

Fritz Klocke  
Christian Brecher

# Zahnrad- und Getriebetechnik

Auslegung – Herstellung – Untersuchung – Simulation



2., überarbeitete Auflage

HANSER





**bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Fritz Klocke  
Christian Brecher

# Zahnrad- und Getriebe- technik

Auslegung – Herstellung – Untersuchung –  
Simulation

2., überarbeitete Auflage

HANSER

Über die Autoren:

*Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Dr. h.c. Fritz Klocke* war von 1995 bis 2018 Leiter des Fraunhofer-Instituts für Produktionstechnologie (IPT) sowie Direktoriumsmitglied des Werkzeugmaschinenlabors WZL der RWTH Aachen, an dem er auch den Lehrstuhl für Technologie der Fertigungsverfahren innehatte.

*Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher* ist seit 2004 Inhaber des Lehrstuhls für Werkzeugmaschinen und Direktoriumsmitglied des Werkzeugmaschinenlabors WZL der RWTH Aachen. Seit 2018 ist er Leiter des Fraunhofer-Instituts für Produktionstechnologie (IPT).



Print-ISBN: 978-3-446-46975-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-46976-1

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2024 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dr. Philippa Söldenwagner-Koch

Herstellung: Melanie Zinsler

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Fritz Klocke und Christian Brecher

Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten

Druck und Bindung: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

# Inhalt

<b>Vorwort</b> .....	<b>XI</b>
<b>1 Einführung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Geschichte des Zahnrads .....	2
1.2 Einteilung der Getriebetechnik .....	5
1.3 Gestufte Zahnradgetriebe .....	7
<b>2 Grundlagen der Verzahnung</b> .....	<b>11</b>
2.1 Das Verzahnungsgesetz .....	12
2.2 Stirnradverzahnungen .....	14
2.2.1 Arten der Stirnradverzahnungen .....	14
2.2.1.1 Zykloidenverzahnungen .....	15
2.2.1.2 Triebstockverzahnungen .....	16
2.2.1.3 Kreisbogenverzahnungen .....	17
2.2.1.4 Wildhaber-Novikov-Verzahnungen .....	17
2.2.1.5 Evolventenverzahnungen .....	18
2.2.2 Schrägverzahnungen .....	19
2.2.3 Erzeugungsprinzip von Evolventenverzahnungen .....	21
2.2.3.1 Die Evolventenfunktion .....	21
2.2.3.2 Das theoretische Herstellprinzip des Evolventenprofils ..	22
2.2.3.3 Das Bezugsprofil .....	23
2.2.3.4 Das praktische Herstellprinzip des Evolventenprofils ....	25
2.2.3.5 Räumliche Erzeugung des Flankenprofils .....	26
2.2.4 Geometrische Größen der Evolventenverzahnung .....	27
2.2.4.1 Modul und Teilung .....	27
2.2.4.2 Zähnezahzahl und Übersetzungsverhältnis .....	29

2.2.4.3	Eingriffswinkel und Überdeckungsgrad	30
2.2.4.4	Durchmesser	33
2.2.4.5	Profilverschiebung und Achsabstand	35
2.2.4.6	Lückenweiten, Zahndicken und Zahnweiten	40
2.2.5	Kontaktbedingungen zylindrischer Stirnräder	45
2.3	Kegelradgetriebe	46
2.3.1	Zahnprofile und Erzeugungsprinzip	47
2.3.2	Flankenlinie	51
2.3.3	Geometrische Größen	52
2.3.3.1	Mittlerer Modul und Spiralwinkel	54
2.3.3.2	Eingriffswinkel und Profilüberdeckung	55
2.3.3.3	Zahnhöhenverlauf, Zahndicke und Zahnweite	56
2.3.3.4	Profilverschiebung	58
2.3.3.5	Besonderheiten der Hypoidverzahnung	59
2.3.4	Kontaktbedingungen von Kegelradverzahnungen	61
2.4	Beveloidverzahnungen	61
2.4.1	Erzeugungsprinzip von Beveloidverzahnungen	63
2.4.2	Geometrische Größen von Beveloids	65
2.4.2.1	Konuswinkel	65
2.4.2.2	Eingriffs-, Schrägungswinkel und Überdeckungsgrad	66
2.4.3	Kontaktbedingungen von Beveloidverzahnungen	69
<b>3</b>	<b>Getriebeentwicklung</b>	<b>79</b>
3.1	Vorauslegung von Zahnradgetrieben	80
3.1.1	Konzeptionierung von Zahnradgetrieben	83
3.1.2	Auslegungsziele von Zahnradgetrieben	90
3.1.3	Vordimensionierung von Stirnradstufen	92
3.1.4	Vordimensionierung von Planetenstufen	102
3.2	Optimierung der Makrogeometrie	108
3.2.1	Akustische Optimierung durch Hochverzahnungen	110
3.2.2	Tragfähigkeitsorientierte Auslegung asymmetrischer Verzahnungen	116
3.2.3	Auslegung wirkungsgradoptimierter Low-Loss-Verzahnungen	120
3.2.4	Rechnergestützte Makrogeometrieoptimierung	122

3.3	Auslegung der Verzahnungsmikrogeometrie . . . . .	124
3.3.1	Arten von Korrekturen . . . . .	126
3.3.2	Topografieseparation durch Polynome . . . . .	130
3.3.3	Auslegung funktionaler Modifikationen . . . . .	131
3.3.3.1	Variantenrechnung . . . . .	131
3.3.3.2	Berücksichtigung verfahrensbedingter Verschränkungen in der Mikrogeometrieauslegung . . . . .	133
3.3.3.3	Toleranzfeldbasierte Mikrogeometrieoptimierung . . . . .	134
3.3.3.4	Anwendungsbeispiel für toleranzfeldbasierte Mikrogeometrieauslegung . . . . .	137
3.3.4	Inverse Ermittlung optimaler Sollkorrekturen . . . . .	138
3.3.5	FE-basierte Auslegung von Kopfrücknahmen . . . . .	140
3.4	Auslegung von Beveloidverzahnungen . . . . .	144
3.5	Auslegung von Kegelradverzahnungen . . . . .	149
3.5.1	Bestimmung der Tragfähigkeit . . . . .	151
3.5.2	Auslegung der Mikrogeometrie . . . . .	153
<b>4</b>	<b>Herstellverfahren . . . . .</b>	<b>167</b>
4.1	Prozessketten und Wärmebehandlung . . . . .	170
4.1.1	Prozessketten der Zahnradfertigung . . . . .	170
4.1.2	Übliche Zahnradwerkstoffe . . . . .	172
4.1.3	Wärmebehandlung von Zahnradern . . . . .	173
4.1.3.1	Gefügebestandteile von Stahlwerkstoffen . . . . .	173
4.1.3.2	Glühverfahren . . . . .	175
4.1.3.3	Härten, Anlassen und Vergüten . . . . .	176
4.2	Vorverzahnen . . . . .	185
4.2.1	Anforderungen an das Vorverzahnen . . . . .	185
4.2.2	Schneidstoffe und Beschichtungen . . . . .	188
4.2.3	Wälzverfahren . . . . .	197
4.2.3.1	Wälzhobeln . . . . .	198
4.2.3.2	Wälzfräsen . . . . .	199
4.2.3.3	Wälzstoßen . . . . .	212
4.2.3.4	Wälzschälen . . . . .	216

4.2.4	Formschneidverfahren	219
4.2.4.1	Formfräsen	219
4.2.4.2	Räumen	223
4.2.5	Verfahrensvergleich	226
4.2.6	Entgraten und Anfasen	227
4.3	Weichfeinbearbeitung mit definierter Schneide	229
4.3.1	Anforderungen an die Weichfeinbearbeitung	230
4.3.2	Zahnradschaben	231
4.3.3	Fertigwälzfräsen	236
4.4	Hartfeinbearbeitung	240
4.4.1	Hartfeinbearbeitung mit geometrisch bestimmter Schneide	240
4.4.1.1	Schälwälzfräsen	240
4.4.1.2	Schälwälzstoßen	242
4.4.1.3	Hartwälzschälen	242
4.4.2	Hartfeinbearbeitung mit geometrisch unbestimmten Schneiden	244
4.4.2.1	Der Abrichtprozess	244
4.4.2.2	Aufbau und Zusammensetzung von Werkzeugen mit geometrisch unbestimmten Schneiden	250
4.4.2.3	Verfahren zur Hartfeinbearbeitung mit geometrisch unbestimmten Schneiden	256
4.5	Erzeugung von Zahnflankenmodifikationen	277
4.5.1	Erzeugung von Profilmodifikationen	278
4.5.2	Erzeugung von Flankenmodifikationen	279
4.5.3	Entstehung von verfahrensbedingten Verschränkungen	280
4.5.3.1	Verfahrensbedingte Verschränkung beim Profilschleifen	283
4.5.3.2	Verfahrensbedingte Verschränkung beim kontinuierlichen Wälzschleifen	284
4.6	Alternative Fertigungsverfahren	285
4.6.1	Endkonturnahe Fertigungsverfahren	286
4.6.1.1	Querwalzen von Verzahnungen	286
4.6.1.2	Taumelpressen	289
4.6.1.3	Pulvermetallurgische Herstellung von Zahnrädern	290
4.6.1.4	Additive Herstellung von Zahnrädern	295
4.6.1.5	Feinschneiden	297

4.6.1.6	Verfahren des Massivumformens zur Herstellung von Verzahnungen .....	301
4.6.2	5-Achs-Fräsen von Verzahnungen .....	304
4.7	Qualitätsprüfung und Analyse fertigungsbedingter Produkteigenschaften .....	309
4.7.1	Bauteilprüfung .....	309
4.7.2	Geometrische Prüfung von Verzahnungen .....	310
4.7.2.1	Erfassung der makrogeometrischen Verzahnungs- abweichungen .....	310
4.7.2.2	Erfassung der mikrogeometrischen Abweichung .....	328
4.7.3	Metallografische Analyse von Verzahnungen .....	334
4.7.3.1	Zerstörungsfreie Prüfverfahren .....	335
4.7.3.2	Zerstörende Prüfverfahren .....	346
4.8	Kegelradherstellung .....	358
4.8.1	Diskontinuierlich teilendes Kegelradfräsen .....	359
4.8.2	Kegelradschleifen .....	361
4.8.3	Kontinuierlich teilendes Kegelradfräsen .....	362
4.8.4	Kegelradlappen .....	363
4.8.5	Optimierungsansätze für die Werkzeug- und Prozessauslegung ..	365
4.8.6	Kegelradverzahnmaschinen .....	366
4.8.6.1	Mechanische Kegelradfräsmaschinen .....	366
4.8.6.2	6-Achs-Universal-Fräsmaschinen .....	368
4.8.7	Der Closed Loop .....	370
4.8.8	Analogieversuche für die Kegelradfertigung .....	371
<b>5</b>	<b>Untersuchung von Zahnradgetrieben .....</b>	<b>397</b>
5.1	Beanspruchungs- und Schadensformen an Zahnrädern .....	398
5.1.1	Beanspruchung des Zahnfußes .....	399
5.1.2	Beanspruchung der Zahnflanke .....	401
5.1.2.1	Pressung im Zahnflankenkontakt .....	402
5.1.2.2	Beanspruchung in Folge der Kinematik .....	404
5.1.3	Zahnflankenschäden .....	407
5.1.3.1	Graufleckigkeit .....	409
5.1.3.2	Grübchenbildung .....	411

5.1.3.3	Fressen	415
5.1.3.4	Abrasivverschleiß	416
5.1.3.5	Zahnflankenbruch	417
5.1.4	Zahnfußschäden	419
5.1.4.1	Gewaltbruch	419
5.1.4.2	Dauerbruch	420
5.2	Einflussgrößen auf die Beanspruchbarkeit von Zahnrädern	422
5.2.1	Werkstoff	423
5.2.2	Schmierstoff	426
5.2.3	Oberflächengestalt	428
5.2.4	Randzoneneigenschaften	434
5.3	Untersuchung der Zahnradtragfähigkeit	436
5.3.1	Prüfstandkonzepte - Laufversuch	438
5.3.1.1	Zwei-Wellen-Verspannungsprüfstände	439
5.3.1.2	Drei-Wellen-Verspannungsprüfstände	441
5.3.1.3	Hochdrehzahl-Verspannungsprüfstände	443
5.3.1.4	Standardisierte Prüfverzahnungen für Tragfähigkeitsuntersuchungen	444
5.3.2	Prüfstandkonzepte - Analogieversuch	447
5.3.2.1	Zahnfußtragfähigkeit	448
5.3.2.2	Zahnflankentragfähigkeit	452
5.3.3	Schadenskriterien und Vorgehensweisen	458
5.3.4	Auswertemethoden für Zahnradtragfähigkeitsuntersuchungen	461
5.3.4.1	Statistische Grundlagen zur Zahnradtragfähigkeitsauswertung	463
5.3.4.2	Wöhlerdiagramm: Auswertung der Dauerfestigkeit	465
5.3.4.3	Wöhlerdiagramm: Auswertung der Zeitfestigkeit	470
5.3.4.4	Quantifizierung der Schmierstofftragfähigkeit	473
5.3.5	Übertragbarkeit zwischen Lauf- und Analogieversuch	480
5.3.5.1	Zahnfußtragfähigkeit	480
5.3.5.2	Zahnflankentragfähigkeit	484
5.4	Grundlagen der Getriebeakustik	488
5.4.1	Bewertungskenngrößen	489
5.4.1.1	Spektrale Zusammensetzung des Schalls	489

5.4.1.2	Kennwerte der Technischen Akustik . . . . .	491
5.4.1.3	Zahneingriffsfrequenz und Ordnungsspektrum . . . . .	493
5.4.1.4	Spektralanalyse von Getriebegeräuschen . . . . .	494
5.4.2	Getriebegeräusche . . . . .	496
5.4.2.1	Objektive Einteilung von Getriebegeräuschen . . . . .	497
5.4.2.2	Subjektive Bewertung . . . . .	499
5.4.3	Anregungsmechanismen im Zahneingriff . . . . .	507
5.4.3.1	Parameteranregung . . . . .	509
5.4.3.2	Stoßanregung . . . . .	511
5.4.3.3	Weganregung . . . . .	512
5.4.3.4	Einfluss von geometrischen Abweichungen . . . . .	513
5.4.4	Maßnahmen zur Reduzierung der Geräuschabstrahlung . . . . .	518
5.5	Untersuchung der Getriebeakustik . . . . .	523
5.5.1	Untersuchungsmethoden . . . . .	523
5.5.1.1	Einflankenwälzprüfung . . . . .	523
5.5.1.2	Zweiflankenwälzprüfung . . . . .	527
5.5.1.3	Drehbeschleunigungsmessung . . . . .	528
5.5.1.4	Körperschallmessung . . . . .	536
5.5.1.5	Luftschallmessung . . . . .	541
5.5.1.6	Sondermessverfahren . . . . .	547
5.5.1.7	Alternative Methoden zur Messung der Geräuschemission . . . . .	556
5.5.2	Prüfstandkonzepte . . . . .	560
5.5.2.1	Radsatzuntersuchung . . . . .	560
5.5.2.2	Gesamtgetriebeuntersuchung . . . . .	567
5.6	Wirkungsgradbestimmung von Getrieben . . . . .	570
5.6.1	Verlustleistungsmessung . . . . .	572
5.6.2	Leistungsdifferenzmessung . . . . .	573
5.6.3	Reibkraftmessung im Analogieversuch . . . . .	576
<b>6</b>	<b>Simulationstechnik . . . . .</b>	<b>597</b>
6.1	Vorgehensweise zur Modellbildung . . . . .	597
6.2	Fertigungssimulation . . . . .	600
6.2.1	Grundlagen von Fertigungssimulationen . . . . .	600

6.2.1.1	Werkzeug .....	602
6.2.1.2	Maschinenkinematik .....	603
6.2.2	Geometrieberechnung .....	606
6.2.3	Simulationsmethoden .....	608
6.2.3.1	Durchdringungsrechnung .....	609
6.2.3.2	FE-Simulation .....	611
6.2.4	Simulationsgestützte Modellierung .....	614
6.2.4.1	Spannungskenngrößen .....	614
6.2.4.2	Modellierung der Zahnspankraft .....	617
6.2.4.3	Modellierung der Spanverformung .....	621
6.2.4.4	Verschleißanalyse für die spanende Fertigung .....	622
6.2.4.5	Bestimmung von charakteristischen Fertigungs- abweichungen .....	627
6.2.4.6	Bezogenes Zeitspannungsvolumen, Kraftberechnung und Energieeinbringung beim kontinuierlichen Wälzschleifen .....	628
6.2.4.7	Digitaler Zwilling in der Zahradfertigung .....	637
6.3	Zahnkontaktanalyse .....	639
6.3.1	FE-basierte Zahnkontaktanalyse .....	641
6.3.1.1	Geometrievorgabe .....	642
6.3.1.2	Kontaktfindung und lastfreie Verzahnungskennwerte ...	643
6.3.1.3	FE-Strukturgenerierung .....	644
6.3.1.4	Verschiebungseinflusszahlen .....	644
6.3.1.5	Mathematisches Federmodell .....	646
6.3.1.6	Lastverteilung und Kennwerte unter Last .....	649
6.3.2	Auslegung mit der Zahnkontaktanalyse am Beispiel der Zahnfußoptimierung .....	652
6.3.3	Mikrogeometrische Kontaktanalyse mit realen Oberflächenstrukturen .....	655
6.4	Höherwertige Berechnungsverfahren für die Zahradtragfähigkeit ...	658
6.4.1	Methode zur Berechnung der lokalen Zahnfußtragfähigkeit .....	661
6.4.1.1	Vergleichsspannung und Überlebens- wahrscheinlichkeit für den Zahnfuß .....	662
6.4.1.2	Erweiterung der Methode um eine Fehlstellenanalyse ...	666

6.4.1.3	Validierung und Anwendung der Methode .....	668
6.4.1.4	Übertragung der Methode auf die Berechnung der Zahnflankenbruchtragfähigkeit .....	670
6.4.2	Methode zur lokalen Wälzfestigkeitsberechnung .....	672
6.4.2.1	Volumen- und Oberflächenbeanspruchung im Wälzkontakt .....	674
6.4.2.2	Werkstofffestigkeit im Wälzkontakt .....	675
6.4.2.3	Vergleichsspannung und Überlebenswahrscheinlichkeit für den Wälzkontakt .....	677
6.4.2.4	Validierung der lokalen Wälzfestigkeitsberechnung .....	679
6.5	Dynamik des Zahneingriffs .....	681
6.5.1	Mathematische Beschreibung der Anregungsmechanismen im Zahneingriff .....	682
6.5.1.1	Der Einmassenschwinger als vereinfachtes Ersatzmodell von Verzahnung und Zahnradpaar .....	683
6.5.1.2	Parametererregung .....	684
6.5.1.3	Weganregung .....	687
6.5.1.4	Stoßanregung .....	689
6.5.1.5	Reibkraftanregung .....	690
6.5.1.6	Kippmomente .....	691
6.5.1.7	Rechnerische Abbildung des Dämpfungsverhaltens .....	691
6.5.2	Aufbau von Schwingungsmodellen .....	692
6.5.2.1	Ziele und Aufgaben der Modellbildung .....	693
6.5.2.2	Abbildung von Strukturkomponenten .....	694
6.5.2.3	Dynamikmodell eines einstufigen Getriebes .....	697
6.5.3	Entwicklung und Berechnung der mathematischen Ersatzmodelle .....	701
6.5.4	Methoden der Körperschall- und Luftschallberechnung .....	703
6.5.4.1	Zahnkraftpegel .....	704
6.5.4.2	Methoden der Körperschallberechnung .....	705
6.5.4.3	Methoden der Luftschallberechnung .....	706
<b>Index</b> .....		<b>723</b>



Der Verlag und die Autoren haben sich mit der Problematik einer gendergerechten Sprache intensiv beschäftigt. Um eine optimale Lesbarkeit und Verständlichkeit sicherzustellen, wird in diesem Werk auf Gendersternchen und sonstige Varianten verzichtet; diese Entscheidung basiert auf der Empfehlung des Rates für deutsche Rechtschreibung. Grundsätzlich respektieren der Verlag und die Autoren alle Menschen unabhängig von ihrem Geschlecht, ihrer Sexualität, ihrer Hautfarbe, ihrer Herkunft und ihrer nationalen Zugehörigkeit.

# Vorwort

*„Moderne Forschung verlangt die uneingeschränkte  
Bereitschaft zur Teamarbeit.“*

*(Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. h. c. mult. Herwart Opitz)*

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

aufgrund der komplexen Bauteilgeometrie und der hohen Anforderungen an die Genauigkeit stellt das Zahnrad eine besondere Herausforderung im Bereich des Maschinenbaus dar. Darüber hinaus steht das Einsatzverhalten eines Zahnrads in unmittelbarer Abhängigkeit von den umgebenden Getriebekomponenten. Damit verbindet kaum ein Maschinenelement so viele technische Grundlagendisziplinen wie das Zahnrad. Exemplarisch genannt seien: Geometrie, Mechanik, Tribologie, Werkstoffe und deren Behandlung, Akustik, Maschinendynamik und Fertigungstechnik. Die notwendige Kopplung fertigungstechnischer und konstruktiver Fragestellungen verlangt daher eine „uneingeschränkte Bereitschaft zur Teamarbeit“, da die genannten Stellhebel sich einerseits gegenseitig beeinflussen und andererseits einen großen Lösungsraum zur Gestaltung anbieten. Die erforderliche Form der Teamarbeit wird am Werkzeugmaschinenlabor WZL der RWTH Aachen durch die Zusammenarbeit der Lehrstühle für Technologie der Fertigungsverfahren sowie Werkzeugmaschinen in der Abteilung Getriebetechnik realisiert.

Erste Forschungsarbeiten im Bereich der Getriebetechnik wurden am WZL bereits unter Leitung des Institutsgründers Prof. Dr.-Ing. E. h. Adolf Wallichs in den 1930er-Jahren durchgeführt. Das Forschungsgebiet „Zahnrad- und Getriebetechnik“ wurde durch Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. h. c. mult. Herwart Opitz mit der Gründung des WZL-Getriebekreises institutionalisiert. Durch den Bedarf der Industrie an der Erforschung fertigungstechnischer Fragestellungen im Bereich der Getriebetechnik entstand 1956 die erste und eine der größten Industrievereinigungen in diesem Fachgebiet in Deutschland, welche bis heute Bestand hat. In der Nachfolge von Herwart Opitz wurden die Arbeiten zur Zahnrad- und Getriebetechnik über viele Jahrzehnte gemeinsam von Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. mult. Wilfried König (Lehrstuhl für Technologie der Fertigungsverfahren) und Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Dr.-Ing. E. h. Manfred Weck (Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen) maßgeblich geprägt. In der Forschungsgruppe Getriebetechnik werden seitdem in engem Austausch die Themenfelder Getriebeberechnung und Fertigungssimulation, Technologie der Zahnradfertigung sowie Getriebeuntersuchung behandelt.

Noch immer sind Fragen der Zahnrad- und Getriebetechnik hochrelevant. Durch den ganzheitlichen Analyseansatz in der WZL-Getriebeabteilung wird es möglich, die Auslegung, Fertigung und das Funktionsverhalten von Zahnradgetrieben integrativ zu erklären, zu optimieren sowie unter Funktions- und Wirtschaftlichkeitsgesichtspunkten zu bewerten. Mehr als 170 Dissertationen und viele Fachpublikationen sind aus diesen Forschungsarbei-

ten hervorgegangen. Aufbauend auf den Ergebnissen dieser Arbeiten sind wesentliche Teile dieses Fachbuches entstanden. Das vorliegende Fachbuch verfolgt die Zielsetzung, in die Grundlagen der einzelnen Themenfelder einzuleiten und darauf aufbauend aktuelle Entwicklungstrends und Forschungsergebnisse darzustellen. Damit richtet sich dieses Buch sowohl an Studierende zur vorlesungsbegleitenden Lektüre als auch an Techniker und Ingenieure in der Praxis als berufsbegleitendes Nachschlagewerk.

Wir möchten an dieser Stelle allen herzlich danken, die unsere Forschungen gefördert und unterstützt haben. Dazu zählen im Besonderen die Forschungsvereinigungen und Förderträger in Deutschland. Insbesondere genannt seien die AiF, die DFG, die Europäische Union, das BMWK und BMBF, die FVA, die FVV und der VDW, denen die kontinuierliche Erforschung von Fragestellungen im Bereich der Zahnrad- und Getriebetechnik am WZL zu verdanken ist. Ebenso gilt unser Dank den Mitgliedsfirmen des WZL-Getriebekreises. Deren jahrzehntelanges Vertrauen in die Arbeiten der Forschungsgruppe hat die Erforschung vieler praxisrelevanter Fragestellungen erlaubt und zu einem intensiven Erfahrungsaustausch mit der industriellen Praxis geführt. Aus diesem Kreis stammen auch viele der Abbildungen im Buch, wofür wir uns ebenfalls herzlich bedanken.

Das Buch steht in Ergänzung zu den am WZL erarbeiteten mehrbändigen Kompendien „Werkzeugmaschinen“ und „Fertigungsverfahren“, in denen die Themen der Zahnradfertigung, der Verzahnmaschinen und der Anwendung von Zahnradgetrieben in Werkzeugmaschinen in gekürzter Form enthalten sind. Mit dem vorliegenden Buch soll ergänzend zur bestehenden Fachliteratur ein Beitrag zur integrativen Analyse und Bewertung von Fertigungs- und Konstruktionsmethoden bezüglich der Zahnrad- und Getriebetechnik geleistet werden.

Die zweite Auflage umfasst aktualisierte Inhalte zu den Herausforderungen in der Auslegung für die Elektromobilität von Getrieben, zur Digitalisierung und dem digitalen Zwilling sowie zu den Forschungsergebnissen seit der ersten Auflage dieses Buches. Ebenso wurden Fehler behoben und Formulierungen verbessert.

Bei der Erstellung dieses Buches haben uns die wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter der Abteilung Getriebetechnik unter Leitung unseres Oberingenieurs Herrn Dr.-Ing. Jens Brimmers maßgeblich unterstützt. Ohne den besonderen Einsatz unserer Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter wäre die Erstellung des Buches nicht möglich gewesen. Insbesondere danken wir Frau Melina Kamratowski M.Sc., Frau Patricia de Oliveira Löhner M.Sc., Frau Dr.-Ing. Mareike Solf sowie den Herren Charalampos Alexopoulos M.Sc., Christian Eggert M.Sc., Dr.-Ing. René Greschert, Gerrit Hellenbrand M.Sc., Steffen Hendricks M.Sc., Christopher Janßen M.Sc., Lukas Klee M.Eng., Johannes Lövenich M.Sc., Alexander Mann M.Sc., Dr.-Ing. Dieter Mevißen, Christian Namhoff M.Sc., Simon Nohl M.Sc., Johannes Rolzhäuser M.Sc., Laurenz Roth M.Sc., Maximilian Schrank M.Sc., Sebastian Sklenak M.Eng., Christian Westphal M.Sc., Marius Willecke M.Sc., Moritz Zalfen M.Sc. und Hanwen Zhang M.Sc. Unser Dank gilt aber auch den ehemaligen Mitarbeitern der Abteilung Getriebetechnik, die mit ihrer Forschungsarbeit wesentlich zu den Inhalten des Fachbuches beigetragen haben. Ebenso danken wir dem Carl Hanser Verlag für das Verlegen und den Druck dieses Fachbuches.

Aachen, Oktober 2023

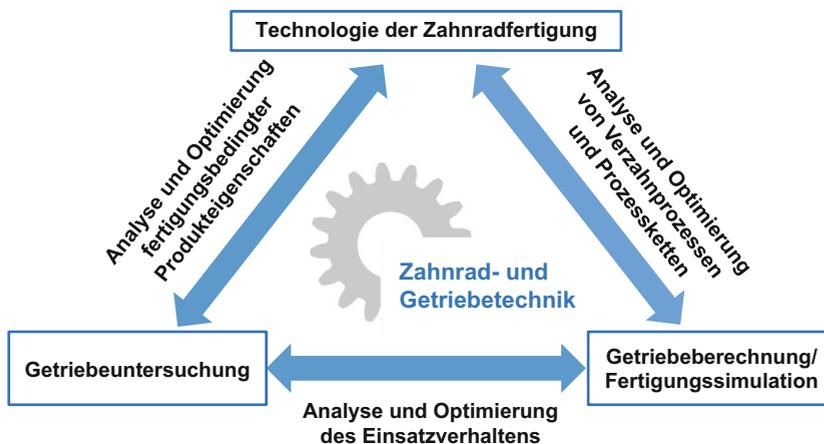
*Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher*

*Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Dr. h. c. Dr. h. c. Fritz Klocke*

# 1

## Einführung

Dieses Buch gibt einen Überblick über das Verhalten von Zahnrädern in Getrieben. Zahnräder sind Maschinenelemente, deren Einsatzverhalten hinsichtlich Tragfähigkeit, Akustik und Wirkungsgrad unmittelbar mit den fertigungsseitig eingestellten Produkteigenschaften, wie Toleranzen, Oberflächen- und Randzonenintegrität, zusammenhängt. Daher stellt die integrative Betrachtung produktions- und konstruktionstechnischer Fragestellungen eine wichtige Grundlage für das Verständnis der Funktion des Zahnrads und seiner Eigenschaften in der gesamtheitlichen Analyse im Getriebeumfeld dar (Bild 1.1). Die zusammenführende simulative sowie experimentelle Untersuchung sowohl des Einsatzverhaltens als auch der Zahradfertigung erlaubt einen Analysegrad, der mit einer isolierten Betrachtung von Einzelaspekten nicht möglich ist. So bewirkt beispielsweise die Berücksichtigung fertigungsbedingter Aspekte, wie funktionaler Verzahnungstoleranzen, bereits in der Auslegungsphase eine Verkürzung von Entwicklungszeiten und Reduktion von Entwicklungskosten. Ein Schwerpunkt dieses Buches liegt daher auf einer Verbindung der Leistungsfähigkeit der Fertigungstechnik mit den Anforderungen der Konstruktionstechnik.



**Bild 1.1** Gesamtheitlicher Analyseansatz in der Zahnrad- und Getriebetechnik

Die Struktur und der Aufbau des vorliegenden Buchs orientieren sich an den Anforderungen der Praxis und berücksichtigen den Lebenszyklus eines Zahnradgetriebes. Zu Beginn werden die Zahnrad- und Getriebetechnik geschichtlich eingeordnet und der Betrachtungsrahmen des Buches abgegrenzt. Dann erfolgt im Anschluss an die Einführung in die Grundlagen von Zahnradgetrieben die sukzessive Vorstellung von Methoden zum Getriebedesign, zur Zahnradfertigung sowie zum Einsatzverhalten von Getrieben. Abschließend werden Simulationsmethoden zur Unterstützung in der Auslegung und Analyse von Zahnradgetrieben sowie Zahnradfertigungsprozessen vorgestellt. Ebenso werden Aspekte der Nachhaltigkeit im Lebenszyklus eines Zahnrads thematisiert. In allen Teilen werden sowohl fertigungstechnische als auch konstruktive Fragestellungen adressiert. In den einzelnen Kapiteln werden Grundlagen sowie aktuelle Forschungsergebnisse und Entwicklungstendenzen angesprochen. Damit soll das Buch sowohl den Konstrukteur bei der Auslegung von Verzahnungen als auch den Fertigungstechniker bei der Prozessauswahl und -auslegung unterstützen und Möglichkeiten zur Optimierung aufzeigen, die über den aktuellen Stand der Technik hinausgehen.

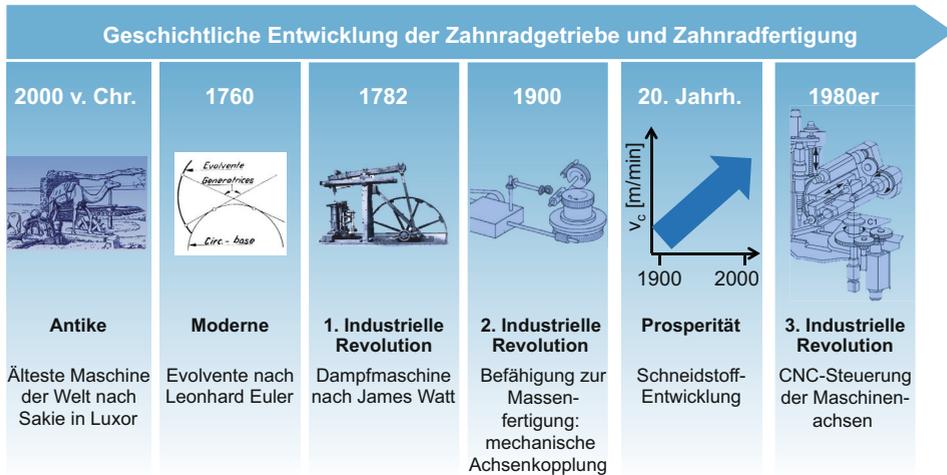
## ■ 1.1 Geschichte des Zahnrads

Das Zahnrad ist eines der ältesten Maschinenelemente der Welt und findet in heutigen Anwendungen noch immer eine dominante Verbreitung. Die nachfolgende Darstellung umfasst einen begrenzten Auszug. Umfangreichere Ausarbeitungen zur Geschichte des Zahnrads sind bei Kutzbach, Matschoss und Seherr-Thoss dokumentiert [KUTZ25, MATS40, SEHE65].

Die älteste Zahnradapparatur der Geschichte unter Nutzung mehrerer Zahnradstufen stammt aus der Antike und wird „Mechanismus von Antikythera“ genannt. Schätzungen zufolge stammt diese Apparatur aus der Zeit um 100 v. Chr. Dieser Mechanismus, der häufig auch als „Computer von Antikythera“ bezeichnet wird, ähnelt einem Uhrwerk. Er wurde aus Bronze hergestellt und war Wissenschaftlern zufolge vermutlich von einem Holzgehäuse umgeben. Die Übersetzung erfolgte über ein Differenzialgetriebe. Der Mechanismus wurde zur Berechnung der Bewegung von Himmelskörpern eingesetzt und stellt das erste dokumentierte Getriebe der Geschichte dar.

Die „Maschine nach Sakie“, die durch ein Kamel angetrieben und zur Bewässerung der Felder eingesetzt wurde, ist ebenfalls ein bedeutendes Beispiel in der Geschichte des Zahnradgetriebes (Bild 1.2). Der Hauptbestandteil des Antriebsstranges war ein einfaches Kronenradgetriebe mit Holzzahnrädern. Seit dem 9. Jahrhundert erfolgte in Europa vermehrt der Einsatz von Zahnrädern in Wassermühlen, ab dem 12. Jahrhundert auch in Windmühlen. Diese und ähnliche Konzepte wurden über die Jahrhunderte weiter genutzt, jedoch nie entscheidend weiterentwickelt. Erst durch Leonardo da Vinci und die für den technischen Fortschritt offene Epoche der Renaissance begann im Bereich der Antriebstechnik und der Getriebe eine Weiterentwicklung bereits bestehender technischer Errungenschaften. Der Ingenieur und Mechaniker da Vinci entwickelte mit der Zielsetzung, das Leben für die Menschen einfacher zu gestalten, die ersten Konzepte für angetriebene Fahrzeuge und Fluggeräte; hierzu nutzte er vermehrt die Dreh- und Leistungsübertragung durch erste einfache

Getriebe. In seinen Manuskripten finden sich um 1500 viele Zahnräder in verschiedenen Anwendungen.



**Bild 1.2** Übersicht über die Geschichte des Zahnradgetriebes [NAUN07, NN16a, NN16b, NN76, WECK05]

1556 gab Georgius Agricola in seiner Schrift „De re metallica libri XII“ erstmals den Einsatz von Zahnrädern aus Eisen an. Anfangs wurde bei der Verzahnungsherstellung wenig auf die geeignete Form der Zähne geachtet. Nach Angaben von Christiaan Huygens und Gottfried Wilhelm Leibniz empfahl der dänische Astronom Ole Rømer um 1674 die Epizykloide als Zahnform. Die Idee entstammt vermutlich seinen Erfahrungen beim Bau seiner Planetarien, z.B. des Jovilabiums, das an der Académie des sciences zu sehen ist. Schriftliche Belege gibt es für diese Erfindung nicht mehr.

Eine erste gründliche mathematische Untersuchung der Zahnräder beschrieb Philippe de La Hire um 1694 in seinem Werk „Traité des épicycloïdes“. Die darin beschriebene epizykloide Zahnform sicherte eine gleichförmige Bewegung der Zahnräder bei gleichmäßiger Gleitreibung. Diese Zahnräder wurden in Uhrwerke eingebaut. 1759 entwickelte John Smeaton eine eigene Zahnform, gefolgt von Leonhard Euler, der 1760 die Kreisevolvente als Profilform für Zahnflanken vorschlug. Es vergingen noch weitere 100 Jahre, bis diese Verzahnungsart fertigungstechnisch herstellbar und dann einsetzbar wurde. Heute gilt Leonhard Euler als „Vater“ der Evolvente und die Evolvente als maßgebliche Zahnprofilform [LINK10].

Die Entwicklung der Dampfmaschine im 18. Jahrhundert und der Beginn der Industriellen Revolution führten zu einem steigenden Bedarf an Zahnrädern, da die zu übertragende Leistung kontinuierlich stieg und Zahnräder aus Metall anstatt aus Holz gefertigt werden mussten. 1820 erfand Joseph Woollams die Schrägverzahnung und Pfeilverzahnung (Doppelschrägverzahnung). 1829 stellte Clavet eine Zahnobelmaschine her, da der Werkzeugmaschinenbau ab dem 19. Jahrhundert eine steigende Genauigkeit der Verzahnungen erforderte. Die erste brauchbare Maschine zum Fräsen geradzahnter Stirnräder baute 1887

G. Grant. 1897 entwickelte H. Pfauter daraus eine universale Maschine, mit der sich auch Schnecken- und Schraubräder fertigen ließen. Die Spindel- und Werkstückachsen waren in dem Patent über ein Differenzial kinematisch gekoppelt. Von diesem Zeitpunkt an konnte die evolventische Verzahnung effizient hergestellt und damit für praktische Anwendungen nutzbar gemacht werden. Im Zuge der zweiten Industriellen Revolution wurden mit dieser Entwicklung in der Verzahnungstechnik die Möglichkeiten zur Massenproduktion von Zahnrädern eröffnet.

Die Produktivität in der Verzahnungsfertigung konnte durch Innovationen in der Werkzeugtechnik umfassend gesteigert werden. Durch die Entwicklung neuer Schneidstoffe waren sprunghafte Anstiege in den erreichbaren Zeitspannungsvolumen möglich, die in einer deutlichen Reduktion der Produktionskosten resultierten. Exemplarisch wird diese Entwicklung für die Bearbeitung mit definierter Schneide skizziert, ähnliche Entwicklungssprünge hat es ebenfalls in der Bearbeitung mit undefinierter Schneide gegeben. 1900 wurde von Taylor und White erstmals der Schnellarbeitsstahl (HSS) eingeführt, der gegenüber dem zuvor genutzten Kohlenstoffstahl eine Verdopplung der Schnittgeschwindigkeit erlaubte. Die Weiterentwicklung der HSS-Werkzeuge führte dazu, dass nun die Leistungsfähigkeit bestehender Werkzeugmaschinenkonzepte erreicht wurde und in der Folge auch die Werkzeugmaschinenkonzepte überarbeitet und dem neuen Leistungsvermögen der Werkzeuge angepasst wurden.

1923 wurde die von Schröter und Baumhauer durchgeführte Entwicklung, Wolframkarbid und Kobalt durch Sintern zu einem soliden Körper zusammenzufügen, patentiert. 1925 wurden die Patente von Krupp übernommen. Das Sinterhartmetall war entstanden und konnte aufgrund seiner hohen Härte bei gleichzeitig guter Zähigkeit hervorragend als Schneidstoff eingesetzt werden. Jetzt war eine nochmalige Vervielfachung der erzielbaren Schnittgeschwindigkeiten, bezogen auf die Verwendung von HSS-Werkzeugen, möglich. Weitere Leistungssteigerungen bei den Schneidstoffen sind durch die Einführung beschichteter Hartmetalle (1968) sowie die Einführung von Ultrafeinkorn- bzw. nanokristallinen Hartmetallen (1993) gekennzeichnet. Durch die Kombination von Feinkorn-, Ultrafeinkorn- und nanokristallinen Gefügen mit angepassten Beschichtungen finden seit den 90er-Jahren anwendungsbezogene Optimierungen in der spanenden Herstellung von Verzahnungen statt. Polykristallines Bornitrid und keramische Schneidstoffe runden das Schneidstoffportfolio ab. Grundsätzlich kann man aber sagen, dass Schnellarbeitsstahl und Hartmetall auch heute noch die am häufigsten eingesetzten Werkzeugbaustoffe in der Verzahnungsfertigung mit definierter Schneide sind.

Eine weitere wesentliche Weiterentwicklung für die Verzahnungstechnik stellte die Erfindung der integrierten Schaltkreise (Mikrochip) dar, deren Serienproduktion in den 1960er-Jahren insbesondere im US-amerikanischen Raum begann. Für die Verzahnmaschinen war es mit dem Aufkommen der Digitalisierung möglich, Achsen elektrisch und nicht mehr mechanisch zu koppeln. Seit den 1980er-Jahren wurden Verzahnmaschinen umfassend mit elektronisch gesteuerten Achsen ausgerüstet.

Die Digitalisierung der Werkzeugmaschine hat in nahezu allen Verzahnprozessen erhebliche Verbesserungen bewirkt. Da die Bauteilqualität zuvor insbesondere von der Übertragungsqualität des Getriebezugs abhängig war, konnte mit der elektronischen Wälzkopplung einerseits die Verzahnungsqualität angehoben werden. Andererseits konnten effizient neue Freiheitsgrade in der Achskinematik umgesetzt werden. Es wurde zum Beispiel möglich, topologische Modifikationen auf der Zahnflanke herzustellen.

Die Digitalisierung der Produktion ist noch nicht abgeschlossen. Im Rahmen der Arbeiten zu „Industrie 4.0“ steht die Vernetzung von Wertschöpfungsketten und ganzen Produktionseinheiten im Mittelpunkt. Der Aufbau digitaler Zwillinge und digitaler Schatten, das Maschinelle Lernen und die Kommunikation zwischen Maschinen, Produkten und dem Menschen stehen im Fokus der Entwicklungen. In der Zahnrad- und Getriebetechnik sind insbesondere virtuelle Produkt- und Prozessbeschreibungen, sensorgestützte Prozess- und Produktüberwachungsstrategien sowie selbstlernende Prozess- und Betriebsstrategien Gegenstand aktueller Forschungsaktivitäten. Eine Vielzahl der genannten Ansätze wurde im DFG-Exzellenzcluster „Integrative Produktionstechnik für Hochlohnländer“ und wird im DFG-Exzellenzcluster „Internet of Production“ adressiert [BREC15; BREC23]. Weiterhin stellt die Nachhaltigkeit in der Getriebetechnik eine wichtige Herausforderung für die Zukunft dar. Grundsätzlich werden auch in der Getriebetechnik Nachhaltigkeitsfragen von der Ökonomie, der Ökologie und dem Einfluss auf soziale Strukturen bestimmt. Deshalb sind aktuelle Zielgrößen in der Getriebeauslegung und Fertigung aus diesem Umfeld zum Beispiel, Getriebe mit höherer Leistungsdichte und geringerem ökologischen Fußabdruck bei gleichbleibender Qualität und geringeren Kosten zu konzipieren und zu betreiben. Dies ist eine multikriterielle Optimierungsaufgabe, die mit Modellen unterstützt werden und im Einzelfall unterschiedliche Lösungen hervorbringen kann. Auf einige Ansätze wird beispielhaft im Rahmen der folgenden Kapitel auch eingegangen.

Die evolventische Verzahnung ist die heute am häufigsten genutzte Form einer Zahnradflanke. Durch ihre spezielle Eigenschaft macht sie das Zahnradgetriebe zu den bedeutendsten mechanischen Baugruppen für die Leistungs- und Bewegungsübertragung. Neue Entwicklungen und Verbesserungen der Getriebe erfordern aber auch ständige Optimierungen und Anpassungen der Fertigungsprozesse. Wesentliche Weiterentwicklungen in der Zahnradgestaltung wurden insbesondere durch die Optimierung der evolventischen Zahngeometrie sowie der Werkstoff- und Wärmebehandlungen erzielt. Durch diese Maßnahmen konnte die Festigkeit der Verzahnungen deutlich gesteigert werden. Dies hat auch Einfluss auf die Auslegung ganzer Wertschöpfungsketten und die Auswahl der Fertigungsverfahren.

## ■ 1.2 Einteilung der Getriebetechnik

Die grundsätzliche Aufgabe von Getrieben ist, die auf der Eingangsseite eingebrachte (aufgeprägte) Leistung in geeignete Abtriebsdrehzahlen und Drehmomente zu transformieren. Hierauf wird in Kapitel 3 im Detail eingegangen. Außerdem können Änderungen in der Bewegungsrichtung realisiert werden. Eine gängige Einteilung der Getriebearten kann anhand der Art der Bewegungsübertragung erfolgen. Grundsätzlich wird zwischen einer ungleichförmigen und einer gleichförmigen Übersetzung unterschieden (Bild 1.3).



**Bild 1.3** Einteilung der Getriebe nach Form der Bewegungsübertragung

Getriebe mit ungleichförmiger Übersetzung werden zur Übertragung un stetiger Bewegungen genutzt. Zwei häufig genutzte Getriebebauarten aus diesem Bereich sind die Schubkurbel und der Kniehebel. Das Schubkurbelgetriebe formt eine rotatorische Bewegung in eine translatorische Bewegung um und ist einer der wichtigsten Bestandteile des Kolbenmotors. Der Kniehebel wird zumeist in mechanischen Pressen eingesetzt und kommt bei verschiedenen Fertigungsverfahren wie dem Spritzguss oder dem Tiefziehen zum Einsatz.

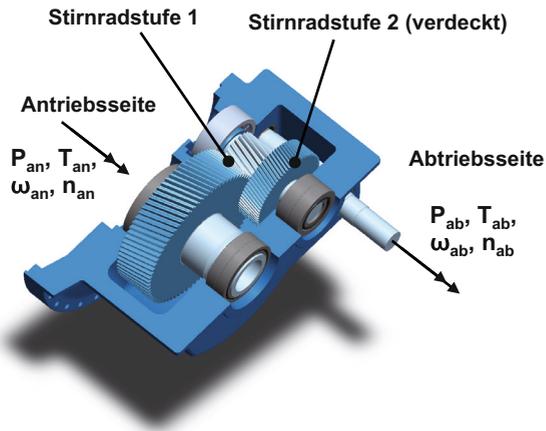
Getriebe mit gleichförmiger Übersetzung lassen sich weiter in gestufte und stufenlose Getriebe unterteilen. Das bedeutet, dass die Getriebe zwischen der höchsten und der niedrigsten Abtriebsdrehzahl entweder unendlich viele einstellbare Übersetzungen (stufenlos) aufweisen oder über eine endliche Anzahl an Schaltstufen (gestuft) verfügen. Hinsichtlich der stufenlosen Getriebe wird nach dem physikalischen Wirkprinzip zwischen mechanischer, elektrischer oder hydraulischer Bewegungsübertragung differenziert. Die bekannteste Getriebebauart aus diesem Bereich ist ein mechanisches Umschlingungsgetriebe mit Schubgliederband (Panzerkette). Das Kettengetriebe, auch Continuously Variable Transmission (CVT) genannt, wird in einigen Pkw als stufenloses Automatikgetriebe eingesetzt.

Zu den gestuften Getrieben zählen die Zugmittelgetriebe und die Zahnradgetriebe. Zu den Zugmittelgetrieben gehören unter anderem die Riemen- und Kettentriebe. Ein bekanntes Beispiel für ein schaltbares Zugmittelgetriebe ist die Fahrradkettenschaltung. Das Zahnradgetriebe ist das bedeutendste gestufte Getriebe und ist im Maschinenbau von zentraler Bedeutung. Es kommt dort zum Einsatz, wo Drehzahlen und Drehmomente auf kleinem Raum gewandelt und übertragen werden müssen. Im vorliegenden Buch steht diese Getriebeart im Fokus.

## 1.3 Gestufte Zahnradgetriebe

Zahnradgetriebe erfüllen als Konstruktionselemente unterschiedliche Funktionen und existieren daher in vielen verschiedenen Bauformen. Eine einfache Bauform ist das in Bild 1.4 dargestellte zweistufige Stirnradgetriebe, wie es in vielen Getrieben von Windenergieanlagen hinter der Planetengetriebestufe eingesetzt wird. Eine Zahnradstufe entspricht einem zusammenwirkenden, im Eingriff befindlichen Zahnradpaar im Leistungsfluss des Getriebes.

- **Zahnradgetriebe** dienen zur formschlüssigen Leistungsübertragung.
- Zwei oder mehr miteinander im Eingriff befindliche **Zahnräder** sowie Wellen, Lager, Dichtungen, Gehäuse und der Schmierstoff bilden ein Getriebe.
- Hauptanforderung ist die **gleichmäßige Übersetzung** von Drehbewegungen.
- **Legende**
  - P Leistung [W]
  - T Drehmoment [Nm]
  - $\omega$  Winkelgeschwindigkeit [ $s^{-1}$ ]
  - n Drehzahl [ $min^{-1}$ ]
  - i Übersetzung [-]
  - $i = T_{ab}/T_{an} = n_{an}/n_{ab}$



**Bild 1.4** Aufbau eines gestuften Zahnradgetriebes

Die mechanische Leistung wird am Antrieb auf das Getriebe aufgeprägt. Auf der Abtriebsseite ist die Arbeitsmaschine angeordnet. Das Getriebe übersetzt anhand der Zähnezahlen der Zahnradstufen die Antriebsdrehzahl und das Antriebsdrehmoment. Die Übersetzung einer Getriebestufe  $i$  ergibt sich aus den Zähnezahlen des treibenden Zahnrads ( $z_1$ ) und denen des getriebenen Zahnrads ( $z_2$ ).

$$i = \frac{z_2}{z_1} \quad (1.1)$$

Die Gesamtübersetzung wird aus dem Produkt der Einzelübersetzungen gekoppelter Zahnradstufen berechnet.

Trotz veränderlicher Drehzahl- und Drehmomentgrößen bleibt für ein ideales Getriebe die Systemleistung konstant, d. h., Antriebs- und Abtriebsleistung sind identisch. Aufgrund von Reibungsvorgängen treten in einem realen Getriebe Verluste auf. Daher ist die Abtriebsleistung um die Verlustleistung gemindert, woraus sich aus dem Verhältnis zwischen der Abtriebs- und der Antriebsleistung ( $P_{ab}$  und  $P_{an}$ ) der mechanische Wirkungsgrad  $\eta$  des Getriebes ergibt:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{an}} \quad (1.2)$$

Die mechanischen Verluste werden in Wärmeenergie gewandelt, die vom Getriebe an die Umgebung abgeführt werden muss. Bei einigen Getriebeformen reicht die Konvektion über die Gehäuseoberfläche nicht aus, sodass eine zusätzliche Kühlung über einen Wärmetauscher erforderlich wird.

Bereits das einfache in Bild 1.4 dargestellte Beispiel zeigt, dass die Differenz der Drehmomente von An- und Abtrieb an der Getriebeaufhängung abgestützt werden muss, was in der Getriebeauslegung zu berücksichtigen ist. Bei räumlichen Getrieben wie Kegelrad- oder Schneckengetrieben ist nicht allein der Betrag, sondern auch die Orientierung der abzustützenden Kräfte verschieden. Daraus ergeben sich unterschiedliche Anforderungen an die Lagerung und Gehäusegestaltung.

Die Bauformen von Getrieben unterscheiden sich abhängig vom Bauraum und von der Funktion, die das Getriebe erfüllen muss. Einige Getriebe werden zur Synchronisation von Wellen verwendet. Beispiele hierfür sind Steuertriebe im Verbrennungsmotor oder die mechanische Synchronisation von Druckwalzen in Druckmaschinen. Weitere Getriebe werden zur Überbrückung von Achsabständen verwendet. In diesem Fall werden Verzahnungen als Alternative zu Riemen- oder Kettentrieben verwendet. Die Vorteile der Verzahnung sind die schlupffreie Drehübertragung, der höhere Wirkungsgrad und der geringe Wartungsaufwand im Betrieb.

Eine weitere Funktion, die Zahnradgetriebe erfüllen, ist die Wandlung der Drehbewegung. Bei räumlichen Getrieben wird die Drehrichtung um einen Winkel gewandelt, sodass der An- und der Abtrieb des Antriebsstrangs nicht parallel angeordnet werden müssen. Beispiele für die Verwendung sind Fahrzeuge mit längs eingebautem Verbrennungsmotor oder Schiffsantriebe mit Strahlruder. Planeten- und Differenzialgetriebe werden zur Leistungsverzweigung verwendet.

Zahnradgetriebe allgemein werden nach ihrer Bau- und Funktionsweise unterschieden in:

- Festgetriebe (unveränderliches Übersetzungsverhältnis)
- Schaltgetriebe (Übersetzungsverhältnis kann durch eine Veränderung des Zusammenwirkens der einzelnen Zahnräder verändert werden)
- Verteilergetriebe (gleichzeitiger Antrieb mehrerer Wellen)
- Summiergetriebe (Antrieb einer Welle mit mehreren Antriebswellen)
- Standgetriebe (alle Radachsen sind lagenunveränderlich drehbar gelagert)
- Umlauf- oder Planetengetriebe (Baugruppe aus Sonnenrad, Planetenrad, umlaufendem Steg, Hohlrad, Gehäuse)

## Verwendete Formelzeichen

### Kleinbuchstaben

Formelzeichen	Benennung	Einheit
$i$	Übersetzung	
$n_{ab}$	Drehzahl Abtrieb	$\text{min}^{-1}$
$n_{an}$	Drehzahl Antrieb	$\text{min}^{-1}$

Formelzeichen	Benennung	Einheit
$z_1$	Zähnezahl treibendes Rad	
$z_2$	Zähnezahl getriebenes Rad	

### Großbuchstaben

Formelzeichen	Benennung	Einheit
$P_{ab}$	Abtriebsleistung	W
$P_{an}$	Antriebsleistung	W
$T_{ab}$	Drehmoment Abtrieb	Nm
$T_{an}$	Drehmoment Antrieb	Nm

### Griechische Buchstaben

Formelzeichen	Benennung	Einheit
$\eta$	Wirkungsgrad	
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$s^{-1}$

### Literatur

- [BREC15] *Brecher, C.*: Advanced Production Technology. Springer Verlag, Berlin 2015
- [BREC23] *Brecher, C.*: Internet of Production (IoP). <https://www.iop.rwth-aachen.de>. 2023
- [KUTZ25] *Kutzbach, K.*: Grundlagen und neuere Fortschritte der Zahnradherzeugung. VDI Verlag, Berlin 1925
- [LINK10] *Linke, H.*: Stirnradverzahnungen. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag, München 2010
- [MATS40] *Matschoss, G.*: Geschichte des Zahnrades. VDI Verlag, Berlin 1940
- [NAUN07] *Naunheimer, H./Bertsche, B./Lechner, G.*: Fahrzeuggetriebe. 2. Auflage. Springer Verlag, Berlin 2007
- [NN76] *Hermann Pfauter Werkzeugmaschinenfabrik*: Pfauter – Wälzfräsen. Teil 1. 2. Auflage. Springer, Augsburg 1976
- [NN16a] Mecánica. Engranajes (Quelle: [http://html.rincondelvago.com/mecanica\\_engranajes.html](http://html.rincondelvago.com/mecanica_engranajes.html), Stand 19.05.2016)
- [NN16b] Die Dampfmaschine von James Watt, 1788 (Quelle: <http://www.deutsches-museum.de/information/jugend-im-museum/erfinderpfad/antriebe/dampfmaschine>, Stand: 19.05.2016)
- [SEHE65] *Seherr-Thoss, H.-Chr.*: Die Entwicklung der Zahnrad-Technik, Zahnformen und Tragfähigkeitsberechnung. Springer Verlag, Berlin 1965
- [WECK05] *Weck, M./Brecher, C.*: Werkzeugmaschinen. Maschinenarten und Anwendungsbereiche. 6. Auflage. Springer Verlag, Berlin 2005



# 2

## Grundlagen der Verzahnung

Verzahnungen in Getrieben erfordern eine zielorientierte, d. h. wirtschaftlich und technisch aufeinander abgestimmte Wahl der Verzahnungsgeometrie. Dem Anspruch an ein optimales Einsatzverhalten der Verzahnungsgeometrie steht die Notwendigkeit einer kosteneffizienten Fertigung gegenüber. Hinsichtlich der Zahnprofilgeometrie und Achsanordnung sind Besonderheiten und Konventionen zu beachten, deren Kenntnis erforderlich ist, um Zahnradgetriebe erfolgreich konstruieren und fertigen zu können. Die nachfolgende Einführung in die Grundlagen der Verzahnungsgeometrie soll die Bewertung der Eignung unterschiedlicher Zahnradgeometrien zur Erfüllung der zum Teil konträren Anforderungen an das Maschinenelement Zahnrad erlauben.

Zahnradgetriebe erfüllen die Funktion der Drehzahl- und Drehmomentwandlung bzw. des Leistungstransfers. Die Grundlage einer gleichförmigen Drehübertragung stellt das allgemeine Verzahnungsgesetz dar, welches in Abschnitt 2.1 vorgestellt wird. Aus dem Verzahnungsgesetz ergeben sich distinkte Anforderungen an die Auslegung und Herstellung von Verzahnungen. Je nach Lage der beiden Radachsen zueinander ergeben sich verschiedene Zahnradgetriebegrundformen, die in Bild 2.1 exemplarisch anhand von ausgewählten und verbreitet eingesetzten Zahnradgeometrietypen dargestellt sind. Gemäß der Bau- und Funktionsweise ist eine Unterscheidung von Getrieben nach folgenden Grundformen möglich:

- Zahnradgetriebe mit parallelen Achsen
- Zahnradgetriebe mit sich schneidenden Achsen
- Zahnradgetriebe mit sich kreuzenden Achsen

Bei den Stirnradgetrieben ist die Geometrie des Grundkörpers der Verzahnungen zylindrisch oder konisch. Zylindrische Verzahnungen werden in achsparallelen Anwendungen eingesetzt. Zylinderräder weisen die größte Produktionsmenge in der Antriebstechnik auf [DSTAT14] und werden in verschiedensten Anwendungen und Baugrößen eingesetzt, wie z. B. in Miniaturstellgetrieben, Automobilschaltgetrieben, Industrie- und Windkraftgetrieben oder Schiffsgetriebenen.

Nachfolgend werden die Grundlagen der Zahnradgeometrie zunächst für zylindrische Stirnradverzahnungen beschrieben. Dazu wird in Abschnitt 2.2 auf grundlegende Zahnprofilformen und geometrische Definitionen und Konventionen eingegangen.



**Bild 2.1** Grundformen von Zahnradgetrieben

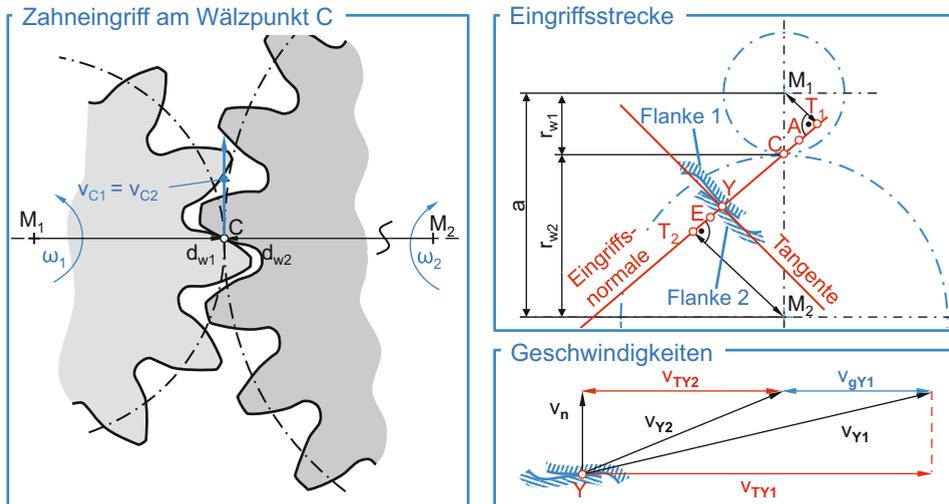
Für Getriebebauformen mit sich schneidenden und kreuzenden Achsen werden insbesondere bei großen Achskreuzwinkeln Kegelradgetriebe eingesetzt. Kegelradgetriebe, deren Achsen sich aufgrund eines Achsversatzes nicht schneiden bzw. kreuzen, werden als Hypoidgetriebe bezeichnet. Die Kegelradverzahnung weist Besonderheiten gegenüber einer Stirnradgeometrie auf, die in Auslegung und Fertigung zu berücksichtigen sind und in Abschnitt 2.3 erläutert werden. Weitere Beispiele für Getriebebauformen bei sich schneidenden oder kreuzenden Achsen, die allerdings nachfolgend nicht näher betrachtet werden, sind z. B. Schraubradgetriebe, Schneckengetriebe oder Kronenradgetriebe.

Konische Stirnradverzahnungen, auch als Beveloidverzahnungen bezeichnet, werden in Getrieben mit unterschiedlichen Achskonfigurationen eingesetzt und finden zunehmend Beachtung. Bei Getrieben mit parallelen Achsen zeichnen sie sich durch ein einstellbares Verdrehflankenspiel aus, sodass Beveloidverzahnungen in Präzisionsgetrieben wie beispielsweise bei Robotern Anwendungen finden. Weiterhin werden Beveloidverzahnungen in Anwendungen mit kleinen Achskreuzwinkeln, z. B. im Automobil- und Schiffsgtriebebau, eingesetzt. In Abschnitt 2.4 wird auf die geometrischen Besonderheiten von Beveloidverzahnungen eingegangen.

## ■ 2.1 Das Verzahnungsgesetz

Das Verzahnungsgesetz definiert die Anforderungen an die Zahngeometrie für ein konstantes Übersetzungsverhältnis der Antriebsleistung. Zur Erfüllung des Verzahnungsgesetzes müssen zwei Bedingungen vorliegen. Zum einen müssen die Zahnflanken stets einen Kontakt in nur einem gemeinsamen Berührungspunkt entlang einer Berührlinie, der sogenannten Eingriffslinie, aufweisen. Zum anderen dürfen sich die Zahnflanken zu keinem Zeitpunkt

durchdringen oder voneinander abheben. Die Bedingungen werden dann erfüllt, wenn die Eingriffsnormale der Zahnflanken in jedem Berührungspunkt einen ortsfesten Wälzpunkt C schneidet. Der Wälzpunkt C definiert die idealen Wälzkreise mit den Wälzkreisdurchmessern  $d_{w_i}$  und entspricht bei Stirnrädern in der Regel dem Schnittpunkt der Verbindungslinie der Achsmittelpunkte der Zahnräder mit der Berühornormalen (siehe Bild 2.2).



**Bild 2.2** Zahneingriff und Geschwindigkeiten

Der aktive, sich im Kontakt befindliche Abschnitt der Eingriffslinie  $\overline{AE}$ , im vorliegenden Fall als Eingriffsnormale eingezeichnet, wird als Eingriffsstrecke bezeichnet. Der initiale Kontakt erfolgt zwischen dem größten aktiven Durchmesser des getriebenen Rads und dem kleinsten aktiven Durchmesser des treibenden Rads am Beginn des Eingriffs (Punkt A). Im weiteren Verlauf des Eingriffs verschiebt sich der Berührungspunkt Y in Zahnhöhenrichtung des treibenden Rads in Richtung der gemeinsamen Normalen auf der Eingriffsstrecke bis zum Wälzpunkt C und anschließend bis zum Ende des Eingriffs (Punkt E). Wird das Verzahnungsgesetz von einer Zahnradgeometrie erfüllt, liegt eine kontinuierliche, hinsichtlich Drehmoment- und Drehzahlverhältnis gleichförmige, stoßfreie Drehübertragung von einer Antriebswelle ( $M_1$ ) auf die Abtriebswelle ( $M_2$ ) vor.

Da im Stirnschnitt, also einem Schnitt senkrecht zur Achse der Verzahnung, der Kontakt zwischen beiden Flanken stets in einem Punkt stattfindet, kann bei Vorgabe einer Flanke aus dem Verzahnungsgesetz die entsprechende konjugierte Gegenflanke bestimmt werden. Weiterhin lassen sich die Geschwindigkeitsverhältnisse an den Zahnflanken im Eingriff ableiten. Bild 2.2 zeigt die Geschwindigkeitsverhältnisse im Eingriff. Die Normalgeschwindigkeit  $v_{ni}$  ist für jede Eingriffssituation in Betrag und Orientierung für Rad und Ritzel identisch, sodass keine Abhebung oder Durchdringung der Zahnflanken vorliegt. Am Wälzpunkt C tritt der Sonderfall auf, dass die Normalgeschwindigkeit  $v_n$  identisch mit der Umfangsgeschwindigkeit  $v_{Ci}$  ist. Damit verbunden ist die Tatsache, dass am Wälzpunkt C keine Gleitgeschwindigkeit der Zahnflanken vorliegt, sodass in diesem Punkt die Zahnflanken theoretisch aufeinander abrollen. Die Gleitgeschwindigkeit  $v_{g,C}$  ist null. Die für jeden Be-

rührpunkt Y während des Eingriffs auftretende Umfangsgeschwindigkeit  $v_{Y1}$  ist vom Durchmesser  $d_{Y1}$  an den Berührungspunkten sowie der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  des betrachteten Rads abhängig. Damit ändern sich die Umfangsgeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  der Zahnflanken im Eingriffspunkt in ihrer Richtung und in ihrem Betrag. Es gilt:

$$v_{Y1} = \frac{d_{Y1}}{2} \cdot \omega_1 \quad (2.1)$$

Bild 2.2 zeigt im rechten Bildbereich die kinematischen Verhältnisse während des Zahneingriffes. Mit zunehmendem Abstand vom Wälzpunkt C erhöht sich die Gleitgeschwindigkeit. Aufgrund der Orientierung und des Betrags der Tangentialgeschwindigkeitsvektoren ist die Gleitgeschwindigkeit  $v_{gY1}$  am treibenden Rad zwischen Punkt A und C negativ und zwischen Punkt C und E positiv. Beim getriebenen Rad sind die Verhältnisse genau umgekehrt. Auf die Bestimmung der kinematischen Kontaktgrößen wird in Kapitel 5 detailliert eingegangen.

Das Übersetzungsverhältnis  $i$  beschreibt das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zwischen dem treibenden und dem getriebenen Rad. Unter Berücksichtigung von Formel 2.1 ergibt sich ein Zusammenhang in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit und dem Berührungspunktdurchmesser:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_{Y1}}{d_{Y1}} \cdot \frac{d_{Y2}}{v_{Y2}} \quad (2.2)$$

Aus der Anwendung von Formel 2.2 folgt Formel 2.3, da die Umfangsgeschwindigkeiten  $v_{C1}$  und  $v_{C2}$  identisch sind.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{Y2}}{d_{Y1}} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} \quad (2.3)$$

Der Zusammenhang in Formel 2.3 ist für alle Berührungspunkte Y entlang der Eingriffslinie gültig. Die allgemeine Anwendung geht aus den Dreiecken der Geschwindigkeitsvektoren hervor. Somit kann das Übersetzungsverhältnis einer Zahnradgetriebestufe bei Erfüllung des Verzahnungsgesetzes aus den Durchmesserhältnissen bestimmt werden. Die charakteristischen Durchmesser für die hier beispielhaft vorgestellte evolventische Verzahnung werden in Abschnitt 2.2.4.4 vorgestellt.

## ■ 2.2 Stirnradverzahnungen

### 2.2.1 Arten der Stirnradverzahnungen

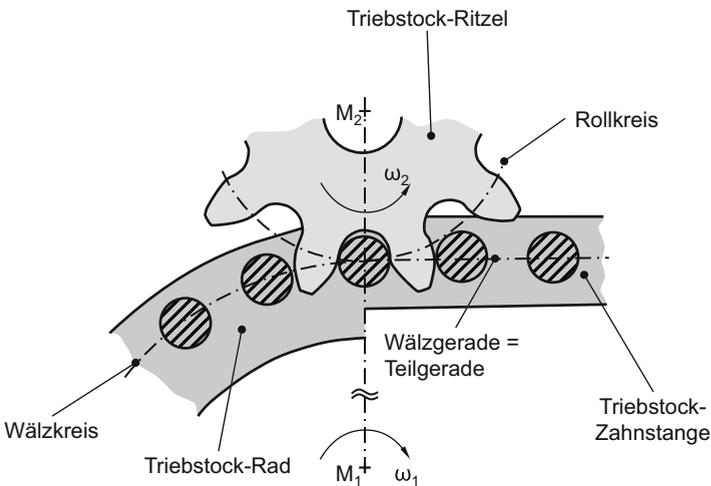
Aus dem Verzahnungsgesetz lassen sich verschiedene Zahnflankengeometrien ableiten, die sich auf bekannte geometrische Funktionen zurückführen lassen. In der Praxis werden aus fertigungs- und messtechnischen Gründen nur solche Flankenprofile eingesetzt, die mathematisch einfach zu beschreibende Eingriffslinien (Gerade, Kreis) besitzen. Zu diesen Profilen zählen z. B. Zykloiden-, Triebstock-, Kreisbogen-, Wildhaber-Novikov- und insbesondere Evolventenverzahnungen, deren geometrische Eigenschaften und Einsatzfelder nachfolgend beschrieben werden.



Zahneingriff, was zu einem erhöhten Verschleiß der Verzahnung führt. Weiterhin nachteilig ist die veränderliche Krafrichtung entlang des Eingriffs. Zykloidenverzahnungen finden in Armbanduhren und speziellen Fluidfördermaschinen wie Kapselpumpen oder Gebläsen Anwendung.

### 2.2.1.2 Triebstockverzahnungen

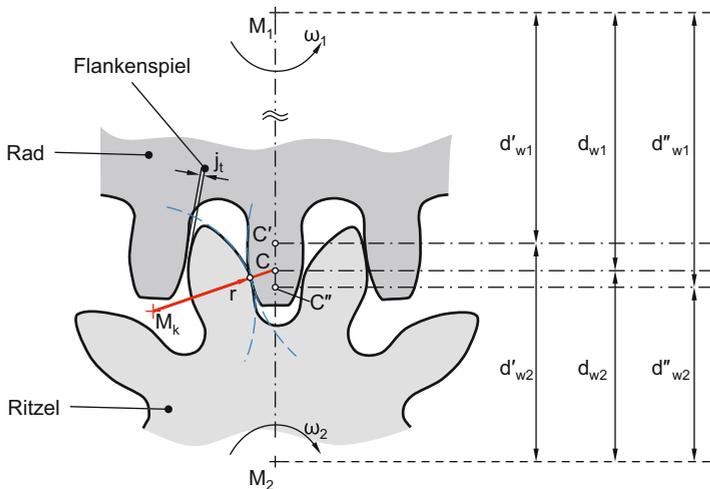
Eine weitere Zahnprofilart ist die Triebstockverzahnung (Bild 2.4), die einen Sonderfall der Evolvente annähert. Sie entsteht, wenn das gewählte Maß des Rollkreisdurchmessers eines Rads dem Wälzkreisdurchmesser entspricht. Das Rad hat ein punktförmiges Fußprofil, welches bei der praktischen Ausführung durch einen Bolzen ersetzt wird. Der Bolzen befindet sich mit dem durch eine Epizykloide gebildeten Kopfprofil des Ritzels im Eingriff. Die Triebstockverzahnung wird bevorzugt bei großen Übersetzungsverhältnissen angewendet. Sie ist vergleichsweise kostengünstig in der Herstellung, da das Triebstock-Rad durch Zylinder beschrieben wird und sich für das Triebstock-Ritzel ausreichende Teilungsqualitäten durch die Verwendung von Bohrschablonen ermöglichen lassen. Außerdem werden Zahnflanken von Triebstock-Ritzeln häufig durch Evolventen angenähert, die durch abwälzende Herstellungsverfahren herstellbar sind. Die aus der geometrischen Abweichung resultierende Anregungsneigung führt dazu, dass dieses Zahnprofil nur für kleine Umfangsgeschwindigkeiten geeignet ist. Weiterhin weist die Zahnprofilform einen erhöhten Verschleiß am Wälzkreis auf, sodass es zu einer ungleichmäßigen Bewegungsübertragung kommen kann. Der erhöhte Verschleiß resultiert aus der Punktberührung im Stirnschnitt zwischen Ritzelflanke und Zylinder. Einsatzbeispiele für die Triebstockverzahnung sind u. a. ältere Mühlenräder, Torpedowagen, Uhren, Zahnstangen, Rollenketten und Drehkränze. Heute ist die Triebstockverzahnung in der industriellen Praxis weitestgehend von der Evolventen- und Zykloidenverzahnung verdrängt worden.



**Bild 2.4** Triebstockverzahnung [DIN 76]

### 2.2.1.3 Kreisbogenverzahnungen

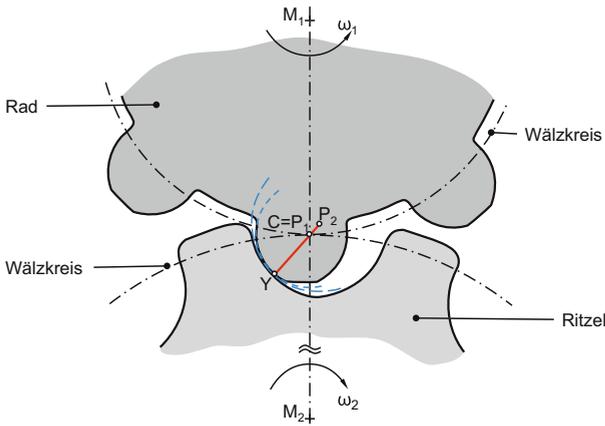
Ein weiteres Zahnprofil ist das Kreisbogenprofil. Die Kreisbogenverzahnung weist hohe, schlanke Zähne mit einem großen Verdrehflankenspiel  $j_t$  auf. Die Zahnform entspricht Kreisen mit einem definierten Radius  $r$  und einem Mittelpunkt  $M_k$ . Das momentane Übersetzungsverhältnis der Verzahnung ändert sich kontinuierlich, da sich der Wälzpunkt fortlaufend von  $C'$  nach  $C''$  verschiebt. Somit erfüllt das Zahnprofil das Verzahnungsgesetz nicht (Bild 2.5). Mit der Wälzpunktverschiebung existiert für jeden Berührungspunkt beider Flanken ein neuer Wälzkreis. Folglich variieren die Durchmesser der einzelnen Wälzkreise kontinuierlich zwischen  $d'_{w1}$  und  $d''_{w1}$  bzw.  $d'_{w2}$  und  $d''_{w2}$ . Die fehlende Winkeltreue kann durch eine Erhöhung der Profilüberdeckung in Grenzen kompensiert werden. Das Verdrehflankenspiel und die Realisierbarkeit großer Übersetzungsverhältnisse führen zu einer guten Eignung für den Einsatz einer Kreisbogenverzahnung in feinmechanischen Geräten wie beispielsweise Uhren. Die Herstellung ist durch Abwälzverfahren möglich.



**Bild 2.5** Kreisbogenverzahnung [DIN80]

### 2.2.1.4 Wildhaber-Novikov-Verzahnungen

Eine Sonderform des Kreisbogenprofils stellt die Wildhaber-Novikov-Verzahnung dar, bei der eine konvex gekrümmte Zahnflanke mit einer konkaven Gegenflanke kämmt. Sie wurde in der ehemaligen UdSSR im industriellen Maßstab eingesetzt, besitzt aktuell allerdings keine Bedeutung mehr. Bei dieser Verzahnungsart kann das Kreisbogenprofil entweder im Normalschnitt (nach Wildhaber) oder im Stirnschnitt (nach Novikov) vorliegen. Die Profilform lässt sich mit gängigen Herstellungsverfahren, wie zum Beispiel dem Wälzfräsen, fertigen. Dennoch sind die Herstellkosten hoch, da für das konvexe Rad und das konkave Ritzel unterschiedliche Werkzeugprofile verwendet werden müssen. Bild 2.6 zeigt den Eingriff eines Wildhaber-Novikov-Radpaars.



**Bild 2.6** Wildhaber-Novikov-Verzahnung

Der konvex-konkave Zahnkontakt führt zu einer guten Schmiegung der Zahnflanken, woraus eine erhöhte Grübchentrugfähigkeit auf der Zahnflanke resultiert. Ohne Belastung der Zahnflanken liegt ein Punktkontakt im Stirnschnitt vor, der bei Belastung der Zahnflanken zu einer Kontaktzone anwächst. Die Eingriffslinie verläuft parallel zur Radachse und besteht im Idealfall aus einem Eingriffspunkt C, in dem die beiden Kreisbogenmittelpunkte von Rad und Ritzel zusammenfallen. Bild 2.6 zeigt den allgemeinen Fall, bei dem die Kreismittelpunkte von Rad  $P_1$  und Ritzel  $P_2$  nicht zusammenfallen.

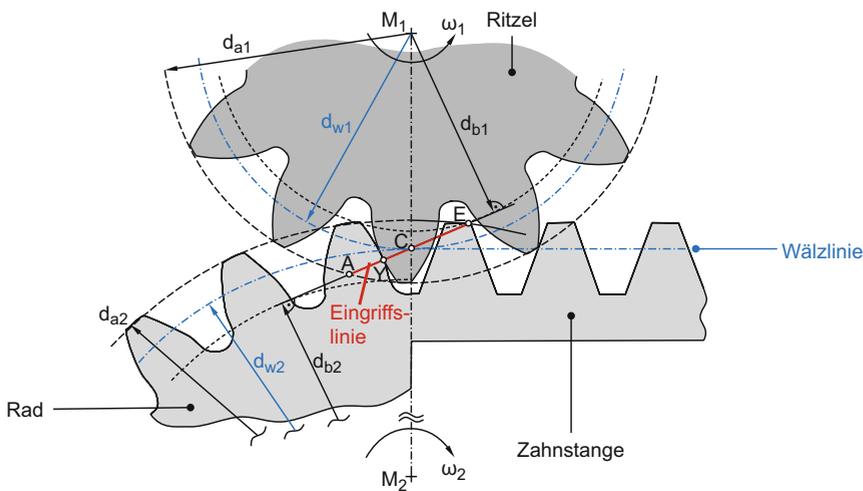
Nachteilig wirkt sich die hohe Empfindlichkeit gegenüber Achsabstandsänderungen aus, die zu Eingriffsstörungen und Beanspruchungsüberhöhungen führt. Deswegen werden an die Herstellung des Zahnprofils hohe Genauigkeitsanforderungen gestellt, da bereits kleine Formabweichungen zu einem fehlerhaften Kontakt zwischen Rad und Ritzel führen. Aus diesem Grund wird der Einsatz dieser Verzahnungsart nicht mehr weiterverfolgt.

### 2.2.1.5 Evolventenverzahnungen

Die am weitesten verbreitete Verzahnungsart stellt die Evolventenverzahnung dar. Bei diesem Profil weist die Verzahnung im Stirnschnitt den Abschnitt einer Kreisevolvente auf. Sie entsteht durch das Abrollen einer Geraden auf einem definierten Kreis, dem sogenannten Grundkreis  $d_b$ . Bei der Evolvente ist das Zahnprofil eines außenverzahnten Stirnrads konvex und das Zahnprofil eines innenverzahnten Stirnrads konkav. Die Evolventenverzahnung ist die am häufigsten eingesetzte Verzahnungsart, da sie einen guten Kompromiss zwischen Einsatzverhalten und Herstellbarkeit aufgrund der linearen Eingriffslinie bietet. Die lineare Eingriffslinie erlaubt Werkzeuge, die ein gerades Profil und eine konstante Krafrichtung aufweisen. Zudem zeichnen sich Evolventenverzahnungen durch eine hohe Robustheit bezüglich Fertigungs- und Montageabweichungen sowie Verlagerungen im Betrieb aus.

Bei der Evolventenverzahnung ist das Verzahnungsgesetz zu jedem Zeitpunkt erfüllt, da die Normalen jedes Berührungspunktes der beiden Zahnflanken durch den Wälzpunkt C verlaufen. Es liegen alle Berührungspunkte auf einer Geraden, die als Eingriffslinie (Bild 2.2) bezeichnet wird. Aus Bild 2.7 ist ersichtlich, dass die Normalen eines jeden Punktes auf der Evolvente

eine Tangente an den Grundkreis des jeweiligen Rads bilden. Somit muss auch die Eingriffslinie für evolventische Profile tangential zum Grundkreis verlaufen. Da die Eingriffslinie eine Gerade darstellt und die Form der Evolventen unabhängig von der Größe der definierten Grundkreise ist, sind Evolventenverzahnungen unempfindlich hinsichtlich Achsabstandsänderungen. Zudem zeichnen sich Verzahnungen mit Evolventenprofil durch einen Lauf mit wenig Spiel aus. Das Zahnspiel ist von der Auslegung der Verzahnungsgeometrie und der Herstellqualität abhängig. Je nach geometrischer Auslegung der Verzahnung kann Unterschnitt (siehe Abschnitt 2.2.4.5) auftreten, der sich nachteilig auf die Zahnfußtragfähigkeit auswirkt. Die Zahnflankentragfähigkeit ist bei Außenverzahnungspaarungen (konvex-konvex) relativ hoch. Zahnfuß- und Zahnflankentragfähigkeit können durch Profilverschiebungen und Zahnflankenmodifikationen (Zahnflankenkorrekturen) optimiert werden (siehe Abschnitt 3.3).



**Bild 2.7** Eingriffslinie einer Evolventenverzahnung

### 2.2.2 Schrägverzahnungen

Die Orientierung der Zahnflanken in axialer Richtung der Verzahnung kann theoretisch einer beliebigen Kurve folgen. Aus fertigungstechnischen Gründen, aber auch aus Gründen der Parametrisierung werden in der Regel geradflankige oder einfach- sowie doppelschrägverzahnung Flankenformen eingesetzt. Gerad- und Schrägverzahnungen unterscheiden sich durch den Schrägungswinkel  $\beta$  sowie die hiervon abhängigen Größen. Bei Schrägverzahnungen sind die Zähne auf dem Grundkreiszyylinder schraubenförmig gewunden.

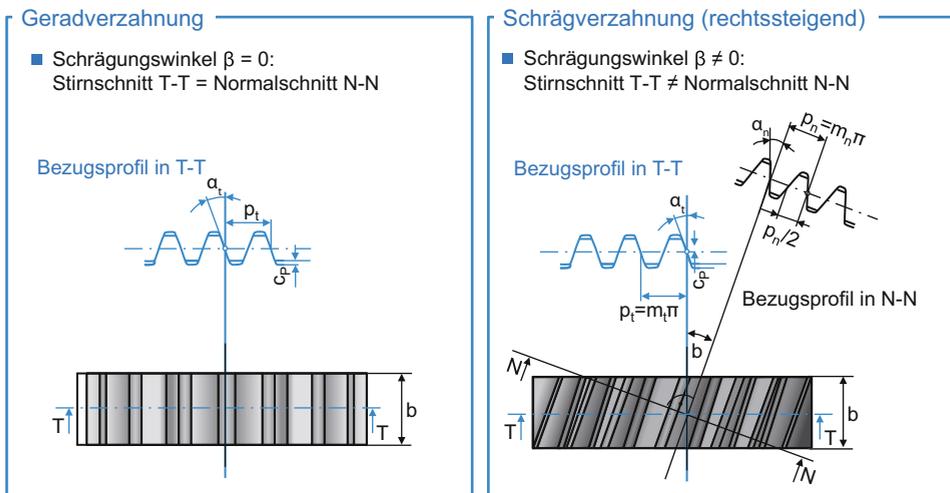
Die Flankensteigung einer Verzahnung (links/rechts) wird nach einer Konvention definiert. Sie hängt davon ab, in welche Richtung der Zahn von unten nach oben gekippt ist, wenn das Zahnrad auf eine der Stirnseiten gelegt wird. Die Blickrichtung wird stets von der Verzahnung in Richtung Radachse gelegt. Gemäß der vereinbarten Vorzeichenkonvention ist der Schrägungswinkel positiv bei rechtssteigenden sowie negativ bei linkssteigenden Flanken-

linien. Für eine außen-innen-verzahnnte Radpaarung gilt: Bei einer rechtssteigenden Verzahnung ist der Schrägungswinkel der Außenverzahnungen positiv und derjenige der Innenverzahnung negativ. Bei linkssteigenden Verzahnungen erfolgt die Vorzeichenvergabe umgekehrt. Aufgrund dieser Vorzeichenregeln gilt für Stirnradpaarungen (Außen- und Innenverzahnungen) stets, dass die Summe der Schrägungswinkel einer Paarung gleich null ist.

$$\beta_1 + \beta_2 = 0^\circ \quad (2.4)$$

Bei einer Zahnradpaarung schrägverzahnter Stirnräder erfolgt gegenüber der Geradverzahnung der Ein- und Austritt der Zähne nicht gleichzeitig auf der gesamten Zahnbreite, sondern entlang der Berührlinie und in der Regel über mehrere Zahnpaare verteilt. Durch die höhere Anzahl der sich in Eingriff befindenden Zahnpaare verbessern sich in der Regel die Laufruhe und die Tragfähigkeit von Stirnrädern [SALJ87].

Bei einer Verzahnung wird zwischen dem Axial-, Normal- und Stirnschnitt unterschieden. Die Ebene des Stirnschnitts steht senkrecht zur Radachse, die des Normalschnitts senkrecht zu den Flankenlinien (Bild 2.8). Der Axialschnitt stellt einen Schnitt durch die Verzahnung mit einer Ebene, die die Radachse vollständig enthält, dar. Alle geometrischen Größen und Faktoren tragen einen Index, um erkenntlich zu machen, in welchem Schnitt sie betrachtet werden. Im Stirnschnitt haben die Größen den Index „t“ (englisch: transverse), im Normalschnitt den Index „n“ und im Axialschnitt den Index „x“. Verzahnungsgrößen, welche im Stirnschnitt vorliegen, lassen sich trigonometrisch über den Schrägungswinkel  $\beta$  in den Normalschnitt umrechnen. Die Definitionen gelten für alle vorgestellten Arten der Stirnradverzahnungen. Für die Evolventenverzahnungen gilt weiterhin, dass die Zahnflanken im Stirnschnitt einer Schrägverzahnung ein Evolventenprofil besitzen. Im Normalschnitt liegt nur bei der Geradverzahnung ein Evolventenprofil vor.



**Bild 2.8** Schnittebenen durch eine Stirnradverzahnung

### 2.2.3 Erzeugungsprinzip von Evolventenverzahnungen

Nachfolgend wird das Erzeugungsprinzip von Evolventenprofilen erläutert, das insbesondere für die Fertigung mit wälzenden Verfahren von Bedeutung ist. Hierbei werden Werkzeuge eingesetzt, welche das Bezugsprofil der Verzahnung abbilden. Demgegenüber weist das bei profilierenden Fertigungsverfahren verwendete Werkzeugprofil bereits die evolventische Lückengeometrie auf, die auf das Werkstück übertragen wird. Es werden die theoretische und praktische Erzeugung des Evolventenprofils vorgestellt, auf die Erzeugung der Zahnflanke in axialer Richtung wird eingegangen und die standardisierte Beschreibung zur Definition und Erzeugung von evolventischen Verzahnungen durch das Bezugsprofil wird erläutert.

#### 2.2.3.1 Die Evolventenfunktion

Die Evolvente entsteht durch das Abrollen einer Geraden auf dem Grundkreis [DIN87, ISO14]. Bild 2.9 zeigt die Strecke  $\overline{TY}$  sowie den Grundkreis mit dem Radius  $r_b$ . Die Strecke  $\overline{TY}$  tangiert für jeden beliebigen Wälzwinkel  $\xi_y$  den Grundkreis. Somit stellt die Richtung der Strecke  $\overline{TY}$  die Richtung der Normalen auf der Evolvente dar. Die Form der Evolvente wird einzig durch den Grundkreisradius  $r_b$  bestimmt. Innerhalb des Grundkreises ist die Evolvente nicht definiert. Aufgrund des schlupffreien Abrollens ist die Strecke  $\overline{TY}$  gleich der Bogenlänge  $\overline{TU}$ . Die Strecke  $\overline{TY}$  entspricht dem Krümmungsradius  $\rho_y$  an einem Punkt Y der Evolvente. Die Strecken berechnen sich trigonometrisch sowie im Kreisbogen bei Angabe der Winkel im Bogenmaß.

$$\overline{TY} = r_b \cdot \tan \alpha_y \quad (2.5)$$

$$\overline{TU} = \overline{UV} + \overline{VT} = r_b \cdot (\alpha_y + \text{inv} \alpha_y) \quad (2.6)$$

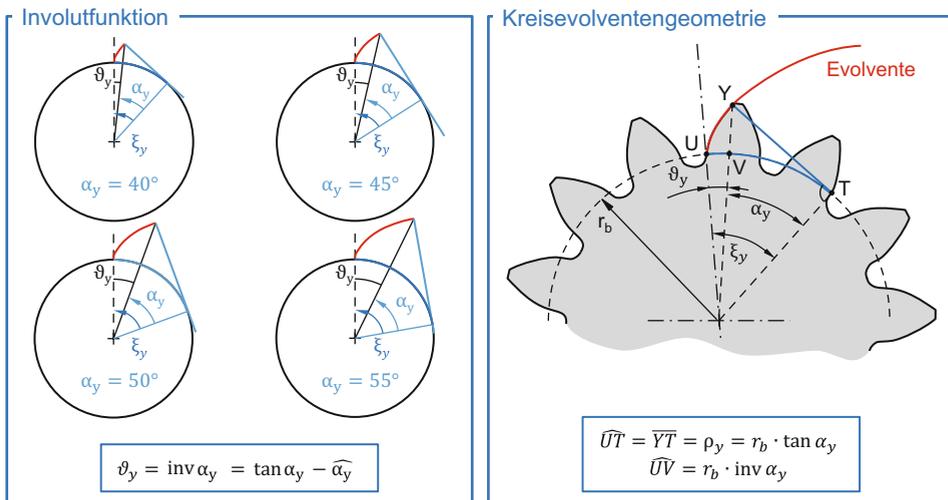


Bild 2.9 Definition und Darstellung der Kreisevolvente

Zur Beschreibung des Bogenabschnitts  $\vartheta_y$  wird die Evolventenfunktion  $\text{inv } \alpha_y$ , auch Involutfunktion genannt, eingeführt.

$$\text{inv } \alpha_y = \tan \alpha_y - \widehat{\alpha}_y = \xi_y - \widehat{\alpha}_y \quad (2.7)$$

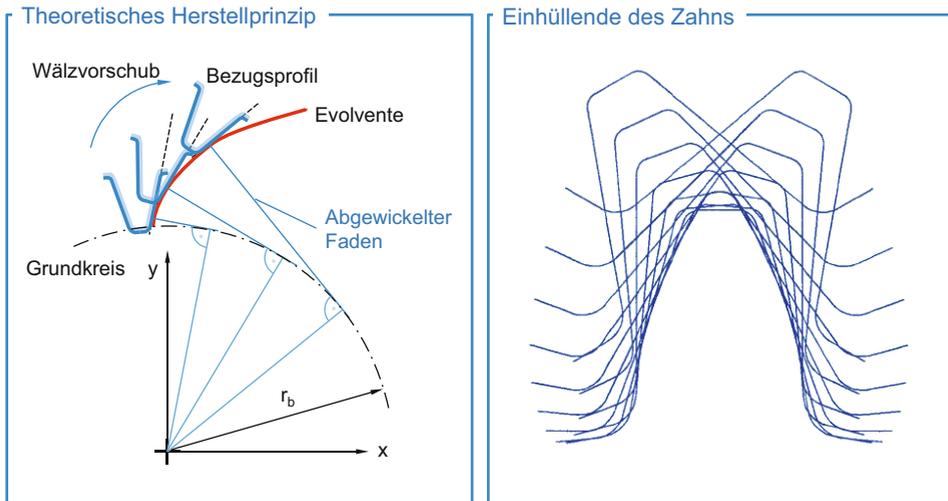
Neben der Beschreibung der Geometrie einer Evolvente wird die Involutfunktion zur Berechnung zahlreicher Verzahnungsgrößen, wie der Zahnkopfdicke und der Bogenlänge der Zahnücke, verwendet. Die Evolventenfunktion ist nicht geschlossen lösbar, sondern kann nur numerisch gelöst werden. Unter Vorgabe des Involutwertes  $\text{inv } \alpha_y$  kann daher der Winkel  $\alpha_y$  nur iterativ bestimmt werden. Um die Anwendung in der Praxis zu erleichtern, kann bei gegebenem Winkel  $\alpha_y$  der zugehörige Funktionswert  $\text{inv } \alpha_y$  aus Involuttabellen (Auszug in Tabelle 2.1) ermittelt bzw. interpoliert werden.

**Tabelle 2.1** Involuttabelle  $\alpha_y = 17^\circ$  bis  $\alpha_y = 23^\circ$

$\alpha$	17	18	19	20	21	22	23
,0	0,009025	0,010760	0,012715	0,014904	0,017345	0,020054	0,023049
,1	0,009189	0,010946	0,012923	0,015137	0,017603	0,020340	0,023365
,2	0,009355	0,011133	0,013134	0,015372	0,017865	0,020629	0,023684
,3	0,009523	0,011323	0,013346	0,015609	0,018129	0,020921	0,024006
,4	0,009694	0,011515	0,013562	0,015849	0,018395	0,021217	0,024332
,5	0,009866	0,011709	0,013779	0,016092	0,018665	0,021514	0,024660
,6	0,010041	0,011906	0,013999	0,016337	0,018937	0,021815	0,024992
,7	0,010217	0,012105	0,014222	0,016585	0,019212	0,022119	0,025326
,8	0,010396	0,012306	0,014447	0,016836	0,019490	0,022426	0,025664
,9	0,010577	0,012509	0,014674	0,017089	0,019770	0,022736	0,026005

### 2.2.3.2 Das theoretische Herstellprinzip des Evolventenprofils

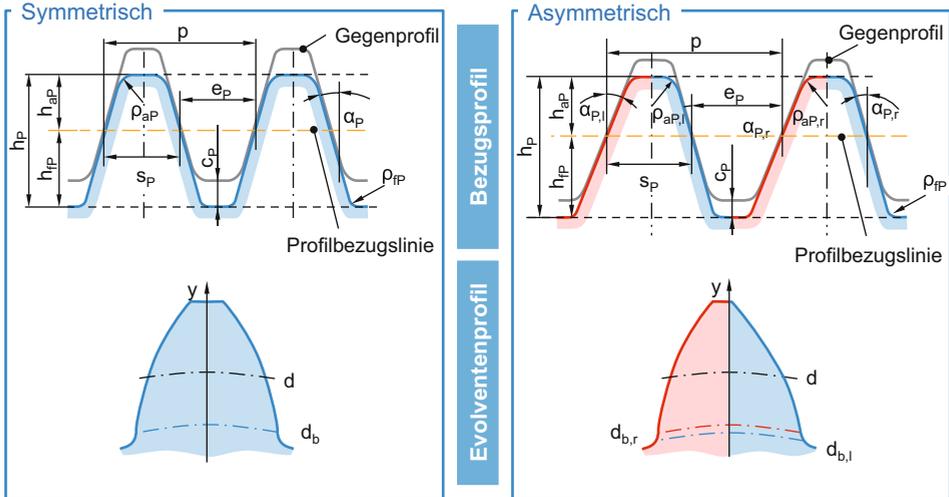
Das theoretische Herstellprinzip eines Evolventenprofils basiert auf dem Abrollen einer Geraden auf dem Grundkreis der Verzahnung. Häufig wird dieser Zusammenhang anhand des Abwickelns eines straff gespannten Fadens von einer Scheibe mit dem Grundkreisdurchmesser veranschaulicht (Bild 2.10 links). Zusätzlich ist ein geradflankiges Werkzeugprofil (Bezugsprofil) dargestellt, welches die Evolvente tangiert. Bei Vorgabe eines Wälzvorschubes entspricht die Normale des Bezugsprofils, welches die Evolvente tangiert, stets dem straff gespannten Faden während des Abwickelns. Damit tangiert die Normale des Bezugsprofils den Grundkreis der Verzahnung. Die einzelnen Positionen der Werkzeugschneide in Abhängigkeit der abgewickelten Faden- bzw. Bogenlänge werden Wälzstellungen genannt. Dieses Prinzip wird als theoretisches Erzeugungsprinzip bezeichnet, da es in dieser Form in keiner Werkzeugmaschine umgesetzt wird. Dort wird hingegen das Bezugsprofil in Abhängigkeit von der rotatorischen Werkstückbewegung translatorisch verschoben (siehe Abschnitt 2.2.3.4). Die Gesamtheit der Einhüllenden aller Wälzstellungen entlang des Wälzvorschubs führt zur evolventischen Zahnflankenometrie (Bild 2.10 rechts).



**Bild 2.10** Theoretisches Erzeugungsprinzip der Evolventenverzahnung

### 2.2.3.3 Das Bezugsprofil

Die Evolventengeometrie ist abhängig vom Grundkreisdurchmesser  $d_b$ . Es ergibt sich bei einem kleinen Grundkreis eine stärker gekrümmte Evolvente und bei einem großen Grundkreis eine schwächer gekrümmte Evolvente. Wird der Grundkreis unendlich groß (Zahnstange), so ergibt sich im Extremfall ein trapezförmiges Profil mit geraden Flanken, das als Zahnstangenprofil bezeichnet wird. Das die Zahnstange beschreibende trapezförmige Profil eignet sich zur Angabe bzw. Festlegung der geometrischen Grundgrößen der Evolventenverzahnung. Dieses Profil wird daher Bezugsprofil genannt. Das Bezugsprofil ist in DIN 867 [DIN86] für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern für den allgemeinen Maschinenbau und Schwermaschinenbau für einen Modulbereich von 1 bis 70 mm standardisiert (Bild 2.11 und Tabelle 2.2). Eine wichtige Grundgröße, die standardisiert ist, stellt der Modul dar. Der Modul  $m$  eines Zahnrads wird in Millimetern angegeben (siehe Formel 2.8 bis Formel 2.10 in Abschnitt 2.2.4.1). Der Modul ist keine Messgröße, sondern eine Bezugsgröße zur Beschreibung der Größe der Zähne eines Zahnrads. Die Profilbezugslinie ist definiert als diejenige Gerade des Bezugsprofils, auf der der Betrag der Zahndicke identisch zur Lückenweite des Zahns ist ( $s_p = e_p$ ).



**Bild 2.11** Bezugsprofile für Stirnradverzahnungen [DIN86]

**Tabelle 2.2** Bezeichnungen zu Bild 2.11 gemäß [DIN86]

Formelzeichen	Beschreibung	Vorschlagswert nach [DIN86]
$\rho$	Teilung	$\rho = m \times \pi$
$s_p$	Zahndicke	$s_p = \rho \div 2$
$e_p$	Lückenweite	$e_p = \rho \div 2$
$h_p$	Höhe des Bezugsprofils	$e_p = \rho \div 2$
$h_{aP}$	Kopfhöhe	$h_{aP} = m$
$h_{fP}$	Zahnfußhöhe	$h_{fP} = m + c_p$
$\rho_{fP}$	Fußrundungsradius	
$\rho_{aP}$	Kopfrundungsradius	
$c_p$	Kopfspiel	$c_p = 0,1 \dots 0,4 \times m$
$\alpha_p$	Bezugsprofilwinkel	

Weiterhin wird das Bezugsprofil durch die Vorgabe des Werkzeugprofilwinkels  $\alpha_p$  beschrieben, der dem Winkel zwischen der Normalen zur Profilbezugslinie und der Flanke des Bezugsprofils entspricht. Die Wahl des Profilwinkels kann getrennt für die Links- und Rechtsflanke des Werkzeugprofils erfolgen. Aus dem Abwälzen mit einem asymmetrischen Bezugsprofil resultieren ebenfalls asymmetrische Zahnlückengeometrien. Die entsprechenden Verzahnungen werden asymmetrische Verzahnungen genannt. Auf der rechten Seite von Bild 2.11 ist ein asymmetrisches Bezugsprofil und darunter das entsprechende Zahnprofil dargestellt. Asymmetrische Verzahnungen können bei geeigneter Wahl des Werkzeugprofilwinkels unter anderem Vorteile hinsichtlich der Flankenpressung und Zahnfußtragfähigkeit (vgl. Abschnitt 2.2.4.3) im Vergleich zu symmetrischen Verzahnungen bieten (siehe auch Abschnitt 3.2.2) [BREC13].

Es ist möglich, mit einem einzigen Bezugsprofil verschiedene Stirnräder mit Evolventenprofil herzustellen, die den gleichen Modul sowie Eingriffswinkel aufweisen, unabhängig von ihrem Schrägungswinkel oder ihrer Zähnezahl. Daraus resultiert ein wirtschaftlicher Vorteil für die evolventische Zahnprofilform, da Ritzel und Rad einer Verzahnung mit demselben Werkzeug gefertigt werden können. Das Bezugsprofil ist derart definiert, dass es für beide Räder einer Paarung symmetrisch zur Mittellinie des Zahns festgelegt ist. Zur geometrischen Beschreibung des Bezugsprofils sind grundsätzlich die Größen Profilwinkel  $\alpha_p$ , Teilung  $p$  bzw. Modul  $m$ , Zahnhöhe  $h_p$ , Zahnkopfhöhe  $h_{ap}$  sowie Angaben zu einer möglichen Verschiebung der Profilbezugslinie notwendig. Darüber hinaus wird insbesondere die Gestalt des Zahnfußes durch den Kopfrundungsradius  $\rho_{ap}$  des Werkzeugs festgelegt. Für einige Größen sind Richtwerte in der Normung vorgesehen, die Tabelle 2.2 entnommen werden können. Die Herstellung einer Evolventenverzahnung erfolgt häufig mit standardisierten Werkzeugen.

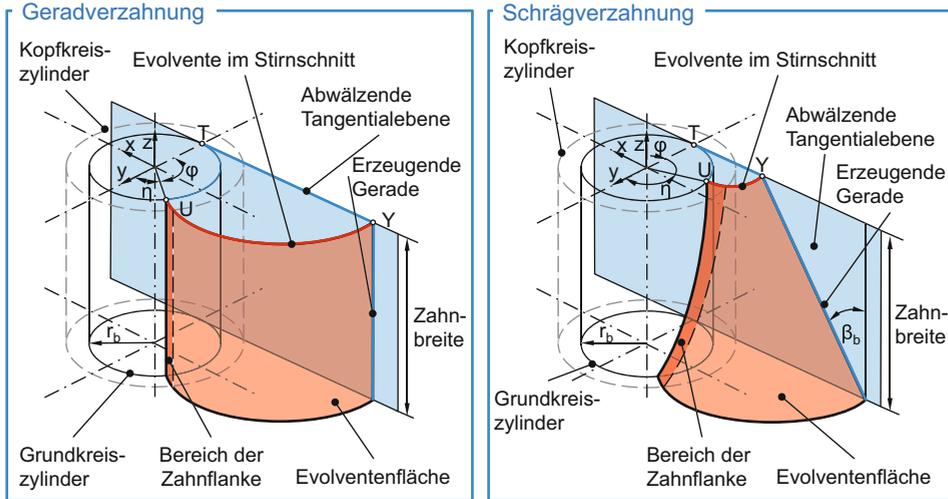
Das Bezugsprofil wälzt oder schneidet je nach Herstellverfahren in einem zwangsweise geführten Bewegungsvorgang mit dem zu fertigenden Zahnrad. Durch eine Rücknahme um das Kopfspiel  $c_p$  beim Werkzeug wird verhindert, dass bei der Fertigung des Zahnrads Bereiche des Zahnkopfes angeschnitten werden. Für das Bezugsprofil ist das Kopfspiel in DIN 867 genormt [DIN86]. Der übliche Wertebereich des Kopfspiels ist Tabelle 2.2 zu entnehmen.

Aus dem Bezugsprofil wird das Werkzeugprofil abgeleitet. Je nach Flankenform des eingesetzten Verzahnungswerkzeuges findet sich das Bezugsprofil in unterschiedlichen Schnitten wieder. Ein Beispiel stellen schneckenförmige Werkzeuge wie z.B. Wälzfräser dar. Bei der Erzeugung dieser Werkzeuge wird der Werkzeug-Stirnschnitt mit einem Bezugsprofil durch Abwälzen erzeugt. Ein weiteres Beispiel stellen ZN-Schnecken dar, bei denen sich das Bezugsprofil im Normalschnitt abbildet. Die jeweiligen Werkzeugformen werden bei der Umsetzung des praktischen Herstellprinzips der Evolvente in Werkzeugmaschinen verwendet.

#### 2.2.3.4 Das praktische Herstellprinzip des Evolventenprofils

Das theoretische Herstellprinzip der Evolventen lässt sich in einer Werkzeugmaschine nicht realisieren. Daher wird eine Transformation des Werkzeug-Wälzschubs in zwei miteinander gekoppelte Bewegungen vorgenommen. Das Werkzeugbezugsprofil bewegt sich translatorisch in tangentialer Richtung zum Grundkreis mit dem Wälzvorschub. Gleichzeitig rotiert das Zahnrad mit einer wälzgekoppelten Rotationsgeschwindigkeit (Bild 2.12 links). Die Kombination aus Translation und Rotation bildet das theoretische Herstellprinzip ab und lässt sich mit unterschiedlichen Verfahrenskinetiken realisieren. Anhand des Beispiels Wälzfräsen (Bild 2.12 rechts) wird verdeutlicht, dass durch die gleichzeitige, abwälzende Bewegung von Werkstück und Schnecke die Form der Evolvente kontinuierlich im Hüllschnittverfahren erzeugt wird [SULZ73].





**Bild 2.13** Evolventenfläche einer Stirnradverzahnung

Die Evolventenfläche einer Schrägverzahnung entsteht analog zur Vorgehensweise bei Geradverzahnungen. Aufgrund des Schrägungswinkels wird die Evolvente an unterschiedlichen Orten in axialer Richtung gebildet, was eine dreidimensionale Betrachtung erfordert. Dazu wird bei der Erzeugung der Flankenfläche in axialer Richtung zusätzlich der Schrägungswinkel am Grundkreis  $\beta_b$  berücksichtigt. Der Grundkreisschrägungswinkel bewirkt eine Verdrehung der Evolvente auf dem Grundzylinder [DIN87, ISO14] (siehe Bild 2.13 rechts).

Die räumliche Erzeugung der Zahnradflanke lässt sich in der Werkzeugmaschine durch den Axialvorschub erreichen. Über der Zahnbreite wird kontinuierlich die Evolvente erzeugt. Zur Erzeugung einer Schrägverzahnung wird das Werkzeug entsprechend um seine Achse verkippt, bis die Normalschnitte von Werkzeug und Werkstück übereinanderliegen (siehe Kapitel 4).

## 2.2.4 Geometrische Größen der Evolventenverzahnung

### 2.2.4.1 Modul und Teilung

Eine grundlegende geometrische Größe zur Beschreibung von Verzahnungen ist der Modul  $m$ . Der Modul stellt keine Messgröße, sondern eine Bezugsgröße dar. Grundsätzlich wird der Modul aus dem Quotienten von Normalteilung  $p_n$  und der Kreiszahl  $\pi$  gebildet und in der Praxis häufig aus dem Teilkreisdurchmesser  $d$ , Schrägungswinkel  $\beta$  und der Zähnezahl  $z$  ermittelt. Üblicherweise wird der Modul im Normalschnitt der Verzahnung angegeben.

$$m_n = \frac{d \cdot \cos \beta}{z} = \frac{p_n}{\pi} \quad (2.8)$$

Der Modul  $m_o$  des Bezugsprofils entspricht dem Modul im Normalschnitt (Normalmodul)  $m_n$  der Stirnradverzahnung. Der Stirnmodul  $m_t$  ergibt sich im Stirnschnitt der Verzahnung und kann nach folgender Formel berechnet werden.

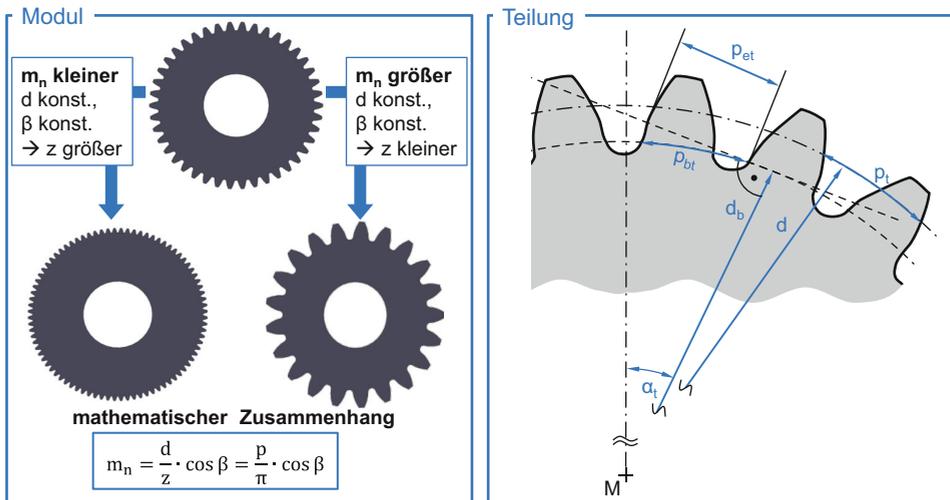
$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{d}{z} \quad (2.9)$$

Für ein schrägverzahntes Stirnrad wird der Modul im Achsschnitt (Axialmodul)  $m_x$  nach Formel 2.10 berechnet. Für Geradverzahnungen ist der Axialmodul nicht definiert [DIN87, ISO14].

$$m_x = \frac{m_n}{\sin |\beta|} \quad (2.10)$$

Aus der Anforderung an eine gleiche Zahnstückenteilung ergibt sich, dass die Zahnräder einer Paarung den gleichen Modul besitzen müssen, um miteinander kämmen zu können. Hierzu sind in der DIN 780 [DIN77] Modulreihen aufgeführt, die für Stirnrad- und Zylinderschneckengetriebe aller Art verwendet werden. Als Modulreihen existieren Vorzugsreihen (Reihe 1) und Nebenreihen (Reihe 2) sowie Werte für Sonderzwecke. Durch diese Rangordnung soll eine Beschränkung der Anzahl der für die Herstellung von Stirnrädern erforderlichen Werkzeuge und Prüfmittel erreicht werden. Die Verwendung von Werten der Modulreihen ist nicht bindend. So kann es je nach Anwendung (z. B. größere Lose in der Serienfertigung) sinnvoll und wirtschaftlich sein, von den Werten der Modulreihen abzuweichen. Bei konstanten Bauraumbedingungen führt eine Vergrößerung des Moduls zu einer geringeren Zähnezahl und einer größeren Zahndicke.

Die Teilung  $p$  („pitch“, englisch für Teilung) ist definiert als der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden gleichen Flanken. Ohne weitere Angabe entspricht die Teilung  $p$  dem Abstand von zwei Rechts- oder zwei Linksflanken auf dem Teilkreis. In Bild 2.14 sind die Zusammenhänge im Stirnschnitt dargestellt.



**Bild 2.14** Moduleinfluss und Teilungsgrößen am Zahnrad

Damit ein Zahnradpaar abwälzen kann, müssen die Teilungen der beiden Räder identisch sein:  $p_{1t} = p_{2t} = p_t$ . Insbesondere für die Vorgabe von Toleranzen ist dieser Zusammenhang wichtig. Bei Teilungsabweichungen, zum Beispiel durch Teilungsfehler bei diskontinuierlichen Fertigungsverfahren, können die Zahnräder unruhig laufen oder sogar verklemmen. Mit Formel 2.11 wird die Stirnteilung  $p_t$  am Teilkreis berechnet.

$$p_t = \pi \cdot \frac{d}{z} = \pi \cdot \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (2.11)$$

Neben dem Teilkreisdurchmesser lässt sich die Teilung auf beliebigen anderen Durchmessern durch Vorgabe des jeweiligen Bezugsdurchmessers  $d_y$  angeben. Es ergeben sich für jeden Bezugsdurchmesser jeweils unterschiedliche Teilungswerte. Die Grundkreisteilung im Stirnschnitt  $p_{bt}$  ist der Abstand zweier benachbarter Zähne auf dem Grundkreis und entspricht der Stirneingriffsteilung  $p_{et}$  entlang der Eingriffsstrecke.

$$p_{bt} = p_{et} = \frac{d_b \cdot \pi}{z} = p_t \cdot \cos \alpha_t \quad (2.12)$$

Über den Schrägungswinkel lässt sich die Stirnteilung in die Normalteilung umrechnen. Dieser Zusammenhang gilt für jegliche Teilungskennwerte. Die Normalteilung entspricht der Länge des Schraubenlinienbogens zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichen Flanken auf dem Teilkreiszyylinder im Normalschnitt.

$$p_n = p_t \cdot \cos \beta = m_n \cdot \pi \quad (2.13)$$

Die Grundzylinder-Normalteilung  $p_{bn}$  ist der Abstand zwischen zwei parallelen Tangenten, die zwei aufeinanderfolgende Flanken berühren. Er entspricht der Normaleingriffsteilung  $p_{en}$ .

$$p_{bn} = p_{en} = p_n \cdot \cos \alpha_n \quad (2.14)$$

### 2.2.4.2 Zähnezahzahl und Übersetzungsverhältnis

Die Zähnezahlen einer Zahnradpaarung werden gewählt, um ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis zu realisieren. Zur Beschreibung des Verhältnisses der Zähnezahlen von Großrad und Kleinrad wird das Zähnezahlverhältnis  $u$  definiert:

$$u = \frac{z_{\text{Großrad}}}{z_{\text{Kleinrad}}} \quad (2.15)$$

Aus dem Verzahnungsgesetz wurde in Abschnitt 2.1 abgeleitet, dass die Zähnezahlen zweier Zahnräder im gleichen Verhältnis wie die Durchmesser an einem Berührungspunkt stehen. Daraus folgt das Übersetzungsverhältnis  $i$ :

$$i = -\frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2.16)$$

Der Index 1 entspricht dem treibenden Rad und Index 2 dem getriebenen Rad. Ein betragsmäßiges Übersetzungsverhältnis von  $|i| > 1$  beschreibt eine Übersetzung ins Langsame (Untersetzung), ein betragsmäßiges Übersetzungsverhältnis von  $|i| < 1$  eine Übersetzung ins Schnelle. Das Gesamtübersetzungsverhältnis bei mehrstufigen Getriebezügen berechnet sich aus dem Produkt der Einzelübersetzungsverhältnisse.

Definitionsgemäß ist bei Außenradverzahnungen die Zähnezahlnzahl positiv, bei Innenradverzahnungen negativ. Damit können Drehrichtungen, Krafrichtungen und Leistungsflüsse in Zahnradgetrieben vorzeichenrichtig betrachtet werden. Dies entspricht der Vorstellung, dass beim Übergang von einem Außenrad auf ein Hohlrad der Raddurchmesser vergrößert wird, bis zunächst bei  $d = +\infty$  der Grenzfall der Zahnstange mit  $z = \infty$  erreicht wird. Wird die Zahnstange weiter gekrümmt, ändert sich der Raddurchmesser im Übergang auf  $-\infty$  und nimmt eine endliche negative Größe an. Bei einem Hohlrad ergeben sich somit bei den Berechnungen für alle von der Zähnezahlnzahl abhängigen Größen negative Werte. Bei einem Innenradpaar sind außerdem das Zähnezahlnzahlverhältnis  $u$  und der Achsabstand negativ [DIN87, ISO14].

Neben dem Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder im Eingriff kann das Übersetzungsverhältnis ebenfalls für die Fertigung eines Zahnrads mit einem Werkzeug definiert werden, um die Drehzahlverhältnisse in der Fertigung vorzugeben. Wird ein schneckenförmiges Werkzeug verwendet, so gilt Formel 2.17, in der  $z_0$  die Gangzahl des eingesetzten Werkzeuges und  $z$  die Zähnezahlnzahl des zu erzeugenden Zahnrads beschreibt.

$$i = \frac{z}{z_0} = \frac{n_0}{n} \quad (2.17)$$

### 2.2.4.3 Eingriffswinkel und Überdeckungsgrad

Aus dem praktischen Erzeugungsprinzip der Evolventenverzahnung folgt, dass der Profilwinkel ( $\alpha_p$ ) des Werkzeugbezugsprofils die Steigung und damit die Form der Evolvente maßgeblich beeinflusst (Formel 2.7). Wird der Profilwinkel des Werkzeuges vergrößert, so nimmt der Grundkreisdurchmesser ab und die Zahndicke nimmt zu. Im Unterschied zur Profilverschiebung verändert eine Modifikation des Profilwinkels vollständig die Evolventenform der Zahnflanke.

Für den allgemeinen Fall ist der Eingriffswinkel als spitzer Winkel zwischen der Evolvententangente am Teilkreis und dem Radiusmittelpunktstrahl durch diesen Punkt festgelegt. Die Ermittlung des Winkels kann in unterschiedlichen Schnittebenen erfolgen. Der Eingriffswinkel im Stirnschnitt  $\alpha_{yt}$  kann an einem beliebigen Zylinder mit dem Durchmesser  $d_y$  aus dem Eingriffswinkel  $\alpha_{yn}$  im Normalschnitt bestimmt werden.

$$\tan \alpha_{yt} = \frac{\tan \alpha_{yn}}{\cos \beta_y} \quad (2.18)$$

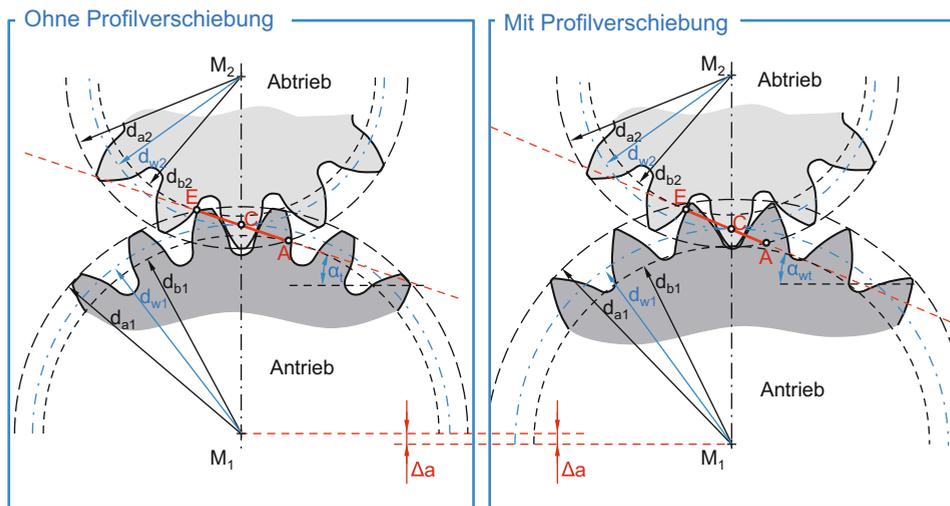
Durch die Abwälzkinematik entspricht der Profilwinkel  $\alpha_{n0}$  des Werkzeugbezugsprofils in der Regel dem Eingriffswinkel im Normalschnitt der Verzahnung  $\alpha_n$ . Unter bestimmten Umständen kann es jedoch sinnvoll sein, dass der Profilwinkel von Werkzeug und Zahnrad nicht identisch ist. Ein Grund hierfür können zum Beispiel unzureichende Standzeiten der eingesetzten Werkzeuge oder Qualitäten der gefertigten Bauteile sein. In diesem Fall wird eine Wälzkreisverlegung vorgenommen. Die Modifizierung von Modul und Eingriffswinkel zwischen Werkzeug und Werkstück ist möglich, sofern Formel 2.19 erfüllt ist. Damit verbunden ist eine konstante Teilung von Werkzeug und Verzahnung (siehe Formel 2.13).

$$m_{n0} \cdot \cos \alpha_{n0} = m_n \cdot \cos \alpha_n \quad (2.19)$$

Der Normaleingriffswinkel entspricht für eine Verzahnung ohne Profilverschiebung dem Winkel, den die Eingriffsstrecke  $\overline{AE}$  mit der horizontalen Tangente am Grundkreis bildet

(Bild 2.15). Ist die Verzahnung zur Anpassung des Achsabstands mit einer Profilverziehung  $x$  (siehe Abschnitt 2.2.4.5) ausgelegt, so wird eine Veränderung der Länge der Eingriffsstrecke sowie deren Neigung bewirkt. Der Eingriffswinkel  $\alpha_t$  wird in den Betriebseingriffswinkel  $\alpha_{wt}$  überführt. Dadurch ändert sich die Form der Evolventen nicht, es wird jedoch ein anderer Abschnitt der Evolvente genutzt. Der Betriebseingriffswinkel wird nach folgender Formel berechnet:

$$\operatorname{inv} \alpha_{wt} = \operatorname{inv} \alpha_t + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha_n \quad (2.20)$$

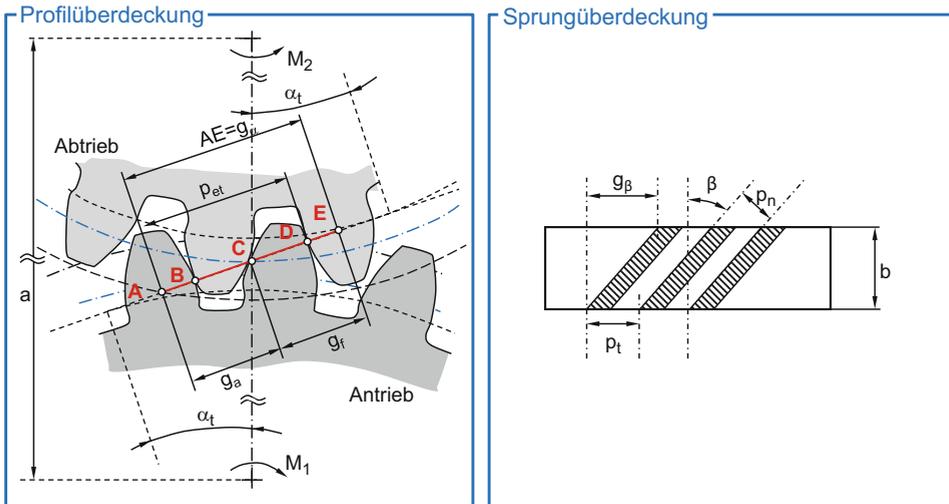


**Bild 2.15** Definition der Eingriffsstrecke auf der Eingriffslinie

Wenn die Summe der Profilverziehung gleich null ist, so ist aus Formel 2.20 ersichtlich, dass  $\alpha_{wt} = \alpha_t$  ist. Für diesen Fall entspricht der Wälzkreisdurchmesser dem Teilkreisdurchmesser.

Der Eingriffswinkel ist nach DIN 867 [DIN86] mit  $\alpha_n = 20^\circ$  genormt. Je nach Auslegungsziel (Geräuschverhalten, Tragfähigkeit) kann der Eingriffswinkel angepasst werden. Bei einer Erhöhung des Eingriffswinkels wird durch die steigenden Krümmungsradien und Zahnfußdickensehnen bei gleicher Belastung die Beanspruchung gesenkt. Eine Verringerung des Eingriffswinkels kann durch die Zunahme der Anzahl sich im Eingriff befindender Zahnpaare eine Geräuschreduktion bewirken.

Um eine gleichförmige Bewegungsübertragung zu gewährleisten, muss das nachfolgende Zahnpaar eines Zahnrads im Eingriff sein, bevor das vorhergehende Zahnpaar nicht mehr im Eingriff ist. Diese Bedingung wird realisiert, indem die Länge der Eingriffsstrecke  $AE$  größer als die Eingriffsteilung im Stirnschnitt  $p_{et}$  gewählt wird (Bild 2.16 links). Mit dieser Bedingung verbunden ist die Definition der Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  der Verzahnung, die für den Stirnschnitt die durchschnittliche Anzahl sich gleichzeitig im Eingriff befindender Zähne wiedergibt. Definitionsgemäß ist der Wert der Profilüberdeckung positiv und für Geradverzahnungen größer eins (Bild 2.16 links).



**Bild 2.16** Bestimmungsgrößen der Überdeckung (Quelle: DIN 3960)

$$\overline{\epsilon}_\alpha = \frac{\overline{AE}}{p_{et}} > 1 \quad (2.21)$$

Aus Bild 2.15 ist ersichtlich, dass eine Verlängerung der Eingriffsstrecke  $\overline{AE}$  möglich ist, indem entweder der Kopfkreisdurchmesser  $d_a$  erhöht oder der Eingriffswinkel  $\alpha_t$  bzw.  $\alpha_{wt}$  verringert wird. Eine Verlängerung der Eingriffsstrecke hat zur Folge, dass sich die Profilüberdeckung vergrößert, da die Stirneingriffsteilung unverändert bleibt.

Bei asymmetrischen Verzahnungen kann der Vorteil zweier unterschiedlicher Eingriffswinkel ausgenutzt werden, um einerseits eine beanspruchungsoptimierte Zahndicke und Flankenform auf der Hauptlastseite zu gewährleisten und gleichzeitig eine ausreichende Profilüberdeckung zu realisieren. Durch ein asymmetrisches Profil wird eine größere mögliche Zahnhöhe erreicht, da die Zahnkopfdicke durch die Senkung des Eingriffswinkels auf der unbelasteten Flanke des Zahnrads bei größeren Zahnhöhen vergrößert und damit ein Spitzzahn (Gefahr des durchgehärteten Zahnkopfes) vermieden wird [BREC13].

Bei einer Schrägverzahnung befinden sich aufgrund des Schrägungswinkels zusätzliche Zähne im Eingriff, wodurch die zu übertragende Last auf weitere Zahnpaare verteilt wird. Eine Kenngröße zur Beschreibung der durch den Schrägungswinkeleinfluss sich in Eingriff befindenden Zahnpaare ist die Sprungüberdeckung  $\epsilon_\beta$ . Zusammen mit der Profilüberdeckung  $\epsilon_\alpha$  ergibt sich die Gesamtüberdeckung  $\epsilon_\gamma$ . Für Geradverzahnungen gilt:  $\epsilon_\beta = 0$ . Somit ist die Gesamtüberdeckung für Schrägverzahnungen größer als bei Geradverzahnungen.

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \quad (2.22)$$

Die geometrischen Zusammenhänge zur Berechnung der Profil- und Sprungüberdeckung sind in Bild 2.16 dargestellt. Die Profilüberdeckung kann aus dem Verhältnis der Länge der Eingriffsstrecke  $AE$  und der Stirneingriffsteilung  $p_{et}$  berechnet werden. Die Länge der Eintritts-Eingriffsstrecke  $g_a$  und der Austritts-Eingriffsstrecke  $g_t$  ist abhängig von den jeweiligen Kopf-Nutzkreisdurchmessern.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{AE}}{p_{et}} = \frac{g_\alpha}{p_{et}} = \frac{g_f + g_a}{p_{et}} \quad (2.23)$$

$$g_a = \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot \left( \pm \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} - d_{b1} \cdot \tan \alpha_{wt} \right) \quad (2.24)$$

$$g_f = \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \left( \pm \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - d_{b2} \cdot \tan \alpha_{wt} \right) \quad (2.25)$$

Die Sprungüberdeckung ist definiert als das Verhältnis der Zahnbreite  $b$  zur Axialteilung  $p_x$  und gibt die durchschnittlich im Eingriff befindliche Anzahl der Flankenpaare in Axialrichtung an. Schrägverzahnungen sind durch den größeren Überdeckungsgrad gut für Anwendungen mit einer hohen Anforderung an die Laufruhe geeignet.

$$\varepsilon_\beta = \frac{b}{p_x} = \frac{g_\beta}{p_t} = \frac{b \cdot \sin |\beta|}{m_n \cdot \pi} = \frac{b \cdot \sin |\beta|}{p_n} = \frac{b \cdot \tan \beta_b}{p_{et}} \quad (2.26)$$

#### 2.2.4.4 Durchmesser

Die Zusammenhänge zwischen den Grundgrößen der Verzahnung und den verschiedenen Durchmessern werden anhand der Darstellung in Bild 2.17 beschrieben. Der Teilkreisdurchmesser  $d$  ist der Durchmesser, bei dem die Tangente an der Evolvente mit der Verbindungslinie zum Mittelpunkt um den aus dem Bezugsprofil abgeleiteten Profilwinkel  $\alpha_n$  geneigt ist. Er entspricht dem Durchmesser des Zahnrads, an dem der Zahnlückenbogen und die Zahndickensehne denselben Betrag aufweisen. Der Teilkreisdurchmesser ist eine reine Bezugsgröße und nicht messtechnisch erfassbar.

$$d = z \cdot \frac{m_n}{\cos \beta} = z \cdot \frac{p_n}{\pi \cdot \cos \beta} \quad (2.27)$$

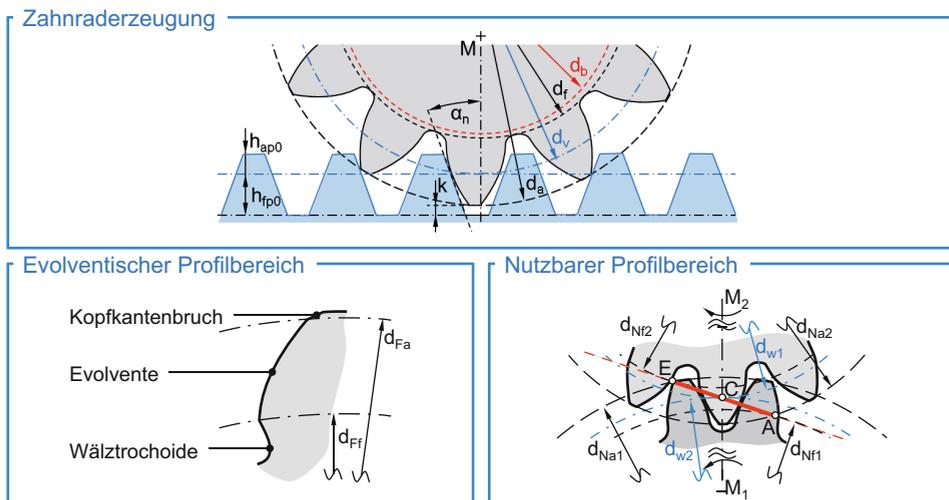


Bild 2.17 Durchmesser der Verzahnung

Der Grundkreisdurchmesser  $d_b$  ist für die Erzeugung der Evolvente und somit für die Form des Zahns maßgebend, da am Grundkreisdurchmesser die Evolvente beginnt.

$$d_b = d \cdot \cos \alpha_t = \frac{z \cdot m_n \cdot \cos \alpha_t}{\cos \beta} \quad (2.28)$$

Sowohl der Grundkreis  $d_b$  als auch der Teilkreisdurchmesser  $d$  sind von der Profilverschiebung  $x$  unabhängig. Asymmetrische Verzahnungen besitzen durch die Abhängigkeit des Grundkreises vom Eingriffswinkel  $\alpha_t$  im Gegensatz zu symmetrischen Verzahnungen zwei unterschiedliche Grundkreise  $d_{b,r}$  und  $d_{b,l}$  für die rechte und linke Flanke des asymmetrischen Zahns (siehe Bild 2.11).

Bei nicht profilverschobenen Verzahnungen ( $V_{\text{null}}$ -Verzahnung) mit  $x = 0$  entspricht der Teilkreisdurchmesser  $d$  beim Abwälzen mit dem Bezugsprofil dem V-Kreisdurchmesser  $d_v$  (Bild 2.18). Der analoge Zusammenhang gilt für den Erzeugungs-V-Kreisdurchmesser  $d_{ve}$ . Der V-Kreisdurchmesser wälzt mit der Profilbezugslinie des Verzahnungs-Bezugsprofils ab.

$$d_v = d + 2 \cdot x \cdot m_n \quad (2.29)$$

$$d_{ve} = d + 2 \cdot x_e \cdot m_n \quad (2.30)$$

Vom V-Kreisdurchmesser unterschieden werden die Wälzkreisdurchmesser  $d_{w1}$ , die sich aus der Radpaarung als Schnittpunkt der Eingriffsstrecke mit der Verbindung der Radachsen ergeben. Als Wälzzylinder werden bei einem Stirnradpaar diejenigen Zylinder (Kreise) um die Radachse bezeichnet, die gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben. Beide Kreise berühren sich in der Wälzachse. Im Stirnschnitt betrachtet berühren sich beide Kreise im Wälzpunkt C (Bild 2.17).

$$d_{w1} = \frac{2 \cdot z_1}{z_1 + z_2} \cdot a = \frac{2 \cdot a}{u + 1} = d_1 \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} = \frac{d_{b1}}{\cos \alpha_{wt}} \quad (2.31)$$

$$d_{w2} = \frac{2 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \cdot a = \frac{2 \cdot a \cdot u}{u + 1} = d_2 \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_{wt}} \quad (2.32)$$

Das Zahnprofil wird in radialer Richtung vom Kopfkreis  $d_a$  (Formel 2.33) und Fußkreis  $d_f$  (Formel 2.34) begrenzt. Bei Außenverzahnungen liegt der Punkt des Zahnprofils mit dem geringsten Durchmesser auf dem Fußkreis, der Punkt des größten Durchmessers am Kopfkreis. Für Innenverzahnungen gilt der umgekehrte Fall. Kopf- und Fußkreisdurchmesser sind von der Profilverschiebung abhängig und können direkt mit Messmitteln geprüft werden. Für ein Standardbezugsprofil nach DIN 867 [DIN86] können die Durchmesser  $d_a$  und  $d_f$  nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$d_a = d + 2 \cdot h_a = d + 2 \cdot m_n \cdot \left( x + \frac{h_{ap}}{m_n} + k \right) \quad (2.33)$$

$$d_f = d - 2 \cdot h_f = d - 2 \cdot m_n \cdot \left( -x + \frac{h_{fp}}{m_n} + \frac{c}{m_n} \right) \quad (2.34)$$

Mit  $k$  wird der Kopfhöhenänderungsfaktor bezeichnet. Der Kopfspielfaktor  $c^* = c/m_n$  sollte einen Mindestwert nicht unterschreiten. Gängige Grenzen liegen im Bereich von  $c^* = 0,1 \dots 0,4$ .

Der Abschnitt der Evolventenflanke, welcher vom Werkzeug bei der Fertigung erzeugt wird, ist von den Formkreisen begrenzt. Dieser Bereich umfasst den maximal nutzbaren Bereich der Zahnflanken. In der Regel ist der Kopfformkreis  $d_{Fa}$  mit dem Kopfkreisdurchmesser  $d_a$  identisch. Die Berechnung des Kopfformkreises  $d_{Fa}$  wird nach Formel 2.35 durchgeführt und berücksichtigt den Radialbetrag des Kopfkantenbruches oder der Kopfkantenrundung  $h_k$ .

$$d_{Fa} = d_a - 2 \cdot h_k \quad (2.35)$$

Der Fuß-Formkreisdurchmesser begrenzt die nutzbare Zahnflanke am Zahnfuß, bevor die aus dem Bezugsprofil resultierende Fußrundung (Wälztröchoide) beginnt. Damit ist der Fußformkreis durch das jeweilige Verzahnverfahren definiert. Die Berechnung des Fuß-Formkreisdurchmessers ist abhängig vom eingesetzten Fertigungsverfahren [DIN87, ISO14].

Der Anfangs- und Endpunkt der Eingriffsstrecke wird von den Nutzkreisen begrenzt. Zwischen den Nutzkreisen liegt der beim Abwälzvorgang von Rad und Ritzel aktive Bereich der Zahnflanke vor. Die Fußnutzkreise können nach Formel 2.36 und Formel 2.37 berechnet werden. Liegt am Gegenradfuß kein Fußfreischnitt bzw. Unterschnitt vor, so fällt der Kopfnutzkreis  $d_{Na}$  mit dem Kopfformkreis  $d_{Fa}$  zusammen (Bild 2.17). Liegt ein Unterschnitt am Gegenrad vor, so wird die Eingriffslinie verkürzt und der Kopfnutz- sowie Kopfformkreis unterscheiden sich. Der Durchmesser kann für diesen Fall trigonometrisch über die geometrischen Beziehungen an der Eingriffsstrecke ermittelt werden. Eine Abschätzung des  $d_{Na}$  ist in diesem Fall bei Kenntnis der Kopfrundung  $\rho_{ap}$  gemäß Formel 2.38 möglich.

$$d_{Nf1} = \sqrt{\left(2 \cdot a \cdot \sin \alpha_{wt} - \frac{z_2}{|z_2|} \cdot \sqrt{d_{Na2}^2 - d_{b2}^2}\right)^2 + d_{b1}^2} \quad (2.36)$$

$$d_{Nf2} = \frac{z_2}{|z_2|} \sqrt{\left(2 \cdot a \cdot \sin \alpha_{wt} - \sqrt{d_{Na1}^2 - d_{b1}^2}\right)^2 + d_{b2}^2} \quad (2.37)$$

$$d_{Na} \approx d_a - \rho_{ap} \cdot (1 - \sin \alpha_{an}) \quad (2.38)$$

### 2.2.4.5 Profilverschiebung und Achsabstand

Die Profilverschiebung beschreibt den Abstand der Profilbezugslinie vom Teilkreiszyylinder und ist ein häufig angewendetes Mittel zur Einhaltung vorgegebener Achsabstände. Während des Auslegungsprozesses eines Zahnradgetriebes wird meist der Achsabstand durch das Gehäuse vorgegeben. Unter Berücksichtigung einer zwingend ganzzahligen Zähnezahl wird die Profilverschiebung dazu verwendet, den gegebenen Achsabstand einzuhalten. Das Abwälzen der Profilbezugslinie erfolgt für ein profilverschobenes Zahnrad nun nicht mehr auf dem Teilkreisdurchmesser  $d$ , sondern auf dem nun davon abweichenden V-Kreisdurchmesser  $d_v$  (Formel 2.29) bzw. mit Bezug zur Zahnradfertigung auf dem Erzeugungs-V-Kreisdurchmesser  $d_{ve}$  (Formel 2.30, Bild 2.18).

Durch die Profilverschiebung wird die Evolvente nicht verändert. Es ändert sich lediglich der Abschnitt der Evolvente, welcher das Flankenprofil beschreibt. Dadurch bewirkt die Profilverschiebung neben der Realisierung gewünschter Achsabstände ebenfalls eine Veränderung der Zahnform und der Eingriffsverhältnisse (Tragfähigkeit, Geräuschanregung)

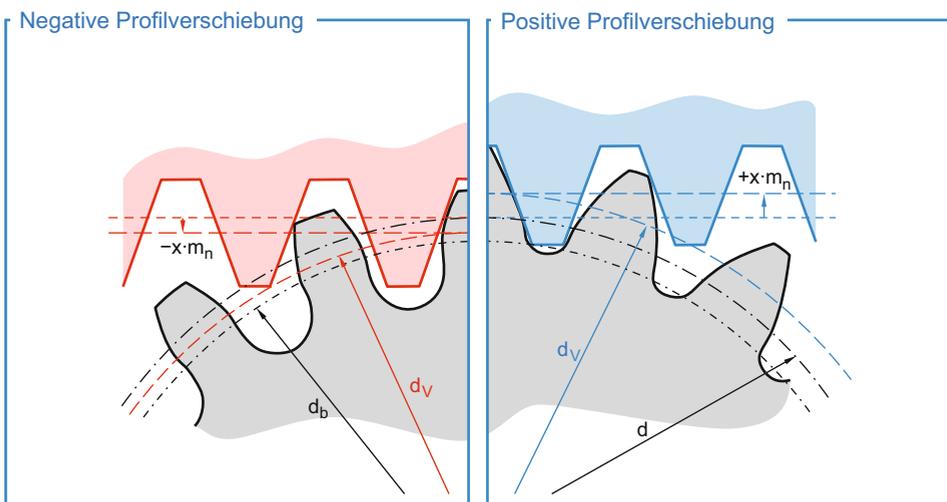
und kann gezielt zur Verbesserung des Einsatzverhaltens eingesetzt werden. Eine Steigerung der Tragfähigkeit wird dadurch erreicht, dass insbesondere die Zahnform und die Zahndicke durch die Profilverschiebung beeinflusst werden können. Generell machen sich die Profilverschiebungen bei kleinen Zähnezahlen in ihrer Auswirkung auf die Zahnform stärker bemerkbar als bei großen Zähnezahlen.

Die Profilverschiebungssumme ergibt sich aus der Differenz zwischen idealem, sich aus den Teilkreisradien ergebenden Null-Achsabstand und dem konstruktiv vorgegebenen Achsabstand der beiden Zahnräder und kann beliebig auf die beiden Wälzpartner verteilt werden. Die Aufteilung ist je nach Auslegungsziel zu definieren. Empfehlungen für die Wahl der Profilverschiebungssumme und der Profilverschiebungen der einzelnen Zahnräder sind in DIN 3992 [DIN64] zu finden.

In der Regel wird die Profilverschiebung durch den Profilverschiebungsfaktor angegeben. Die Profilverschiebung ist das Produkt aus Profilverschiebungsfaktor  $x$  und Modul  $m_n$ . Zahnräder mit einer Profilverschiebung werden auch als V-Räder bezeichnet, Zahnräder ohne Profilverschiebung werden als Null-Räder bezeichnet. Eine positive Profilverschiebung liegt dann vor, wenn die Profilbezugslinie des Werkzeugs in Richtung des Kopfkreises verschoben ist. Diese Räder werden als  $V_{\text{plus}}$ -Räder bezeichnet. Wird die Profilbezugslinie in Richtung des Fußkreises verschoben, liegt eine negative Profilverschiebung vor und es handelt sich um ein  $V_{\text{minus}}$ -Rad (siehe Bild 2.19 und Tabelle 2.3).

**Tabelle 2.3** Fälle der Profilverschiebung

Null-Verzahnung	$x_1 = x_2 = 0$
V-Verzahnung	$(x_1 + x_2) \neq 0$
V-Null-Verzahnung	$x_1 + x_2 = 0$ und $x_1 = -x_2$
$V_{\text{minus}}$ -Verzahnung	$x_1 + x_2 < 0$
$V_{\text{plus}}$ -Verzahnung	$x_1 + x_2 > 0$



**Bild 2.18** Erzeugung der Profilverschiebung

In Bild 2.19 ist der Einfluss der Profilverschiebung auf die Zahnform dargestellt. Eine Zunahme der Profilverschiebung bewirkt, dass das Erzeugungsprofil in radialer Richtung nach außen verschoben wird. Damit nimmt der V-Kreisdurchmesser zu. Diese Verschiebung bewirkt eine Zunahme der Stirnzahndicke sowie eine Abnahme der Lückenweite. Außerdem wird der Krümmungsradius der Zahnflanke erhöht. Allerdings kann durch eine zu hohe Profilverschiebung die Zahnkopfdicke zu klein werden, sodass sich ein Spitzzahn ergibt. Dies ist zu vermeiden, da es während des Einsatzhärtens der Zahnräder zu einem Durchhärten der Zahnspitze kommen kann. Somit steigt die Gefahr, dass ein Teil des spröden Zahnkopfes im Betrieb abplatzt. Um dies zu verhindern, ist eine Mindestzahnkopfdicke durch eine Begrenzung der Profilverschiebung, des Kopfkreisdurchmessers sowie der Mindestzähnezahl einzuhalten. Nach [DIN87, ISO14] wird empfohlen, einen Wert von  $s_{an} = 0,2 \cdot m_n$  nicht zu unterschreiten (siehe Abschnitt 2.2.4.6 und Formel 2.51).

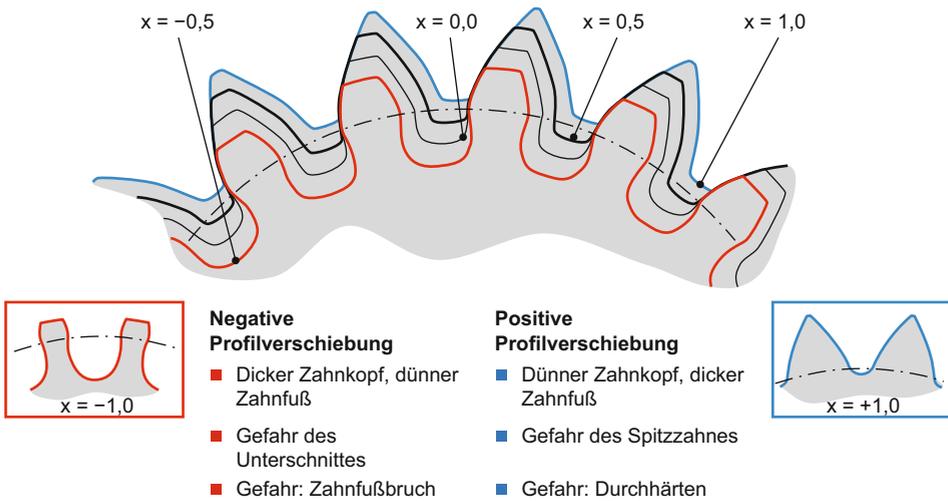
Je nach Auslegung kommt es bei einer zu hoch gewählten negativen Profilverschiebung zu einer Unterschneidung im Zahnfußbereich (Bild 2.19). Unterschneidung bedeutet, dass Teile der aktiven Evolvente durch das Abwälzen mit dem Bezugsprofil entfernt werden, da der Werkzeugzahnkopf die Evolvente im Fußbereich des Zahnrads schneidet. In diesen Bereichen ist im Betrieb kein Eingriff mehr möglich, da die Flankenform nicht mehr einer Evolvente entspricht. Dadurch wird die Eingriffsstrecke verkürzt, der Überdeckungsgrad verkleinert und das Widerstandsmoment im Zahnfuß durch eine Querschnittsverringerung geschwächt.

Eine Möglichkeit, den Unterschneidung zu vermeiden, stellt die Berücksichtigung einer Grenzzähnezahl in Kombination mit einer Mindestprofilverschiebung dar. Die Grenzzähnezahl  $z_g$  wird berechnet, indem für ein gegebenes Werkzeugprofil ohne Profilverschiebung der äußerste Eingriffspunkt auf der Eingriffslinie berechnet wird. Der Punkt liegt am Werkzeug auf der Höhe  $h_{Na0}$ . Hieraus lässt sich die minimale Zähnezahl ableiten, die mit diesem Werkzeugprofil erzeugt werden kann (siehe Formel 2.39). Die Zähnezahl lässt sich weiter eingrenzen und die Mindestprofilverschiebung  $x_{min}$  berechnen, ab der kein Unterschneidung auftritt [ROTH89]. Das Unterschreiten von  $z_g$  führt bei einem nicht profilverschobenen Zahnrad zu Unterschneidung.

$$z_g = \frac{2 \cdot \cos \beta \cdot (h_{Na0} - x \cdot m_n)}{m_n \cdot \sin^2 \alpha_n} \quad (2.39)$$

$$x_{min} = 1 - \frac{z}{z_g} \quad (2.40)$$

Die Radpaarungen werden analog zu den Bezeichnungen der einzelnen Räder in V-,  $V_{null}$ - sowie Null-Verzahnungen unterteilt. Diese Bezeichnungen decken alle Kombinationen von Verzahnungen mit oder ohne Profilverschiebung ab. Bei einer Null-Verzahnung sind beide Zahnräder ohne Profilverschiebung ausgeführt und es gilt  $x_1 = x_2 = 0$ . Eine V-Verzahnung liegt vor, wenn beide Zahnräder eine beliebige Profilverschiebung ungleich null ( $x_1 + x_2 \neq 0$ ) aufweisen. Wenn beide Zahnräder jeweils die vom Betrag her gleiche Profilverschiebung aufweisen, sich allerdings im Vorzeichen unterscheiden, handelt es sich um eine  $V_{null}$ -Verzahnung ( $x_1 + x_2 = 0$ ).



**Bild 2.19** Einfluss der Profilverschiebung auf die Zahnform

Wie in Abschnitt 2.2.4.3 angedeutet, bewirkt eine Profilverschiebung im Zahneingriff eine Überführung vom Eingriffswinkel in den Betriebseingriffswinkel, wodurch sich die Steigung der Eingriffslinie verändert. Weiterhin wird der Achsabstand verändert. Da der Grundkreis der Verzahnung von den Veränderungen unbeeinflusst ist, ändert sich die Form der Evolventen nicht, es wird lediglich ein anderer Abschnitt der Evolvente benutzt. Aufgrund der Äquidistanz der Evolvente zu sich selbst bleibt das Verzahnungsgesetz trotzdem erfüllt.

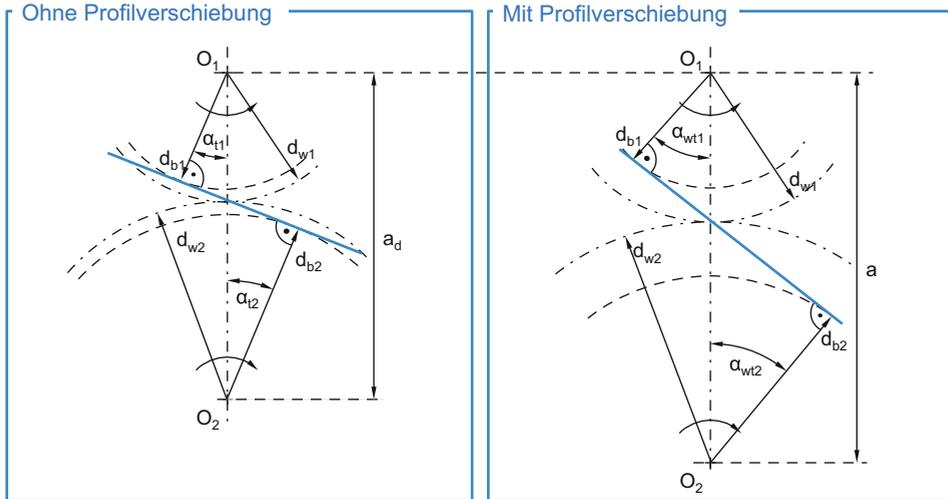
Sind Zähnezahlen, Schrägungswinkel, Profilverschiebungsfaktoren, Eingriffswinkel sowie der Modul gegeben, kann der Achsabstand unter Verwendung von Formel 2.9, Formel 2.18 und Formel 2.20 berechnet werden (Formel 2.41).

$$a = a_d \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} = \frac{m_n \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} \quad (2.41)$$

Der ideale Achsabstand wird auf Grundlage der vorliegenden, ganzzahligen Zähnezahl als Null-Achsabstand  $a_d$  bezeichnet. Er ergibt sich aus der Summe der Teilkreisradien der außenverzahnten Nullräder (siehe Formel 2.42). Bei nicht profilverschobenen Zahnrädern gilt  $a = a_d$ .

$$a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} = m_t \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{m_n \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos \beta} \quad (2.42)$$

Wird ein vom Null-Achsabstand abweichender konstruktiver Achsabstand  $a$  vorgegeben, ist ein Achsabstandsausgleich in Höhe der sich aus der Differenz der Achsabstände ergebenden Profilverschiebungssumme erforderlich. Für diesen Fall unterscheiden sich der Betriebseingriffswinkel und Stirneingriffswinkel:  $\alpha_{wt} \neq \alpha_t$  (Bild 2.20).



**Bild 2.20** Definition des Achsabstandes

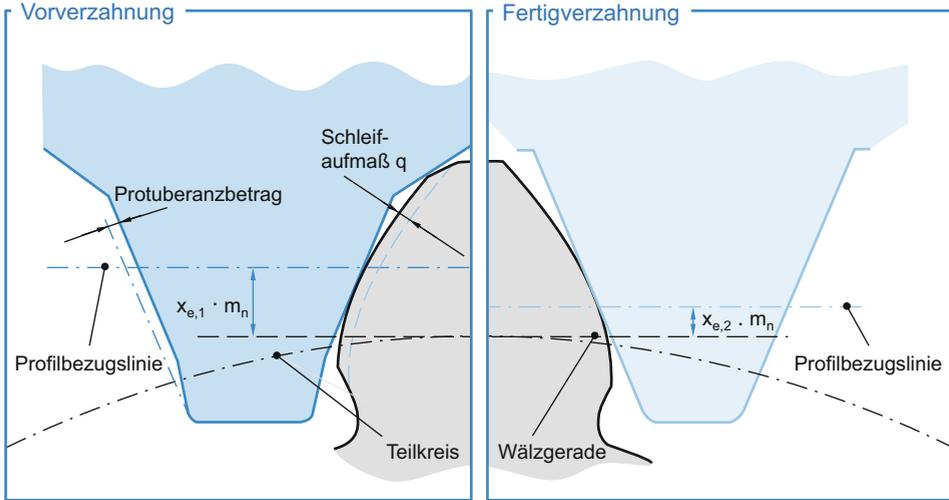
Eine Reduktion des Achsabstandes wird mit einer  $V_{\text{minus}}$ -Verzahnung realisiert. Hierbei wälzen V-Räder oder ein  $V_{\text{minus}}$ -Rad mit einem Null-Rad miteinander ab ( $x_1 + x_2 < 0$ ). Die Kopf- und Fußkreisdurchmesser werden verringert, wodurch die Gefahr eines Unterschnitts besteht. Bei einer  $V_{\text{plus}}$ -Verzahnung wird der Achsabstand aufgrund steigender Kopf- und Fußkreisdurchmesser vergrößert. Eine  $V_{\text{plus}}$ -Verzahnung liegt vor, wenn V-Räder oder ein  $V_{\text{plus}}$ -Rad mit einem Null-Rad gepaart werden, wobei sich ein Achsabstand einstellt, der größer ist als der Null-Achsabstand ( $x_1 + x_2 > 0$ ).

Wird ein höherer Abschnitt der Evolvente in Richtung Zahnkopf genutzt, verändern sich der Eingriffswinkel und somit auch die Eingriffslinie und -strecke. Eine Profilverschiebung bewirkt eine Veränderung des Eingriffswinkels  $\alpha_t$  zum Betriebseingriffswinkel  $\alpha_{wt}$  (siehe Abschnitt 2.2.4.3). Aufgrund des steigenden Eingriffswinkels ist die Eingriffslinie stärker geneigt und wird kürzer. Daher muss insbesondere darauf geachtet werden, dass die Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha$  nicht zu klein wird, um ein unterbrechungsfreies Abwälzen der Verzahnung zu gewährleisten (siehe Abschnitt 2.2.4.3).

Ähnlich wie bei einem Stirradpaar lässt sich der Achsabstand bei der Erzeugung zwischen Werkzeug und Verzahnung über die Erzeugungsprofilverschiebung  $x_e$  einstellen. Bild 2.21 zeigt ein zahnstangenförmiges Werkzeug im Eingriff mit der zu erzeugenden Verzahnung. Um eine Verzahnung zu erzeugen, ist bei wälzenden Herstellungsverfahren neben dem Werkzeugprofil und der Kopplung der Vorschübe der Achsabstand von Bedeutung. Der Achsabstand zwischen einem schneckenförmigen Erzeugungswerkzeug (Wälzfräser, Wälzschleifschnecke) lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$a_0 = \frac{(d_0 + d)}{2} + x_e \quad (2.43)$$

In Formel 2.43 stellt  $d_0$  den Mittenkreis- bzw. Bezugsdurchmesser am Werkzeug dar. Dieser Durchmesser entspricht dem um die Kopfhöhe  $h_{aP0}$  verminderten Außendurchmesser  $d_{a0}$  des Werkzeugs.



**Bild 2.21** Erzeugungprofilverschiebung bei der Herstellung von Verzahnungen

Allgemein ist der Erzeugungprofilverschiebungsfaktor  $x_e$  definiert als der um den Einfluss des Zahndickenabmaßes  $A_s$  sowie ein eventuell vorhandenes Schleifaufmaß  $q$  korrigierte Profilverschiebungsfaktor  $x$ . Das Zahndickenabmaß  $A_s$  ist vorzeichenbehaftet und in der Regel negativ. Bild 2.21 ist zu entnehmen, dass die Erzeugungswälzgerade und Profilbezugslinie des Werkzeugprofils den Abstand  $x_e \cdot m_n$  besitzen. Die Wälzgerade tangiert den Erzeugungswälzkreis, der dem Teilkreisdurchmesser  $d$  der Verzahnung entspricht. Für die Hartfeinbearbeitung ist gegenüber der protuberanzbehafteten Vorverzahnung eine Veränderung der Erzeugungprofilverschiebung sowie Kürzung des Bezugsprofils erforderlich, um das Schleifaufmaß zu zerspanen, ohne ebenfalls den Zahnfuß zu bearbeiten.

$$x_e = x + \frac{A_s}{2 \cdot m_n \cdot \cos \alpha_{n0}} + \frac{q}{\sin \alpha_{n0}} \quad (2.44)$$

#### 2.2.4.6 Lückenweiten, Zahndicken und Zahnweiten

Die Lückenweite  $e$  entspricht der Bogenlänge auf dem Teilkreis zweier benachbarter Zahnflanken, welche eine Zahnücke beschreiben. Bei Verwendung des Nenn-Profilverschiebungsfaktors  $x$  ergeben sich Nennwerte für die Lückenweite. Wird der Erzeugungprofilverschiebungsfaktor  $x_e$  verwendet, ergeben sich die Erzeugungswerte der Lückenweite. Dies gilt ebenso für die folgenden Formeln. Analog entspricht die Bogenlänge auf dem Teilkreis, welche innerhalb eines Zahnes liegt, der Zahndicke  $s_t$  (siehe Bild 2.22):

$$e_t = m_n \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_t \right) \quad (2.45)$$

$$s_t = m_n \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_t \right) \quad (2.46)$$

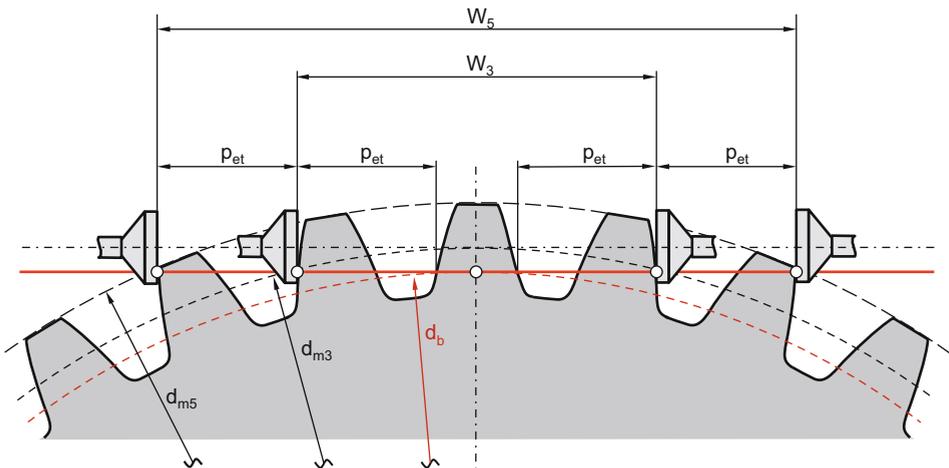


Die Zahnweite  $W_k$  (Formel 2.52) ist ein Prüfmaß in der Zahnradsfertigung und beschreibt den gemessenen Abstand zweier paralleler Ebenen, bei einem Außenrad über  $k$  Zähne, bei einem Hohlrad über  $k$  Zahnücken, die je eine Rechts- und eine Linksflanke im evolventischen Teil der Zahnflanke berühren [DIN87, ISO14]. Der Messkreisdurchmesser  $d_{mk}$  kann nach Formel 2.53 berechnet werden, wobei  $k$  die Anzahl der gemessenen Zahnücken darstellt.

$$W_k = m_n \cdot \cos \alpha_n \cdot \left[ \left( k - \frac{z}{2 \cdot |z|} \right) \cdot \pi + z \cdot \operatorname{inv} \alpha_t \right] + 2 \cdot x \cdot m_n \cdot \sin \alpha_n \quad (2.52)$$

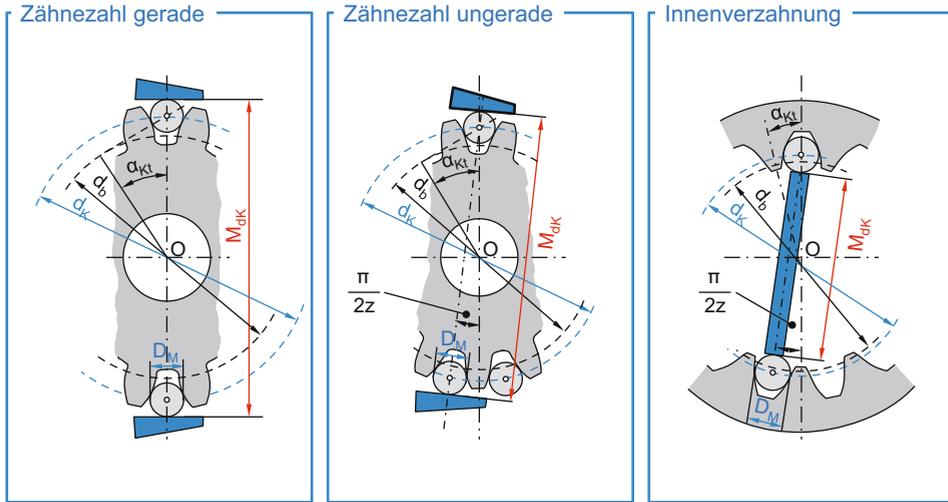
$$d_{mk} = \sqrt{(W_k \cdot \cos \beta_b)^2 + d_b^2} \cdot \frac{|z|}{z} \quad (2.53)$$

Die Zahnweite ist nicht auf die Radachse bezogen und daher unabhängig von einer Außer-mittigkeit der Verzahnungsbohrung. In Bild 2.23 ist zu erkennen, dass sich die Zahnweite mit einer Zahndicke im Grundkreis und mehreren Eingriffsteilungen beschreiben lässt. Mithilfe der Zahnweite kann beispielsweise in der Fertigung die eingestellte Erzeugungsprofilverschiebung  $x_e$  nach dem Wälzfräsen kontrolliert und ggf. korrigiert werden. Für asymmetrische Verzahnungen ist die Zahnweite nicht bestimmbar, da keine gemeinsame Tangente für die zwei unterschiedlichen Grundkreise der linken und rechten Zahnflanken existiert [BREC13].



**Bild 2.23** Ermittlung der Zahnweite [ROLO03]

Alternativ zur Zahnweite kann das diametrale Zweikugelmaß oder das Zweirollenmaß zur Überprüfung der Zahndicke im Fertigungsprozess herangezogen werden. Nach diesem Prüfprinzip werden zwei Kugeln bzw. Rollen mit dem Durchmesser  $D_m$  in zwei Zahnücken angelegt, die den größtmöglichen Abstand voneinander haben. Beide Kugeln müssen sich in einer Ebene befinden, sodass bei Außenverzahnungen der maximale äußere Abstand der Kugeln gemessen werden kann. Bei einer Innenverzahnung wird das kleinste innere Maß der Kugeln gemessen (Bild 2.24).



**Bild 2.24** Ermittlung des diametralen Zweikugelmaßes

Für symmetrische Verzahnungen kann das diametrale Zweikugelmaß  $M_{dK}$  nach den nachfolgenden Formeln berechnet werden. Es wird zwischen einer Berechnung für Zahnräder mit geradzahlgiger (Formel 2.54) und ungeradzahlgiger Zähnezahl (Formel 2.55) unterschieden.

$$M_{dK} = d_K + D_M \quad (\text{gerade Zähnezahl}) \quad (2.54)$$

$$M_{dK} = d_K \cdot \cos \frac{\pi}{2 \cdot z} + D_M \quad (\text{ungerade Zähnezahl}) \quad (2.55)$$

Der Durchmesser des Kreises  $d_K$ , auf dem die Messkugelmittelpunkte liegen, wird nach Formel 2.56 berechnet. Zur Berechnung des Durchmessers  $d_K$  wird der Profilwinkel  $\alpha_{Kt}$  im Stirnschnitt am Kreis durch den Kugelmittelpunkt benötigt.

$$d_K = \frac{d_b}{\cos \alpha_{Kt}} \quad (2.56)$$

$$\operatorname{inv} \alpha_{Kt} = \frac{D_M}{z \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n} - \frac{\pi - 4 \cdot x_e \cdot \tan \alpha_n}{2 \cdot z} + \operatorname{inv} \alpha_1 \quad (2.57)$$

Für asymmetrische Verzahnungen ist die Bestimmung des diametralen Zweikugelmaßes aufwendiger [BREC13]. Dazu muss zunächst die Zahndicke (Formel 2.58) für den asymmetrischen Zahn berechnet werden.

$$s_n = m_n \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + x \cdot (\tan \alpha_{n1} + \tan \alpha_{n2}) \right] \quad (2.58)$$

Die Beziehung nach Formel 2.59 bildet die Grundlage für die allgemeine Berechnung des diametralen Zweikugelmaßes. Sie beschreibt das Verhältnis zwischen den Kreuzungshalbwinkeln der beiden Evolventen  $v_d$  und  $v_c$ , den Eingriffswinkeln  $\alpha_d$  und  $\alpha_c$  und den Grund-



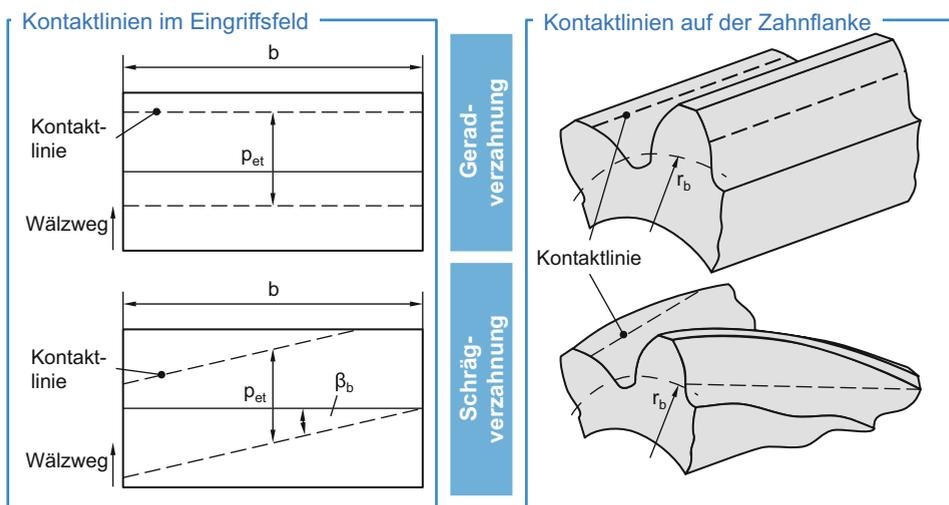
Die vorgestellten Beziehungen zwischen  $x_e$ ,  $M_{dk}$  und  $W_k$  gelten ebenfalls für die Erzeugung einer Verzahnung. Damit können aus dem Erzeugungsprofilverschiebungsfaktor  $x_e$  das erzeugte diametrale Zweikugelmaß nach Formel 2.57 sowie die erzeugte Zahnweite nach Formel 2.52 errechnet werden. Zudem kann nach Formel 2.43 der Erzeugungsachsabstand zwischen Werkzeug und Verzahnung berechnet werden, um ein gefordertes Zweikugelmaß oder eine Zahnweite zu berechnen.

### 2.2.5 Kontaktbedingungen zylindrischer Stirnräder

Der Eingriff zweier Zahnräder kann im Eingriffsfeld beschrieben werden. Als Eingriffsfeld wird die Fläche bezeichnet, die von der Zahnbreite und dem Wälzweg bzw. Wälzwinkel zwischen den Kopf-Nutzkreisdurchmessern der beiden Zahnräder begrenzt wird. Der Wälzweg entspricht der Länge der Eingriffsstrecke  $g_a$ , welche aus den Eintritts- ( $g_a$ ) bzw. Austritts-Eingriffsstrecken ( $g_r$ ) berechnet werden kann (siehe Formel 2.24 und Formel 2.25). Somit kann das Eingriffsfeld als räumliche Ausdehnung der Eingriffslinie angesehen werden. Für zylindrische Stirradverzahnungen ist das Eingriffsfeld grundsätzlich rechteckig.

Im Eingriffsfeld kann der Verlauf der Berührlinien mehrerer Zähne über einer Teilung nachvollzogen werden. Ein beliebiger Kontaktpunkt Y verläuft während des Eingriffs zwischen den Punkten A und E. Bei einer räumlichen Betrachtung erweitert sich der Kontaktpunkt zur Kontaktlinie, welche in Bild 2.26 durch die gestrichelten Linien dargestellt ist. Im linken Bildbereich sind die Kontaktlinien im Eingriffsfeld abgebildet, im rechten Bildbereich die gleichen Kontaktlinien auf der Zahnflanke. Für Geradverzahnungen verlaufen die Kontaktlinien parallel zur Radachse. Im Falle einer Schrägverzahnung (unterer Bildbereich) verlaufen die Kontaktlinien unter dem Schrägungswinkel am Grundkreisdurchmesser  $\beta_b$  geneigt.

$$\beta_b = \arcsin(\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha_n)) \quad (2.65)$$



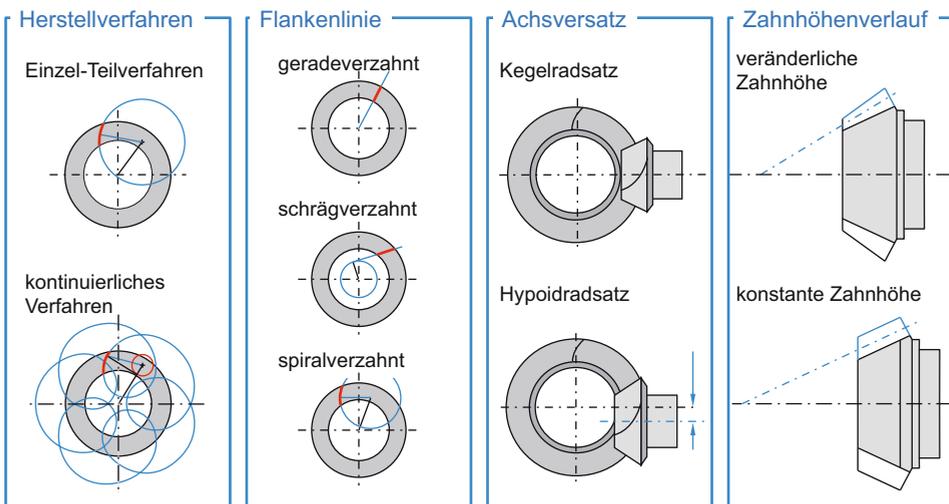
**Bild 2.26** Kontaktlinien für Stirradverzahnungen im Eingriffsfeld und auf der Zahnflanke

Aus den Kontaktlinien bzw. den Eintritts- und Austritts-Eingriffsstrecken kann, wie in Abschnitt 2.2.4.3 vorgestellt, die Überdeckung berechnet werden. Außerdem stellt die Kenntnis der Kontaktlinien im Eingriffsfeld eine wichtige Größe zur örtlichen Berechnung des Zahnkontakts dar. Indem der Zahnkontakt in das Eingriffsfeld überführt wird, kann der Rechenaufwand für Zahnkontaktanalysen erheblich reduziert werden (siehe Kapitel 6, [CAO02]).

## ■ 2.3 Kegelradgetriebe

In der Antriebstechnik werden Kegelradgetriebe zur Übertragung der mechanischen Leistung von sich schneidenden oder kreuzenden Wellen eingesetzt. Nach ISO 23509 [ISO16] wird der Begriff „Kegelrad“ als Oberbegriff für alle Getriebe sowohl mit als auch ohne Achsversatz verwendet. Demnach stellen achsversetzte Kegelradgetriebe, die sogenannten Hypoidgetriebe, eine Sonderform der Kegelradgetriebe dar. Im Allgemeinen zeichnen sich Kegelräder durch einen Grundkörper in Form eines Kegelstumpfes aus. Im Unterschied zu Stirnradverzahnungen ändern sich der Bezugsdurchmesser und der Modul der Zahnflanke entlang der Zahnbreite. In Flankenrichtung wird am Kegelrad die Seite des Zahns mit dem kleineren Durchmesser als Zehe und mit dem größeren Durchmesser als Ferse bezeichnet. Die Bezeichnungen Zahnkopf und Zahnfuß sowie Ritzel und Rad werden analog zu Stirnradverzahnungen verwendet.

Zur grundlegenden Klassifizierung von Kegelrädern existieren vier Kategorien, die in Bild 2.27 dargestellt sind [KLIN08, BRUM12, ISO16]. Die Geometrie eines Kegelrads ist für die marktgängigen Erzeugungsprinzipien unmittelbar mit dem Herstellverfahren verbunden. Bei den abgebildeten Herstellverfahren handelt es sich um diejenigen, die am häufigsten Anwendungen finden. Auf diese Verfahren wird in Abschnitt 4.8 eingegangen. Für Spezialfälle und besondere Anwendungen existieren weitere Verfahren.



**Bild 2.27** Klassifizierung von Kegelrädern

Im Einzelteilverfahren, aufgrund seiner Teilungsbewegung auch als diskontinuierliches Verfahren oder Face Milling bezeichnet, wird die Zahnücke einzeln gefertigt. Die Werkzeugschneide beschreibt durch die Messerkopfrotation eine kreisförmige Bahn. Ist eine Zahnücke gefertigt, erfolgt eine Rückhubbewegung und Werkstückdrehung, um die nächste Lücke zu fertigen. Dabei muss dies nicht konsekutiv erfolgen, sondern es können auch nacheinander gegenüberliegende Lücken gefertigt werden, um die lokale Wärmeeinbringung in das Bauteil im Fertigungsprozess zu minimieren.

Beim kontinuierlichen Verfahren, für das auch die Bezeichnung Face Hobbing verwendet wird, beschreibt die Bahn der Werkzeugschneide infolge Werkstück- und Werkzeugdrehbewegung und aufgrund ihrer Anordnung und der Messerkopfrotation eine Epizykloide. Dabei werden alle Lücken gleichzeitig gefertigt, sodass das Verfahren kontinuierlich und ohne Unterbrechungen durch eine Rückhubbewegung abläuft [KLIN08, STAD14].

Teilt man Kegelräder anhand ihrer Flankenlinie ein, werden gerad-, schräg- und spiralverzahnte Zahnängskurven unterschieden. Aufgrund der Werkzeugkonstruktion und der Erzeugungskinetik erzeugen die verbreiteten Verfahren Face Milling und Face Hobbing gekrümmte Flankenlinien, die kreisbogenförmig oder epizykloidisch sind und unter dem Begriff spiralförmig zusammengefasst werden. Weist die Flankenängslinie keine Krümmung auf und ist radial zum Verzahnungsmittelpunkt angeordnet, handelt es sich um ein geradverzahntes Kegelrad. Diese können durch Schmieden, Räumen oder Sonderfräsvfahren gefertigt werden und kommen oft in Fahrzeugantrieben in Achsdifferenzialen zum Einsatz. Liegt die Flankenlinie tangential an einem Kreis, der konzentrisch zum Verzahnungsmittelpunkt angeordnet ist, handelt es sich um ein schrägverzahntes Kegelrad [KLIN08, STAD14].

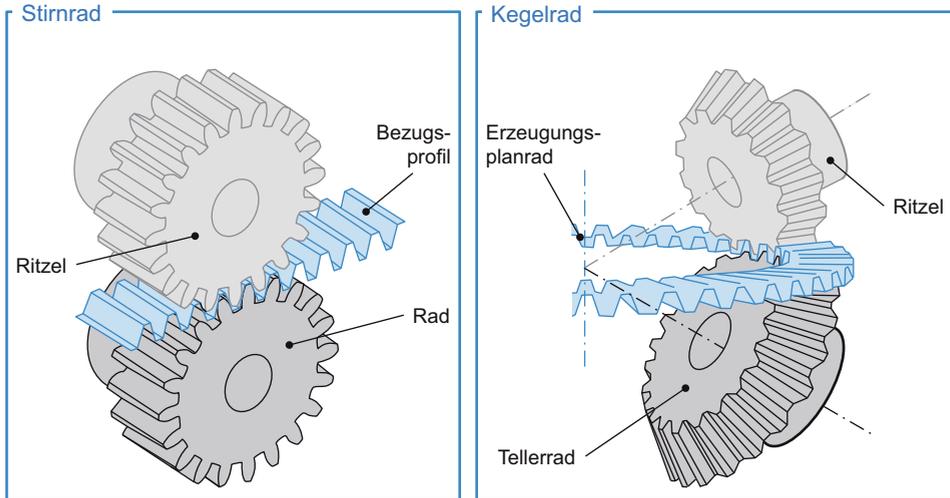
Weist eine Kegelradpaarung keinen Achsversatz auf, so schneiden sich die Achsen von Rad und Ritzel. Diese Art der Paarung wird allgemein als Kegelradsatz bezeichnet. Liegen die Achsen windschief zueinander und schneiden sich nicht, handelt es sich um einen Hypoidradsatz. In Abschnitt 2.3.3.5 werden die Besonderheiten von Hypoidradgetrieben vorgestellt [KLIN08, STAD14, ISO16].

Der Zahnhöhenverlauf wird maßgeblich durch das Herstellverfahren bestimmt. Bei einer konstanten Zahnöhe gleicht der Fußkegelwinkel dem Kopfkegelwinkel. Daraus ergibt sich zwangsläufig eine veränderliche Zahnückenweite. Unterscheiden sich Kopf- und Fußkegelwinkel, resultiert eine veränderliche Zahnöhe bei gleichbleibender Zahnückenweite. Eine Übersicht über mögliche Zahnhöhenverläufe bei Kegelrädern bietet Abschnitt 2.3.3.3 [KLIN08, STAD14, ISO16].

### 2.3.1 Zahnprofile und Erzeugungsprinzip

Zur mathematischen Beschreibung einer Kegelradflanke kann das in Abschnitt 2.2.3 erläuterte Erzeugungsprinzip von evolventischen Stirnrädern auf Kegelräder übertragen werden. Bild 2.28 veranschaulicht diesen Transfer. Ein Ritzel wird durch das Abwälzen mit einem definierten Bezugsprofil erzeugt. Ein Rad, das durch dasselbe Bezugsprofil hergestellt wird, kann wiederum gleichförmig sowohl mit dem Bezugsprofil als auch dem Ritzel abwälzen. Analog dazu stellt für Kegelradverzahnungen das Erzeugungsplanrad das Äquivalent zum Stirnradbezugsprofil dar. Wälzt ein Ritzel auf dem Rad ab, besitzen beide ein

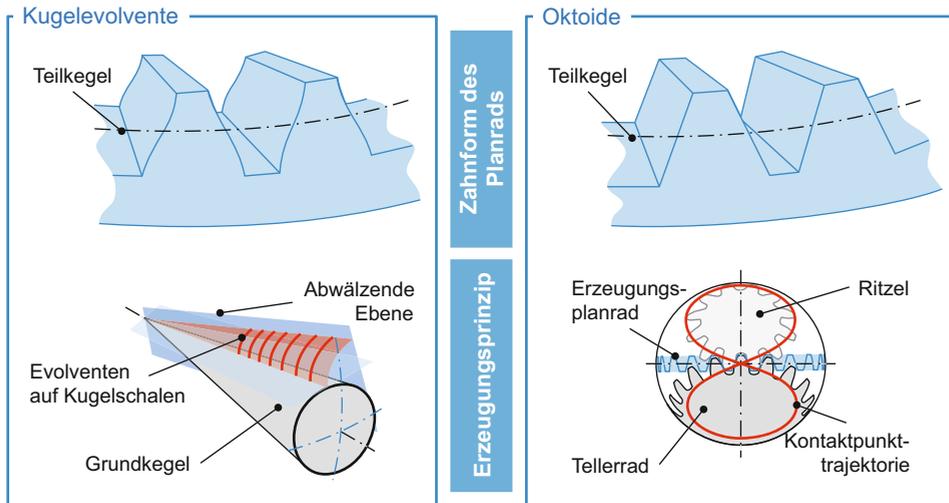
gemeinsames, virtuelles Erzeugungsplanrad. Je nach Verzahnungsart kann dieses Planrad gerade, gekrümmte oder kegelförmige Zähne aufweisen. Die Zähnezahzahl des Planrads kann eine nicht ganzzahlige Größe annehmen, da es sich um ein theoretisches Konstrukt handelt, das von der Zähnezahzahl des Tellerrads bzw. Ritzels und dem Teilkegelwinkel abhängig ist [KLIN08, LITV97, LITV04].



**Bild 2.28** Erzeugungsprinzip von Kegelradverzahnungen

Die beiden verbreitetsten Formen der Erzeugungsplanradgeometrie werden in Bild 2.29 miteinander verglichen. Das Erzeugungsplanrad zur Generierung von Kugelevolventen weist eine Krümmungsänderung auf Höhe des Teilkegels auf. Mathematisch entspricht das Erzeugungsprinzip dem Abwälzen einer Ebene am Grundkegel der Kegelradverzahnung. Demzufolge entstehen Evolventen, die aufgrund des dreidimensionalen Bewegungsablaufes nicht in einer Ebene liegen, sondern sich auf Kugelschalen befinden. Dieser Zusammenhang gibt den Kugelevolventenverzahnungen ihren Namen. Die Kugelevolvente verlangt in der Zerspanung eine punktweise Herstellung und erweist sich aus diesem Grund als technisch anspruchsvoll und unproduktiv. Darum werden kugelevolventische Profile hauptsächlich durch Sintern oder Umformen hergestellt [BREC10, KLIN08].

Das Planrad der Oktoidenverzahnung, die in produktiven, zerspanenden Fertigungsverfahren auf Spezialmaschinen realisiert wird, weist in Profilrichtung keine Krümmung auf. Das geradflankige Trapezprofil besitzt analog zum aus der Stirnradverzahnung bekannten Bezugsprofil fertigungs- und messtechnische Vorteile. Wälzen Kegelritzel und Tellerrad miteinander ab, ergibt sich aufgrund der Geometrie des Erzeugungsplanrads eine charakteristische, achtförmige Trajektorie des Kontaktpunktes, von der die Bezeichnung Oktoide abgeleitet ist. Die Eingriffslinie weicht in der Projektion geringfügig von einer Geraden ab, ist aber trotzdem kinematisch exakt [KLIN08, STAD14].



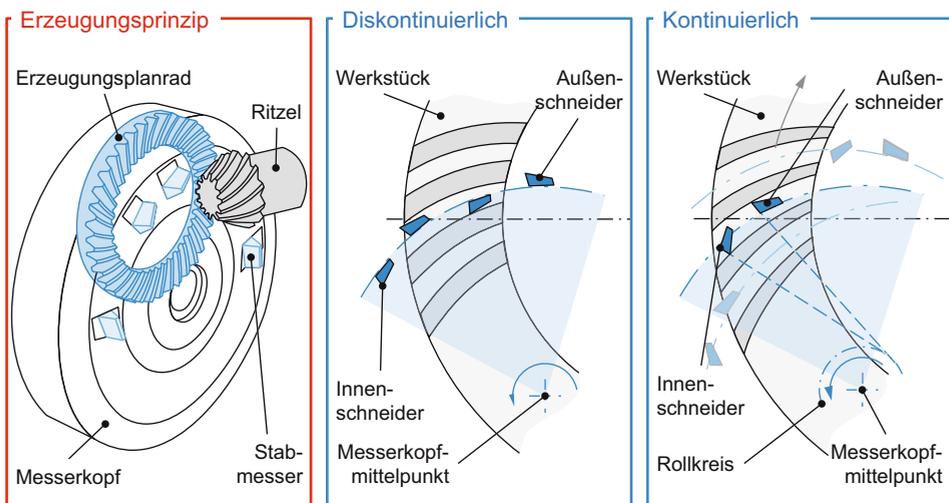
**Bild 2.29** Vergleich der Kugelevolventen- mit der Oktoidenverzahnung

Aufgrund der einfacheren Realisierbarkeit in der zerspanenden Herstellung stellen Oktoidenverzahnungen den Großteil der in der Serienfertigung produzierten Kegelräder dar. Bild 2.30 zeigt, wie das allgemeine Erzeugungsprinzip durch ein Planrad für die Herstellung von spiralverzahnten Kegelrädern umgesetzt wird. Alle Schneiden des Werkzeugs bilden einen Zahn des Erzeugungsplanrads ab. In der Regel kommen dabei mehrteilige Werkzeugsysteme zum Einsatz, die aus einem Messerkopf und mehreren Stabmessern aus Hartmetall bestehen. Dieses Werkzeug muss relativ zum zu fertigenden Kegelrad positioniert sein, sodass es die Abwälzbewegung des Erzeugungsplanrads mit dem Kegelrad exakt nachbildet. Dafür ist eine komplexe Maschinenkinematik notwendig, die zur Realisierung der Abwälzbewegung zwischen Werkzeug und Werkstück über drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade verfügt [KLIN08, STAD14].

Je nach Umsetzung des Erzeugungsprinzips kann für spiralverzahnte Kegelräder zwischen einem diskontinuierlichen und einem kontinuierlichen Herstellverfahren unterschieden werden. Im Allgemeinen zerspannt eines der Stabmesser die konvexe Flanke und wird als Innenschneider bezeichnet, wohingegen der Außenschneider das Material der konkaven Flanke zerspannt. Im diskontinuierlichen Verfahren (Face Milling) sind die Schneiden auf einem Kreisbogen in Messergruppen angeordnet. Alle Messergruppen erzeugen dabei die Zahnücke. Anschließend erfolgt eine Rückhubbewegung, das Werkstück wird um eine Zahnteilung weitergedreht und die nächste Lücke wird gefertigt. Dadurch entstehen Verzahnungen, die eine konstante Lückenweite aufweisen. In Profilrichtung verfügen die im Einzelteilverfahren hergestellten Verzahnungen jedoch über eine veränderliche Zahnhöhe [KLIN08, STAD14, ISO16].

Neben dem Face Milling wird der kontinuierliche Prozess Face Hobbing eingesetzt, der auf der rechten Seite von Bild 2.30 dargestellt ist. Für dieses Verfahren sind die Messer nicht auf einer gemeinsamen Kreisbahn angebracht, sondern werden zu Messergruppen in verschiedenen Gängen zusammengefasst. Weiterhin liegt eine Wälzkopplung zwischen Werkzeug und Werkstück vor, sodass nicht nur der Messerkopf rotiert, sondern in einem festen

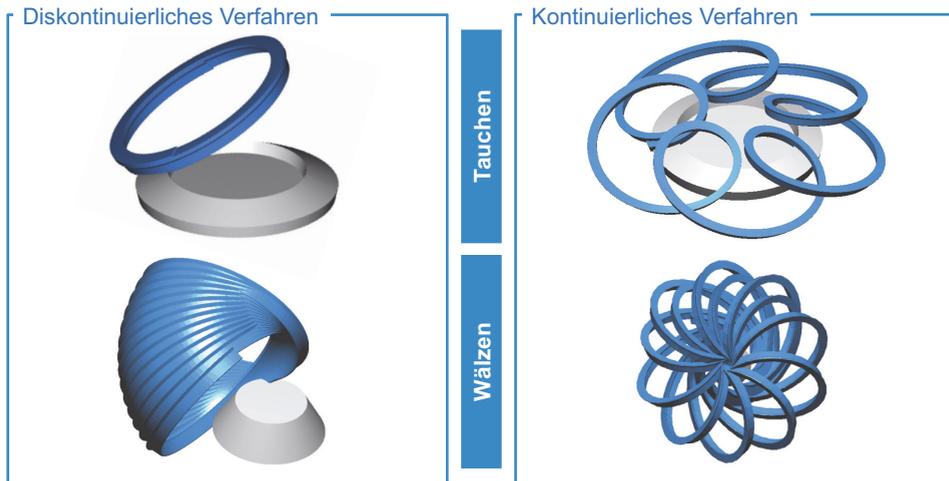
Übersetzungsverhältnis auch das Werkstück. Durch diese Relativbewegung zerspant eine Messergruppe eine Zahnücke, während die folgende Messergruppe Material in der nächsten Uücke abnimmt. Die Schnitttiefe wird graduell erhöht, bis alle Uücken vollständig zerspant sind. Das Kegelrad wird folglich in einem Schnitt ohne Indexieren kontinuierlich gefertigt. Die resultierende Geometrie der gefertigten Zahnflanken unterscheidet sich beim Face Hobbing vom Face Milling. Aufgrund der Anordnung der Messer im Messerkopf weist die Zahnlängsform keinen Kreisbogen auf, sondern nimmt die Form einer verlängerten Epizykloide an, da bei der Messerkopfdrehung die Abrollbewegung des Rollkreises auf dem Grundkreis überlagert wird. Der Krümmungsradius der Epizykloide ist nicht konstant. Die Bewegung des Messerkopfs erzeugt eine konstante Zahnhöhe, die Zahnücken weisen jedoch den gleichen konischen Längsverlauf wie die Zahndicke auf. Die Uückenweite ist an der Ferse größer als an der Zehe und demnach veränderlich [KLIN08, STAD14, ISO16].



**Bild 2.30** Erzeugungsprinzip von spiralverzahnten Kegelrädern

Aufgrund der langen Wälzstrecke und der hohen Zähnezahlen handelt es sich bei der wälzenden Herstellung von Tellerrädern um einen zeitaufwendigen Prozess. Um Fertigungszeit und damit Kosten einzusparen, werden Tellerräder, die mehr Zähne als das Ritzel aufweisen, ab einem Übersetzungsverhältnis von 2,5 getaucht. Dabei bildet das Werkzeugprofil die Zahnücke genau ab, ohne dass ein überlagertes Wälzen stattfindet. Das Tellerrad wird somit zum Erzeugungsplanrad und weist in Profilrichtung keine Krümmung des Zahns auf. Der Vorteil des Tauchens besteht darin, dass die Bewegungen im Prozess einfacher und damit schneller umsetzbar sind. Um ein gleichmäßiges Abwälzen des Radpaares sicherzustellen, muss mindestens eine Verzahnung der Kegelradpaarung wälzend gefertigt werden. In der Regel wird darum auf dem Ritzel der Paarung wegen der geringeren Zähnezahl eine zusätzliche Krümmung aufgebracht [KLIN08, STAD14].

Die Prozessvarianten Tauchen und Wälzen können für die zuvor beschriebenen Herstellverfahren des diskontinuierlichen und kontinuierlichen Kegelradfräsens angewendet werden. Bild 2.31 gibt eine Übersicht über die möglichen Kombinationsmöglichkeiten. Es ergeben sich unterschiedliche, charakteristische Spuren einer Werkzeugschneide im Werkstückkoordinatensystem, deren Bearbeitungsspur jeweils dargestellt ist. Die Vorverzahn- sowie Hartfeinbearbeitungsverfahren zur Kegelradherstellung werden in Abschnitt 4.8.2 bzw. Abschnitt 4.8.4 genauer erläutert [KLIN08, STAD14].

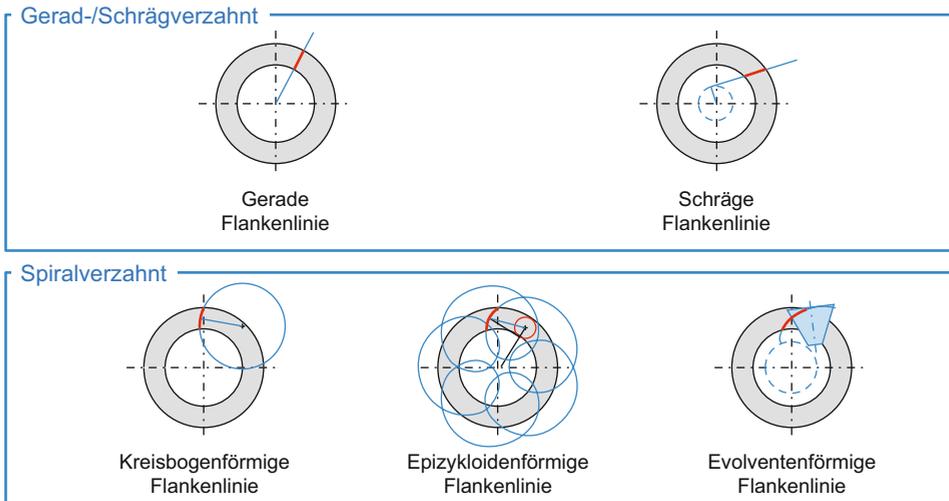


**Bild 2.31** Übersicht über die Erzeugung von spiralverzahnten Kegelrädern

### 2.3.2 Flankenlinie

Der Verlauf der Flankenlinie bei Kegelradverzahnungen ist unmittelbar vom Herstellverfahren abhängig. Bild 2.32 gibt eine Übersicht über die üblichen Formen der Flankenlängslinien. Es sind weitere Spezialformen möglich, auf die aufgrund ihrer seltenen Anwendung sowie der Herausforderungen bei der Herstellung nicht weiter eingegangen werden soll.

Weist die Flankenlinie keine Krümmung auf und schneidet in ihrer Verlängerung den Mittelpunkt der Verzahnung, handelt es sich um eine Geradverzahnung. Sie findet häufig Einsatz in Achsdifferenzialen im Automobilbereich, Maschinen der Agrartechnik und Baumaschinen. Geradverzahnungen können durch pulvermetallurgische Verfahren, Schmieden, Räumen oder eine Zerspanung mit Spezialmesserköpfen hergestellt werden. Ist die Flankenlinie um einen Winkel geneigt und liegt somit tangential an einem konzentrischen Kreis an, handelt es sich um ein schrägverzahntes Kegelrad. Mittlerweile werden schrägverzahnte Kegelräder nur noch selten in Spezialanwendungen eingesetzt [KLIN08, STAD14, ISO16].



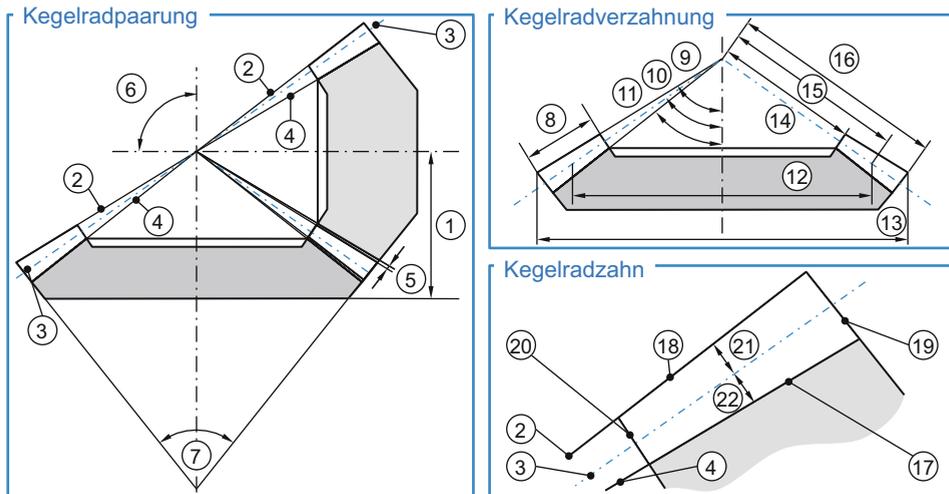
**Bild 2.32** Flankenlängslinien von Kegelradverzahnungen

Für spiralverzahnnte Kegelräder besteht neben den bereits beschriebenen kreisbogenförmigen und epizykloidenförmigen Flankenlinien auch die Möglichkeit, evolutenförmige Flankenlängslinien zu erzeugen. Diese können durch ein Spezialverfahren hergestellt werden, wofür ein konischer Wälzfräser zum Einsatz kommt. Auf diese Weise werden Kegelräder mit konstanter Zahnhöhe und einer Evolvente als Flankenlinie in einem kontinuierlichen Herstellverfahren erzeugt. Obwohl diese Verzahnungsgeometrie gutmütig auf Verlagerungen reagiert, findet das Verfahren aufgrund der Werkzeugkosten und geringeren Produktivität seltener Anwendung [KLIN08, STAD14].

### 2.3.3 Geometrische Größen

Ein Großteil der in Abschnitt 2.2.4 vorgestellten Verzahnungsgrößen ist ebenfalls für Kegelradgetriebe gültig. Nachfolgend werden die darüber hinausgehenden, wesentlichen Beschreibungsgrößen für Kegelradgetriebe vorgestellt. Eine ausführlichere Beschreibung der Kegelradgeometrie ist in [KLIN08, STAD14, ISO16] zu finden.

Das Kegelrad mit der geringeren Zähnezahzahl wird als Kegelritzel, das Kegelrad mit der größeren Zähnezahzahl wird als Tellerrad bezeichnet. Aus beiden Zähnezahlen können analog zu den Gleichungen für Stirnräder das Übersetzungsverhältnis  $i$  und das Zähnezahverhältnis  $u$  bestimmt werden. Die für die Beschreibung der Kegelradgeometrie erforderlichen Kenngrößen sind in ISO 23509 [ISO16] definiert. In Bild 2.33 sind die wichtigsten geometrischen Größen am Kegelrad am Beispiel eines Kegelritzels dargestellt. Die Lage des Tellerrads zum Ritzel wird durch das Einbaumaß in Bezug zu einer Anlagefläche der Verzahnung angegeben.

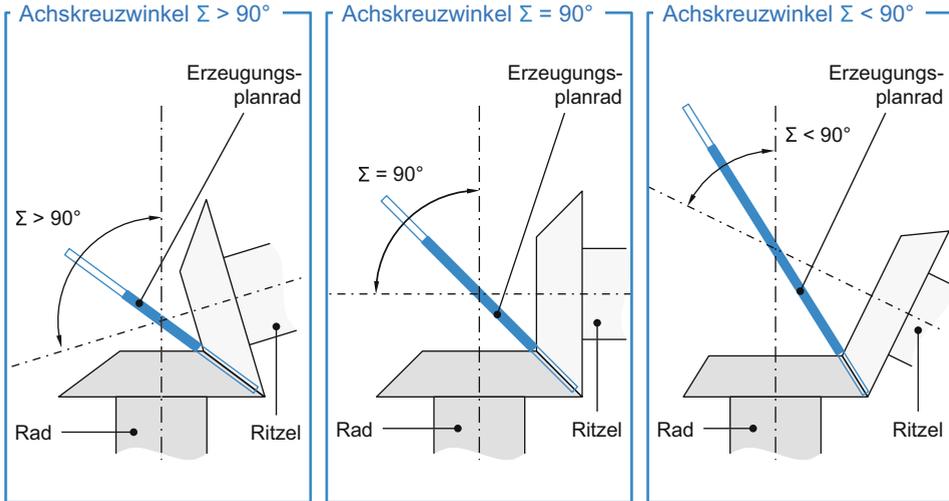


**Bild 2.33** Geometrische Größen am Kegelrad nach [ISO16]

**Tabelle 2.4** Bezeichnungen zu Bild 2.33

Nr.	Bezeichnung	Nr.	Bezeichnung
1	Einbaumaß	12	mittlerer Teilkegeldurchmesser $d_{m1}, d_{m2}$
2	Kopfkegel	13	äußerer Durchmesser $d_a$
3	Teilkegel	14	innere Teilkegellänge $R_i$
4	Fußkegel	15	mittlere Teilkegellänge $R_m$
5	Kopfspiel $c$	16	äußere Teilkegellänge $R_a$
6	Achskreuzwinkel $\Sigma$	17	Zahnfuß
7	Rückenkegelwinkel	18	Zahnkopf
8	Zahnbreite $b$	19	Ferse
9	Kopfkegelwinkel $\delta_{a1}, \delta_{a2}$	20	Zehe
10	Teilkegelwinkel $\delta_1, \delta_2$	21	mittlere Zahnkopfhöhe $h_{am}$
11	Fußkegelwinkel $\delta_{f1}, \delta_{f2}$	22	mittlere Zahnfußhöhe $h_{fm}$

Der Achskreuzwinkel  $\Sigma$  beträgt für die meisten Anwendungen  $90^\circ$ , kann aber auch davon abweichen. Bild 2.34 zeigt verschiedene Winkelbereiche für den Achskreuzwinkel sowie das sich daraus ergebende gemeinsame Erzeugungsplanrad der Kegelradpaarung. Die Sonderfälle  $\Sigma = 0^\circ$  bzw.  $\Sigma = 180^\circ$  werden nicht betrachtet, da es sich dabei um mathematische Grenzfälle handelt, die über keine technische Anwendung verfügen. Bei gleichem Durchmesser der Kegelräder ändert sich der Durchmesser des Planrads in Abhängigkeit vom Achskreuzwinkel. Mit kleinerem Achskreuzwinkel wird der Radius des Planrads größer. Da das Planrad bei der Fertigung durch das Werkzeug abgebildet wird, ist zur Fertigung von Kegelradverzahnungen mit sehr kleinem Achskreuzwinkel ein entsprechend großer Arbeitsraum notwendig. Aus diesem Grund sind zur Realisierung kleiner Achskreuzwinkel Beveloidverzahnungen von Vorteil, die in Abschnitt 2.3 beschrieben sind [KLIN08].



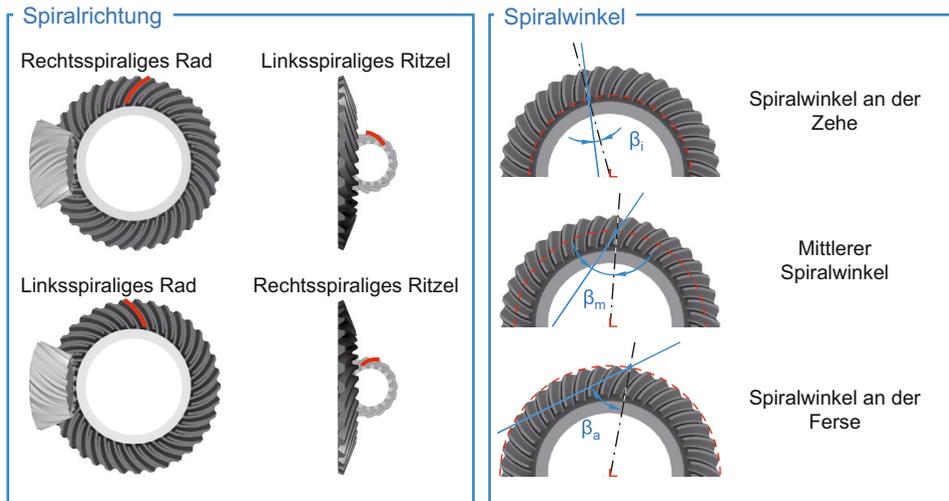
**Bild 2.34** Achskreuzwinkel

### 2.3.3.1 Mittlerer Modul und Spiralwinkel

Für den Modul des Erzeugungsplanrads für Kegelradverzahnung gilt grundsätzlich der gleiche Zusammenhang zwischen Modul und Teilung, der für Stirnräder in Abschnitt 2.2.4.1 beschrieben wird. Allerdings ändert sich der Modul infolge der veränderlichen Teilung entlang der Flankenrichtung des Planrads, sodass am äußeren Durchmesser große Moduln und am inneren Durchmesser kleine Moduln vorliegen. Um über einen vergleichbaren, eindeutigen Wert zur Bestimmung weiterer geometrischer Größen zu verfügen, wird der Modul in der Mitte des Erzeugungsplanrads im Normalschnitt definiert und als mittlerer Normalmodul  $m_{mn}$  bezeichnet. Da diese Konvention sehr weit verbreitet ist, hat sich im Allgemeinen für den mittleren Normalmodul  $m_{mn}$  die Schreibweise  $m_n$  als Synonym durchgesetzt. Als Näherung kann diese Kenngröße anhand Formel 2.66 mithilfe der Tellerrad-Zähnezahl  $z_2$ , des Tellerrad-Teilkegelwinkels  $\delta_2$ , der mittleren Tellerrad-Teilkegellänge  $R_{m2}$  und des mittleren Tellerrad-Schrägungswinkels  $\beta_{m2}$  bestimmt werden [KLIN08].

$$m_{nm} = \frac{2 \cdot R_{m2} \cdot \sin(\delta_2) \cdot \cos(\beta_{m2})}{z_2} \quad (2.66)$$

Um die Flankenlängsform spiralverzahnter Kegelräder beschreiben zu können, werden die Kenngrößen Spiralrichtung und Spiralwinkel  $\beta$  im Normalschnitt definiert. Die Darstellung beider Größen erfolgt in Bild 2.35. Die Spiralrichtung wird ermittelt, indem die Verzahnung von der Teilkegelspitze aus betrachtet wird. Verläuft die Flankenlinie des oberen, mittigen Zahns nach rechts, bezeichnet man sie als Rechtsspirale. Entsprechend werden Flankenlinien, die nach links verlaufen, Linksspiralen genannt. Analog zum Schrägungswinkel bei Stirnradverzahnungen gilt, dass ein linksspiraliges Kegelrad immer nur mit einem rechtsspiraligen Kegelrad gepaart werden kann [KLIN08].



**Bild 2.35** Definition von Spiralrichtung und Spiralwinkel

Der Spiralwinkel wird ermittelt, indem eine Tangente an die Zahnflankenlinie angelegt und der Winkel zwischen der Tangente und der Verbindungslinie zum Kegelradmittelpunkt gemessen wird. Je nach Messort kann man zwischen dem Spiralwinkel an der Zehe  $\beta_i$ , dem Spiralwinkel an der Ferse  $\beta_a$  oder dem mittleren Spiralwinkel  $\beta_m$  unterscheiden. Am verbreitetsten ist die Angabe des mittleren Spiralwinkels  $\beta_m$ . Es ist zu beachten, dass das Vorliegen eines mittleren Spiralwinkels von  $\beta_m = 0^\circ$  nicht bedeutet, dass keine Krümmung der Zahnflanke vorliegt. Vielmehr handelt es sich dabei um eine Spezialgeometrie, für die die Krümmung auf der Flanke so aufgebracht wird, dass die Tangente mit der Verbindungslinie zum Kegelradmittelpunkt zusammenfällt [KLIN08, STAD14, ISO16].

### 2.3.3.2 Eingriffswinkel und Profilüberdeckung

Im Allgemeinen gilt für Kegelräder, dass der Nenneingriffswinkel  $\alpha_d$  des Werkzeugs dem Eingriffswinkel zwischen Erzeugungsplanrad und Werkrad entspricht. Die Eingriffswinkel müssen auf Schub- und Zugzahnflanke nicht gleich sein. Für Kegelräder, insbesondere für Hypoidverzahnungen, werden in der Regel asymmetrische Profile gewählt. Für Herstellverfahren mit Stabmessern kann der Eingriffswinkel frei gewählt werden, sodass typische Werte im Bereich  $\alpha_n = 16^\circ$  bis  $24^\circ$  liegen. Abhängig vom Verzahnverfahren und von der Werkzeuggeometrie wird ein Grenzeingriffswinkel  $\alpha_{lim}$  definiert, der dem kleinsten verzahnungstheoretisch realisierbaren Eingriffswinkel entspricht [KLIN08, STAD14].

Wie bei Stirnrädern hat der Eingriffswinkel einen direkten Einfluss auf die Profilüberdeckung  $\varepsilon_w$ , die sich aus der Profilform ergibt. Um die Profilüberdeckung zu ermitteln, wird sich der Ersatz-Stirnradverzahnung bedient, die mithilfe der Tredgold'schen Näherung bestimmt wird. Anhand der Ersatz-Stirnradverzahnung kann die Profilüberdeckung wie in Abschnitt 2.2.4.3 beschrieben berechnet werden [KLIN08, NIEM04, TRED23].

Sind die Zahnflanken zueinander konjugiert, kann die Gesamtüberdeckung  $\varepsilon_\gamma$  analog zu Stirnradverzahnungen durch Addition der beiden Teilüberdeckungen ermittelt werden. Da

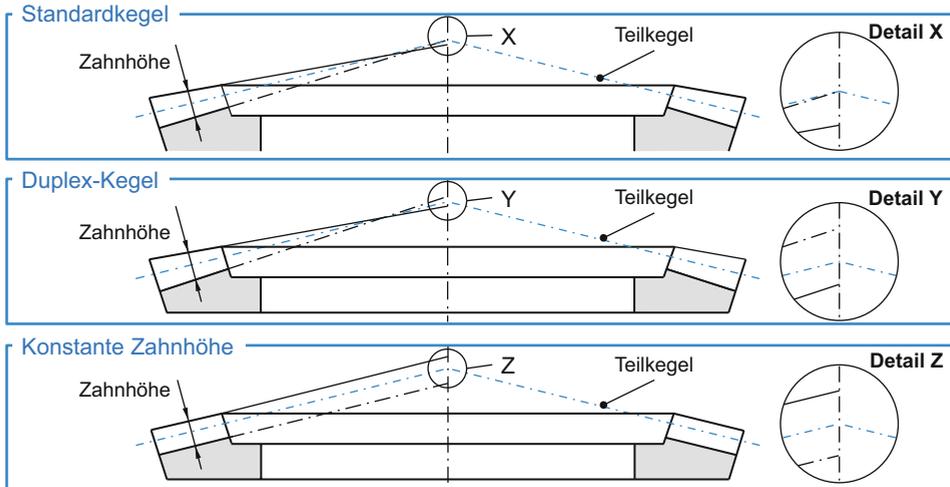
Kegelradflanken in den meisten Fällen mit Modifikationen versehen werden, fällt die Gesamtüberdeckung in der Regel kleiner aus als berechnet. Auf Basis eines ellipsenförmigen Eingriffsfelds ergibt sich für die Gesamtüberdeckung  $\varepsilon_V$  der Zusammenhang entsprechend Formel 2.67 [KLIN08].

$$\varepsilon_V = \sqrt{\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2} \quad (2.67)$$

Die Formeln für Ersatz-Stirnradverzahnungen dienen als Grundlage der genormten Tragfähigkeitsberechnung und stellen eine gute Näherung der tatsächlichen Eingriffsbedingungen dar. Um die effektive Gesamtüberdeckung zu ermitteln, die sich durch Flankenmodifikationen und Abplattung der Kontaktfläche unter Last ergibt, ist eine numerische Zahnkontaktanalyse nötig, siehe Kapitel 6 [KLIN08].

### 2.3.3.3 Zahnhöhenverlauf, Zahndicke und Zahnweite

Die Abhängigkeit der Verzahnungsgeometrie von dem Herstellverfahren führt über die vorgestellten Kegelradverzahnungskenngrößen hinaus zu Randbedingungen bezüglich der Kegelgeometrie der Grundkörper. Die Herstellkinematik beeinflusst neben dem Verlauf der Flankenlinie auch den Verlauf der Zahnhöhe. Je nach Herstellverfahren weisen die Zähne eines Kegelrads eine über der Zahnbreite konstante oder veränderliche Zahnhöhe auf. Weiterhin können in der Teilebene einer Kegelradstufe veränderliche Zahndicken von der Zehe zur Ferse vorliegen. Bild 2.36 gibt eine Übersicht über den Verlauf der Zahnhöhe und die resultierenden Kegelgeometrien.



**Bild 2.36** Verlauf der Zahnhöhe eines Kegelrads

Beim Standardkegel verläuft die Zahnfußhöhe proportional zur Teilkegellänge. Das heißt, die Zahnfußhöhe nimmt im gleichen Maß wie die Teilkegellänge ab. Die Kegelspitzen von Teilkegel und Fußkegel fallen zusammen. Die Kegelspitze des Kopfkegels ist um den Betrag des Kopfspieles  $c$  verschoben, welches entsprechend Formel 2.68 mithilfe des mittleren Normalmoduls  $m_{mn}$ , des Zahnkopfhöhenfaktors  $k_{hap}$  und des Zahnfußhöhenfaktors  $k_{hfp}$  berech-

net werden kann. Der Großteil von geradverzahnten Kegelrädern weist einen Standardkegel auf [KLIN08, ISO16].

$$c = m_{nm} \cdot (k_{hfp} - k_{hap}) \quad (2.68)$$

Ein Duplex-Kegel ergibt sich bei Kegelradverzahnungen mit kreisförmigen Zahnlängslinien, wie sie durch das diskontinuierliche Verfahren erzeugt werden. Aufgrund der konstanten Lückenweite im Normalschnitt des Zahnfußes muss der Fußkegel im Vergleich zum Standardkegel zusätzlich geneigt werden. Das Zahnfußspiel der Verzahnung wird beim Duplex-Kegel durch eine Anpassung des Kopfkegelwinkels des Gegenrads erreicht.

Bei Kegelrädern mit konstanter Zahnhöhe ohne Winkelkorrektur weisen Kopf- und Fußkegel den gleichen Winkel auf wie der Teilkegel. Dies tritt bei Kegelradverzahnungen auf, die im kontinuierlichen Verfahren gefertigt werden. Bedingt durch die proportionale Aufteilung zwischen Zahndicke und Lückenweite entlang des Teilkegels nimmt die Zahndicke von der Ferse zur Zehe ab. Dadurch können die Zahnköpfe an der Zehe sehr dünn werden. Unterschreitet die Zahndicke einen zulässigen Wert, wird eine sogenannte Kopfkürzung durchgeführt, um ein Durchhärten oder Abbrechen des Zahnkopfes zu verhindern [KLIN08, ISO16].

Um in Abhängigkeit vom Zahnhöhenverlauf den Betrag des Kopfkegelwinkels  $\delta_a$  und Fußkegelwinkels  $\delta_f$  zu ermitteln, ist zunächst die Berechnung des Ritzelteilkegelwinkels  $\delta_1$  nach Formel 2.69 nötig [ISO16].

$$\delta_1 = \arctan \left( \frac{\sin(\Sigma)}{\cos(\Sigma) + u} \right) \quad (2.69)$$

Anhand des Achskreuzwinkels  $\Sigma$  kann anschließend der Teilkegelwinkel des Tellerrads  $\delta_2$  nach Formel 2.70 bestimmt werden [ISO16].

$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1 \quad (2.70)$$

Zur Bestimmung des Kopfkegelwinkels von Rad und Ritzel gelten Formel 2.71 und Formel 2.72 [ISO16].

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1} \quad (2.71)$$

$$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2} \quad (2.72)$$

Analog kann für Rad und Ritzel der Fußkegelwinkel entsprechend der Formel 2.73 und Formel 2.74 bestimmt werden [ISO16].

$$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1} \quad (2.73)$$

$$\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2} \quad (2.74)$$

Der Kopf- und Fußwinkel hängen vom Zahnhöhenverlauf ab. Eine Übersicht über die Berechnung der Winkel in Abhängigkeit vom Zahnhöhenverlauf zeigt Tabelle 2.5 [ISO16]. Die Definition der einzelnen geometrischen Größen kann Bild 2.33 entnommen werden.

**Tabelle 2.5** Übersicht über geometrische Zusammenhänge in Abhängigkeit vom Zahnhöhenverlauf [ISO16]

Größe	Standardkegel	Duplex-Kegel	Konstante Zahnhöhe
Summe der Zahnfußwinkel $\Sigma\vartheta_f$	$\Sigma\theta_f = \arctan\left(\frac{h_{fm1}}{R_{m2}}\right) + \arctan\left(\frac{h_{fm2}}{R_{m2}}\right)$	$\Sigma\theta_f = \left(\frac{90 \cdot m_{et}}{R_{e2} \cdot \tan(\alpha_n) \cdot \cos(\beta_m)}\right) \cdot \left(1 - \frac{R_{m2} \cdot \sin(\beta_{m2})}{r_{c0}}\right)$	$\Sigma\theta_f = 0$
Kopfwinkel des Tellerrads $\vartheta_{a2}$	$\theta_{a2} = \arctan\left(\frac{h_{fm1}}{R_{m2}}\right)$	$\theta_{a2} = \Sigma\theta_f \cdot \frac{h_{am2}}{h_{mw}}$	$\theta_{a2} = 0$
Fußwinkel des Tellerrads $\vartheta_{f2}$	$\theta_{f2} = \Sigma\theta_f - \theta_{a2}$	$\theta_{f2} = \Sigma\theta_f - \theta_{a2}$	$\theta_{f2} = 0$

### 2.3.3.4 Profilverschiebung

Wie bei Stirnradverzahnungen beeinflusst die Profilverschiebung bei Kegelrädern die Überdeckungs- und Beanspruchungsverhältnisse im Eingriff. Die Grenzen in der Wahl des Profilverschiebungsfaktors liegen analog zu Stirnrädern in der Vermeidung von Unterschnitt sowie von spitzen Zähnen. Die Profilverschiebung wird am Kegelrad auf den mittleren Normalmodul  $m_{nm}$  bezogen [KLIN08, KRUM67, STAD14].

Kegelradverzahnungen werden grundsätzlich immer als  $V_{null}$ -Verzahnungen ausgelegt. Im Fall einer  $V_{plus}$ - oder  $V_{minus}$ -Verschiebung würde für die Paarung ein neuer Wirkteilkegel entstehen, woraus bei unveränderter mittlerer Kegeldistanz eine Achskreuzwinkelveränderung resultieren würde. Dementsprechend sind nur  $V_{null}$ -Verschiebungen für Kegelräder physikalisch und technisch sinnvoll. Dadurch hat bei Kegelrädern die Profilverschiebung keinen Einfluss auf die Lage des Teilkegelwinkels. Entsprechend Formel 2.75 bedeutet dies, dass die Beträge der Ritzel- und der Tellerradprofilverschiebung gleich sind. Der Effekt auf die Zahnform ist prinzipiell vergleichbar mit dem bei Stirnrädern, siehe Abschnitt 2.2.4.3 [KLIN08, KRUM67, STAD14, ISO16].

$$x_{hm} = x_{hm1} = -x_{hm2} \quad (2.75)$$

Die Zahngeometrie und damit auch das Unterschnittverhalten sind stark vom gewählten Herstellungsverfahren abhängig, sodass sich ein Unterschnitt bei Kegelrädern nicht immer vermeiden lässt. Besonders im Fall doppelt gewälzter Verzahnungen, bei denen die Profilkrümmung durch eine Vor- und Rückwälbewegung erzeugt wird, tritt häufig Unterschnitt auf. Details zur Auslegung von Verzahnungen und Vermeidung von Unterschnitt können [KLIN08] entnommen werden.

Ob an einem Punkt  $x$  in axialer Richtung des Ritzels Unterschnitt vorliegt, kann anhand der inneren Teilkegellänge  $R_i$  und der äußeren Teilkegellänge  $R_e$  gemäß Formel 2.76 beurteilt werden [KLIN08].

$$R_{i1} \leq R_{x1} \leq R_{e1} \quad (2.76)$$