physikalisches Modell	123
5.1.2	Bauformen, Aufbau und Begriffe	127
5.1.3	Transformation von Impedanzen	130
5.2	Realer Transformator	131
5.2.1	Physikalisches Modell	131
5.2.2	Bemessungsgrößen	133
5.2.3	Allgemeiner Belastungszustand	134
5.3	Kurzschlussimpedanz	135
5.3.1	Kappsches Dreieck	137
5.3.2	Spannungsänderung bei Belastung	138
5.3.3	Kurzschlussspannung	139
5.3.4	Dauerkurzschlussstrom	140
5.4	Parameterbestimmung	140
5.4.1	Kurzschlussversuch	141
5.4.2	Leerlaufversuch	142
5.4.3	Typenschild	144
5.4.4	Leistungsbilanz und Wirkungsgrad	144
5.5	Besondere Ausführungsformen	146
5.5.1	Dreiwicklungs-Transformator	147
5.5.2	Transformator mit Anzapfung	147
5.5.3	Spannungswandler	148
5.5.4	Stromwandler	149
5.5.5	Spartransformator	150
5.5.6	HGÜ-Transformator	152
5.6	Besonderheiten	153
5.6.1	Parallelbetrieb	153
5.6.2	Magnetisierungsstrom	154
5.6.3	Einschaltstromstoß	155
5.6.4	Stoßkurzschlussstrom	156

6	Drehstrom-Transformator	157
6.1	Aktivteil	157
6.1.1	Eisenkern	157
6.1.2	Wicklung	160
6.2	Kühlung	162
6.3	Wicklungsverschaltung	164
6.3.1	Klemmenbezeichnung	165
6.3.2	Bemessungsgrößen	166
6.3.3	Spannungsübersetzung	167
6.3.4	Schaltgruppe	167
6.4	Typenschild	172
6.5	Ersatzschaltbild	173
6.5.1	Idealer Transformator	174
6.5.2	Transformator mit Kurzschlussimpedanz	175
6.6	Asymmetrische Belastung	175
6.6.1	Übersicht	176
6.6.2	Einphasig belasteter Yyn-Transformator	176
6.7	Besonderheiten	178
6.7.1	Parallelbetrieb	178
6.7.2	Verteiltransformator mit Laststufenschalter	179
6.7.3	Dreiwicklungs-Transformator	181
6.7.4	Phasenschieber-Transformator	181
6.7.5	Prüfung	184
7	Gleichstrommaschine	185
7.1	Aufbau und Wirkungsweise	185
7.1.1	Prinzip	186
7.1.2	Technische Umsetzung	191
7.1.3	Ankerwicklung	194
7.1.4	Erregerwicklung	195
7.1.5	Feldverteilung	196
7.1.6	Kommutierung und Wendepolwicklung	199
7.1.7	Ankerrückwirkung	201
7.2	Modellbildung	203
7.2.1	Klemmenbezeichnung	203
7.2.2	Symbole und Schaltungen	204
7.2.3	Modell und Ersatzschaltbild	206
7.2.4	Leistungsbilanz	210

7.2.5	Typenschild und Bemessungsgrößen	214
7.2.6	Berechnete Bemessungsgrößen	214
7.2.7	Bauvolumen	215
7.3	Betriebsverhalten	216
7.3.1	Ein- und Ausschalten	216
7.3.2	Permanentmagnetmaschine	217
7.3.3	Vier-Quadranten-Betrieb	221
7.3.4	Fremderregte Gleichstrommaschine	223
7.3.5	Wirksame Windungszahl	227
7.3.6	Nebenschlussgenerator	229
7.3.7	Reihenschlussmaschine	230
7.3.8	Universalmaschine	231
8	Gleichstromsteller	233
8.1	Tiefsetzsteller	233
8.2	H-Brücke	237
9	Netzgeführter Gleichrichter	241
9.1	M1U-Gleichrichter	242
9.2	M1C-Gleichrichter	244
9.3	B2U-Gleichrichter	246
9.4	B2C-Gleichrichter	248
9.5	B6U-Gleichrichter	251
9.6	B6C-Gleichrichter	253
10	Drehfeldmaschine	257
10.1	Grundlegende Eigenschaften	258
10.2	Erzeugung eines Drehfelds	259
10.2.1	Rotierender Permanentmagnet	260
10.2.2	Drehfeld einer Drehstromwicklung	262
10.2.3	Ideale Drehfeldmaschine	264
10.2.4	Reale Drehfeldmaschine	265
10.3	Drehstromwicklung	266
10.3.1	Kenngrößen	268
10.3.2	Typenschild	272
10.3.3	Berechnete Bemessungsgrößen	273
10.3.4	Klemmenkasten	274
10.3.5	Polumschaltbare Wicklung	274
10.4	Raumzeiger	275

10.4.1	Rücktransformation	278
10.4.2	Leistung und Drehmoment	278
10.4.3	Bezogene Raumzeiger	279
10.5	Bauvolumen	280
11	Asynchronmaschine	281
11.1	Aufbau	281
11.1.1	Kurzschlussläufer	281
11.1.2	Schleifringläufer	284
11.2	Grundlegende Eigenschaften	286
11.2.1	Wirkungsweise	286
11.2.2	Ersatzschaltbild	288
11.2.3	Eigenschaften des Drehfelds	290
11.2.4	Typenschild und Bemessungsgrößen	291
11.2.5	Leistungsbilanz	292
11.3	Vereinfachtes Ersatzschaltbild	295
11.3.1	Leistung und Verluste	295
11.3.2	Streuung und Rotorzeitkonstante	296
11.3.3	Bemessungsgrößen	297
11.4	Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer am Netz	297
11.4.1	Statorstromortskurve	298
11.4.2	Betriebskennlinien	301
11.4.3	Stromverdrängung und Netzanlauf	307
11.4.4	Strombegrenzung beim Netzanlauf	311
11.4.5	Drehzahlstellung	315
11.5	Parameterbestimmung	316
11.5.1	Kurzschlussversuch	316
11.5.2	Leerlaufversuch	318
11.5.3	Übersetzungsverhältnis	320
11.6	Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer am Stromrichter	320
11.6.1	Ersatzschaltbild	321
11.6.2	Betriebskennlinien	322
11.6.3	Grenzkennlinien	325
11.6.4	Vergleich Netz- und Stromrichterbetrieb	328
11.7	Asynchronmaschine mit Schleifringläufer am Netz	329
11.7.1	Externe Rotorwiderstände	330
11.7.2	Betriebskennlinien	330
11.8	Doppelt gespeiste Asynchronmaschine	332

11.8.1	Leistungsbilanz	333
11.8.2	Vergleich von Schleifringläufer-Maschinen mit externen Rotorwiderständen und doppelter Speisung	335
11.9	Einphasen-Asynchronmaschine	336
11.9.1	Drehstromasynchronmaschine im einphasigen Betrieb	337
11.9.2	Asynchronmaschine mit Haupt- und Hilfswicklung	338
12	Synchronmaschine	339
12.1	Aufbau	340
12.1.1	Vollpolläufer mit elektrischer Erregung	341
12.1.2	Schenkelpolläufer mit elektrischer Erregung	343
12.1.3	Erregersystem	345
12.1.4	Permanentmagnetläufer	347
12.1.5	Reluktanzläufer	349
12.2	Grundlegende Eigenschaften	349
12.2.1	Rotorfestes Koordinatensystem	349
12.2.2	Ersatzschaltbild bei magnetisch symmetrischem Rotor	351
12.2.3	Leistungsbilanz	353
12.2.4	Vereinfachtes Ersatzschaltbild bei magnetisch symmetrischem Rotor ..	356
12.3	Vollpolmaschine am Netz	356
12.3.1	Typenschild und Bemessungsgrößen	356
12.3.2	Polradwinkel	357
12.3.3	Betriebszustände	358
12.3.4	Zeigerdiagramme	360
12.3.5	Betriebskennlinien	362
12.3.6	Synchronisierung	367
12.4	Vollpolgenerator im Inselbetrieb	368
12.5	Schenkelpolmaschine am Netz	369
12.5.1	Vereinfachte Gleichungen	369
12.5.2	Betriebskennlinien	370
12.6	Kennlinien bei variabler Erregung	372
12.6.1	Leerlaufversuch	372
12.6.2	Kurzschlussversuch	373
12.6.3	Leerlauf-Kurzschlussverhältnis	374
12.7	Permanentmagnet-Maschine am Stromrichter	375
12.7.1	Vereinfachte Gleichungen	375
12.7.2	Feldorientierte Regelung	377
12.7.3	Betriebskennlinien	378

12.7.4	Grenzkennlinien	382
12.7.5	Bürstenlose Gleichstrommaschine	383
12.8	Synchronmaschine mit Reluktanzläufer am Stromrichter	383
12.8.1	Betriebeigenschaften	384
12.8.2	Betriebskennlinien	384
12.8.3	Vergleich mit Kurzschlussläufer-Asynchronmaschine	386
13	Selbstgeführter Stromrichter	387
13.1	Maschinenstromrichter	388
13.2	Pulsmuster	391
13.2.1	Vollblockbetrieb	392
13.2.2	Unterschwingungsverfahren	393
13.2.3	Raumzeigermodulation	397
13.3	Netzstromrichter	399
A	Technologievergleich	403
A.1	Vergleich von elektrischen Maschinen	403
A.2	Vergleich von Netzgleichrichtern für den Umrichterbetrieb	405
	Literatur	407
	Stichwortverzeichnis	411

Schreibweisen und Gezeichnetes

■ Allgemeines

Wichtige Begriffe werden *kursiv* geschrieben.

Erweitertes Wissen. Kennzeichnet Inhalte, die über das Grundlegende hinaus gehen.

Physikalische Größen werden kursiv dargestellt. Sie bestehen in aller Regel aus einem Zahlenwert und einer in gerader Schrift gesetzten Einheit. Die Momentanwerte elektrischer Größen werden als Kleinbuchstaben geschrieben, ihre Effektivwerte mit Großbuchstaben. Wenn eine physikalische Größe null ist, wird ihre Einheit aus Gründen der Vollständigkeit mit angegeben.

Beispiel: Effektivwert des Stroms $I = 0\text{ A}$

Beispiel: Momentanwert der Spannung $u = 10,5\text{ V}$

Komplexe physikalische Größen werden unterstrichen. Sie können entweder in kartesischer oder polarer Schreibweise geschrieben werden.

Beispiel: Strom in kartesischer Schreibweise $\underline{I} = 3\text{ A} + j \cdot 4\text{ A}$

Beispiel: Spannung in polarer Schreibweise $\underline{U}_2 = 230\text{ V} \angle (-120^\circ)$

Physikalische Vektoren werden mit einem Pfeil über dem Formelzeichen versehen und können entweder zwei- oder dreidimensional sein.

Beispiel: Zweidimensionaler Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\text{ m/s} \\ 0\text{ m/s} \end{pmatrix}$

Beispiel: Dreidimensionaler Drehmomentvektor $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0\text{ Nm} \\ 0\text{ Nm} \\ 20\text{ Nm} \end{pmatrix}$

Punkte, Kurven und Flächen werden über kalligrafische Symbole – also in einer schreibschriftartigen Schrift – gekennzeichnet.

Beispiel: Punkt \mathcal{P} im Raum

Beispiel: Fläche \mathcal{A}_1 als räumliches Objekt, zur Unterscheidung vom Flächeninhalt A_1

Gleichungen werden in einer separaten Zeile geschrieben und mit runden Klammern nummeriert. Dabei gibt die erste Ziffer das Kapitel an, während die zweite Ziffer eine fortlaufende Nummerierung repräsentiert. Besonders wichtige Gleichungen werden in einen rechteckigen Rahmen gesetzt, um deren Wichtigkeit zu unterstreichen.

Beispiel: Der Satz von Pythagoras lautet:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.6)$$

Beispiel: Die Leistung in einem translatorischen System beträgt:

$$P = F \cdot v \quad (2.35)$$

Literaturstellen sind Verweise auf andere Bücher und Artikel aus meist Zeitschriften. Sie sind in eckigen Klammern angegeben und am Ende des Buchs aufgelistet.

Beispiel: Eine Ergänzung zur Leistungselektronik ist in [Pro15] angegeben.

■ Figuren

Durch dieses Buch begleiten uns drei Figuren, die sich am besten gleich selbst vorstellen:



Farad. Farad ist eine treibende Größe, wie etwa die *Spannung*. Farad hat lange Beine und ist ein recht drahtiger Typ. Seine Kraft sollten wir nicht unterschätzen, auch wenn er wie ein Fliegengewicht erscheint.

Henry. Der Zweite ist Henry, er ist wie ein Strom. Seine äußere Form erinnert an einen Tropfen, und das kommt nicht von ungefähr. Wenn er will, kommt er durch alles hindurch, da er sich dehnen und stauchen, strecken und verrenken kann. Henry ist auch hart im Nehmen, da steht er Farad in nichts nach.

Ohm. Und dann ist da noch Ohm. Er geht nicht nur immer wieder auf Widerstand, er ist sogar der Widerstand und heißt nach seiner Einheit. Ohm macht es Farad und Henry nicht immer leicht. Und dennoch, die drei gehören einfach zusammen.

■ Symbole

Graue Kästen mit Rufzeichen beinhalten wichtige Merkinhalte.

Beispiel:



Magnetische **Feldlinien** sind stets **geschlossen**.

Graue Kästen mit Lineal listen am Beginn eines Abschnitts physikalische Größen mit ihren Einheiten, einschließlich einer englischen Übersetzung, auf.

Beispiel:

Zeichen	Einheit	Größe	Quantity
E	J	Energie, Arbeit	Energy, work


 Das Einheitenzeichen J steht für »Joule«. $J = Ws =$ »Wattsekunde«, also »Watt« mal »Sekunde«.

Graue Kästen mit Sprechblasen zeigen am Ende eines Abschnitts eine nach deutschen Begriffen sortierte Liste mit ihren englischen Übersetzungen.

Beispiel:

Deutsch	English
Bürstenlose Gleichstrommaschine	Brushless DC machine
Gleichstrommaschine	DC machine

1

Grundlegendes Handwerkszeug

Dieses Kapitel fasst ausgewählte mathematische und elektrotechnische Grundlagen zusammen, wie sie in den darauffolgenden Kapiteln angewandt werden. Die wichtigsten Zusammenhänge der Trigonometrie, der Vektorrechnung, der komplexen Rechnung sowie der ein- und dreiphasigen Wechselstromnetze werden knapp umrissen. Dadurch soll einerseits die in diesem Buch verwendete Schreibweise und Nomenklatur vermittelt werden. Andererseits sollen die erforderlichen Grundlagen in Erinnerung gerufen und aufgefrischt werden.

■ 1.1 Trigonometrie

In der Trigonometrie werden Zusammenhänge zwischen Längen und Winkeln in Dreiecken hergestellt. Bild 1.1 soll uns dazu als Inspiration dienen. Wir betrachten nachfolgend geometrische Darstellungen, die jeweils in einem x - y -Koordinatensystem, wie beispielsweise in Bild 1.2a, angegeben sind. Als Folge dessen behandeln wir in diesem Abschnitt ausschließlich Winkel in der zweidimensionalen x - y -Ebene.

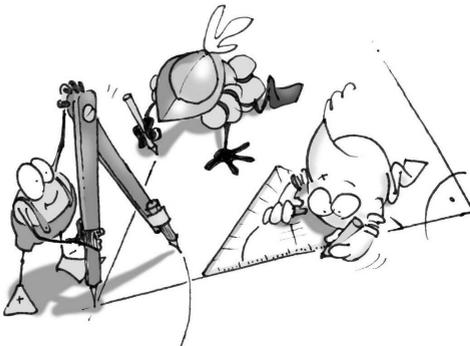


Bild 1.1 Trigonometrie

1.1.1 Winkel

Der Winkel β zwischen zwei Schenkeln a und c , wie er in Bild 1.2b dargestellt ist, lässt sich beispielsweise mit einem Geodreieck bestimmen. Den Schnittpunkt der beiden Schenkel kann man auch als Drehpunkt ansehen, ähnlich wie bei der Schere in Bild 1.2c. Wenn man ausgehend von zwei parallelen, horizontal ausgerichteten Scherenhebeln, den einen Scherenhebel um den Winkel β gegen den Uhrzeigersinn um den Drehpunkt dreht, erhalten wir eine Konfiguration wie in Bild 1.2b.



Bild 1.2 (a) x - y -Koordinatensystem, (b) Schenkel und Winkel β , (c) Schere mit zwei Scherenhebeln, (d) positiver Winkel β , (e) negativer Winkel β'



Eine Drehung **gegen den Uhrzeigersinn** entspricht in einem ebenen x - y -Koordinatensystem dem **mathematisch positiven Bezugssinn**. Eine Drehung in Richtung dieses Bezugssinns entspricht daher einem positiven Winkel. Eine Drehung entgegen dem mathematisch positiven Bezugssinn (im Uhrzeigersinn) entspricht hingegen einem negativen Winkel.

Der mathematisch positive Drehsinn in Bild 1.2a ist mit einem kreisbogenförmigen Pfeil in Bild 1.2d oben um das Pluszeichen herum angezeigt. Der Winkel β in Bild 1.2d, der vom Schenkel a zum Schenkel c gerichtet ist, ist größer als null¹, da er im mathematisch positiven Bezugssinn gezeichnet ist. In Bild 1.2e betrachten wir den Winkel β' , welcher vom Schenkel c zum Schenkel a hin gerichtet ist. Der Winkel β' ist daher kleiner als null², da er gegen den mathematisch positiven Bezugssinn gerichtet ist.



- Ein **positiver** Winkel wird mit einem Kreisbogen samt Pfeil gekennzeichnet, dessen Richtung mit dem mathematisch positiven Bezugssinn übereinstimmt.
- Ein **negativer** Winkel wird mit einem Kreisbogen samt Pfeil gekennzeichnet, dessen Richtung mit dem mathematisch positiven Bezugssinn nicht übereinstimmt.
- Als Kreisbogen gekennzeichnete Winkel ohne Pfeil meinen in der Regel einen positiven Winkel.

Der Winkel eines vollen Kreises beträgt:

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \quad (1.1)$$

¹ Genauer: $0^\circ < \beta < 180^\circ$

² Genauer: $-180^\circ < \beta' < 0^\circ$

1.1.2 Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen

Um die Winkelfunktionen mathematisch beschreiben zu können, betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck in Bild 1.3a. Die beiden Winkel α und β bezeichnen wir als *Komplementwinkel*, da sie zusammen 90° ergeben:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (1.2)$$

Dabei benennen wir die beiden in einem rechten Winkel zueinander stehenden Seiten als Katheten und die dritte Seite als Hypotenuse. Bezüglich des Winkels α nennen wir die Seite b die *Ankathete* – da sie an den Winkel angrenzt – und die Seite a die *Gegenkathete* – da sie dem Winkel gegenüberliegt. Da die Kathete a an den Winkel β angrenzt, heißt sie bezüglich des Winkels β *Ankathete* und b heißt *Gegenkathete*; siehe Tabelle 1.1.

Wir definieren folgende Winkelfunktionen:

Sinus. Der Sinus (Funktionsname sin) von einem der beiden Komplementwinkel ist die Gegenkathete dividiert durch die Hypotenuse:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad (1.3)$$

Kosinus. Der Kosinus (Funktionsname cos) ist jeweils gleich dem Verhältnis aus Ankathete zu Hypotenuse:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad (1.4)$$

Tangens. Der Tangens (Funktionsname tan) berechnet sich aus Gegenkathete zu Ankathete:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \quad (1.5)$$

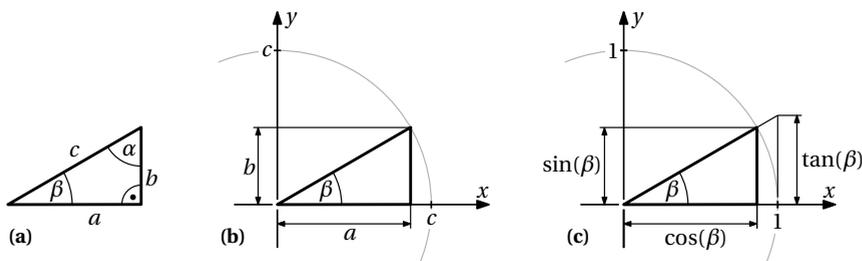


Bild 1.3 Rechtwinkeliges Dreieck

Tabelle 1.1 Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

	Seite a	Seite b	Seite c
Bezüglich α	Gegenkathete	Ankathete	Hypotenuse
Bezüglich β	Ankathete	Gegenkathete	Hypotenuse

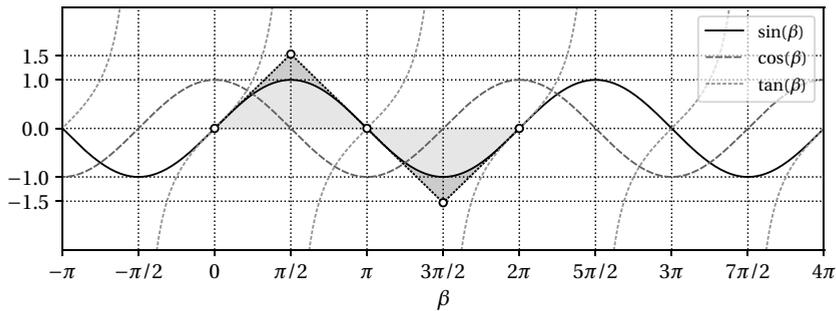


Bild 1.4 Funktionen $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$ und $\tan(\beta)$, Hilfspunkte für die näherungsweise Konstruktion einer Sinuskurve per Handskizze

Zwischen den Seiten a , b und c gilt der Satz von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.6)$$

Bezüglich des Winkels β sind die Winkelfunktionen in Bild 1.3b und c veranschaulicht. Dass man neben dem Sinus und dem Kosinus des Winkels β auch den Tangens einzeichnen kann, ist eine Folge der Betrachtung der Steigung k der Hypotenuse im x - y -Koordinatensystem; sie beträgt

$$k = \tan(\beta) \quad (1.7)$$

und stimmt mit Gl. (1.5) überein. Der Satz von Pythagoras angewandt auf die Winkelfunktionen aus Bild 1.3c zeigt:

$$\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1 \quad (1.8)$$

Die wesentlichen Merkmale einer Sinus-Funktion – für die Erstellung mittels Handskizze – sind in Bild 1.4 gezeigt. Dazu zeichnet man jeweils eine horizontale Linie bei der positiven und negativen Amplitude sowie dem jeweils etwa 1.5-fachen Wert der positiven und negativen Amplitude. Die in Bild 1.4 markierten Punkte werden über einen Linienzug miteinander verbunden. Dieser Linienzug, ebenso wie die horizontalen Linien bei der positiven und negativen Amplitude, sind die Tangenten für das Zeichnen der Sinuskurve: das lässt sich mit freier Hand gut bewerkstelligen.

Die Sinus- und Kosinusfunktion in Bild 1.4 sind offenbar nur horizontal gegeneinander verschoben:

$$\cos(\beta) = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin(\beta) = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.9)$$

Diese beiden Winkelfunktionen weisen zusätzlich folgende Eigenschaften auf:

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta) \quad \cos(-\beta) = \cos(\beta) \quad (1.10)$$

Die Winkelfunktionen $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$ und $\tan(\beta)$ sind in Bild 1.4 dargestellt. Die sin- und cos-Funktionen sind $2 \cdot \pi$ -periodisch, die tan-Funktion ist π -periodisch – wiederholt sich

nach links und rechts mit der jeweils angegebenen Periode. Dies schreiben wir mathematisch in folgender Form:

$$\sin(\beta) = \sin(\beta + z \cdot 2 \cdot \pi) \quad \cos(\beta) = \cos(\beta + z \cdot 2 \cdot \pi) \quad \tan(\beta) = \tan(\beta + z \cdot \pi) \quad (1.11)$$

Dabei ist $z \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Dieser Zusammenhang lässt sich mit einem Taschenrechner im Radiant-Modus einfach nachvollziehen. Die Funktion $\tan(\beta)$ weist immer dann eine Unstetigkeitsstelle auf, wenn die Funktion $\cos(\beta) \rightarrow 0$ geht.

Für jede der drei Funktionen aus Bild 1.4 gibt es jeweils eine Umkehrfunktion.

Arkussinus. In Bild 1.5a können wir jedem beliebigen Winkel β eindeutig einen Funktionswert

$$y = \sin(\beta) \quad (1.12)$$

zuordnen, wobei $-1 \leq y \leq 1$ ist. Wenn wir umgekehrt y kennen und den Winkel β bestimmen wollen, so gibt es dazu meist zwei Lösungen im Intervall $-\pi < \beta \leq \pi$. Um die in Bild 1.5a im grau unterlegten Bereich liegende Lösung zu bestimmen, verwenden wir die Umkehrfunktion Arkussinus, mathematisch geschrieben als \arcsin :

$$\beta = \arcsin(y) \quad (1.13)$$

Die Funktion $\arcsin(y)$ liefert in Bild 1.5b, im ebenfalls grau unterlegten Bereich, einen eindeutigen Funktionswert β , der im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ liegt.³ Die gesuchte Lösung von $y = \sin(\beta)$ könnte auch außerhalb des grauen Bereichs liegen. So liefert beispielsweise $\arcsin(0)$ in den Taschenrechner eingetippt als Ergebnis den Winkel $\beta = 0$. Aus Bild 1.5a ist allerdings ersichtlich, dass auch beispielsweise $\beta = \pi$ eine gültige Lösung von $y = \sin(\beta)$ für $y = 0$ ist. Welcher Winkel tatsächlich die korrekte Lösung von $y = \sin(\beta)$ ist, hängt von den zu berücksichtigenden Bedingungen in einer technischen Aufgabe ab, ohne die die Lösung nicht eindeutig bestimmbar ist. Die zweite Lösung von $y = \sin(\beta)$, zusätzlich zu $\arcsin(y)$ im Bereich $-\pi < \beta \leq \pi$, beträgt:

$$\beta = \begin{cases} \pi - \arcsin(y) & \text{wenn } y \geq 0 \\ \arcsin(y) - \pi & \text{wenn } y < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Mathematisch gesehen haben wir in der Regel zwei mögliche Lösungen. Die Gln. (1.13) und (1.14) liefern nur für $y = \pm 1$ das jeweils selbe Ergebnis, womit wir in diesen beiden Sonderfällen eine eindeutige Lösung haben.

Arkuskosinus. In gleicher Weise wie beim Arkussinus gibt es für jeden beliebigen Winkel β einen eindeutigen Funktionswert

$$x = \cos(\beta) \quad (1.15)$$

mit $-1 \leq x \leq 1$ in Bild 1.5c. Mit der Umkehrfunktion Arkuskosinus, mathematisch geschrieben als \arccos , lässt sich wiederum nur ein Lösungswinkel β passend zu $x = \cos(\beta)$, bei gegebenem x , finden:

$$\beta = \arccos(x) \quad (1.16)$$

³ Der Funktionslauf aus Bild 1.5b ergibt sich aus Bild 1.5a durch Vertauschen der beiden Achsen

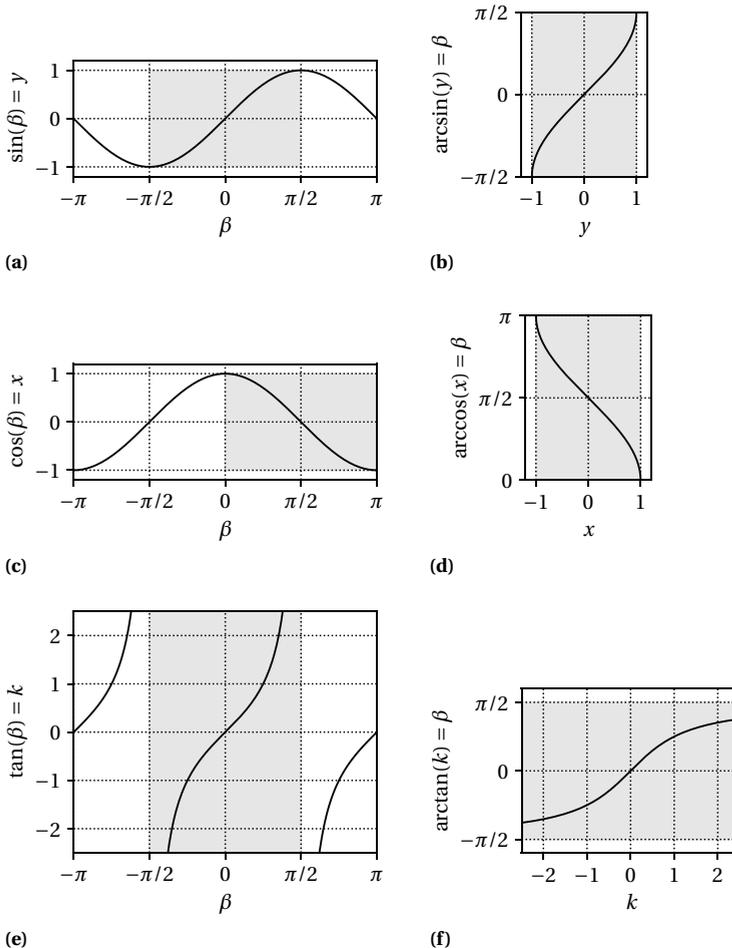


Bild 1.5 (a) Funktion $y = \sin(\beta)$, (b) Umkehrfunktion $\beta = \arcsin(y)$, (c) Funktion $x = \cos(\beta)$, (d) Umkehrfunktion $\beta = \arccos(y)$, (e) Funktion $k = \tan(\beta)$, (f) Umkehrfunktion $\beta = \arctan(k)$

Die Umkehrfunktion $\arccos(x)$ liefert als Resultat einen eindeutigen Winkel β im Bereich $0 \leq \beta \leq \pi$, ist jedoch keine eindeutige Lösung von $x = \cos(\beta)$. Eine mögliche zweite Lösung könnte außerhalb des grau unterlegten Bereichs von Bild 1.5c und 1.5d liegen. Zum Beispiel liefert $\arccos(0)$ als Lösung $\beta = \frac{\pi}{2}$. Bild 1.5c zeigt jedoch, dass für $x = \cos(\beta)$ auch $\beta = -\frac{\pi}{2}$ denselben Funktionswert $x = 0$ aufweist. Für den Bereich $-\pi < \beta \leq \pi$ gibt es zusätzlich zu $\arccos(x)$ als mögliche zweite Lösung von $x = \cos(\beta)$:

$$\beta = -\arccos(x) \quad (1.17)$$

Für den Sonderfall $x = 1$ sind die beiden Lösungen $\beta = \pm \arccos(x) = 0$ identisch.

Arkustangens. Einem Winkel β wird über

$$k = \tan(\beta) \quad (1.18)$$

ein eindeutiger Funktionswert k zugeordnet, der jeden beliebigen reellen Funktionswert annehmen kann. Um umgekehrt den Winkel β im grau unterlegten Bereich von Bild 1.5e aus k zu bestimmen, verwendet man die Umkehrfunktion Arkustanges, mathematisch geschrieben als \arctan :

$$\beta = \arctan(k) \quad (1.19)$$

Die Funktion $\arctan(k)$ in Bild 1.5f liefert den Winkel β im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ als Ergebnis. Der Winkel β als Lösung von $k = \tan(\beta)$ könnte jedoch auch außerhalb des grau unterlegten Bereichs von Bild 1.5e liegen. So liefert etwa $\arctan(0)$ als Lösung $\beta = 0$, aber eine zweite Lösung ist $\beta = \pi$, wo ebenfalls $\tan(\beta) = 0$ ist. Neben der Umkehrfunktion $\arctan(k)$ ist eine zweite Lösung von $k = \tan(\beta)$:

$$\beta = \begin{cases} \arctan(k) - \pi & \text{wenn } k > 0 \\ \pi + \arctan(k) & \text{wenn } k \leq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Eine Ausnahme bilden die Winkel $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, wo die Tangensfunktion eine Unstetigkeitsstelle aufweist.



Die **Umkehrfunktionen** $\arcsin(y)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(k)$ sind eindeutige Funktionen, liefern aber jeweils nicht notwendiger Weise eine eindeutige Lösung für den Winkel β in folgenden Gleichungen:

$$y = \sin(\beta) \qquad x = \cos(\beta) \qquad k = \tan(\beta)$$

Ausgenommen von Sonderfällen gibt es immer auch einen zweiten Lösungswinkel, wie er jeweils in den Gln. (1.14), (1.17) und (1.20) angegeben ist. ■

1.1.3 Allgemeines Dreieck

Bei einem allgemeinen Dreieck wie in Bild 1.6a ergibt die Summe der drei Winkel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1.21)$$

Sinussatz

Der Sinussatz besagt, dass die Verhältnisse der Seiten zum jeweils gegenüberliegenden Winkel in einem Dreieck konstant sind:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (1.22)$$

Kosinussatz

Der Kosinussatz kann als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras gemäß $c^2 = a^2 + b^2$ angesehen werden:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad (1.23)$$

In gleicher Form gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta) \quad (1.24)$$

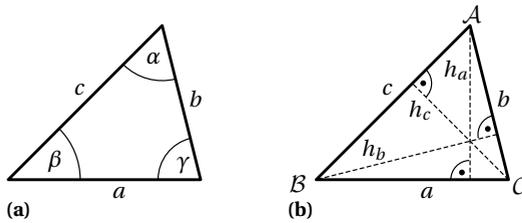


Bild 1.6 Allgemeines Dreieck (a) mit Seiten a , b , c und Winkeln α , β , γ , (b) zusätzlich mit Höhen h_a , h_b , h_c und den Eckpunkten A , B , C

Höhen

Die drei Höhen h_a , h_b und h_c eines allgemeinen Dreiecks sind in Bild 1.6b eingezeichnet. Dabei geht

- die Höhe h_a durch den Punkt A und steht normal auf die Seite a ,
- die Höhe h_b durch den Punkt B und steht normal auf die Seite b ,
- die Höhe h_c durch den Punkt C und steht normal auf die Seite c .

Da jede Höhe das allgemeine Dreieck in jeweils zwei rechtwinkelige Dreiecke teilt, gilt:

$$\begin{aligned} h_a &= b \cdot \sin(\gamma) & h_b &= c \cdot \sin(\alpha) & h_c &= a \cdot \sin(\beta) & (1.25) \\ &= c \cdot \sin(\beta) & &= a \cdot \sin(\gamma) & &= b \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

■ 1.2 Vektorrechnung

Wir werden nachfolgend zunächst die zweidimensionalen und danach die dreidimensionalen Vektoren behandeln. Dabei werden wir die wichtigsten mathematischen Eigenschaften und Rechenregeln zusammenfassen.

1.2.1 Zweidimensionale Vektoren

Um einen Punkt auf der Erdoberfläche zu finden, ist es ausreichend, seine GPS-Koordinaten zu kennen. In ähnlicher Weise kann man einen beliebigen Punkt in der x - y -Ebene dadurch kennzeichnen, dass man seine x - und y -Koordinate angibt, wie das in Bild 1.7a dargestellt ist.

Ortsvektor

Wenn wir in Bild 1.8 in der x - y -Ebene einen Pfeil vom Ursprung \mathcal{O} zu einem Punkt \mathcal{P}_1 mit den Koordinaten x_1 und y_1 zeichnen, so bezeichnen wir diesen Pfeil als *Ortsvektor* \vec{r}_1 . Wir schreiben die beiden Koordinaten in der Vektorschreibweise übereinander in einer runden Klammer:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

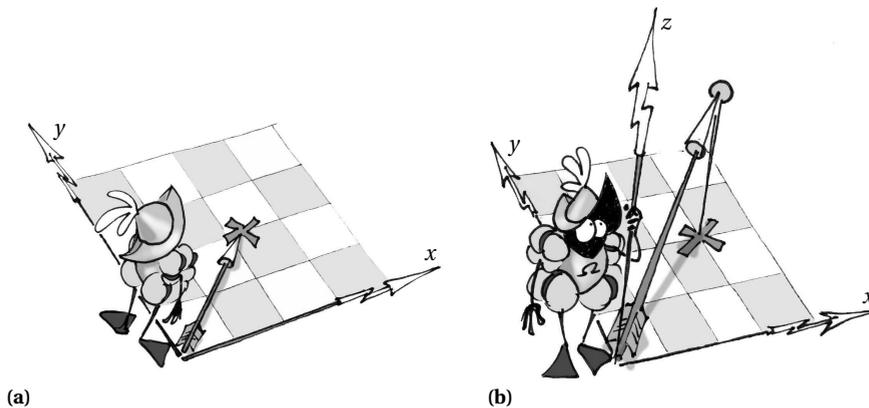


Bild 1.7 (a) Zweidimensionaler und (b) dreidimensionaler Vektor

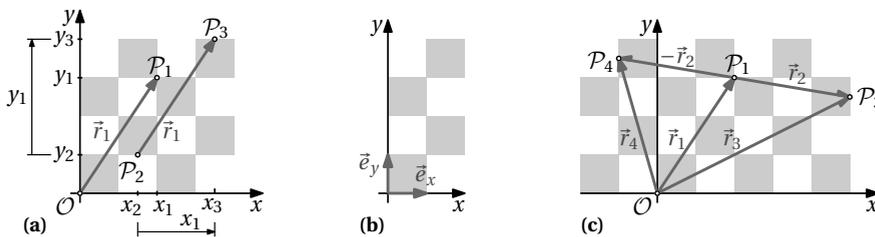


Bild 1.8 (a) Ortsvektor \vec{r}_1 von \mathcal{O} nach \mathcal{P}_1 sowie Vektor \vec{r}_1 von \mathcal{P}_2 nach \mathcal{P}_3 , (b) Einsvektor in x - und y -Richtung, (c) Addition $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ und Subtraktion $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ von Vektoren

Ortsvektor nennen wir einen Vektor dann, wenn er vom Ursprung \mathcal{O} weg gezeichnet wird. Ein Vektor wird in der Mathematik über einen kleinen Vektorpfeil oberhalb des Formelzeichens gekennzeichnet, wie bei \vec{r}_1 .

Vektor

Wenn wir nun den Ortsvektor \vec{r} aus Bild 1.8 derart parallel verschieben, dass sein Ursprungspunkt in \mathcal{P}_2 mit den Koordinaten x_2 und y_2 zu liegen kommt, dieser Pfeil jedoch dieselbe Länge aufweist und in dieselbe Richtung zeigt, so sprechen wir einfach nur von einem Vektor \vec{r} . Der Ortsvektor ist also ein Sonderfall des Vektors, der im Ursprung \mathcal{O} beginnt. In unserem Beispiel ist der Vektor \vec{r}_1 von \mathcal{P}_2 nach \mathcal{P}_3 gerichtet. Seine Abmessungen in x - und y -Richtung sind gleich wie der ursprünglich gezeichnete Ortsvektor, d. h. $x_1 = x_3 - x_2$ und $y_1 = y_3 - y_2$. Die x - und y -Koordinaten (d. h. x - und y -Abmessungen) des Vektors sind gleich wie jene des Ortsvektors. Damit weist auch der von \mathcal{P}_2 nach \mathcal{P}_3 gerichtete Vektor dieselben Koordinaten wie in Gl. (1.26) auf.

Der Endpunkt eines gezeichneten Vektors – wie in Bild 1.8 – wird über eine Pfeilspitze gekennzeichnet. Der gerade Bereich vom Ausgangspunkt des Vektorpfeils bis zur Spitze wird als *Schaft* bezeichnet.



Begrifflich unterscheiden wir zweidimensionale Vektoren in der Form (1.26) und skalare Größen, kurz Skalare.

- Ein **Skalar** ist eine gewöhnliche Zahl oder physikalische Größe mit Einheit.
- Ein zweidimensionaler **Vektor** besteht aus einem Paar gewöhnlicher Zahlen oder physikalischen Größen: den Koordinaten. Die Koordinaten eines zweidimensionalen Vektors können wir uns in einem Koordinatensystem vorstellen, wie in Bild 1.7a und 1.8.

1.2.2 Dreidimensionale Vektoren

Wenn wir unsere Vorstellung von den zwei- zu den dreidimensionalen Vektoren hin erweitern, fügen wir die z -Koordinate als dritte Koordinate der Vektorschreibweise hinzu:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Dreidimensional können wir uns das wie in Bild 1.7b perspektivisch vorstellen. Wenn man die x - und die y -Achse eines Koordinatensystems gezeichnet hat, zeichnet man die z -Achse jeweils normal auf die beiden anderen Achsen, wie in Bild 1.9a. Die Richtung der z -Achse ist in die Richtung des Daumens der rechten Hand gerichtet, wenn die x -Achse über den kürzeren der beiden möglichen Winkel in die y -Achse gedreht wird. Die vier Fingern der rechten Hand in Bild 1.9b geben die Drehrichtung an.

Alternativ kann man sich die x -, y - und z -Achse als Dreibein vorstellen, dessen Beine über Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand gebildet werden. Die Finger weisen jeweils einen Winkel von 90° zueinander auf, wie das in Bild 1.9c gezeichnet ist. Dabei zeigt

- der Daumen in die Richtung der x -Achse,
- der Zeigefinger in Richtung der y -Achse und
- der Mittelfinger in Richtung der z -Achse.



Die x -, y - und z -Achse des Koordinatensystems dürfen wir in Bild 1.9a nicht irgendwelchen Fingern zuordnen. Stattdessen müssen wir uns an eine feste Reihenfolge der Koordinatenachsen halten. Anstelle der Reihenfolge $x \rightarrow y \rightarrow z$ können allerdings auch die Reihenfolgen $y \rightarrow z \rightarrow x$ oder $z \rightarrow x \rightarrow y$ verwendet werden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem **zyklischen Vertauschen** der Koordinatenachsen.

Damit wir ein dreidimensionales Koordinatensystem auf einem Blatt Papier zeichnen können, greifen wir anstelle einer perspektivischen Darstellung wie in Bild 1.7b auf eine Projektion zurück. Konkret werden wir in der angewandten Vektorrechnung die Projektion auf die x - y -Ebene betrachten, wie sie auch in Bild 1.10 gezeigt ist. Wenn wir in diesem Fall die x -Achse nach rechts und die y -Achse nach oben zeichnen, dann ist die z -Achse aus der Zeichenebene heraus gerichtet. Die Richtung aus der Zeichenebene symbolisieren wir durch den Kreis mit dem Punkt, wie in Bild 1.9d. Wir können uns das wie den Blick auf eine

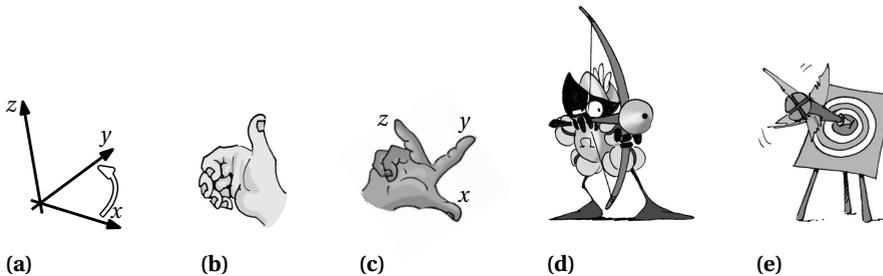


Bild 1.9 (a) Achse x , y und z eines dreidimensionalen Koordinatensystems, (b) die Richtung der z -Achse entspricht der Richtung des Daumens der rechten Hand, wenn die vier Finger die Drehrichtung der x -Achse über den kleineren der beiden Winkel in die y -Achse anzeigt, (c) Koordinatensystem, aus drei rechtwinklig aufeinander stehenden Fingern gebildet, (d) Pfeilspitze von vorne gesehen (\odot), (e) Pfeil von hinten gesehen (\otimes)

Pfeilspitze vorstellen (\odot). Umkehrt symbolisieren wir einen Richtungspfeil in die Zeichenebene über einen Kreis, in dessen Innerem zwei gekreuzte Linien gezeichnet sind (\otimes). Wir können uns dazu vorstellen, dass dies der Blick auf das Ende eines Pfeils in Bild 1.9e ist, der mit einer x -förmigen Einkerbung versehen ist.

Ein zweidimensionaler Vektor in der x - y -Ebene kann daher als Sonderfall von Gl. (1.27) mit $z_1 = 0$ betrachtet werden:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$



Die einzelnen **Koordinaten** eines Vektors sind bei Additionen und Subtraktionen wie auch in Vektorgleichungen immer **voneinander unabhängig**. In allen nachfolgenden Vektorgleichungen müssen wir daher jede Zeile jeweils als separate Gleichung behandeln.

Addition

Die Addition des Vektors \vec{r}_1 aus Gl. (1.27) und des Vektors

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

erfolgt koordinatenweise, d. h.:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Grafisch erhält man den Vektor $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ in Bild 1.8c, indem man den Schaft des Vektors \vec{r}_2 an die Spitze des Vektor \vec{r}_1 anfügt. Der Summenvektor wird dann vom Schaft des Vektors \vec{r}_1 zur Spitze des Vektor \vec{r}_2 gezeichnet.

Nullvektor

Alle Koordinaten des Nullvektors sind gleich null:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Negativer Vektor

Der negative Vektor $-\vec{r}_2$ weist die gleiche Länge aber die entgegengesetzte Richtung wie \vec{r}_2 auf:

$$-\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Subtraktion

Subtrahieren wir den Vektor \vec{r}_2 vom Vektor \vec{r}_1 , wie in Bild 1.8c, so entspricht das der Addition der Vektoren \vec{r}_1 und $-\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (-\vec{r}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Länge eines Vektors

Die *Länge* des Vektors \vec{r}_1 nennen wir auch den *Betrag* des Vektor \vec{r}_1 . Diese Größe berechnen wir über:

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (1.34)$$

Die Länge des Vektors \vec{r}_1 kennzeichnen wir dadurch, dass wir vor und hinter dem Vektor einen Betragsstrich schreiben. Wenn wir hingegen r_1 ohne Vektorpfeil schreiben, dann meinen wir in der Regel einfach nur eine skalare Größe, aber nicht unbedingt den Betrag des Vektors; stattdessen könnten auch beispielsweise nur eine Koordinate oder ein Radius gemeint sein. Daher ist es fortan wichtig, einen Vektor immer mit einem Vektorpfeil zu kennzeichnen, um ihn von einer ähnlich bezeichneten, skalaren Größe unterscheiden zu können.

Im Falle eines ebenen Vektors, der mit $z_1 = 0$ in der x - y -Ebene liegt, können wir die Länge des Vektors \vec{r}_1 mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.35)$$

Winkel ebener Vektoren

Unter dem Winkel des sich in der x - y -Ebene befindlichen Vektors \vec{r}_1 verstehen wir jenen Winkel, der von der Richtung der positiven x -Achse weggezählt zum betrachteten *Ortsvektor* \vec{r}_1 (der im Ursprung \mathcal{O} beginnt) gerichtet ist. In Bild 1.10a ist dieser Winkel als β_1 bezeichnet. Den Winkel β_1 des Vektors \vec{r}_1 bestimmen wir mit der Funktion \arg (vom Begriff

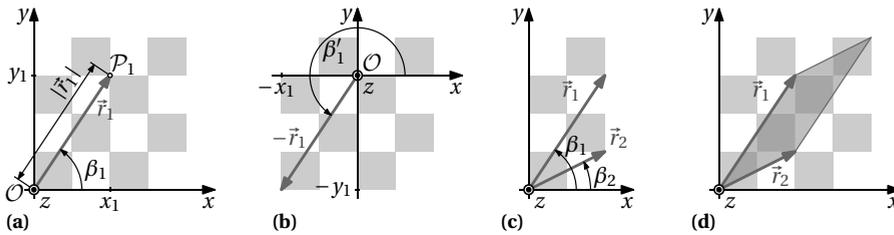


Bild 1.10 (a) Betrag und Winkel des Vektors \vec{r}_1 , (b) Betrag und Winkel des Vektors $-\vec{r}_1$, (c) Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , (d) Betrag des äußeren Produkts $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ ist gleich der Fläche des aus \vec{r}_1 und \vec{r}_2 gebildeten Parallelogramms

Argument stammend) in folgender Form:

$$\arg(\vec{r}_1) = \beta_1 \quad (1.36)$$

Für Berechnung dieses Winkels ist die Gleichung

$$\tan(\beta_1) = \frac{y_1}{x_1} \quad (1.37)$$

unter der Berücksichtigung von $x_1 = \cos(\beta_1)$ und $y_1 = \sin(\beta_1)$ zu lösen.⁴

Wenn wir den Vektor \vec{r}_1 in Bild 1.10a und den Vektor $-\vec{r}_1$ in Bild 1.10b miteinander vergleichen, so stellen wir folgende Zusammenhänge fest:

- Die Beträge sind gleich, d. h. $|\vec{r}_1| = |-\vec{r}_1|$.
- Den Winkel β_1 in Bild 1.10a können wir wegen $x_1 > 0$ und $y_1 > 0$ aus $\beta = \arctan(k)$ berechnen.
- Der Winkel $\beta'_1 = \arg(-\vec{r}_1)$ muss aus Gl. (1.20) bestimmt werden, da der Lösungswinkel β'_1 aufgrund von $-x_1 < 0$ und $-y_1 < 0$ im Bereich $-180^\circ < \beta'_1 < -90^\circ$ liegen muss; dies führt zu $\beta'_1 = \beta_1 + 180^\circ$.

Wenn wir den Winkel zwischen den beiden ebenen Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 in Bild 1.10c bestimmen wollen, so schreiben wir die Funktion \arg mit zwei Vektoren als Funktionsargumenten an und meinen damit:

$$\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \arg(\vec{r}_1) - \arg(\vec{r}_2) = \beta_1 - \beta_2 \quad (1.38)$$

Der Winkel zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 ist bis auf das Vorzeichen gleich dem Winkel zwischen \vec{r}_2 und \vec{r}_1 :

$$\arg(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \arg(\vec{r}_2) - \arg(\vec{r}_1) = -\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \beta_2 - \beta_1 \quad (1.39)$$

Einsvektor

Einen besonderen Fall der Vektoren stellen die Einsvektoren dar, die mitunter auch als Einheitsvektoren bezeichnet werden. Ihre Länge beträgt jeweils eins. Die Einsvektoren, die in

⁴ Die meisten Taschenrechner können aus den Koordinaten x_1 und y_1 nicht eindeutig den zugehörigen Winkel β_1 berechnen. Wissenschaftliche Taschenrechner sind jedoch häufig in der Lage, stattdessen den Winkel β_1 aus der komplexen Größe $x_1 + j \cdot y_1$ eindeutig bestimmen zu können.

die x -, y - und z -Richtung zeigen, sind:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

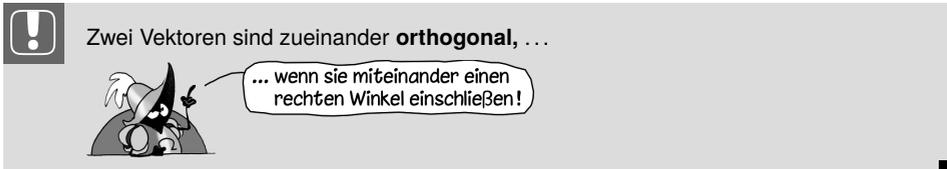
Zwei dieser Einsvektoren sind in Bild 1.8b dargestellt.

Den Einsvektor \vec{e}_{r_1} eines beliebigen Vektors \vec{r}_1 können wir aus

$$\vec{e}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} \quad (1.41)$$

berechnen. Die Länge des *Richtungsvektors* \vec{e}_{r_1} beträgt eins und er weist dieselbe Richtung wie \vec{r}_1 auf.

Orthogonalität



Diese Orthogonalität ist gleichbedeutend mit der Formulierung, dass diese Vektoren aufeinander senkrecht oder zueinander im rechten Winkel stehen.

Zwei beliebige Einsvektoren aus Gl. (1.40) sind jeweils zueinander orthogonal.

Multiplikation mit Skalar

Wenn wir einen Vektor \vec{r}_1 mit einem Skalar a multiplizieren, so müssen wir jede Koordinate mit dem Skalar multiplizieren:

$$a \cdot \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot y_1 \\ a \cdot z_1 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Als Besonderheit dieser Eigenschaft können wir den Vektor \vec{r}_1 auch als Summe der Einsvektoren aus Gl. (1.40) – jeweils multipliziert mit den Koordinatenwerten – konstruieren:

$$\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + z_1 \cdot \vec{e}_z \quad (1.43)$$

Inneres Produkt

Wir unterscheiden in der Physik bei Vektoren das innere und das äußere Produkt. Das *innere Produkt* oder *Skalarprodukt* ist das Produkt zweier Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , dessen Resultat eine skalare Größe ist. Das Multiplikationszeichen ist der Punkt im Ausdruck $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$. Die Berechnungsvorschrift lautet:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (1.44)$$

Alternativ können wir das innere Produkt auch über folgende Gleichung bestimmen:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos(\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) \quad (1.45)$$

Das Resultat des inneren Produkts kann positiv, negativ oder null sein. Das Skalarprodukt ist *kommutativ*; dies bedeutet:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \quad (1.46)$$



Das **innere Produkt** $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ ergibt eine **skalare Größe** und hat folgende Eigenschaften:

- Das innere Produkt zweier Vektoren, die **orthogonal** zueinander sind, ist stets **null**.
- Für das innere Produkt zweier Vektoren, die in dieselbe Richtung gerichtet sind, gilt $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.
- Für das innere Produkt zweier Vektoren, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen, gilt $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = -|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.

Wenn wir das innere Produkt eines Vektors \vec{r}_1 mit einem Einsektor bestimmen, dann erhalten wir den Längenanteil dieses Vektors, der in der Richtung des verwendeten Einsektors auftritt. Das bedeutet konkret mit den Einsektoren aus Gl. (1.40), dass wir die Koordinaten des Vektors $\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + z_1 \cdot \vec{e}_z$ bestimmen können:

$$x_1 = \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_x \qquad y_1 = \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_y \qquad z_1 = \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_z \quad (1.47)$$



Ergibt das innere Produkt eines Vektors mit einem Einsektor null, so ist der Längenanteil in Richtung des verwendeten Einsektors nicht vorhanden. Als Konsequenz davon müssen der Vektor und der Einsektor zueinander **orthogonal** sein.

Äußeres Produkt

Das *äußere Produkt* oder *Vektorprodukt* oder *Exprodukt* ist das Produkt zweier Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , dessen Ergebnis wiederum ein Vektor ist. Als Multiplikationszeichen wird das Zeichen \times verwendet. Ganz allgemein gilt, dass der Ergebnisvektor von $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ sowohl zu \vec{r}_1 als auch zu \vec{r}_2 *orthogonal* ist. Konkret erhält man die Richtung des Ergebnisvektors, wenn man \vec{r}_1 über den kleineren der beiden Winkel in \vec{r}_2 dreht, wie das in Bild 1.11 dargestellt ist. Wenn die Finger der rechten Hand die Drehrichtung angeben, so zeigt der Daumen in Richtung des Ergebnisvektors.

Die Berechnungsvorschrift für das äußere Produkt lautet:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & x_1 & x_2 \\ \vec{e}_y & y_1 & y_2 \\ \vec{e}_z & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 \\ z_1 \cdot x_2 - z_2 \cdot x_1 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

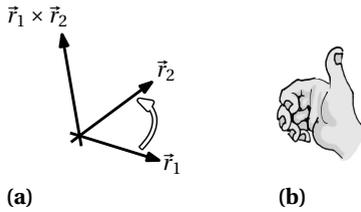


Bild 1.11 Äußeres Produkt: (a) Dreht man \vec{r}_1 über den kleineren der beiden Winkel in \vec{r}_2 in Richtung (b) der Finger der rechten Hand, dann zeigt der Daumen in Richtung des Ergebnisvektors $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$



Das **Vektorprodukt** wird **aus** der **Determinante** einer Matrix berechnet, in deren drei Spalten der Reihe nach

- die drei Einsektoren in der Reihenfolge \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z ,
- der Vektor \vec{r}_1 und danach
- der Vektor \vec{r}_2 stehen.

Den Betrag eines Vektorprodukts können wir alternativ auch aus den Längen und Winkeln der beiden Vektoren berechnen:⁵

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot |\sin(\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2))| \quad (1.49)$$

Dieser Betrag hat auch eine grafische Interpretation in der Mathematik: Er ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 aufgespannten Parallelogramms, das in Bild 1.10d für zwei ebene Vektoren dargestellt ist. Wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren gleich 90° ist, dann wird aus dem Parallelogramm ein Rechteck mit der Fläche $|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.

Das äußere Produkt ist nicht kommutativ. Stattdessen gilt allgemein:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_2 \times \vec{r}_1 \quad (1.50)$$



Das **äußere Produkt** $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ hat als Ergebnis eine **vektorielle Größe** und folgende Eigenschaften:

- Das äußere Produkt zweier **paralleler Vektoren** ist stets der **Nullvektor**.
- Der Betrag des äußeren Produkts zweier Vektoren, die zueinander **orthogonal** sind, beträgt $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.

Wenn die Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 beispielsweise in der x - y -Ebene liegen und damit keine z -Koordinate enthalten, dann weist das äußere Produkt ausschließlich eine z -Koordinate auf:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \cdot \vec{e}_z \quad (1.51)$$

⁵ Kennen wir umgekehrt die Beträge des Ergebnisvektors sowie der Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , so können wir daraus den Winkel zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 bestimmen. Dies funktioniert ganz allgemein auch für dreidimensionale Vektoren, nicht nur für zweidimensionale Vektoren in der x - y -Ebene.



Ob wir das innere oder das äußere **Produkt** auf zwei Vektoren anwenden müssen, ist eine Folge der zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhänge. Anders gesagt: die **Naturgesetze** geben uns vor, welches Produkt wir in welchem Zusammenhang anzuwenden haben. Einen unmittelbaren Hinweis gibt dabei immer, ob das behandelte Ergebnis eine skalare Größe oder ein Vektor ist.

Äußeres Produkt der Einsvektoren

Wenn wir das äußere Produkt zweier Einsvektoren aus Gl. (1.40) unter Berücksichtigung von Bild 1.11 bilden, dann erhalten wir:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \qquad (1.52)$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x \qquad (1.53)$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \qquad (1.54)$$



Unter der **zyklischen Abfolge** der Indizes x, y, z verstehen wir:

- Index y folgt auf Index x .
- Index z folgt auf Index y .
- Index x folgt auf Index z .

Das äußere Produkt zweier unterschiedlicher Einsvektoren, deren Indizes zyklisch nacheinander abfolgen (z. B. \vec{e}_y folgt auf \vec{e}_x in $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$), ergibt den dritten Einsvektor mit positivem Vorzeichen. Folgen die Indizes hingegen nicht zyklisch aufeinander (z. B. \vec{e}_x folgt auf \vec{e}_y in $\vec{e}_y \times \vec{e}_x$), so ist das Vorzeichen des Ergebnisvektors negativ.

Division

Die Division zweier Vektoren ist nicht definiert.

Relation

Zwei Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 sind dann gleich, wenn jeweils ihre x -, y - und z -Koordinaten gleich sind. Ein Vektor \vec{r}_1 kann aber nicht größer oder kleiner als ein Vektor \vec{r}_2 sein. Die Relationen größer oder kleiner können wir nur auf skalare Kenngrößen von Vektoren – wie etwa deren Länge oder Koordinaten – anwenden.

1.3 Komplexe Rechnung

Das Quadrat der imaginären Einheit j ergibt:

$$j^2 = -1 \qquad (1.55)$$

Da keine reelle Zahl existiert, deren Quadrat -1 ergibt, eröffnet die imaginäre Einheit einen neuen Zahlenraum: die komplexen Zahlen der Zahlenmenge \mathbb{C} .

Kartesische Darstellung

Eine beliebige komplexe Zahl $\underline{z}_1 \in \mathbb{C}$ weist den Realteil x_1 und den Imaginärteil y_1 auf:

$$\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1 \quad (1.56)$$

Die komplexe Zahl verstehen wir mit einem Unterstrich, um sie von einer reellen Zahl zu unterscheiden. Dabei ist zu beachten, dass sowohl der Real- als auch der Imaginärteil jeweils eine reelle Zahl sind. Der Real- und Imaginärteil werden in diesem Zusammenhang über die Funktionen Re und Im ermittelt:

$$\text{Re}(\underline{z}_1) = x_1 \qquad \text{Im}(\underline{z}_1) = y_1 \quad (1.57)$$

Eine komplexe Zahl \underline{z}_1 ist in Bild 1.12a in der komplexen Ebene dargestellt und mit einem Punkt gekennzeichnet. In ähnlicher Weise stellen wir in Bild 1.8a einen ebenen Ortsvektor im x - y -Koordinatensystem dar. Dafür zeichnen wir einen Pfeil vom Ursprung zum eingezeichneten Punkt. Der Pfeil repräsentiert die komplexe Zahl \underline{z}_1 . Komplexe Pfeile darf man in der Wechselstromtechnik zur Veranschaulichung von grafischen Zusammenhängen auch parallel verschieben. Der in Bild 1.12b dargestellte Pfeil repräsentiert daher dieselbe komplexe Zahl \underline{z}_1 wie in Bild 1.12a, da er dieselbe Länge, d. h. denselben Betrag, und dieselbe Richtung aufweist.

Betrag

Den Betrag einer komplexen Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ können wir gemäß Bild 1.12a nach dem Satz von Pythagoras bestimmen:

$$\text{abs}(z_1) = |\underline{z}_1| = z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.58)$$

Der Betrag des Vektors wird entweder durch zwei Betragsstriche um die komplexe Zahl \underline{z}_1 , durch die Funktion abs oder durch das Fortlassen des komplexen Unterstrichs gekennzeichnet. Daher ist es fortan wichtig, komplexe Zahlen konsequent mit einem komplexen Unterstrich zu versehen, um eine Verwechslung mit den zugehörigen Beträgen zu vermeiden.

Winkel

Den Winkel φ_1 der komplexen Zahl \underline{z}_1 in Bild 1.12a bestimmen wir mit der Funktion arg :

$$\text{arg}(\underline{z}_1) = \varphi_1 \quad (1.59)$$

Polar- und Exponentialdarstellung

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ kann statt mit Real- und Imaginärteil auch über ihren Betrag und Winkel repräsentiert werden. Dafür gibt es die *Polarschreibweise*:

$$\underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \angle(\varphi_1) \quad (1.60)$$

Dabei entspricht der Ausdruck $\angle(\varphi_1)$ dem Term $(\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1))$ und damit einer Verdrehung um den Winkel φ_1 . Alternativ können wir die *Exponentialschreibweise* anwenden, wobei $e \approx 2.718$ die Eulersche Zahl ist:

$$\underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \cdot e^{j \cdot \varphi_1} = |\underline{z}_1| \cdot (\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1)) \quad (1.61)$$

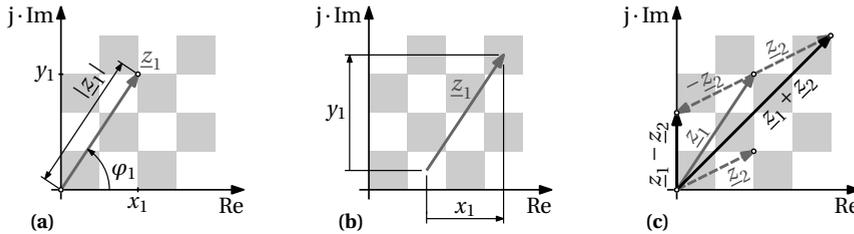


Bild 1.12 (a) Komplexe Zahl \underline{z}_1 in der komplexen Ebene, (b) Parallelverschiebung des eine komplexe Zahl repräsentierenden Pfeils, (c) Addition und Subtraktion der komplexen Zahlen \underline{z}_1 und \underline{z}_2

Besonders bemerkenswert ist dabei folgender Zusammenhang:

$$e^{j\varphi_1} = \cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1) \quad (1.62)$$

Zusätzlich gilt dabei $|e^{j\varphi_1}| = \cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1) = 1$. Aus dem Betrag $|\underline{z}_1|$ und dem Phasenwinkel φ_1 können gemäß Gl. (1.57) der Real- und Imaginärteil bestimmt werden:

$$\operatorname{Re}(\underline{z}_1) = x_1 = |\underline{z}_1| \cdot \cos(\varphi_1) \quad \operatorname{Im}(\underline{z}_1) = y_1 = |\underline{z}_1| \cdot \sin(\varphi_1) \quad (1.63)$$

Addition

Die Summe von $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ berechnen wir gemäß:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2) \quad (1.64)$$

Der Realteil der Summe ist die Summe der Realteile, der Imaginärteil der Summe berechnet sich aus der Summe der Imaginärteile. Grafisch setzen wir in Bild 1.12c bei der Summenbildung den Anfang eines der beiden Pfeile an die Pfeilspitze des anderen Pfeils.

Subtraktion

Die Differenz aus $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ berechnen wir gemäß:

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z}_1 + (-\underline{z}_2) = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2) \quad (1.65)$$

Bei der grafischen Subtraktion in Bild 1.12c addiert man die Pfeile von \underline{z}_1 und $-\underline{z}_2$.

Multiplikation

Das Produkt aus $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ lässt sich in kartesischer Form durch Ausmultiplizieren bestimmen:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad (1.66)$$

Verwenden wir alternativ die Polardarstellung $\underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \angle(\varphi_1)$ und $\underline{z}_2 = |\underline{z}_2| \angle(\varphi_2)$, so ergibt sich bei der Multiplikation:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| \angle(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (1.67)$$

Der Betrag des Produkts berechnet sich aus dem Produkt der einzelnen Beträge, der Winkel des Produkts berechnet sich aus der Summe der einzelnen Winkel.

Potenzen der imaginären Einheit

Zusätzlich zur Definition

$$j^0 = 1 \angle (0^\circ) = 1 \quad (1.68)$$

erhalten wir unter Berücksichtigung von $j^2 = -1$:

$$j = j^1 = 1 \angle (90^\circ) \quad \frac{1}{j} = j^{-1} = 1 \angle (-90^\circ) = -j \quad (1.69)$$

$$j^2 = 1 \angle (180^\circ) = -1 \quad \frac{1}{j^2} = j^{-2} = 1 \angle (-180^\circ) = -1 \quad (1.70)$$

$$j^3 = 1 \angle (270^\circ) = -j \quad \frac{1}{j^3} = j^{-3} = 1 \angle (-270^\circ) = j \quad (1.71)$$

$$j^4 = 1 \angle (0^\circ) = 1 \quad \frac{1}{j^4} = j^{-4} = 1 \angle (0^\circ) = 1 \quad (1.72)$$

Die grafische Darstellung dieser Potenzen ist in Bild 1.13a veranschaulicht.



Sonderfälle von Multiplikationen sind in Bild 1.13b dargestellt:

- **Multipliziert** man die komplexe Zahl \underline{z}_2 **mit j**, so ergibt das Produkt eine komplexe Zahl mit demselben Betrag, aber **um 90° im mathematisch positiven Sinn verdreht**:

$$j \cdot \underline{z}_2 = |\underline{z}_2| \cdot \angle (\varphi_2 + 90^\circ) \quad (1.73)$$

Eine Multiplikation mit j dreht eine komplexe Zahl um 90° im mathematisch positiven Sinn.

- **Dividiert** man die komplexe Zahl \underline{z}_2 **durch j** (bzw. multipliziert sie mit $j^{-1} = -j$), so ergibt das Produkt eine komplexe Zahl mit demselben Betrag, aber **um 90° gegen den mathematisch positiven Sinn verdreht**:

$$\frac{\underline{z}_2}{j} = -j \cdot \underline{z}_2 = |\underline{z}_2| \cdot \angle (\varphi_2 - 90^\circ) \quad (1.74)$$

Komplexe Konjugation

Bei der komplexen Konjugation von $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2 = |\underline{z}_2| \angle \varphi_2$ ändern wir das Vorzeichen des Imaginärteils bzw. des Winkels, wie in Bild 1.13c dargestellt. Wir kennzeichnen die *konjugiert komplexe* Zahl mit einem hochgestellten *:

$$\underline{z}_2^* = x_2 - j \cdot y_2 = |\underline{z}_2| \angle -\varphi_2 \quad (1.75)$$



Wenn wir die komplexe Zahl \underline{z}_2 mit ihrer konjugiert komplexen Zahl \underline{z}_2^* multiplizieren, dann erhalten wir das **Quadrat des Betrags** mit Winkel 0°:

$$\underline{z}_2 \cdot \underline{z}_2^* = x_2^2 + y_2^2 = |\underline{z}_2|^2 \quad (1.76)$$

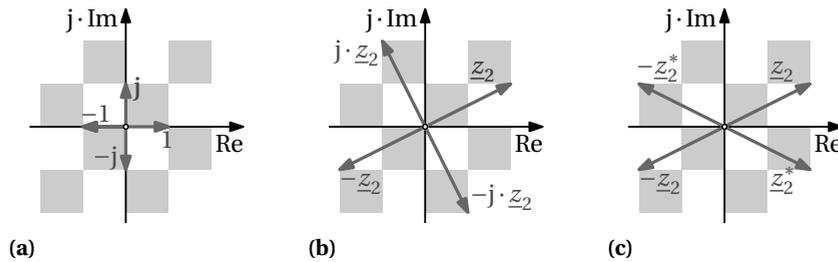


Bild 1.13 (a) Potenzen der imaginären Einheit, (b) komplexe Zahl z_2 multipliziert mit Potenzen von j , (c) Gegenzahl $-z_2$ und konjugiert komplexe Zahl z_2^*

Division

Der Real- und Imaginärteil des Quotienten zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ lässt sich in kartesischer Form durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner und Ausmultiplizieren bestimmen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \underbrace{\frac{z_2^*}{z_2^*}}_1 = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \cdot \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.77)$$

Die Verwendung der polaren Schreibweise $z_1 = |z_1| \angle (\varphi_1)$ und $z_2 = |z_2| \angle (\varphi_2)$ vereinfacht die Berechnung des komplexen Quotienten:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \angle (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.78)$$

Der Betrag des Quotienten berechnet sich aus dem Quotienten der einzelnen Beträge, der Winkel des Quotienten berechnet sich aus der Differenz der einzelnen Winkel.

1.4 Bezugspfeile

Welche Gleichungen in Abhängigkeit der verwendeten Spannungs- und Strombezugspfeile in einem Ersatzschaltbild gelten, soll nachfolgend für Gleichstrom systematisch behandelt werden. Wir beziehen uns dafür ausschließlich auf Tabelle 1.2:

Spannungs- und Strombezugspfeile. In einem elektrischen Ersatzschaltbild dargestellte Spannungs- und Strompfeile sind immer Bezugspfeile und können daher frei gewählt werden. So sagt ein dargestellter Spannungs- oder Strombezugspfeil nichts darüber aus, ob der zugehörige Strom oder die zugehörige Spannung positiv oder negativ ist. Das jeweils korrekte Vorzeichen ergibt sich erst aus der mathematischen Analyse des gesamten Ersatzschaltbilds.

Richtungen der Bezugspfeile. In den Fällen ① und ③ weisen die Spannungs- und Strombezugspfeile in die gleiche Richtung (von ① nach ②). Die Spannungs- und der Strombezugspfeile zeigen in den Fällen ② und ④ in jeweils entgegengesetzte Richtungen.

Ohmsches Gesetz. Das Ohmsche Gesetz ist mit positivem Vorzeichen anzuwenden, wenn der Spannungs- und der Strombezugspfeil in die gleiche Richtung zeigen (Fall ①). Zeigen die beiden Bezugspfeile in entgegengesetzte Richtungen (Fall ②), so muss ein negatives Vorzeichen gewählt werden:

$$U = R \cdot I \quad \text{für den Fall ①} \quad (1.79)$$

$$U = -R \cdot I \quad \text{für den Fall ②} \quad (1.80)$$

Vorzeichen der Leistung. Wir wählen die Vorzeichen aller Leistungen stets so, dass elektrisch verbrauchte Leistungen positiv und erzeugte Leistungen negativ sind.

- Die Ohmschen Widerstände in den Fällen ① und ② sind eindeutig elektrische »Verbraucher«. Ihre elektrisch aufgenommenen Leistungen sind daher in jedem Fall positiv, d. h. $P > 0W$. Genau genommen wandeln die Verbraucher elektrische aufgenommene Energie in eine andere Energieform, beispielsweise Wärme, um.
- Bei den elektrischen Quellen der Fälle ③ und ④ kann ohne genauere Analyse nicht festgestellt werden, ob sie als Verbraucher oder Erzeuger arbeiten.
- Wir sprechen von einem elektrischen »Erzeuger« wenn eine nicht-elektrische Energieform (z. B. chemische oder mechanische Energie) in elektrische Energie umgewandelt wird. Dabei wird elektrische Leistung abgegeben, gekennzeichnet durch die Relation $P < 0W$.

Die Vorzeichen in den Berechnungsgleichungen der elektrischen Leistung hängen davon ab, wie die Spannungs- und Strompfeile zueinander gerichtet sind:

$$P = U \cdot I \quad \text{für die Fälle ① und ③} \quad (1.81)$$

$$P = -U \cdot I \quad \text{für die Fälle ② und ④} \quad (1.82)$$



Unabhängig von allen eingezeichneten Bezugspfeilen gilt für die **elektrische Leistung** einheitlich folgende **Vorzeichenregel**:

Elektrisch verbrauchte Leistung wird positiv gezählt!



Elektrisch erzeugte Leistung wird negativ gezählt!

Spannungs- und Stromquellen. Was für die dargestellten Spannungsquellen in den Fällen ③ und ④ gilt, ist ebenso für Stromquellen in gleicher Weise gültig, nur dass der Strom anstelle der Spannung konstant ist.

Klemmenbezeichnung. Alle Aussagen gelten unverändert, wenn sowohl der Spannungs- als auch der Strombezugspfeil umgedreht werden – was gleichbedeutend mit dem Vertauschen der Anschlussbeschriftungen ① und ② ist.

Sinngemäß können diese Regeln dieses Abschnitts auf komplexe Wechsel- und Drehstromsysteme übertragen werden.

Tabelle 1.2 Bezugspfeile für Verbraucher und Erzeuger

	Verbraucher		Erzeuger oder Verbraucher	
Fall	①	②	③	④
Bezugspfeile				
Eigenschaft	$U = R \cdot I$	$U = -R \cdot I$	$U = \text{konstant}$	$U = \text{konstant}$
Leistung	$P = U \cdot I$	$P = -U \cdot I$	$P = U \cdot I$	$P = -U \cdot I$

1.5 Einphasenwechselstrom

In einem einphasigen Wechselstromsystem werden rein sinusförmige Zeitverläufe von Spannungen, Strömen, ebenso wie die Impedanzen über komplexe physikalische Größen repräsentiert. Wir beginnen bei den Spannungen und Strömen. Dafür schreiben wir repräsentativ die wesentlichen Zusammenhänge in Gleichungsform für Ströme, was als Konsequenz davon in gleicher Weise für Spannungen gilt:

$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_I) \quad (1.83)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \text{Re}(I \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_I)}) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}(\underbrace{I \cdot e^{j\varphi_I}}_{\substack{\text{rotierender Zeiger} \\ \underline{I}}} \cdot e^{j\omega \cdot t}) = \sqrt{2} \cdot \text{Re}(\underline{I} \cdot e^{j\omega \cdot t}) \quad (1.84)$$

In dieser Gleichung repräsentiert i den Zeitverlauf des Stroms und I dessen Effektivwert. Die Variable t ist die Zeit und

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (1.85)$$

ist die Kreisfrequenz und f die Frequenz. Bei rein sinusförmigen Größen beträgt der Scheitelwert – der Maximalwert – des Stroms $\sqrt{2} \cdot I$.

1.5.1 Komplexe Effektivwert-Zeitzeiger



Wenn wir mit komplexer Wechselstromrechnung arbeiten, dann verwenden wir in der Regel komplexe **Effektivwert-Zeitzeiger** oder kurz **Effektivwertzeiger**:

$$\underline{I} = I \angle(\varphi_I) = I \cdot e^{j\varphi_I} \quad (1.86)$$

$$\underline{U} = U \angle(\varphi_U) = U \cdot e^{j\varphi_U} \quad (1.87)$$

Die Beträge der komplexen Effektivwertzeiger sind die Effektivwerte I und U , und die zugehörigen Winkel φ_I und φ_U werden als *Phasenwinkel* oder kurz als *Winkel* bezeichnet.

Die Effektivwertzeiger \underline{I} und \underline{U} sind konstante, zeitunabhängige Größen. Multipliziert mit $e^{j\omega \cdot t}$ ergeben sich jeweils rotierende Zeiger, wie das in Gl. (1.84) gekennzeichnet ist.