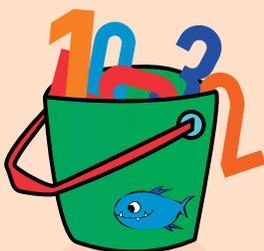
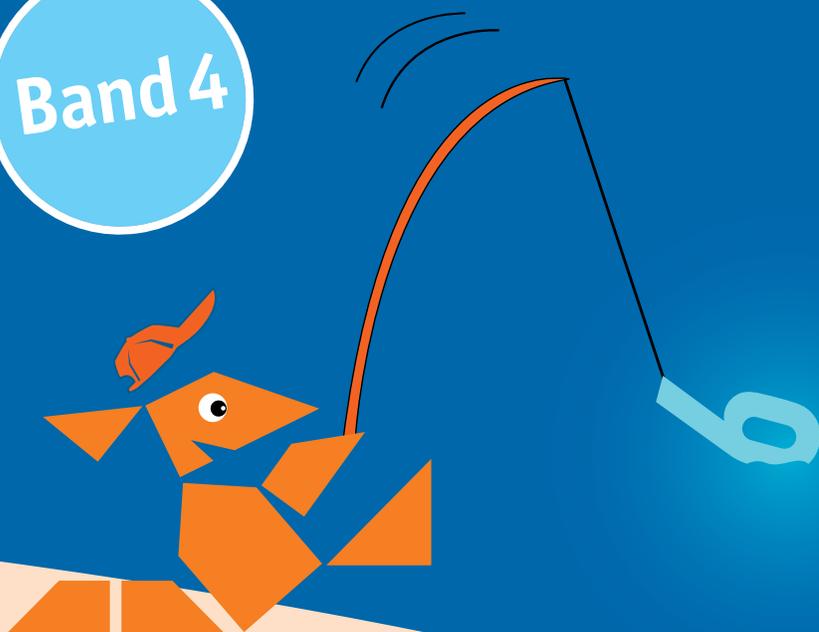


Monika Noack | Alexander Unger | Robert Geretschläger | Hansjürg Stocker

Mathe mit dem Känguru

Die schönsten Aufgaben von 2012 bis 2014

Band 4



HANSER

Noack · Unger · Geretschläger · Stocker

Mathe mit dem Känguru 4

Mathe mit dem Känguru

Herausgeber sind die leitenden Organisatoren des Känguruwettbewerbs in ihren Ländern.

Dr. Monika Noack, Deutschland
<http://www.mathe-kaenguru.de>

Dipl.-Math. Alexander Unger, Deutschland
<http://www.mathe-kaenguru.de>

Dr. Robert Geretschläger, Österreich
<http://www.kaenguru.at>

Hansjürg Stocker, dipl. Math. ETH, Schweiz
[http:// www.mathe-kaenguru.ch](http://www.mathe-kaenguru.ch)

Mathe mit dem Känguru 4

Die schönsten Aufgaben von 2012 bis 2014

von Monika Noack, Alexander Unger,
Robert Geretschläger und Hansjürg Stocker



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Herausgeber

Dr. rer. nat. Monika Noack

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dipl.-Math. Alexander Unger

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Robert Geretschläger

Bundesrealgymnasium Kepler Graz

Hansjürg Stocker, dipl. Math. ETH

Zürich und Wädenswil

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44259-7

E-Book-ISBN 978-3-446-44287-0



Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2015 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Christine Fritzsch

Herstellung: Katrin Wulst

Satz: Monika Noack, Berlin

Coverentwurf: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Einbandrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Binden: Friedrich Pustet, Regensburg

Printed in Germany

Vorwort



Dies ist nun bereits das vierte Buch mit Aufgaben aus dem Wettbewerb „Känguru der Mathematik“, der sich in etwas mehr als 20 Jahren zum teilnehmerstärksten internationalen Mathematikwettbewerb entwickelt hat. Dem Ziel des Wettbewerbs, einen spürbaren Beitrag zur Popularisierung der Mathematik zu leisten, dazu beizutragen, dass in den Schulen motiviert und mit Freude in diesem Fach gelernt wird, hoffen wir, in diesen Jahren näher gekommen zu sein. Dafür war die Grundidee dieses Wettbewerbs – interessante, abwechslungsreiche Aufgaben im Rahmen eines Multiple-Choice-Wettbewerbs zu stellen – entscheidend. Die Idee für einen Wettbewerb dieses Formats fanden französische Mathematiker bei Kollegen in Australien, daher rührt der Name „Känguru der Mathematik“.

Für die Mathematik ist das genaue Begründen eines Resultates unverzichtbar und dies darf keinesfalls vergessen werden. Jedoch gelingt es, mit den abwechslungsreichen Aufgaben des Wettbewerbs, wo eine gefundene, manchmal nur erahnte Lösung nicht schriftlich exakt begründet werden muss, Schülerinnen und Schüler für die Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen zu gewinnen. Und schließlich gehören geschicktes Probieren, Vermuten und eine gute Intuition sehr wohl zum mathematischen Arbeiten dazu.

Die Attraktivität der Aufgaben rührt daher, dass aus mehr als 50 Teilnehmerländern Ideen einfließen, in denen sich die mathematischen und mathematikdidaktischen Traditionen dieser Länder widerspiegeln – und dass sie mit Liebe und Witz in die jeweilige Landessprache übertragen werden. Sie lassen sich gut in Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften, in der Familie, in Vertretungsstunden und, wenn es passt, auch im Unterricht verwenden.

Beim Wettbewerb gibt es die Teilnehmergruppen Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior und Student, die den Altersgruppen der Klassenstufen 3/4 bis 11/13 entsprechen, mit je einem Paket von Aufgaben, 24 für die Klassenstufen 3 bis 6, 30 für die Älteren. In Österreich kommt die Gruppe Felix für die Klassenstufen 1/2 mit 15 Aufgaben dazu. Für das Bearbeiten der Aufgaben stehen 75 Minuten zur Verfügung. Alljährlich ist am 3. Donnerstag im März „Kängurutag“. Dann knobeln überall in den Teilnehmerländern Schülerinnen und Schüler über den gleichen Aufgaben.

Die Herausgeber gehören in ihren Ländern zu den Organisatoren des Känguruwettbewerbs. Um die Aufgaben für eine möglichst breite Verwendung gut zugänglich zu machen, haben sie die mathematisch interessantesten Beispiele der Jahre 2012 bis 2014 ausgewählt, sie inhaltlich sortiert sowie abschnittsweise nach steigender Schwierigkeit geordnet. Am Ende einer jeden Aufgabe findet sich kleingedruckt die Angabe, in welcher Altersgruppe und als wievielte Aufgabe das Beispiel in welchem Jahr im Wettbewerb zu lösen war. Während die Aufgaben für die deutschen und die deutsch-schweizerischen Teilnehmer von den Organisatoren aus beiden Ländern gemeinsam aus den international erarbeiteten Aufgabenvorschlägen in eine deutsche Fassung gebracht werden und folglich identisch sind, übertragen

die österreichischen Organisatoren die Aufgaben separat. Da es gemäß Satzung gestattet ist, je Altersgruppe bis zu fünf der Aufgaben gegen andere zu tauschen, was vor allem dann getan wird, wenn die Voraussetzungen zum Lösen einer Aufgabe durch den Schullehrplan unzureichend sind, finden sich in der Sammlung auch Aufgaben, die nur in Deutschland und der Schweiz oder nur in Österreich im Wettbewerb gestanden haben.

Aufgaben, die mathematisch besonders interessant sind, werden bisweilen für mehr als eine Klassenstufe ausgewählt. Dann wird versucht, unterschiedliche Modelle zu finden oder andere Zahlenwerte zu wählen, um die Aufgaben an die verschiedenen Klassenstufen anzupassen. Einige solcher „Mehrfachaufgaben“ finden sich in zwei Varianten im Buch. Zu Beginn der Abschnitte wird darauf hingewiesen. Es ist als Anregung gedacht, wie sich aus einer schönen Aufgabe neue, vielleicht direkt auf die Adressaten zugeschnittene Beispiele schnell finden lassen.

Wie es in Aufgabensammlungen üblich ist, haben wir Aufgaben- und Lösungsteil getrennt. Die Lösungshinweise beginnen mit der Angabe des richtigen Lösungsbuchstabens und sind für die Aufgaben, die es für die Jüngeren zu lösen gab, möglichst vollständig aufgeschrieben. Bei den ohnehin umfangreicheren Lösungen der Beispiele für die Älteren sind die Hinweise oft kürzer gefasst.

Am Entstehen der vorliegenden Aufgabensammlung haben viele mitgewirkt. Das sind zuallererst die Erfinder der Aufgaben in den vielen Teilnehmerländern. Es folgen jene, die an der Erarbeitung der deutschsprachigen Aufgabenstellungen und an der Ausarbeitung und Korrektur der Lösungshinweise mitgewirkt haben. Neben den Herausgebern waren dies Martin Altmann, Birgit und Ulf Hutschenreiter, Antje Noack und Dorothea Vigerske aus Deutschland, Renate Gottlieb, Christoph Gruber, Gerhard Plattner und Andrea Windischbacher aus Österreich sowie Meike Akveld, Kathrin Battaglia, Maria Cannizzo, Marco Manni, Franz Meier, René Schelldorfer und Alfred Vogelsanger aus der Schweiz.

Frau Christine Fritzsch vom Fachbuchverlag Leipzig hat uns auch bei der Entstehung des vierten Bandes „Mathe mit dem Känguru“ mit vielen wertvollen Hinweisen sachkundig und ideenreich zur Seite gestanden. Für die sehr angenehme, vertrauensvolle Zusammenarbeit sprechen ihr die Herausgeber ein weiteres Mal ihren herzlichen Dank aus.

Berlin, Graz, Zürich, im Herbst 2014

Die Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

	A	L
1 Zahlen und Rechnen	9	
1.1 Rechnereien zum Aufwärmen	9	106
Jahreszahlen-Knocheleien	13	109
Kompliziertere Rechenaufgaben	16	110
1.2 Kleine Rechengeschichten	17	111
Rechnen mit Sekunde und Stunde, mit Tag und Jahr	17	111
Rechnen mit Euro und Cent	19	112
Rechnen mit Brüchen	20	113
Rechnen mit speziellen Brüchen – Prozentrechnung	21	114
Rechnen mit Potenzen	23	115
Vermischtes	24	116
1.3 Teilbarkeit im Text versteckt	26	118
2 Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen	28	
2.1 Lineare Gleichungen	28	119
Terme und einfache lineare Gleichungen	28	119
Proportionen	30	120
2.2 Lineare Gleichungssysteme	33	122
2.3 Diophantische Gleichungen	36	126
2.4 Einige nichtlineare Gleichungen	38	127
2.5 Ungleichungen	39	128
2.6 Funktionale Abhängigkeit, Funktionen und ihre Graphen.	42	131
3 Kombinatorik – mit Zahlen und Figuren	45	
3.1 Kombinatorisches mit Zahlen	45	133
Anordnungen und Umordnungen	45	133
Abfolgen	47	135
Vertauschungen und Kombinationen	48	135
Eine zusätzliche Bedingung kommt dazu	50	138
Zahlen mit speziellen Eigenschaften gesucht	52	139
3.2 Wahrscheinlichkeit	53	141
3.3 Kombinatorisches in der Geometrie	54	142
Wege gesucht	54	142
Zerschnittenes und Zerlegtes	55	143

	A	L
Kombinieren auf Kästchenpapier	56	144
Puzzles	58	146
Vermischtes	60	146
4 Geometrie	61	
4.1 Ebene Geometrie	61	147
Flächenvergleiche	61	147
Flächenzerlegungen	63	149
Berechnung von Flächeninhalten	64	150
Umfangsberechnungen	67	153
Mit den Sätzen von Pythagoras und Thales	68	154
Winkelberechnungen	70	156
Dreiecksgeometrie	73	158
4.2 Räumliche Geometrie	75	160
Räumliches Vorstellungsvermögen	75	160
Passender Baustein gesucht	76	161
Würfelei	78	161
Würfelnetze	80	162
Eigenschaften von Körpern	81	163
4.3 Geometrisches Allerlei	83	164
Orientierung in Ebene und Raum	83	164
Wer kann gut falten?	85	165
Gedrehtes und Symmetrisches	87	167
Geometrie im Koordinatensystem	89	168
5 Kryptisches, Logisches, Magisches	91	
5.1 Logisches mit und ohne Zahlen	91	170
Logik führt zur Lösung	91	170
Mit Logik den Spielstand ermitteln	93	171
Logische Reihenfolge	94	172
Logik und Teilbarkeit	96	174
5.2 Mit Logik der Lüge zu Leibe	98	176
Wo liegt ein Widerspruch?	100	178
5.3 Kryptogramme und andere magische Figuren	101	179
Wie heißt die richtige Aufgabe?	101	179
Mit Logik lassen sich Löcher füllen	103	181

1 Zahlen und Rechnen

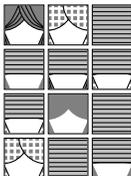
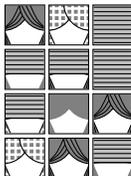
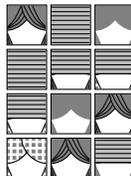
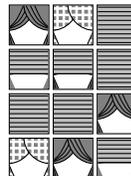
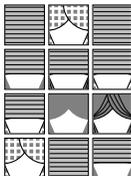
1.1 Rechnereien zum Aufwärmen



Wir beginnen die Aufgabensammlung des Känguru-Mathematikwettbewerbs mit leichten Übungen. Anhand möglichst vielgestaltiger Aufgaben soll Lust am Lösen entstehen und dabei die Rechenfertigkeit trainiert werden.

Bei den ersten Aufgaben genügt neben gründlichem Lesen oft schon aufmerksames Zählen. Die Grenze zwischen Zählen und Rechnen ist noch ganz unscharf. Dass es mit Rechnen oft besser geht, sollte sich beim Lösen als Erfahrung einstellen.

A 1.1 Die Fenster im Haus gegenüber haben an den vergangenen fünf Tagen ganz unterschiedlich ausgesehen. An welchem Tag waren die meisten Jalousien vollständig heruntergelassen?

				
(A) Montag	(B) Dienstag	(C) Mittwoch	(D) Donnerstag	(E) Freitag

_____ A-Eco (2), D/CH-3/4 (4) –13

A 1.2 Onkel Oskar gießt im Sommer seine Blumen zweimal täglich, einmal am Morgen und einmal am Abend. Wie oft gießt Onkel Oskar die Blumen im Laufe von 2 Wochen?

- (A) 14-mal (B) 18-mal (C) 24-mal (D) 28-mal (E) 30-mal

_____ A-Eco (4), D/CH-3/4 (3) –14

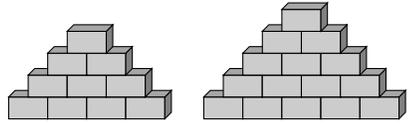
A 1.3 Zwei der fünf Häuser wurden aus denselben Figuren gelegt. Welche?

1	2	3	4	5
				
(A) 1 und 4	(B) 2 und 4	(C) 1 und 3	(D) 4 und 5	(E) 1 und 5

_____ A-Eco (3), D/CH-3/4 (4) –14

A 1.4 Wie viele Steine hat der rechte Stapel mehr als der linke?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10



A-Eco (1) -13

A 1.5 Maren bereitet eine Wandzeitung vor. Sie hat dafür große Buchstabenkarten, die sie anpinnt. Bei einigen Buchstaben hat sie sich beim Anpinnen vertan. Nun steht da:



Wie viele Karten muss Maren drehen, damit KÄNGURUWETTBEWERB dasteht?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

A-Ben (1), D/CH-5/6 (1) -14

A 1.6 Beim Stadtsportfest gewann unsere Schule 7-mal Gold, 9-mal Silber und 5-mal Bronze. Die Siegerschule brachte es sogar auf 8-mal Gold, 14-mal Silber und 4-mal Bronze. Wie viele Medaillen gewann die Siegerschule insgesamt mehr als unsere Schule?

- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

A-Eco (15), D/CH-3/4 (3) -13

A 1.7 In einer Schachtel befinden sich 3 Schachteln, und in jeder der 3 Schachteln sind wiederum 3 Schachteln. Wie viele Schachteln sind das insgesamt?

- (A) 9 (B) 13 (C) 7 (D) 14 (E) 18

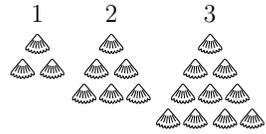
D/CH-3/4 (4) -12

A 1.8 Bevor wir zur Wanderung aufbrechen, bereiten Jens und Frederik für alle die Sandwiches vor. Aus je 2 Scheiben Brot entsteht ein Sandwich. Sie verbrauchen 2 ganze und eine halbe Packung Brot. Jede ganze Packung enthält 12 Scheiben Brot. Wie viele Sandwiches können wir mitnehmen?

- (A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 25 (E) 30

A-Eco (10), D/CH-5/6 (9) -13

A 1.9 Janoš hat Muscheln gesammelt. Er legt daraus Dreiecke. Im 1. Dreieck sind 3 Muscheln. In jedes weitere Dreieck legt er jeweils eine Reihe Muscheln mehr.



Wie viele Muscheln braucht Janoš für das 6. Dreieck?

- (A) 28 (B) 27 (C) 25 (D) 24 (E) 21

A-Eco (20), D/CH-3/4 (14) –14

A 1.10 Jedes Mal, wenn Pinocchio schwindelt, wächst seine Nase um 6 cm. Jedes Mal, wenn er die Wahrheit spricht, wird sie 2 cm kürzer. Gestern früh war seine Nase 9 cm lang. Danach hat er bis zum Mittag 3-mal geschwindelt und 2-mal die Wahrheit gesagt. Wie lang war seine Nase beim Mittagessen?

- (A) 10 cm (B) 14 cm (C) 19 cm (D) 23 cm (E) 25 cm

A-Eco (12), D/CH-3/4 (6) –13

A 1.11 Zur Hochzeitsfeier meines Bruders haben wir auf jeden der 15 Tische einen Kerzenhalter gestellt. In die 6 Kerzenhalter von den Großeltern steckten wir jeweils 5 Kerzen, in alle anderen jeweils 3 Kerzen. Wie viele Kerzen waren insgesamt anzuzünden?

- (A) 45 (B) 50 (C) 57 (D) 59 (E) 66

A-Eco (14), D/CH-3/4 (13) –12

A 1.12 In der Tierkinderschule unterrichtet eine alte Eule 3 Häschen, einige Lämmer sowie 4 Enten- und 2 Gänseküken. Gemeinsam zählen sie die Beine aller Tierkinder, 44 sind es. „Nun rechnet mal, wie viele Lämmer in der Klasse sind“, spricht die Eule. Es sind

- (A) 11 (B) 9 (C) 8 (D) 5 (E) 2

A-Eco (12), D/CH-3/4 (14) –12

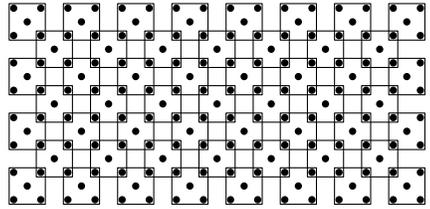
A 1.13 Im Flugzeug waren die Sitzreihen von 1 bis 25 nummeriert. Es gab keine Reihe mit der Nummer 13. Und die Reihe 15 am Notausstieg hatte nur 4 Sitze und nicht wie die anderen Reihen 6 Sitze. Wie viele Sitzplätze waren das insgesamt?

- (A) 148 (B) 144 (C) 142 (D) 138 (E) 120

A-Ben (9), D/CH-5/6 (4) –12

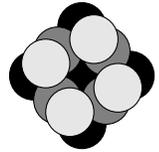
A 1.14 Wie viele Punkte befinden sich im Bild rechts?

- (A) 180
- (B) 181
- (C) 182
- (D) 183
- (E) 265



A-Eco (16) -14

A 1.15 Gerhard hat die gleiche Anzahl an weißen, grauen und schwarzen Spielplättchen. Einige der kreisrunden Spielplättchen hat er zu einem Haufen gelegt. Die dafür verwendeten Spielplättchen sind alle im Bild zu sehen. Gerhard hat aber immer noch 5 Spielplättchen, die nicht auf dem Haufen liegen. Wie viele schwarze Spielplättchen hatte er am Anfang?

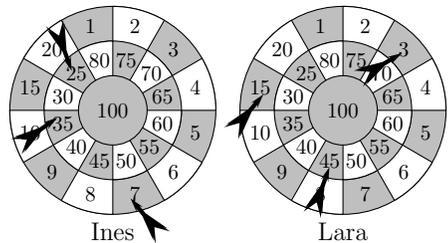


- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 15
- (E) 18

A-Eco (14) -14

A 1.16 Ines und Lara spielen Darts. Beide haben drei Pfeile geworfen, wie die Bilder zeigen. Wer hat gewonnen und mit wie vielen Punkten Vorsprung?

- (A) Ines mit 3 Punkten Vorsprung
- (B) Lara mit 4 Punkten Vorsprung
- (C) Ines mit 2 Punkten Vorsprung
- (D) Lara mit 2 Punkten Vorsprung
- (E) Ines mit 4 Punkten Vorsprung



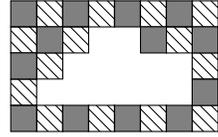
A-Eco (6), D/CH-3/4 (6) -12

A 1.17 Im Sportcamp nehmen 7 Teilnehmer jeden Tag an einem Krafttraining teil. Die restlichen 9 Teilnehmer absolvieren dieses Training jeden zweiten Tag. Gestern fand das Krafttraining für 13 Teilnehmer statt. Wie viele Teilnehmer sind heute beim Krafttraining dabei?

- (A) 3
- (B) 7
- (C) 9
- (D) 10
- (E) 13

A-Ben (11), D/CH-5/6 (12) -14

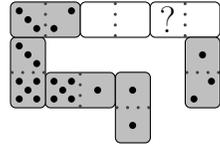
A 1.18 Im Duschaum unserer Turnhalle mussten für Renovierungsarbeiten einige Bodenplatten entfernt werden. Wie viele *gestreifte* Platten fehlen auf dem Bild von unserem ganz regelmäßig ausgelegten Duschaumboden?



- (A) 13 (B) 10 (C) 8 (D) 7 (E) 6

A-Eco (7), D/CH-3/4 (9) –12

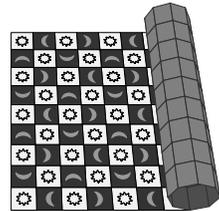
A 1.19 In Aylas Dominoschlange stoßen benachbarte Steine stets mit derselben Punktzahl aneinander. Zwei der Steine sind aus der Schlange herausgerutscht. Ayla hatte in der ursprünglichen Schlange die Punkte gezählt – es waren 35. Welche Punktzahl gehört an die Stelle des Fragezeichens?



- (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

A-Eco (16), D/CH-3/4 (15) –12

A 1.20 Meine Großeltern haben sich einen Teppich gekauft, der 90 cm breit und 1,50 m lang ist. Wie im Bild zu sehen, wechseln sich Quadrate mit Sonne und Mond im Muster ab. Wie viele Monde sind auf dem ausgebreiteten Teppich insgesamt zu sehen?



- (A) 60 (B) 63 (C) 65 (D) 67 (E) 68

A-Eco (23), D/CH-3/4 (20) –13

Jahreszahlen-Knobeleyen

Im folgenden Abschnitt ist ein Angebot von Rechenaufgaben zusammengestellt, wobei in irgendeiner Weise die Jahreszahl des jeweiligen Wettbewerbsjahres einbezogen ist. Es sind – leider – nur wenige ganz leichte Aufgaben dabei, und für die am Ende aufgeführten Aufgaben sind oft schon Kenntnisse aus dem Schulstoff der höheren Klassen erforderlich.

A 1.21 $20 - 14 + 2 - 0 + 1 - 4 =$

- (A) 21 (B) 15 (C) 13 (D) 9 (E) 5

D/CH-3/4 (1) –14

A 1.22 $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014 =$

- (A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) 4 (E) 2014

A-Kad (3), D/CH-7/8 (1) –14

A 1.23 Als Präsident des Fördervereins „Kloster am Dom e. V.“ schreibt unser Mathematiklehrer regelmäßig die Klosterkolumne im Stadtboten. Dieses Jahr trug sie zum Jahresanfang den Titel „Klostermathematik“. Darin stand: „2013 besteht aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern, aus der 0, der 1, der 2 und der 3. Und unser schönes Kloster wurde in dem Jahr gegründet, in dem das letzte Mal die Jahreszahl aus aufeinanderfolgenden Ziffern bestand.“ Wie alt ist das Kloster?

- (A) 581 Jahre (B) 671 Jahre (C) 689 Jahre
(D) 770 Jahre (E) 779 Jahre

A-Jun (22) und Stu (5), D/CH-11/13 (8) –13

A 1.24 In mein Mathematikheft habe ich eine Additionsaufgabe geschrieben. Die Summe ist 2013. Welche Zahlen ich addiert habe, weiß ich nicht mehr. Aber ich erinnere mich, dass die Zahlen nur aus den Ziffern 0 und 1 bestanden. Wie viele Zahlen habe ich mindestens addiert?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 10 (E) 13

D/CH-3/4 (22) –13

A 1.25 An der Tafel stehen der Größe nach geordnet alle 4-stelligen Zahlen, die eine 2, eine 0, eine 1 und eine 3 als Ziffer enthalten. Welches ist die größte Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen?

- (A) 702 (B) 703 (C) 693 (D) 793 (E) 198

A-Kad (17), D/CH-7/8 (17) –13

A 1.26 Durch welche der folgenden Zahlen kann die Differenz $2013 - 1023$ *nicht* ohne Rest geteilt werden?

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

A-Jun (1), D/CH-9/10 (4) –13