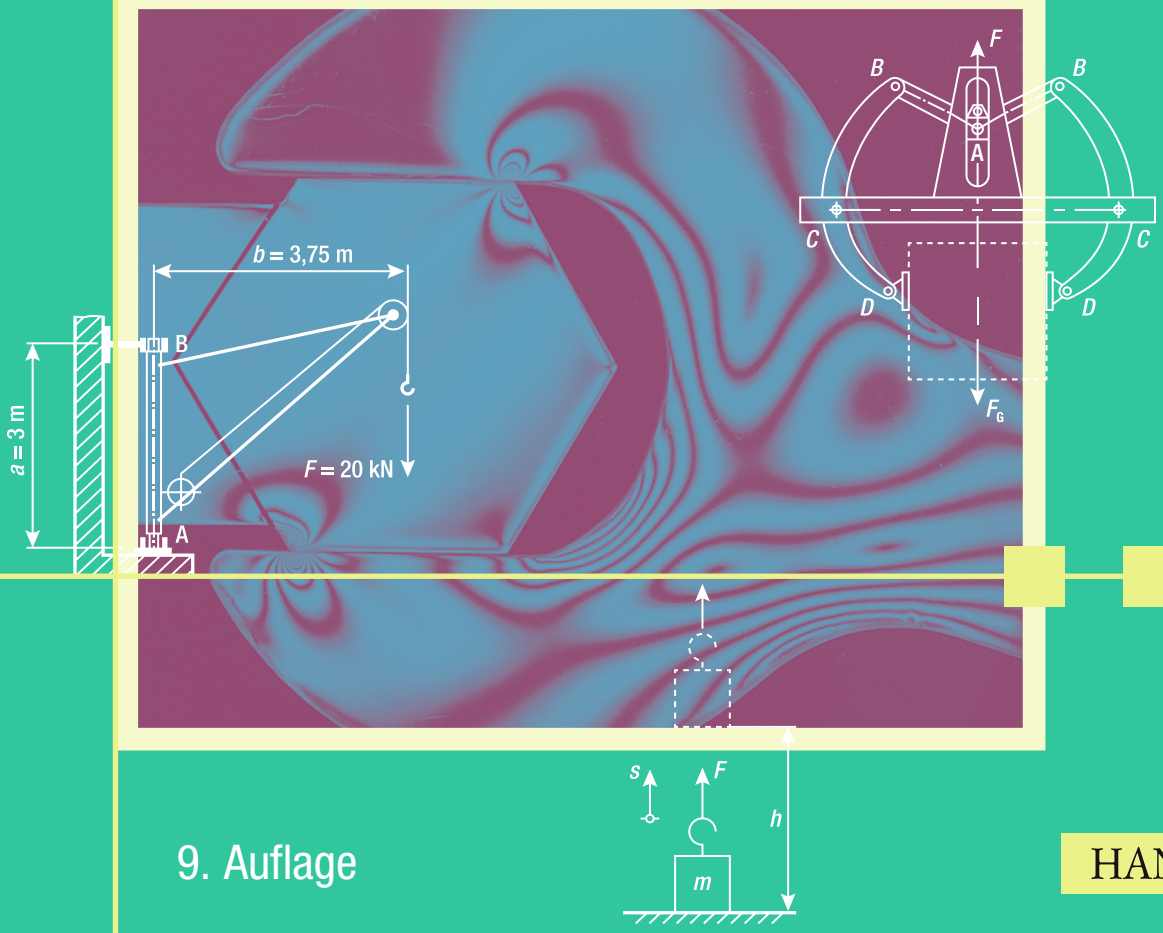
Martin Mayr

Technische Mechanik

Statik
Kinematik – Kinetik – Schwingungen
Festigkeitslehre



9. Auflage

HANSER

Martin Mayr

Technische Mechanik



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Martin Mayr

Technische Mechanik

Statik
Kinematik – Kinetik – Schwingungen
Festigkeitslehre

9. Auflage

Mit 474 Abbildungen

HANSER

Der Autor:
Professor Dr. Martin Mayr, Hochschule Augsburg, Fakultät Maschinenbau und Verfahrenstechnik



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.
Ebenso wenig übernehmen Autor und Verlag die Gewähr dafür, dass beschriebene Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München, www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg
Herstellung: Björn Gallinge
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelmotiv: Max Kostopoulos
Coverrealisation: Max Kostopoulos
Satz: mediaTEXT Jena GmbH
Druck und Bindung: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg
Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46933-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-46952-5

Meiner Tochter Andrea gewidmet

Ein aufrichtiges Dankeschön meinen Mechaniklehrern

Prof. Dr. Hans Georg Hahn
Prof. Dr. Dr. h. c. Horst Lippmann
Prof. Dr. Dr. h. c. Kurt Magnus
Prof. Dr. Dr. h. c. Heinz Neuber

Allgemeines Vorwort

Dieses Lehrbuch beinhaltet den Stoff der Vorlesung „Technische Mechanik“ im Studium des Maschinenbaus an Fachhochschulen. Es besteht aus drei selbständigen Teilen: Statik – Kinematik, Kinetik, Schwingungen – Festigkeitslehre. Jeder Teil kann unabhängig vom anderen benutzt werden. Einheitlicher Aufbau, Querverweise und ein gemeinsamer Anhang fügen die drei Teile jedoch zu einem Ganzen zusammen. Der umfangreiche Anhang ist zum bequemen Nachschlagen in einem Beiheft untergebracht.

Bei der Darstellung ließ ich mich vor allem von didaktischen Gesichtspunkten leiten: optische Hervorhebung der Endformeln und Merksätze, 474 Bilder, 275 Fragen zum Verständnis, 104 vollständig gelöste Beispiele, 116 themenbezogene Übungsaufgaben, 43 „Prüfungsaufgaben“ (nach vier Schwierigkeitsgraden geordnet).

Die Antworten zu den Fragen sowie die Ergebnisse der Übungs- und Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) befinden sich am Schluss des jeweiligen Buchteils. Aus Platzgründen konnten nicht die vollständigen Lösungen wiedergegeben werden. Lehrende erhalten sie auf Anfrage.

Weitere themenbezogene Beispiele und Prüfungsaufgaben sind in meinem Übungsbuch „Mechanik-Training“ zusammengestellt (mit ausführlichen Lösungen).

Der Gepflogenheit im Maschinenbau folgend sind die Bilder, falls nichts anderes vereinbart ist, in der Einheit mm bemaßt. In den Zahlenwertgleichungen wird fast ausschließlich mit kohärenten Einheiten gearbeitet, um langwierige Umrechnungen zu vermeiden. Die Berechnungen werden mit dem Taschenrechner ohne ein Zwischenrunden ausgeführt, das Endergebnis wird meist auf eine praktisch sinnvolle Stellenzahl gerundet wiedergegeben. Graphische Lösungen werden mit CAD erstellt und sind deshalb so genau wie analytische Lösungen.

Ich möchte allen, die mich bei der Arbeit zu diesem Buch unterstützt haben, ganz herzlich danken.

Hier sind in erster Linie Prof. Ulrich Thalhofer (Numerische Verfahren) und Prof. Ernst Schatz (Maschinenelemente, Thermische Strömungsmaschinen) zu nennen.

Wertvolle Unterstützung erhielt ich auch von Prof. Helmut Hiekel (Mechanik), Prof. Dr. Wolfgang Käser und Prof. Wilhelm Ruckdeschel (beide Fördertechnik, Maschinenelemente) sowie Prof. Dr. Peter Tautzenberger (Werkstofftechnik).

Korrektur lasen Prof. Dr. Werner Drexler (Mechanik, FH Kempten), Prof. Dr. Johann Fuchs (Mechanik), Prof. Dr. Frank Gießner (Feinwerktechnik, Mechanik), Dipl.-Ing. Hubert Keim (Konstruktion, Pfister GmbH Augsburg) und wiederum Prof. Ernst Schatz.

Übungsaufgaben und fachlichen Rat steuerten bei Prof. Dr. Ingo Bolling (Hydraulik-Pneumatik), Dipl.-Ing. Hubert Breyer (Unfallverhütung, GUV), Prof. Rudolf Bretzel (Mechanik, Luft- und Raumfahrt), Prof. Dr. Dieter Jannasch (Maschinenelemente), Prof. Dr. Winfried Kochem (Konstruktion, FH Köln), Prof. Klaus Martin (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), StD Georg Mühlbauer (Mathematik, Physik, Max-Reger-Gymnasium Amberg), Prof. Dr. Franz Obinger (Getriebetechnik, CAD), Prof. Hans Rebinger (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), Prof. Dr. Willi Rößner (Werkzeugmaschinen), Prof. Dr. Joachim Voßiek (Maschinenelemente, Mechanik), Prof. Dr. Rainer Wieler (Verbrennungsmotoren, Fahrzeugtechnik) und Prof. Dr. Rolf Ziegler (Regelungstechnik).

Dipl.-Ing. Daniel Dierig, Dipl.-Ing. Oliver Herrmann, Dipl.-Ing. Jürgen Möller, Dipl.-Ing. Marco Vasciarelli, Dipl.-Ing. Eugen Weber und Dipl.-Ing. Stefan Wolf zeichneten mit großer Sorgfalt die Bilder. Herr Otto Reiser baute die Modelle, Herr Erber machte die Fotos. Die schlimmsten sprachlichen Ausrutscher verhinderten meine Frau Lydia und meine Tochter Andrea.

Mit Informationen unterstützten mich die Firmen KUKA, LIEBHERR, MAN und VON ROLL.

Allen Genannten nochmals herzlichen Dank.

Vorwort zur 9. Auflage

Der Inhalt der 8. Auflage samt Beiheft wurde sorgfältig geprüft. Dabei ergaben sich im Buch nur wenige, unbedeutende Korrekturen. Im Beiheft wurden die Profiltafeln auf den aktuellen Stand gebracht.
Ich danke allen Lesern für die wohlwollenden Zuschriften und wertvollen Anregungen. Dem Carl Hanser Verlag, und ganz persönlich meinem Lektor Volker Herzberg, danke ich für das Interesse an meinem Buch und für die äußerst angenehme Zusammenarbeit.

Augsburg, Februar 2021 Martin Mayr

Inhaltsverzeichnis

TEIL 1: Statik

1 Begriffe, Grundgesetze, Grundaufgaben . . . 1
- 1.1 Die Kraft . . . 1
- 1.2 Masse und Gewichtskraft . . . 2
- 1.3 Das Gleichgewichtsaxiom . . . 3
- 1.4 Das Wechselwirkungsgesetz . . . 4
- 1.5 Die Verschiebbarkeit der Kraft längs ihrer Wirkungslinie . . . 5
- 1.6 Kräfteparallelogramm und Krafteck . . . 5
- 1.7 Die Zerlegung einer Kraft nach zwei nichtparallelen Wirkungslinien . . . 5
- 1.8 Das Hebelgesetz von ARISTOTELES und ARCHIMEDES . . . 6

2 Die resultierende Kraft eines zentralen ebenen Kräftesystems . . . 8
- 2.1 Graphische Lösung . . . 8
- 2.2 Analytische Lösung . . . 8

3 Kräftepaar und Moment einer Kraft . . . 10
- 3.1 Das Kräftepaar . . . 10
- 3.2 Das Gleichgewicht zweier Kräftepaare . . . 11
- 3.3 Parallelverschiebung einer Kraft . . . 11
- 3.4 Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes . . . 11
- 3.5 Darstellung und Eigenschaften des Moments . . . 12
- 3.6 Das Moment einer Kraft in Bezug auf den Koordinatenursprung . . . 13

4 Die resultierende Kraft eines nicht zentralen ebenen Kräftesystems . . . 14
- 4.1 Parallele Kräfte . . . 14
- 4.2 Beliebige Kräfte . . . 15

5 Lagerung von Körpern . . . 16
- 5.1 Freimachen eines Körpers . . . 16
- 5.2 Lagerungsarten ebener Körper . . . 16

6 Ebene Kräftesysteme im Gleichgewicht . . . 19
- 6.1 Drei nichtparallele Kräfte . . . 19
- 6.2 Zerlegung einer Kraft nach drei Wirkungslinien . . . 22
- 6.3 Beliebiges ebenes Kräftesystem (einschließlich Einzelmomente) . . . 24

7 Lagerreaktionen von typischen ebenen Tragwerken . . . 29
- 7.1 Balken auf zwei Stützen . . . 29
- 7.2 Der eingespannte Balken . . . 29
- 7.3 GERBER-Träger . . . 30
- 7.4 Dreigelenkbogen . . . 32

8 Das räumliche Kräftesystem . . . 33
- 8.1 Komponenten einer Kraft im kartesischen Koordinatensystem . . . 33
- 8.2 Das Moment einer Kraft und seine kartesischen Komponenten . . . 34
- 8.3 Resultierende Kraft und resultierendes Moment . . . 36
- 8.4 Lagerung räumlicher Körper . . . 37
- 8.5 Räumliche Kräftesysteme im Gleichgewicht . . . 37

9 Der Schwerpunkt . . . 46
9.1 Körperschwerpunkt . . . 46
9.2 Flächenschwerpunkt . . . 49
9.3 Die GULDINschen Regeln . . . 51

10 Innere Kräfte und Momente . . . 54
10.1 Gerader Balken auf zwei Stützen mit Belastung quer zur Balkenachse . . . 54
10.2 Der eingespannte Balken . . . 62
10.3 GERBER-Träger . . . 63
10.4 Bogenträger . . . 64
10.5 Ebene Rahmen ohne Verzweigung . . . 65
10.6 Ebene Rahmen mit Verzweigung . . . 67
10.7 Wellen . . . 69
10.8 Beliebige räumliche Träger . . . 71

11 Ebene, statisch bestimmte Fachwerke . . . 74

12 Reibung . . . 77
12.1 Haft- und Gleitreibung . . . 77
12.2 Seil- und Riemenreibung . . . 80
12.3 Rollreibung (Rollwiderstand) . . . 83

Prüfungsaufgaben . . . 85

Antworten zu den Fragen . . . 90

Ergebnisse der Übungsaufgaben
(meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . 92

Ergebnisse der Prüfungsaufgaben
(meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . 99

TEIL 2: Kinematik, Kinetik, Schwingungen

1 Einleitung . . . 101

2 Ebene Punktbewegung . . . 103
2.1 Bahn, Geschwindigkeit, Beschleunigung . . . 103
2.2 Weg-Zeit-Diagramm . . . 107
2.3 Grundaufgaben der Kinematik . . . 108
2.4 Tangential- und Normalbeschleunigung (bzw. Bahn- und Zentripetalbeschleunigung) . . . 110
2.5 Drehbewegung – lineare Bewegung . . . 112
2.5.1 Kreisbahn . . . 112
2.5.2 Umwandlung einer Drehbewegung in eine lineare Bewegung . . . 113
2.6 Beschreibung der Bewegung in Polarkoordinaten . . . 116

3 Räumliche Punktbewegung . . . 120

4 Ebene Bewegung des starren Körpers (mit Hinweisen auf die räumliche Bewegung) . . . 123
4.1 Translation (Parallelverschiebung) . . . 123
4.2 Rotation (Drehung) . . . 123
4.3 Beliebige Bewegung . . . 123
4.3.1 Geschwindigkeit . . . 124
4.3.2 Beschleunigung . . . 125
4.4 Drehpol (Momentan-, Geschwindigkeitspol) . . . 127

5 Relativbewegung . . . 131
5.1 Translatorisch bewegtes Bezugssystem . . . 131
5.2 Geschwindigkeit bei translatorisch und rotatorisch bewegtem Bezugssystem . . . 132
5.3 Beschleunigung bei translatorisch und rotatorisch bewegtem Bezugssystem . . . 134

6 Überlagerte Drehbewegungen . . . 139

7 Arbeit, potentielle Energie, Leistung, Wirkungsgrad . . . 141
7.1 Arbeit und potentielle Energie . . . 141
7.2 Leistung . . . 143
7.3 Wirkungsgrad . . . 143

8 Die NEWTONschen Grundgesetze, D'ALEMBERTsche Trägheitskraft . . . 145

9 Impulssatz und Schwerpunktsatz . . . 151

10 Energiesatz . . . 157

11 Trägheitsmomente . . . 161

12 Kinetik der ebenen Bewegung des starren Körpers . . . 164
12.1 Translation mit der Schwerpunktgeschwindigkeit . . . 164
12.2 Rotation um eine Trägheitshauptachse durch den Schwerpunkt . . . 165
12.2.1 Drehimpulssatz (Drallsatz) . . . 165
12.2.2 Kinetische Energie . . . 167
12.3 Analogie zwischen Translation und Rotation . . . 168
12.4 Drehung um eine feste Achse oder um eine Achse durch den Momentanpol . . . 170
12.5 Reduziertes Trägheitsmoment . . . 171
12.6 Allgemeine ebene Bewegung . . . 174
12.7 Gekoppelte Körper . . . 177

13 Kinetik der Relativbewegung . . . 180

14 Stoßvorgänge . . . 183
14.1 Gerader zentraler Stoß . . . 183
14.2 Schiefer zentraler Stoß . . . 189
14.3 Gerader exzentrischer Stoß . . . 190
14.4 Drehstoß . . . 191

15 Schwingungen . . . 192
15.1 Freie ungedämpfte Schwingung . . . 193
15.2 Freie gedämpfte Schwingung . . . 198

15.3 Erzwungene Schwingung . . . 205
15.4 Maßnahmen gegen Resonanzerscheinungen . . . 209
15.4.1 Verlagerung der Eigenfrequenz . . . 209
15.4.2 Dämpfung und Schwingungsstörung . . . 210
15.4.3 Schwingungsisolierung . . . 210
15.4.3.1 Aktive Isolierung . . . 210
15.4.3.2 Passive Isolierung . . . 213
15.4.4 Schwingungstilgung mittels Hilfsmasse . . . 214

Prüfungsaufgaben . . . 217

Antworten zu den Fragen . . . 221

Ergebnisse der Übungsaufgaben
(meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . 225

Ergebnisse der Prüfungsaufgaben
(meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . 231

TEIL 3: Festigkeitslehre

1 Aufgaben der Festigkeitslehre . . . 233

2 Beanspruchungsarten . . . 236

3 Spannungen . . . 239
3.1 Normalspannung und Schubspannung . . . 239
3.2 Zugstab – einachsiger Spannungszustand . . . 240
3.3 Räumlicher (dreiachsiger) Spannungszustand . . . 242
3.4 **E**bener (zweiachsiger) **S**pannungs**z**ustand (ESZ) . . . 244
3.4.1 Spannungen für gedrehte Schnittflächen . . . 245
3.4.2 Größte und kleinste Normalspannung sowie größte Schubspannung . . . 247
3.4.3 MOHRscher Spannungskreis . . . 253
3.5 Spannungsoptik . . . 256

4 Verformungen und Verzerrungen . . . 262
4.1 Dehnung und Querdehnung . . . 262
4.2 Schubverzerrung . . . 263
4.3 Allgemeiner Verzerrungszustand . . . 263

5 Stoffgesetze . . . 264
5.1 Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, HOOKEsches Gesetz . . . 264
5.2 Schubspannung und Schubwinkel . . . 267
5.3 Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand . . . 267
5.4 Wärmedehnungen und Wärmespannungen . . . 269
5.5 Anwendung der einachsigen Stoffgesetze auf statisch bestimmte und statisch unbestimmte Stabwerke . . . 271
5.5.1 Spannungen und Verformungen in einem statisch bestimmten Stabwerk . . . 271
5.5.2 Spannungen und Verformungen in einem statisch unbestimmten Stabwerk . . . 273

6 Arbeit und elastische Energie . . . 276

7 Einfache Beanspruchungsfälle und Festigkeitsbedingungen . . . 279
7.1 Zug und Druck . . . 279
7.2 Flächenpressung . . . 281
7.3 Schub . . . 281

8 Dünnwandige Ringe . . . 285
8.1 Spannung unter Innen- oder Außendruck . . . 285
8.2 Radiusänderung und Dehnung infolge Spannung und Temperaturänderung . . . 286
8.3 Rotierender Ring . . . 289

9 Dünnwandige Behälter . . . 293
9.1 Kreiszylindrischer Behälter unter Innen- oder Außendruck . . . 293
9.2 Kugelbehälter unter Innen- oder Außendruck . . . 294

10 Flächenmomente . . . 297
10.1 Flächenmoment 1. Grades (statisches Moment der Fläche) . . . 297
10.2 Flächenmomente 2. Grades . . . 298
10.2.1 Definitionen und Beispiele . . . 298
10.2.2 Parallelverschiebung der Bezugsachsen . . . 301
10.2.3 Drehung der Bezugsachsen . . . 301
10.2.4 Flächenmomente zusammengesetzter Flächen . . . 302

11 Biegung . . . 308
11.1 Reine Biegung . . . 308
11.1.1 Gerade Biegung . . . 308
11.1.2 Schiefe Biegung . . . 312
11.2 Biegung mit Querkraft und weitere Näherungen (Technische Biegelehre) . . . 315
11.3 Durchbiegung und Biegewinkel . . . 321
11.4 Formänderungsarbeit . . . 327

12 Torsion . . . 331
12.1 Kreiszylindrische Stäbe . . . 331
12.2 Formänderungsarbeit . . . 336
12.3 Dünnwandige einfach geschlossene Profile . . . 337
12.3.1 Schubspannung . . . 337
12.3.2 Torsionswinkel . . . 338
12.4 Dünnwandige offene Profile . . . 342
12.5 Sonstige Querschnittsformen . . . 343

13 Schub bei Querkraftbiegung . . . 346

14 Knickung . . . 353
14.1 Elastische Knickung nach EULER . . . 353
14.2 Spannungsabsicherung bei Druckstäben . . . 356

15 Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit . . . 361

16 Festigkeitshypothesen . . . 364
16.1 Die drei wichtigsten Hypothesen . . . 365
16.2 Anstrengungsverhältnis . . . 367

17 Zusammengesetzte Beanspruchung von Stäben . . . 369

17.1 Biegung mit Normalkraft . . . 369
17.2 Biegung und Torsion . . . 372
17.3 Beliebige Lastkombination . . . 377

18 Bauteilfestigkeit . . . 380
18.1 Plastische Stützwirkung. . . . 380
18.2 Kerbwirkung . . . 381
18.3 Oberflächeneinfluss, Randschichtverfestigung, Umgebungseinfluss . . . 384
18.4 Größeneinfluss . . . 385

19 **D**ehnungs**m**ess**s**treifen-Methode (DMS-Methode) . . . 391

20 Satz von CASTIGLIANO . . . 398
20.1 Statisch bestimmte Systeme . . . 400
20.2 Statisch unbestimmte Systeme . . . 401

Prüfungsaufgaben . . . 406

Antworten zu den Fragen . . . 415

Ergebnisse der Übungsaufgaben
(meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . 421

Ergebnisse der Prüfungsaufgaben
(meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . 426

Literaturverzeichnis
(im Text zitierte und ergänzende Literatur) . . . 429

Verwendete Symbole
(mit den vorzugsweise verwendeten Einheiten) . . . 431

Sachwortverzeichnis . . . 435

TEIL 1: Statik

1 Begriffe, Grundgesetze, Grundaufgaben

Kraft, Masse, Gewichtskraft, Gleichgewichtsaxiom, Wechselwirkungsgesetz, Verschiebbarkeit der Kraft längs ihrer Wirkungslinie, Kräfteparallelogramm, Krafteck, Hebelgesetz

In Teil 1 beschäftigen wir uns mit den Kräften, die auf einen starren (d. h. nicht verformbaren) ruhenden oder mit konstanter Geschwindigkeit translatorisch bewegten Körper einwirken, den sog. äußeren Kräften (z. B. Windkräfte, Auftriebskräfte). Von Interesse sind auch Kräfte, die zwischen starren Körpern (Kontaktkräfte) oder zwischen starren Körpern und deren Lagerungen (Lagerkräfte) wirken. Des Weiteren werden wir die Kräfte und Momente im Innern eines Körpers bestimmen.

1.1 Die Kraft

Die Kraft ist eine Größe, die den Bewegungszustand und/oder die Form eines Körpers ändern kann, s. Teil 2 und 3.

Die Kraft ist allgemein ein sog. gebundener Vektor.

Dieser ist festgelegt durch:
1. Betrag (Zahlenwert einschließlich Einheit)
2. Wirkungslinie
3. Richtungssinn
4. Angriffspunkt

Im Gegensatz zur Kraft ist z. B. die Temperatur ein Skalar. Bei diesem genügt die Angabe des Betrags.
Für den Kraftvektor schreiben wir $\vec{F}$ (in der Literatur ist auch $\boldsymbol{F}$ üblich) und für den Betrag beispielsweise $F = 100$ N. N (wie Newton) ist die Krafteinheit, benannt nach dem berühmten englischen Physiker ISAAC NEWTON[1].
Anschaulich wird die Kraft in einer Skizze, Bild 1.1. Zur maßstäblichen Darstellung benötigen wir den Kräftemaßstab m_F, z. B.

$$m_F = \frac{200\ \text{N}}{\text{cm}} .$$

[1] ISAAC NEWTON 1643 – 1727

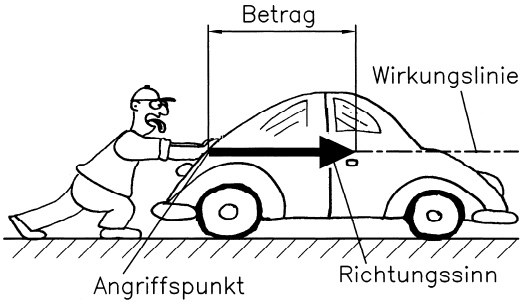
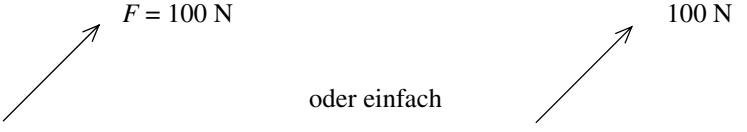


Bild 1.1 Die 4 Merkmale des gebundenen Kraftvektors

Der 2 cm lange Pfeil bedeutet damit eine Kraft

$$F = 2\ \text{cm} \cdot m_{\text{F}} = 2\ \text{cm} \cdot \frac{200\ \text{N}}{\text{cm}} = 400\ \text{N}\,.$$

Oft wird die Pfeillänge nicht maßstäblich gezeichnet, stattdessen der Betrag neben die Pfeilspitze geschrieben:



Zur analytischen Beschreibung bezieht man die Kraft auf ein kartesisches *x*,*y*-Koordinatensystem, Bild 1.2.

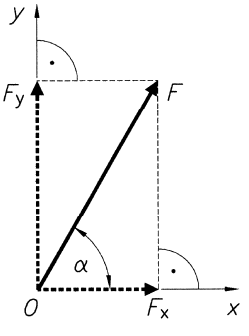


Bild 1.2 Die Kraft im kartesischen Koordinatensystem

Die Kraft $\vec{F}$ ist analytisch festgelegt
entweder durch die Komponenten

$$\begin{aligned} F_{\text{x}} &= F \cdot \cos\alpha \\ F_{\text{y}} &= F \cdot \sin\alpha \end{aligned} \qquad (1.1)$$

oder durch den Betrag F und den Winkel α zwischen $\vec{F}$ und der x-Achse.

1.2 Masse und Gewichtskraft

Die Masse m ist die Materiemenge, die von der Körperoberfläche eingeschlossen wird. Sie beschreibt die Eigenschaft eines Körpers, die sich sowohl in Trägheitswirkungen gegenüber einer Änderung seines Bewegungszustandes als auch in der Anziehung auf andere Körper äußert.

$$\text{Masse} \quad m = \rho \cdot V \quad \text{in kg} \qquad (1.2)$$

mit

V: Volumen in m^3 u. ä.
ρ: Dichte in kg/m^3, kg/dm^3 u. ä.

Zwei Werte für ρ:

Stahl	$\rho \approx 7{,}85\ \text{kg/dm}^3$
Aluminiumlegierung	$2{,}7\ \ \text{kg/dm}^3$

Weitere Werte in A9.3.

Jede Masse wird von der Erde angezogen, und zwar mit der

Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$. (1.3a)

$\vec{g}$ ist die Fallbeschleunigung; sie zeigt zum Erdmittelpunkt hin, d. h. vertikal oder lotrecht nach unten.

$g \approx 9{,}81$ m/s^2 in der Nähe der Erdoberfläche

Betrag der Gewichtskraft:

$F_G = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot V$ in N (1.3b)

Die Gewichtskraft ist eine sog. eingeprägte Kraft. Sie spielt eine große Rolle in Statik und Dynamik.

Beispiel 1.1

Welche Masse m und welche Gewichtskraft F_G hat eine Stahlkugel vom Radius $R = 10$ mm und der Dichte $\rho = 7{,}85$ kg/dm^3?

Lösung:
A5.1 entnehmen wir:

$$m = \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 7{,}85 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot \tfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot \frac{10^{-6}\text{dm}^3}{\text{mm}^3}$$

$$m \approx 0{,}0329 \text{ kg}$$

Mit (1.3b) folgt:

$$F_G = m \cdot g \approx 0{,}0329 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}323 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = 0{,}323 \text{ N}$$

mit der Umrechnung gemäß A1.1:

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

*

Die Masse wird vereinfachend meist mit dem Wägewert, d. h. dem Ergebnis einer Wägung in Luft (auch Gewicht genannt) gleichgesetzt. Als Einheiten werden außer dem Kilogramm auch Gramm und Tonne verwendet.

1.3 Das Gleichgewichtsaxiom

Bleibt ein Körper unter der Einwirkung beliebiger Kräfte in Ruhe, so befindet er sich im Gleichgewicht.

Das ist ein Axiom, d. h. eine Grunderkenntnis, die nicht mehr bewiesen werden kann, aber durch jahrhundertelange Erfahrung bestätigt wird.

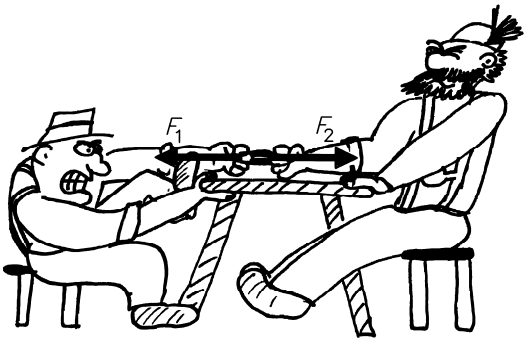


Bild 1.3 Zwei Kräfte im Gleichgewicht

Ein Sonderfall ist das Gleichgewicht von **zwei** Kräften, Bild 1.3. Hierfür gilt:

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie

1. die gleiche Wirkungslinie haben,
2. entgegengesetzt gerichtet und
3. gleich groß sind.

Alle 3 Bedingungen lassen sich in einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{1.4}$$

Achtung: Die Vektoren sind entgegengesetzt gleich (Minus!); die Beträge sind direkt gleich ($F_1 = F_2$).

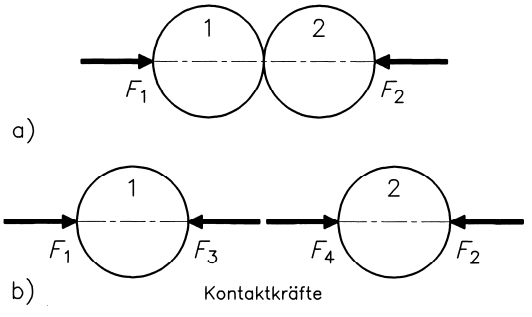


Bild 1.4 Kontaktkräfte
a) zwei Körper in Kontakt
b) Sichtbarmachen der Kontaktkräfte

1.4 Das Wechselwirkungsgesetz

An der Berührstelle zweier Körper treten Kontaktkräfte (Berührkräfte) auf. Das sind im Gegensatz zu den äußeren Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ innere Kräfte für das Gesamtsystem und sie erscheinen somit in Bild 1.4a nicht. Rückt man die beiden Körper gedanklich auseinander, lassen sich die Kontaktkräfte einzeichnen, Bild 1.4b. Sie werden zu äußeren Kräften für die Einzelkörper oder Teilsysteme. $\vec{F}_3$ ist die Kraft vom Körper 2 auf den Körper 1, $\vec{F}_4$ vom Körper 1 auf den Körper 2.

Das Gleichgewichtsaxiom liefert:

Körper 1: $F_3 = F_1$

Körper 2: $F_4 = F_2$

Gesamtanordnung, Bild 1.4a: $F_1 = F_2$

Der Vergleich der drei Zeilen führt auf: $F_3 = F_4$.

Die Kräfte zweier Körper aufeinander sind stets gleich groß und entgegengesetzt gerichtet, kurz: actio = reactio.

Das ist das Dritte Grundgesetz von NEWTON, das sog. Wechselwirkungsgesetz.

Beispiele dafür gibt es beliebig viele: Sie drücken mit Ihrem Gewicht auf den Stuhl, der Stuhl drückt mit gleicher Kraft dagegen. Zwei Zahnräder kämmen miteinander, Bild 1.5a, die beiden Zahnflanken drücken mit gleicher Kraft aufeinander, Bild 1.5b, etc. pp.

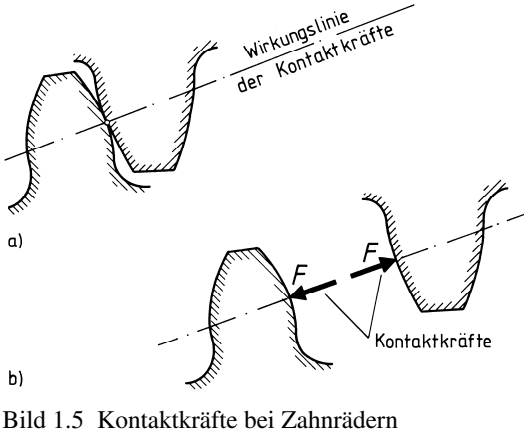


Bild 1.5 Kontaktkräfte bei Zahnrädern
a) Zahnpaar momentan in Kontakt
b) Kontaktkräfte (Zahnkräfte)

1.5 Die Verschiebbarkeit der Kraft längs ihrer Wirkungslinie

Die 3 Situationen in Bild 1.6 sind in ihrer äußeren Wirkung gleichwertig, d. h. die Wirkung der Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$ auf die Lager ist in allen drei Fällen gleich. Das bedeutet:

> Eine Kraft kann längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne dass sich die äußere Wirkung ändert.

Achtung! In der Festigkeitslehre ist der Kraftangriffspunkt im Allgemeinen zu beachten. Das gilt auch für Kap. 10 und 11 von Teil 1 zur Bestimmung der inneren Kräfte.

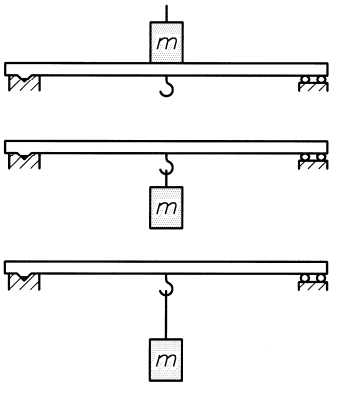


Bild 1.6 Verschiebung der Kraft längs ihrer Wirkungslinie

1.6 Kräfteparallelogramm und Krafteck

Die beiden Schlepper in Bild 1.7a ziehen am Ozeanriesen mit den Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ (kurz Resultierende) entspricht der Diagonalen des Kräfteparallelogramms. Es gilt somit der Satz (Axiom vom Kräfteparallelogramm):

> Zwei Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit gemeinsamem Angriffspunkt ist eine einzige Kraft $\vec{F}_R$ statisch gleichwertig, die am selben Punkt angreift und der Diagonale des von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gebildeten Parallelogramms entspricht.

Zur Konstruktion von $\vec{F}_R$ genügt auch die Hälfte des Parallelogramms, das sog. Krafteck, Bild 1.7b.

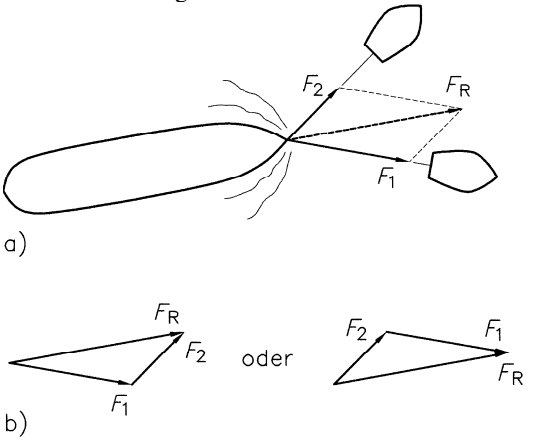


Bild 1.7 Die Resultierende von zwei Kräften
a) Kräfteparallelogramm
b) Krafteck

1.7 Die Zerlegung einer Kraft nach zwei nichtparallelen Wirkungslinien

Das ist die Umkehrung des vorangegangenen Problems.
Hierzu die Situation in Bild 1.8a. Die Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$ wird durch die beiden Seilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gehalten. Wie lassen sich die Seilkräfte zeichnerisch bestimmen?

Die Resultierende $\vec{F}_R$ der Seilkräfte muss der Gewichtskraft das Gleichgewicht halten. Diese Resultierende ist die Diagonale des Parallelogramms, das von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gebildet wird, Bild 1.8b. Wir müssen also Parallelen zu den Seilen an $\vec{F}_R$ zeichnen und erhalten damit

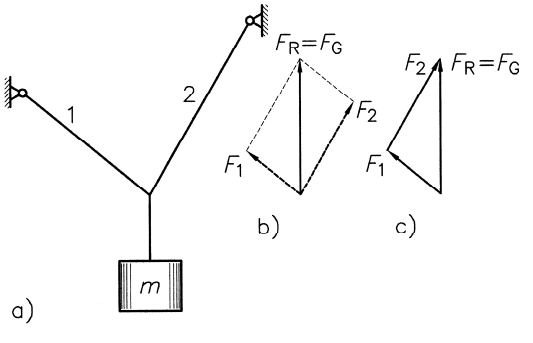


Bild 1.8 Zerlegung einer Kraft
a) Gewicht an zwei Seilen
b) Zerlegung von F_R mit Hilfe des Kräfteparallelogramms
c) Zerlegung mit Hilfe des Kraftecks

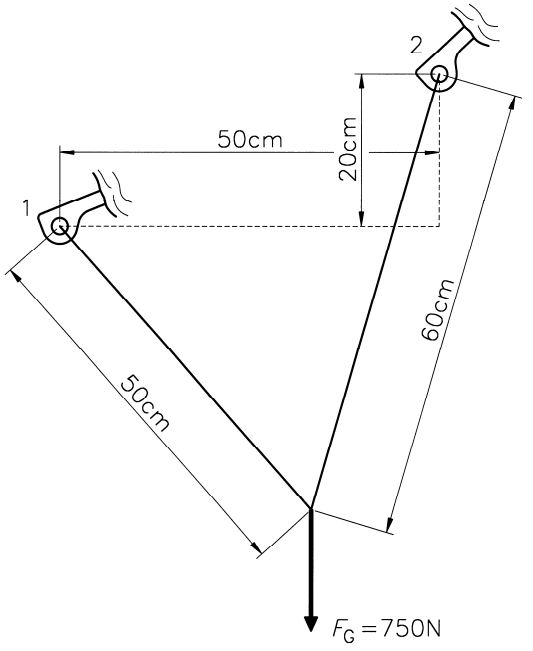


Bild 1.9 Kräftezerlegung beim Klettern, Übung 1.1

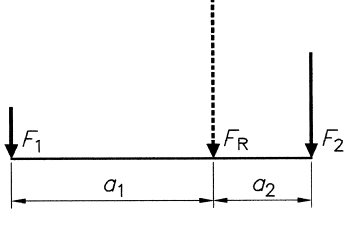


Bild 1.10 Die Resultierende $\vec{F}_R$ der parallelen Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$

$\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Das Gleiche bekommen wir schneller über das Krafteck, Bild 1.8c.

Eine weitere häufige Anwendung der Kräftezerlegung ist der Keil.

Übung 1.1

Ein Kletterer hat gemäß Bild 1.9 in den gezeichneten Abständen zwei Haken geschlagen und sich daran mit Hilfe zweier Schlingen von 50 cm bzw. 60 cm Länge gesichert.

Bestimmen Sie graphisch die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ der Haken 1 bzw. 2 auf die Schlingen, wenn der Kletterer mit seinem gesamten Gewicht (Gewichtskraft $F_G = 750$ N) in der Sicherung hängt. Durch welche Maßnahme werden die Kräfte gleichmäßiger?

1.8 Das Hebelgesetz von ARISTOTELES[2] und ARCHIMEDES[3]

Gegeben sind 2 parallele Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ im Abstand $a_1 + a_2$, Bild 1.10. Wo liegt die Wirkungslinie der Resultierenden $\vec{F}_R$? Die Lösung liefert das Hebelgesetz.

Hebelgesetz: Die Hebelarme sind den Kräften umgekehrt proportional.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_2}{F_1} \tag{1.5}$$

Für die Größe von F_R gilt:

$$F_R = F_1 + F_2$$

Ihre Wirkungslinie ist zu $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$ parallel.

Auch die umgekehrte Fragestellung lässt sich über das Hebelgesetz lösen: Die Zerlegung einer Kraft nach zwei Wirkungslinien, die zur ursprünglichen Kraft parallel sind. Hierzu folgendes Beispiel.

Beispiel 1.2

Der Radlader in Bild 1.11 hat mit Schaufelfüllung eine Gewichtskraft $F_G = 120$ kN. Sie wirkt $a = 0{,}5$ m hinter dem Vorderrad. Der Radstand beträgt $l = 3$ m.

Mit welchen Kräften F_v und F_h drücken die Vorder- bzw. Hinterräder auf den Grund?

---

[2] ARISTOTELES 384 – 322 v. Chr.
[3] ARCHIMEDES von SYRAKUS 287 – 212 v. Chr.

Lösung:
Nach dem Hebelgesetz gilt:

$$\frac{F_v}{F_h} = \frac{l-a}{a} = \frac{2{,}5\ \text{m}}{0{,}5\ \text{m}} = 5 \qquad \rightarrow \qquad F_v = 5\,F_h \quad (*)$$

F_v und F_h sind zusammen so groß wie F_G:

$$F_v + F_h = F_G \quad (**)$$

(*) in (**) liefert:

$$5\,F_h + F_h = F_G$$

$$F_h = \frac{F_G}{6} = \frac{120\ \text{kN}}{6} = 20\ \text{kN}$$

$$F_v = 5\,F_h = 100\ \text{kN}$$

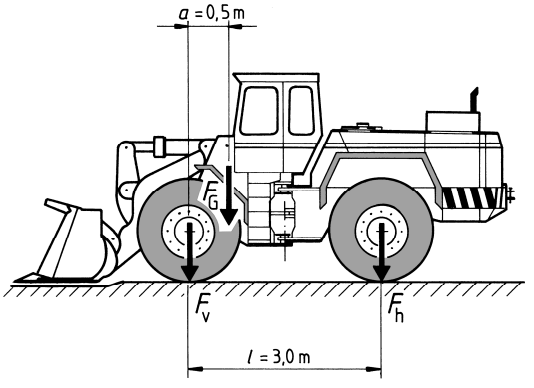


Bild 1.11 Die Zerlegung der Kraft $\vec{F}_G$ in dazu parallele Kräfte $\vec{F}_v$ und $\vec{F}_h$

1. Nennen Sie zwei äußere Kräfte.
2. Durch welche Merkmale ist der gebundene Kraftvektor festgelegt?
3. Wie hängt die Krafteinheit N mit den Basiseinheiten zusammen?
4. Unter welchen Bedingungen sind 2 Kräfte im Gleichgewicht?
5. Was besagt das Wechselwirkungsgesetz?
6. Kann bezüglich der äußeren Wirkung eine Kraft längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden?
7. Welche Bedeutung hat die Diagonale im Kräfteparallelogramm?
8. Wie lautet das Hebelgesetz?

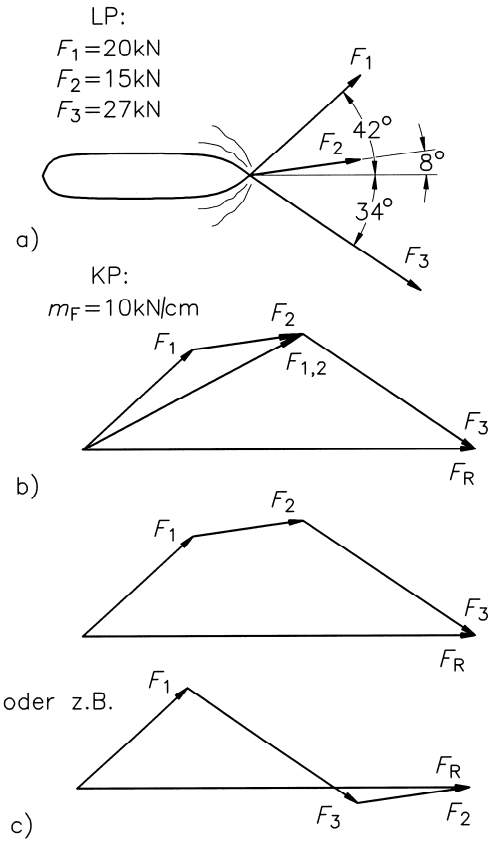


Bild 2.1 Konstruktion der Resultierenden
a) Lageplan
b) Kräfteplan mit der Zwischenresultierenden $\vec{F}_{1,2}$
c) Kraftecke mit unterschiedlicher Kräftefolge

2 Die resultierende Kraft eines zentralen ebenen Kräftesystems

Vektoraddition der Kräfte, algebraische Addition der kartesischen Kraftkomponenten

Zentrales Kräftesystem heißt: Die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

Außerdem sollen vorläufig alle Kräfte in der Zeichenebene liegen.

2.1 Graphische Lösung

Wieder nehmen wir das Beispiel Schiff, das diesmal von drei Schleppern gezogen wird, Bild 2.1 a. Näherungsweise wollen wir annehmen, dass die Taue am selben Schiffspunkt befestigt und horizontal sind.

Gemäß Kap. 1.6 zeichnen wir zunächst im Kräfteplan (KP) die Resultierende $\vec{F}_{1,2}$ aus den Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, Bild 2.1b. Die Richtungen von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ergeben sich aus dem Lageplan (LP) durch Parallelverschieben. Anschließend fassen wir $\vec{F}_{1,2}$ mit $\vec{F}_3$ zur Gesamtresultierenden $\vec{F}_R$ zusammen. Wenn noch mehr Kräfte wirken, setzen wir den Prozess fort, bis alle Kräfte im KP aufgetragen sind.

Es geht auch ohne Zwischenresultierende, Bild 2.1 c. Wir hängen einfach alle Kraftpfeile aneinander. Die Resultierende liegt zwischen dem Anfangspunkt der ersten Kraft und der Pfeilspitze der letzten Kraft. Die Reihenfolge der Kräfte spielt hierbei keine Rolle.

Das Aneinandersetzen der Kraftpfeile entspricht einer Vektoraddition:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ \ldots = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Aus Bild 2.1 ergibt sich:

$$F_R \mathrel{\hat{=}} 5{,}2 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad F_R \approx 52 \text{ kN} \quad \text{(nach rechts gerichtet)}$$

2.2 Analytische Lösung

Jetzt denken wir uns die Kräfte in einem kartesischen Koordinatensystem, Bild 2.2a. Die Kraftpfeile können unmaßstäblich sein. Winkel zählen positiv im Gegenuhrzeigersinn, negativ im Uhrzeigersinn.

Gemäß Kap. 1.1 zerlegen wir alle Kräfte in ihre Komponenten F_{xi} und F_{yi}.

$$F_{xi} = F_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$F_{yi} = F_i \cdot \sin \alpha_i$$

F_{x1}, F_{x2} ... zeigen alle in x-Richtung und dürfen deshalb algebraisch addiert werden. Das ergibt F_{Rx}. Analog dazu erhalten wir F_{Ry}. Anschließend lassen sich F_R (mit Hilfe des Satzes von PYTHAGORAS[1]) und α bestimmen, Bild 2.2b.

Größe und Richtung der resultierenden Kraft:

$$F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \tag{2.1a}$$

$$F_{Ry} = F_{y1} + F_{y2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \tag{2.1b}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \tag{2.1c}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \tag{2.1d}$$

α legt nur die Richtung der Wirkungslinie fest. Der Richtungssinn ist anhand der Kraftkomponente F_{Rx} oder F_{Ry} zu klären.

Zahlenrechnung:

$$F_{Rx} = [20 \cdot \cos 42° + 15 \cdot \cos 8° + 27 \cdot \cos (-34°)]\ \text{kN} \approx 52{,}1\ \text{kN}$$

$$F_{Ry} = [20 \cdot \sin 42° + 15 \cdot \sin 8° + 27 \cdot \sin (-34°)]\ \text{kN} \approx 0{,}4\ \text{kN}$$

$$F_R = \sqrt{52{,}1^2 + 0{,}4^2}\ \text{kN} \approx 52{,}1\ \text{kN}$$

$$\alpha = \arctan \frac{0{,}4\ \text{kN}}{52{,}1\ \text{kN}} \approx 0{,}4°$$

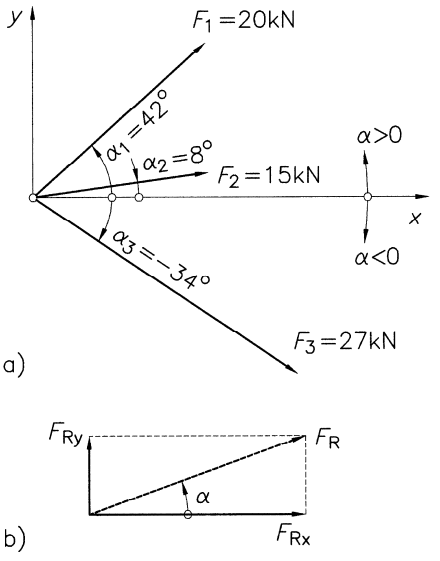


Bild 2.2 Analytische Bestimmung der Resultierenden
a) Kräfte im kartesischen Koordinatensystem
b) Bestimmung von F_R und α aus F_{Rx} und F_{Ry}

Übung 2.1

Ein Tanker wird von drei Schleppern in den Hafen bugsiert, Bild 2.3. Von allen Schleppern sind die Zugrichtungen bekannt, die Zugkräfte dagegen nur von Schlepper 1 und 2.

Bestimmen Sie F_3 so, dass die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ auf den Tanker in die gewünschte Fahrtrichtung zeigt. Wie groß ist F_R? Graphische und analytische Lösung.

1. Was heißt zentrales Kräftesystem?
2. Welche Vorzeichenregelung gilt für den Winkel zwischen *x*-Achse und Kraftpfeil?

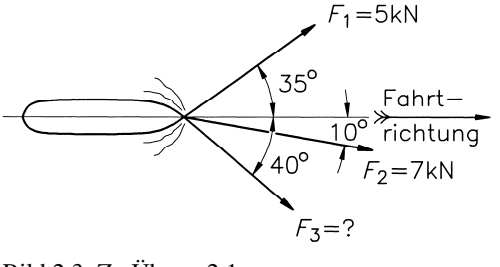


Bild 2.3 Zu Übung 2.1

[1] PYTHAGORAS 6. Jahrh. v. Chr.

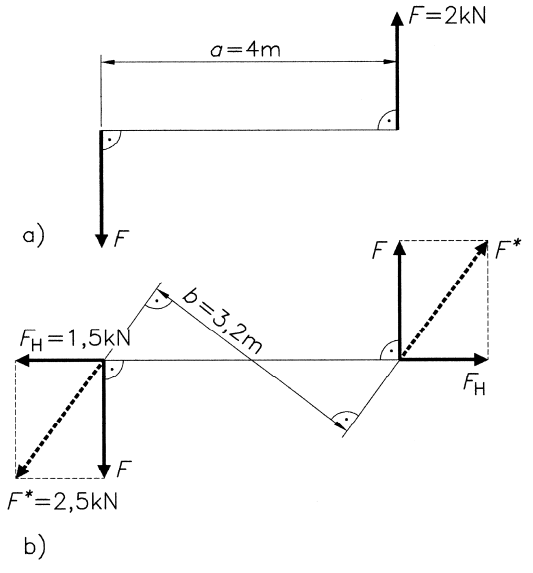


Bild 3.1 Kräftepaar
a) Kräftepaar $F \cdot a$
b) statisch gleichwertiges, gedrehtes Kräftepaar $F^* \cdot b$

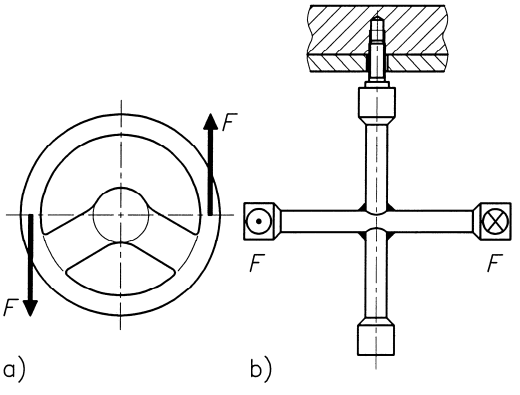


Bild 3.2 Beispiele für Kräftepaare
a) beidhändiges Lenken
b) Anziehen einer Schraube mit dem Kreuzschlüssel
(links kommt die Kraft aus der Zeichenebene heraus, rechts geht sie hinein)

3 Kräftepaar und Moment einer Kraft

Moment des Kräftepaares, Gleichgewicht zweier Kräftepaare, Parallelverschiebung einer Kraft, Versetzungsmoment, Moment einer Einzelkraft, Momentenvektor, Parallelverschiebbarkeit des Momentenvektors, Moment einer Einzelkraft in Bezug auf den Koordinatenursprung

3.1 Das Kräftepaar

Gegeben sind gemäß Bild 3.1a zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte im Abstand a.

Wir berechnen das Produkt aus Kraft und Abstand:

$$F \cdot a = 2\ \text{kN} \cdot 4\ \text{m} = 8\ \text{kNm}$$

Jetzt nehmen wir zwei gleich große Hilfskräfte $\vec{F}_\text{H}$ hinzu, Bild 3.1b. Sie verändern nichts, da sie sich insgesamt aufheben. Jedoch lassen sich $\vec{F}$ und $\vec{F}_\text{H}$ zur Kraft $\vec{F}^*$ zusammenfassen.

Wieder berechnen wir das Produkt aus Kraft und Abstand:

$$F^* \cdot b = 2{,}5\ \text{kN} \cdot 3{,}2\ \text{m} = 8\ \text{kNm}$$

Die beiden Kräfte $\vec{F}$ lassen sich nicht zu einer Resultierenden zusammenfassen, sondern nur umwandeln in wiederum gleich große, entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte $\vec{F}^*$.

Das Produkt aus Größe und dem Abstand der Wirkungslinien ist konstant.

Zwei Kräfte dieser Eigenschaft heißen Kräftepaar.

$F \cdot a = F^* \cdot b = M^*$ heißt Moment des Kräftepaars (Einzelmoment).

Bild 3.2 zeigt zwei alltägliche Beispiele eines Kräftepaars: beidhändiges Drehen am Lenkrad und Anziehen einer Schraube mit dem Kreuzschlüssel.

Wir machen ein Experiment gemäß Bild 3.3. Eine Platte mit zwei Sechskantschrauben ist über zwei Kraftmessdosen aufgehängt. Mit einem Steckschlüssel üben wir zunächst auf die Schraube A ein Kräftepaar mit dem Moment $M^* = F \cdot a = 50$ Nm aus. Die rechte Kraftdose zeigt eine positive Kraft (Zugkraft) und die linke eine negative Kraft (Druckkraft) von $F^* = 50$ N an.

Jetzt wiederholen wir das Experiment mit der Schraube *B*. Die Kraftdosen zeigen wieder 50 N an.

Auch wenn wir zwischen Schraubenkopf und Schlüssel ein Verlängerungsstück stecken, d. h. die Wirkungsebene des Kräftepaars parallel verschieben, werden wieder 50 N angezeigt.

Ein Kräftepaar kann beliebig in seiner Ebene gedreht und verschoben werden. Ebenso darf die Wirkungsebene parallel verschoben werden. Die Wirkung auf den starren Körper ändert sich dadurch nicht.

3.2 Das Gleichgewicht zweier Kräftepaare

Wir lassen an unserer Vorrichtung in Bild 3.3 bei *A* und *B* zwei Kräftepaare gemäß Bild 3.4 wirken.

Die beiden Kräftepaare sind im Gleichgewicht, wenn die Kraftmessdosen null anzeigen. Dafür gilt:

Zwei Kräftepaare gleicher Größe, die in parallelen Ebenen entgegengesetzt zueinander drehen, sind im Gleichgewicht.

$$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$$

3.3 Parallelverschiebung einer Kraft

Wieder drehen wir an der Lenksäule, jetzt einhändig, Bild 3.5a. Wie ist diese Drehwirkung bei nur **einer** Kraft zu erklären?

Gemäß Bild 3.5b bringen wir im Drehpunkt *A* zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte $\bar{F}$ an, die zur ursprünglichen Kraft parallel sind. Zwei Kräfte lassen sich, wie schraffiert, zu einem Kräftepaar zusammenfassen. Dieses erzeugt die Drehwirkung. Die übrigbleibende Einzelkraft beansprucht die Lenksäule als Querkraft.

Verschiebt man eine Kraft in eine parallele Wirkungslinie im Abstand *a*, so tritt zusätzlich ein Kräftepaar vom Moment $F \cdot a$ (Versetzungsmoment) auf.

3.4 Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes

Vorher haben wir gesehen, dass eine Einzelkraft ebenfalls eine Drehwirkung hat. Im Gegensatz zum Kräftepaar müssen wir dabei einen Bezugspunkt angeben (Punkt *A* in Bild 3.5b).

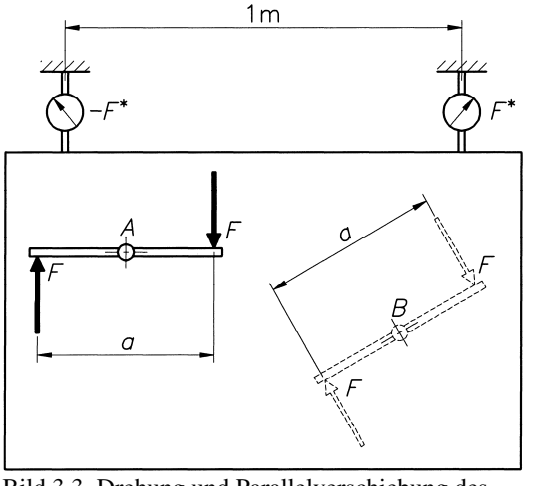


Bild 3.3 Drehung und Parallelverschiebung des Kräftepaares

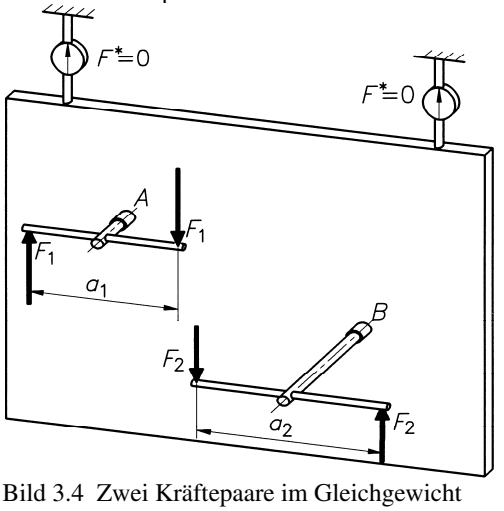


Bild 3.4 Zwei Kräftepaare im Gleichgewicht

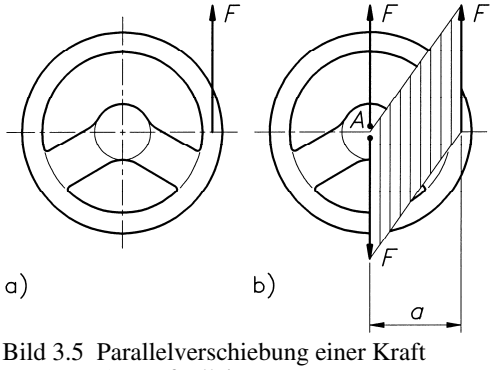


Bild 3.5 Parallelverschiebung einer Kraft
a) Kraft allein
b) verschobene Kraft + Kräftepaar

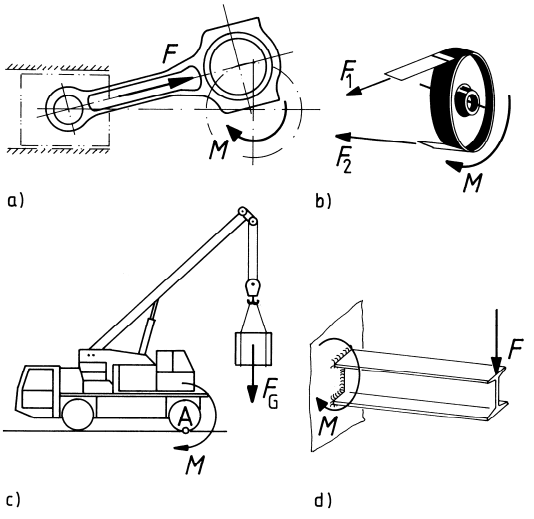


Bild 3.6 Beispiele für das Moment einer Kraft
a) Moment der Pleuelstangenkraft auf die Kurbelwelle
b) Moment der verschieden großen Riemenkräfte auf die Riemenscheibe
c) Moment der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ bezüglich des Radpunktes *A* (Kippmoment)
d) Moment einer Kraft auf die Einspannung (Einspannmoment)

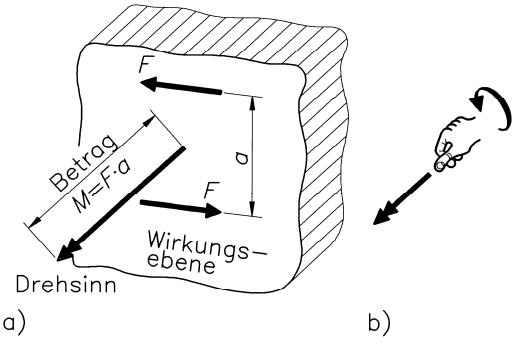


Bild 3.7 Darstellung des Moments
a) Vektoreigenschaften
b) Verdeutlichung mit Hilfe der rechten Hand

Moment einer Kraft in Bezug auf den Punkt *A*:

$$M_A = F \cdot a \qquad \text{in N} \cdot \text{m} = \text{Nm}$$

Moment gleich Kraft mal Hebelarm

Der Hebelarm ist der lotrechte und somit der kürzeste Abstand zur Kraft $\vec{F}$.

Beispiele für das Moment einer Kraft s. Bild 3.6.

3.5 Darstellung und Eigenschaften des Moments

Das Moment eines Kräftepaares oder einer Kraft in Bezug auf einen Punkt ist vollständig bestimmt durch:

1. Betrag (Zahlenwert einschließlich Einheit)
2. Wirkungsebene
3. Drehsinn

Bild 3.7a verdeutlicht diese drei Eigenschaften für das Kräftepaar $F \cdot a$. Zur Unterscheidung von der Kraft hat der Momentenpfeil eine Doppelspitze. Wirkungsebene (Pfeilrichtung) und Drehsinn kann man sich leicht mit der rechten Hand klarmachen, Bild 3.7b: Krümmen Sie die Finger in der Drehrichtung der Kräfte; der Daumen zeigt dabei in Richtung des Momentenpfeils.

Wegen der genannten drei Eigenschaften ist das Moment ein Vektor.

Wir schreiben es $\vec{M}$ und den Betrag *M*, z. B. *M* = 100 Nm.

Momente können vektoriell addiert werden:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

Die graphische Addition erfolgt gemäß Bild 3.8 analog zum Krafteck.

Das Moment ist ein sog. freier Vektor, d. h. der Momentenpfeil darf im Raum **parallel verschoben** werden, ohne dass sich die Wirkung auf den starren Körper ändert, s. Bild 3.3.

In der **ebenen** Statik, mit der wir uns vorläufig beschäftigen, treten nur Momente auf, bei denen die Wirkungsebene in der *x*,*y*-Ebene oder parallel dazu liegt. Der Momentenpfeil ist parallel zur *z*-Achse (⊥ Zeichenebene). Zur eindeutigen Kennzeichnung des Moments genügt somit der Betrag und der Drehsinn (Vorzeichen). Da die *z*-Achse aus der Zeichenebene herauskommt, gilt für das Vorzeichen:



Die Momente **ein und derselben** Ebene, also momentan der *x*,*y*-Ebene, können algebraisch addiert werden.

3.6 Das Moment einer Kraft in Bezug auf den Koordinatenursprung

Die Kraft $\vec{F}$ in Bild 3.9 zerlegen wir in ihre Komponenten F_x und F_y. Jede Komponente ergibt ein Moment um die z-Achse, insgesamt:

Moment einer Kraft $\vec{F}$ in Bezug auf den Koordinatenursprung:

$$M = M_z = F_y \cdot x_P - F_x \cdot y_P \tag{3.1}$$

Das Moment einer Kraft ist gleich der Summe der Momente ihrer Komponenten.

Übung 3.1

Auf dem schmalen Holzbalkon gemäß Bild 3.10 stehen 2 Personen der Gewichtskräfte F_{G1} bzw. F_{G2}. Die Gewichtskraft der horizontalen Tragkonstruktion ist F_{G3} und die der Brüstung F_{G4}. Der Blumentrog stützt sich mit der Gewichtskraft F_{G5} auf die Brüstung ab, zusätzlich entsteht durch die exzentrische Befestigung ein Kräftepaar (Einzelmoment) M^*. Wie groß ist das resultierende Moment M_A an der Einspannstelle A der Tragkonstruktion im Mauerwerk (analytische Lösung)?

Zahlenwerte: $F_{G1} = 750$ N; $F_{G2} = 400$ N; $F_{G3} = 1500$ N; $F_{G4} = 400$ N; $F_{G5} = 500$ N; $M^* = 10^4$ Ncm

1. Was ist ein Kräftepaar?
2. Wann sind zwei Kräftepaare im Gleichgewicht?
3. Was ist bei der Parallelverschiebung einer Kraft $\vec{F}$ um den lotrechten Abstand a zu beachten?
4. Welche Merkmale kennzeichnen den Momentenvektor?
5. Welchen Einfluss auf den starren Körper hat eine Parallelverschiebung des Momentenvektors?

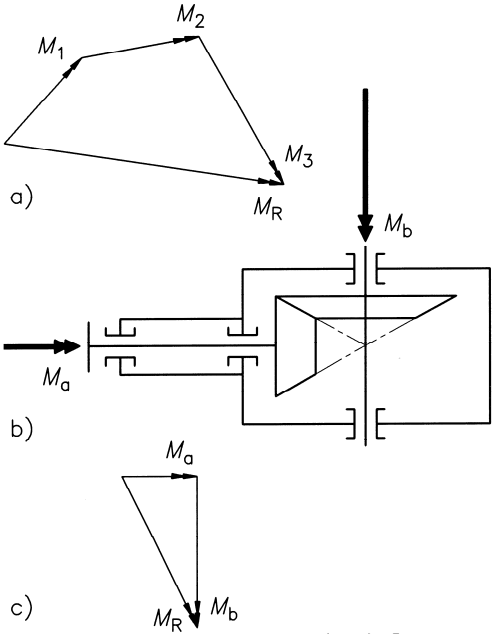


Bild 3.8 Vektorielle Addition der Momente
a) allgemein
b) Beispiel Kegelradgetriebe: Antriebsmoment $\vec{M}_a$, Abtriebsmoment $\vec{M}_b$
c) resultierendes Moment $\vec{M}_R$ (wird vom Fundament aufgenommen)

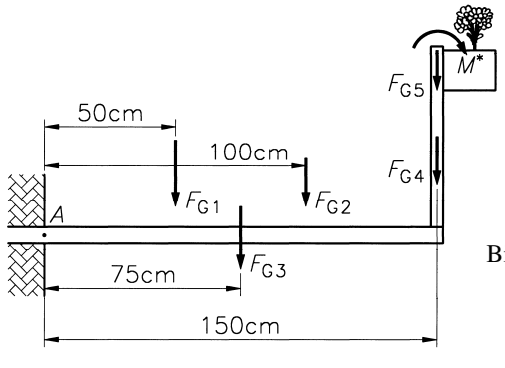


Bild 3.10 Resultierendes Moment auf das Mauerwerk, Übung 3.1

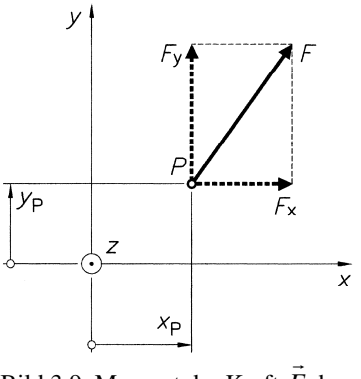


Bild 3.9 Moment der Kraft $\vec{F}$, berechnet über die Momente der Komponenten F_x und F_y

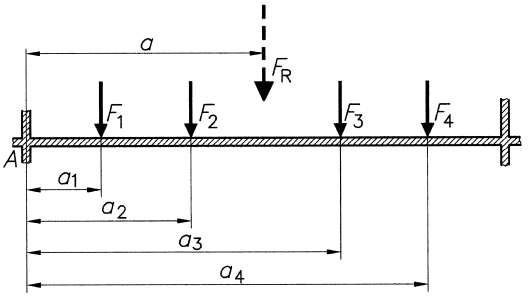


Bild 4.1 Gewichtskräfte auf eine Geschossdecke, Beispiel 4.1

4 Die resultierende Kraft eines nicht zentralen ebenen Kräftesystems

Analytische Lösung für parallele Kräfte, Seileckverfahren

Bei der Belastung von Gebäuden, Maschinen usw. ist es zuweilen von Vorteil, statt vieler Einzelkräfte die resultierende Kraft zu kennen.

4.1 Parallele Kräfte

Das ist ein sehr häufiger Fall. Denken Sie nur an die Deckenbelastungen durch die Gewichte von Maschinen und Einrichtungen. Bei parallelen Kräften kann man die resultierende Kraft sehr einfach analytisch bestimmen.

Die Resultierende $\vec{F}_\mathrm{R}$ von n parallelen Kräften $\vec{F}_\mathrm{i}$ muß die beiden Bedingungen erfüllen:

1. $$F_\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{n} F_\mathrm{i} \qquad \text{(Größe)} \tag{4.1a}$$

2. $$M_\mathrm{A} = F_\mathrm{R} \cdot a = \sum_{i=1}^{n} F_\mathrm{i} \cdot a_\mathrm{i} \qquad (\rightarrow \text{Lage}) \tag{4.1b}$$

A ist ein beliebiger Bezugspunkt;
a ist der lotrechte Abstand der Wirkungslinie von F_R zu A.

Beispiel 4.1

Die Geschossdecke einer Fertigungshalle wird zwischen zwei Stützmauern gemäß Bild 4.1 belastet (F_1 = 10 kN; F_2 = 15 kN; F_3 = 20 kN; F_4 = 12 kN; a_1 = 5 m; a_2 = 11 m; a_3 = 21 m; a_4 = 27 m).

Wie groß ist die resultierende Kraft $\vec{F}_\mathrm{R}$? Welchen Abstand a hat ihre Wirkungslinie vom Punkt A?

Lösung:

Mit (4.1a) und (4.1b) folgt:

$$F_\mathrm{R} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 57 \text{ kN}$$

$$a = \frac{1}{F_\mathrm{R}} \left(F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + F_4 \cdot a_4 \right) \approx 16{,}8 \text{ m}$$

4.2 Beliebige Kräfte

In diesem Fall eignet sich die graphische Methode besser, und zwar wenden wir das sog. Seileckverfahren an.

Beispiel 4.2

Auf den Brückenträger in Bild 4.2a üben drei Lastwagen folgende Kräfte aus: $F_1 = 200$ kN, $F_2 = 280$ kN (Gewichtskraft und Bremskraft), $F_3 = 180$ kN. Wie groß ist die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ (Größe und Wirkungslinie)?

Graphische Lösung mit dem Seileckverfahren:
Das Seileckverfahren läuft wie folgt ab:

1. Einen maßstäblichen Lageplan zeichnen, Bild 4.2b. Man hätte in diesem Fall auch die Angabenskizze nehmen können.
2. Äußere Kräfte im Kräfteplan maßstäblich antragen, Bild 4.2c. Die vektorielle Addition ergibt $\vec{F}_R$ (hier $F_R \approx 640$ kN).
3. Einen Pol P wählen, Bild 4.2c. Die Verbindungslinien (Polstrahlen) von P zu den Anfangs- bzw. Endpunkten der Kräfte ziehen. Im vorliegenden Fall die Polstrahlen 0 bis 3. Der Pol P ist zwar beliebig, er sollte jedoch eine günstige Polfigur ergeben, d. h. es sind Winkel zwischen den Kräften und den Polstrahlen von nahe 0° oder 180° zu vermeiden.
4. Im Lageplan Parallelen zu den Polstrahlen ziehen, das ergibt die Seilstrahlen. Die Wirkungslinie der Resultierenden $\vec{F}_R$ geht durch den Schnittpunkt der Seilstrahlen 0 und 3.

Das Seileckverfahren heißt deshalb so, weil ein Seil unter den Kräften $\vec{F}_1$ bis $\vec{F}_n$ eine Form annimmt wie der Linienzug der Seilstrahlen 0 bis n. Die Polfigur ist die Aneinanderreihung von Kraftecken. Zu jedem Schnittpunkt dreier Wirkungslinien in der Seilfigur gehört ein Krafteck in der Polfigur.

Übung 4.1

Bestimmen Sie für das Kräftesystem von Beispiel 4.1 die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ (Größe und Wirkungslinie) mit dem Seileckverfahren.

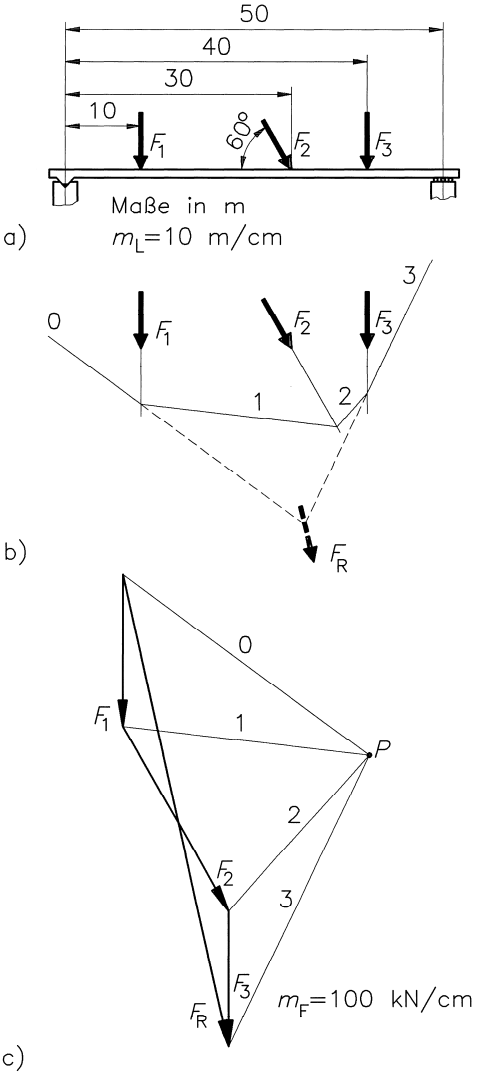


Bild 4.2 Bestimmung der Resultierenden mit dem Seileckverfahren
a) Anordnung
b) Lageplan (Seilfigur)
c) Kräfteplan (Polfigur)

1. Welche Bedingungen muss die resultierende Kraft eines ebenen parallelen Kräftesystems erfüllen?
2. Durch welchen Schnittpunkt geht die Resultierende beim Seileckverfahren?

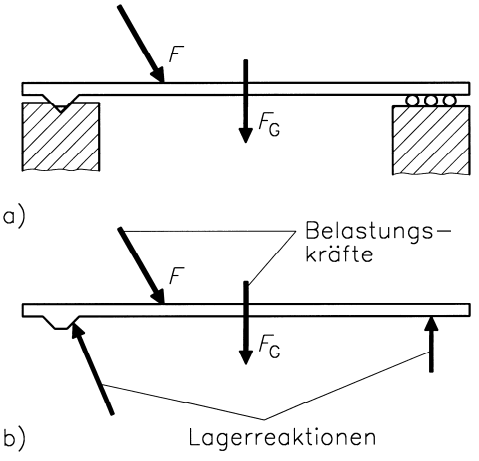


Bild 5.1 Brückenträger
a) Träger auf Pfeilern gelagert
b) freigemachter Träger

5 Lagerung von Körpern

Freimachen, Lagerreaktionen, Lagerungsarten ebener Körper, Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade), Wertigkeit einer Lagerung, entartete Lagerung, statisch bestimmt oder unbestimmt, Mechanismus

Fast alle Bauteile sind ganz oder zumindest teilweise gelagert, d. h. mit dem Fundament oder dem Nachbarbauteil verbunden. Ausnahmen sind schwimmende und fliegende Bauteile.

Die Lagerungen haben 2 Aufgaben:
1. das Bauteil in einer gewünschten Lage zu halten (kinematisches Problem),
2. Kräfte zu übertragen (Problem der Statik).

5.1 Freimachen eines Körpers

Um zu erkennen, welche Kräfte die Lagerstellen auf den Körper ausüben, wird dieser aus seiner Verbindung gelöst (freigemacht oder freigeschnitten). Dabei werden die Lagerkräfte, die vorher innere Kräfte waren und folglich nicht in Erscheinung traten, zu äußeren Kräften; Beispiel Brückenträger in Bild 5.1.

Die Kräfte von den Lagern auf den Körper nennen wir Reaktionskräfte oder Lagerreaktionen. Es sind sog. Zwangskräfte.

Belastungskräfte und Lagerreaktionen bilden zusammen das Kräftesystem am Körper. Kräftepaare (Einzelmomente) sind hierin eingeschlossen. Dieses Kräftesystem muss im Gleichgewicht sein (hierzu Kap. 6 bis 8).

Ein Körper kann auch aus einem System von Teilkörpern bestehen, die in diskreten Punkten miteinander verbunden sind. In diesem Falle kann man einzelne Teilkörper aus dem System herauslösen, wobei die Kräfte in den Verbindungsstellen wie Lagerreaktionen zu behandeln sind. Auch das Kräftesystem für jeden beliebigen Teilkörper muss im Gleichgewicht sein.

Wurde der Richtungssinn einer Lagerreaktion falsch eingezeichnet, ergibt sich in der Lösung für diese Lagerreaktion ein negativer Wert.

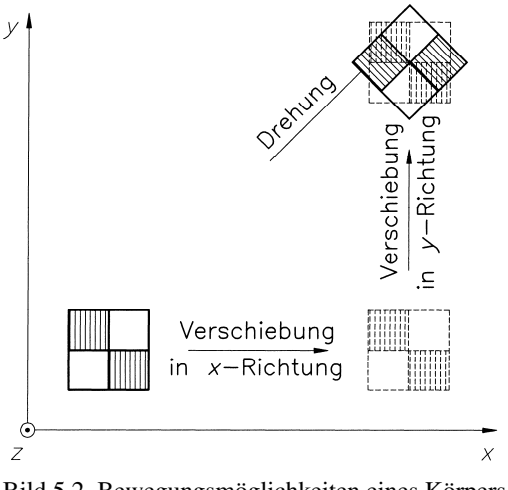


Bild 5.2 Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers in der Ebene

5.2 Lagerungsarten ebener Körper

Ein vollkommen freier Körper hat in der Ebene 3 Bewegungsmöglichkeiten (man sagt auch Freiheitsgrade), Bild 5.2:

Verschiebung in *x*-Richtung

Verschiebung in *y*-Richtung

Drehung in der *x*,*y*-Ebene (um die *z*-Achse)

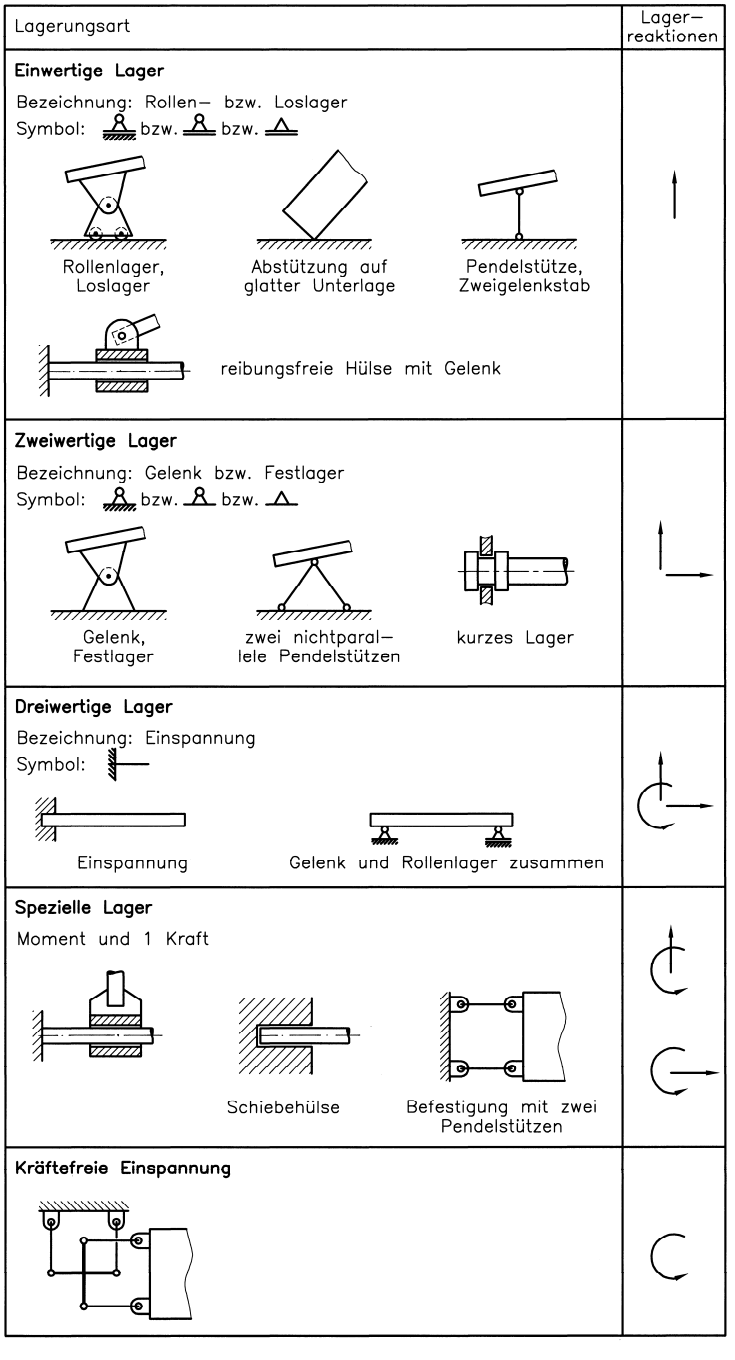


Bild 5.3 Lagerungsarten und Lagerreaktionen ebener Körper

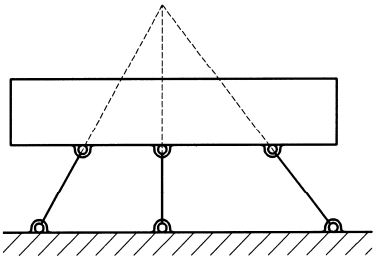


Bild 5.4 Entartete Lagerung

Die Lager üben einen Zwang auf den Körper aus. Je nachdem, wieviele Freiheitsgrade behindert werden, spricht man von ein-, zwei- oder dreiwertigen Lagern. In Bild 5.3 sind häufige Lagerungsarten mit den zugehörigen Symbolen sowie spezielle Konstruktionen wiedergegeben.

Rollenlager und Abstützung wirken gemäß Bild 5.3 nur auf Druck; es gibt jedoch auch Ausführungen, die sich für Druck **und** Zug eignen.

Einige Lager können auch im räumlichen Fall eingesetzt werden (Kap. 8.4).

Entartete Fälle wie in Bild 5.4 sind zu vermeiden. Die Wirkungslinien der drei Pendelstützen treffen sich in **einem** Punkt. Um diesen Punkt kann der Körper sich drehen, wenn auch nur wenig. Die Lagerung ist somit kinematisch nicht bestimmt. Außerdem lassen sich die Lagerkräfte statisch nicht bestimmen. Ein entarteter Fall liegt auch vor, wenn die drei Pendelstützen zueinander parallel angeordnet sind.

Ein Bauteil, das in einer Ebene belastet ist, ist **statisch bestimmt** gelagert, wenn durch die Lager **genau 3 Freiheitsgrade** eingeschränkt werden, nämlich 2 Verschiebungen und 1 Drehung.

Statisch bestimmt heißt ferner, dass die Lagerreaktionen allein mit den Gesetzen der Statik bestimmt werden können.

Sind **weniger als 3 Freiheitsgrade** eingeschränkt, handelt es sich um einen **Mechanismus** (Getriebe, Auto, s. Teil 2).

Sind **mehr als 3 Freiheitsgrade** eingeschränkt, nennen wir es **statisch unbestimmt** (in der Literatur manchmal auch überbestimmt). Zur Bestimmung der Lagerreaktionen ist zusätzlich die Verformung heranzuziehen. Das ist eine Aufgabe der Festigkeitslehre.

Bild 5.5 soll obiges verdeutlichen.

Die statische Bestimmtheit eines Bauteils hängt nur von der Lagerung und nicht von der Belastung ab.

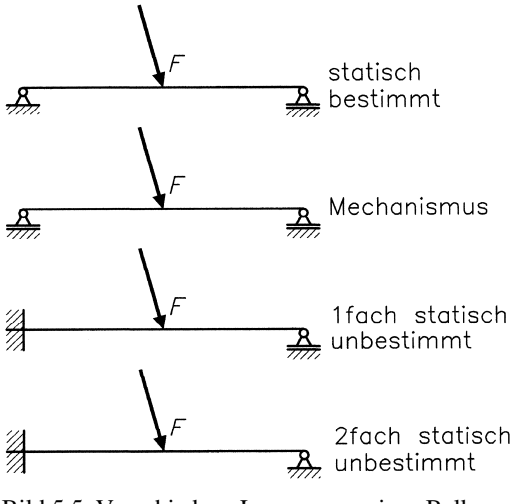


Bild 5.5 Verschiedene Lagerungen eines Balkens

1. Welche Aufgaben erfüllen Lagerungen?
2. Welche Freiheitsgrade hat ein Körper in der Ebene?
3. In welchem Fall ist ein Bauteil, das in der Ebene belastet ist, statisch bestimmt gelagert?

6 Ebene Kräftesysteme im Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen für ebene Probleme, graphisches Verfahren für 3 Kräfte, CULMANNsche Gerade, Seileckverfahren

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{M}_{\mathrm{A}} = 0 \,. \tag{6.1}$$

In Worten: Resultierende Kraft gleich null, resultierendes Moment bezüglich eines beliebigen Punktes A gleich null.

Mit den kartesischen Komponenten: Symbolisch:

$$F_{\mathrm{Rx}} = \sum F_{\mathrm{xi}} = 0 \qquad \rightarrow$$

$$F_{\mathrm{Ry}} = \sum F_{\mathrm{yi}} = 0 \qquad \uparrow \tag{6.2}$$

$$M_{\mathrm{A}} = \sum \left(F_{\mathrm{yi}} \cdot x_{\mathrm{i}} - F_{\mathrm{xi}} \cdot y_{\mathrm{i}} \right) + \sum M_{\mathrm{j}}^{*} = 0 \qquad \circlearrowleft A$$

Die Summationsindizes i und j laufen von 1 bis zur Anzahl der Kräfte bzw. Einzelmomente. Koordinatenursprung ist der Bezugspunkt A. Die Momente drehen um die z-Achse. x_{i} und y_{i} sind die Koordinaten der Kraftangriffspunkte.

Die Gleichgewichtsbedingungen gelten auch für einzelne Teile des gesamten Körpers.

Anstelle der Kräftegleichgewichtsbedingungen $F_{\mathrm{Rx}} = 0$ und $F_{\mathrm{Ry}} = 0$ können auch zusätzliche Momentenbedingungen $M_{\mathrm{B}} = 0$ und $M_{\mathrm{C}} = 0$ verwendet werden. Die Bezugspunkte A, B und C dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Mit der nicht verwendeten Kräftegleichgewichtsbedingung kann eine Ergebniskontrolle durchgeführt werden.

In den beiden folgenden Unterkapiteln wollen wir zunächst Kräftesysteme mit 3 bzw. 4 Kräften behandeln. Dabei bevorzuge ich die graphischen Lösungsverfahren, weil sie meist einfacher und übersichtlicher als die Rechnung sind. Die allgemeinen Kräftesysteme im dritten Unterkapitel bestimmen wir dagegen in der Regel analytisch.

Einheitlich in allen drei Fällen gilt: $\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0$ bedeutet graphisch, dass sich das Krafteck schließen muss (aus Bild 2.1 direkt ersichtlich).

6.1 Drei nichtparallele Kräfte

Wir bringen die Wirkungslinien von zwei Kräften zum Schnitt. Das Moment um den Schnittpunkt kann nur dann null sein, wenn auch die dritte Wirkungslinie durch diesen Punkt geht.

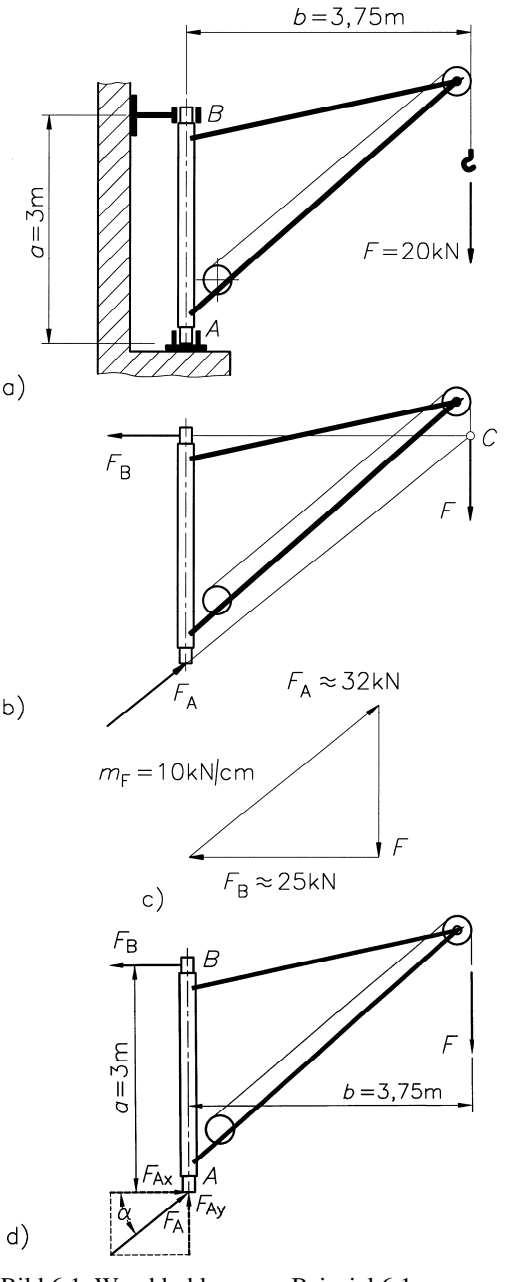
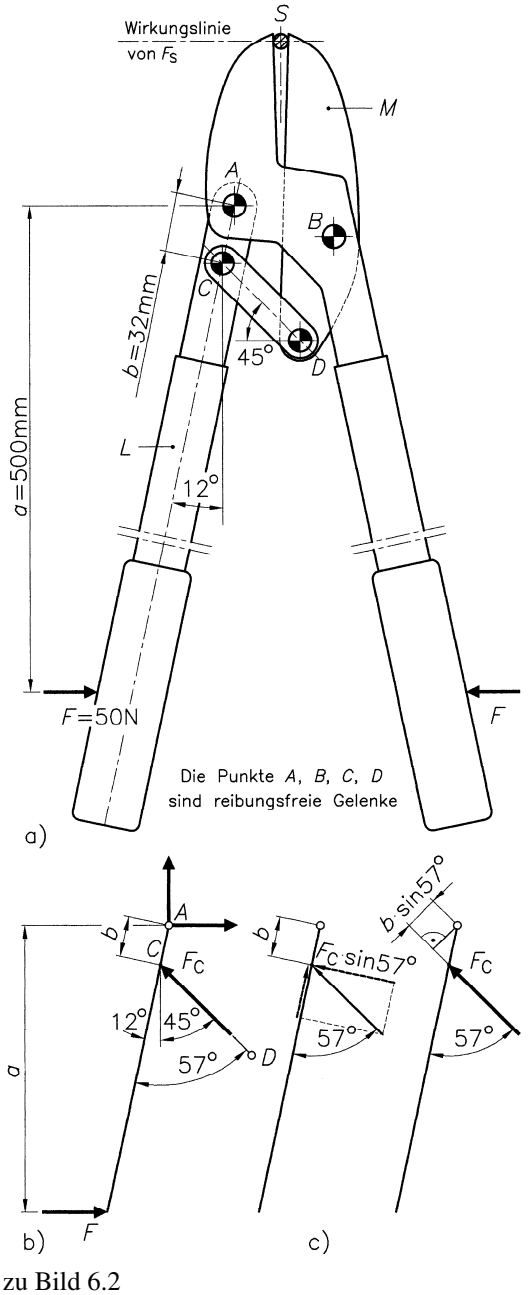


Bild 6.1 Wanddrehkran aus Beispiel 6.1
a) Anordnung
b) freigemachter Kran
c) Kräfteplan
d) Skizze für die analytische Lösung



zu Bild 6.2

Drei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien sich in **einem** Punkt schneiden und das Krafteck sich schließt.

Beispiel 6.1

Welche Kräfte müssen die Lager *A* und *B* auf den Wanddrehkran in Bild 6.1a ausüben, damit er sich im Gleichgewicht befindet?

Lösung:
Zunächst der graphische Lösungsweg:

Der Kran wird von den Lagern gelöst (freigeschnitten), um die Lagerreaktionen einzeichnen zu können, Bild 6.1 b. *B* ist ein Loslager; die Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_B$ liegt horizontal. Sie schneidet sich mit der Wirkungslinie von $\vec{F}$ im Punkt *C*. Die Wirkungslinie der Zapfenlagerkraft $\vec{F}_A$ muss ebenfalls durch *C* gehen.

Den Kräfteplan in Bild 6.1 c beginnen wir mit der bekannten Kraft $\vec{F}$ ($F \mathrel{\hat{=}} 2$ cm). Dann zeichnen wir an $\vec{F}$ Parallelen zu den Wirkungslinien von $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ und erhalten daraus das Krafteck. Die Pfeile müssen einen einheitlichen Umlaufsinn ergeben, im vorliegenden Fall den Uhrzeigersinn. In den Lageplan übertragen machen die Pfeile deutlich: Lager *B* zieht am Kran, Lager *A* übt eine schräge Druckkraft aus.

Analytischer Lösungsweg, hierzu Bild 6.1 d:

Wir wenden die 3 Gleichgewichtsbedingungen an; die Reihenfolge spielt hierbei keine Rolle.

$$\circlearrowleft A \qquad F_B \cdot a - F \cdot b = 0 \;\rightarrow\; F_B = \frac{F \cdot b}{a} = \frac{20\ \text{kN} \cdot 3{,}75\ \text{m}}{3\ \text{m}} = 25\ \text{kN}$$

$$\rightarrow \qquad F_{Ax} - F_B = 0 \;\rightarrow\; F_{Ax} = F_B = 25\ \text{kN}$$

$$\uparrow \qquad F_{Ay} - F = 0 \;\rightarrow\; F_{Ay} = F = 20\ \text{kN}$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{25^2 + 20^2}\ \text{kN} \approx 32\ \text{kN}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \arctan \frac{20\ \text{kN}}{25\ \text{kN}} \approx 39°$$

Beispiel 6.2

Bild 6.2 a zeigt eine Teleskop-Gartenschere. Wir nehmen folgenden Fall an: Die Schere wird durch die Handkraft $F = 50$ N zusammengedrückt. Dadurch entsteht an der Schneide eine resultierende Kraft $\vec{F}_S$ mit einer zu $\vec{F}$ parallelen Wirkungslinie.

Man ermittle:
1. analytisch die Gelenkkraft $\vec{F}_C$ in C,
2. graphisch die Kraft $\vec{F}_S$ und die Gelenkkraft $\vec{F}_B$ in B.

Lösung:
1. Bild 6.2b zeigt den freigemachten linken Hebel L mit den Kräften $\vec{F}$ und $\vec{F}_C$ sowie den nicht gefragten Kraftkomponenenten in A. Das Zwischenglied mit den Gelenken C und D stellt einen Zweigelenkstab dar, damit liegt die Wirkungslinie von $\vec{F}_C$ auf der Verbindungslinie C-D.
   Wir stellen das Gleichgewicht der Momente um A auf:

$$\circlearrowleft A \quad F \cdot a - F_C \cdot \sin 57° \cdot b = 0$$

$$F_C = \frac{F \cdot a}{b \cdot \sin 57°} = \frac{50\ \text{N} \cdot 500\ \text{mm}}{32\ \text{mm} \cdot \sin 57°} \approx 932\ \text{N}$$

   Dabei läuft es gemäß Bild 6.2c auf das Gleiche hinaus, ob wir $F_{Cn} \cdot b = F_C \cdot \sin 57° \cdot b$ (Normalkraft mal Abstand $\overline{AC}$) rechnen, oder $F_C \cdot b \cdot \sin 57°$ (Kraft mal Hebelarm, wobei für den Hebelarm das Lot vom Bezugspunkt A auf die Wirkungslinie zu nehmen ist).
2. Jetzt wird das Schneideteil M freigemacht und ins Gleichgewicht gesetzt, Bild 6.2d. Die Gelenkkraft $\vec{F}_D$ ist so groß wie $\vec{F}_C$, jedoch entgegengesetzt gerichtet. Wir schneiden die Wirkungslinien von $\vec{F}_D$ und $\vec{F}_S$; die Wirkungslinie der Gelenkkraft $\vec{F}_B$ muss ebenfalls durch diesen Schnittpunkt gehen. Damit lässt sich das Krafteck gemäß Bild 6.2e zeichnen.

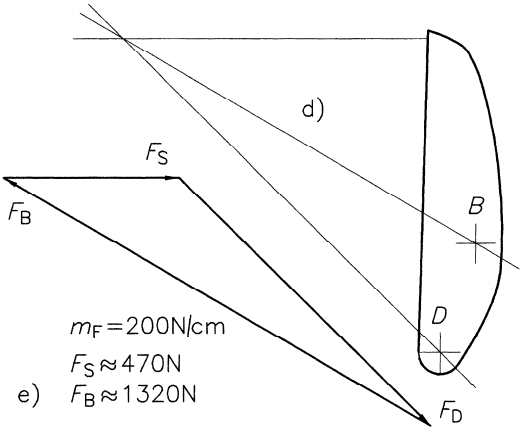


Bild 6.2 Gartenschere aus Beispiel 6.2
a) Anordnung
b) freigemachter linker Hebel
c) zwei Möglichkeiten der Berechnung des Moments
d) freigemachtes Schneideteil M
e) Krafteck für Schneideteil M

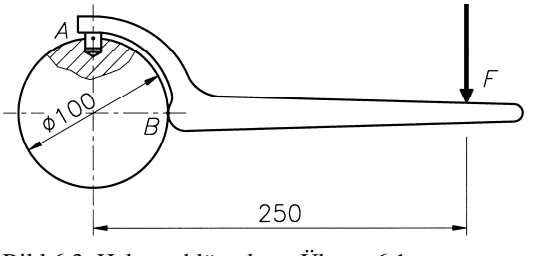


Bild 6.3 Hakenschlüssel aus Übung 6.1

Übung 6.1

Mit dem Hakenschlüssel gemäß Bild 6.3 soll das Moment 40 Nm auf die Welle ausgeübt werden. Die resultierende Kraft am Haken gehe durch den Punkt A; der Kontakt bei B sei reibungsfrei.

Wie groß sind die Kräfte an den Punkten A und B auf den Schlüssel? (Lösung graphisch und analytisch)

Übung 6.2

Ein Mast von $F_G = 5$ kN Gewichtskraft wird gemäß Bild 6.4 mittels Greifzug aufgerichtet ($\alpha = 19°$; $\beta = 11°$).
1. Welche Gesamtkraft zerrt am Pfosten P? (Lösung graphisch und analytisch)
2. Welche Kraft $\vec{F}$ muss der Greifzug ausüben?

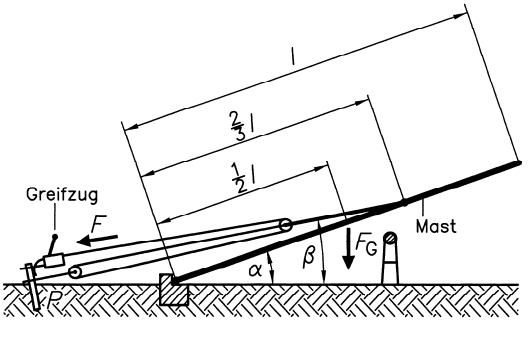


Bild 6.4 Aufrichten eines Mastes mittels Greifzug, Übung 6.2

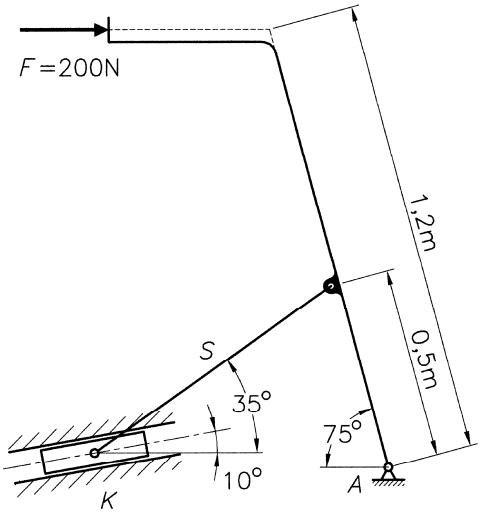


Bild 6.5 Anordnung zu Übung 6.3

Übung 6.3

Mit dem Hebel in Bild 6.5 wird über die Stange *S* ein Kolben *K* bewegt. Alle Gelenke sind reibungsfrei.

Ermitteln Sie graphisch:

1. die Kraft $\vec{F}_S$ in der Stange *S*
2. die Lagerreaktion $\vec{F}_A$ in *A*
3. die Kräfte auf den Kolben, $\vec{F}_{Kn}$ und $\vec{F}_{Kt}$, d. h. normal und tangential zur Kolbenachse.

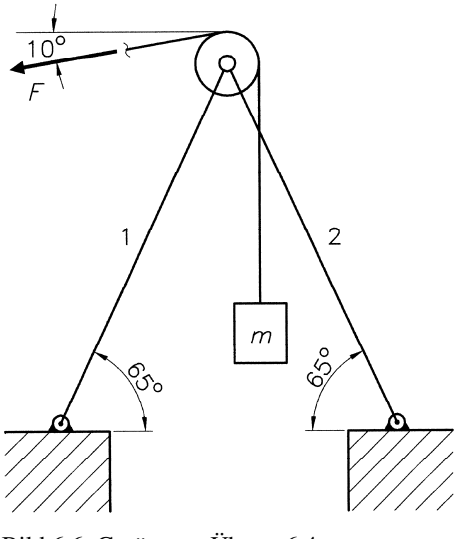


Bild 6.6 Gerüst aus Übung 6.4

Übung 6.4

An dem Gerüst gemäß Bild 6.6 wird über eine reibungsfrei angenommene Rolle die Masse *m* der Gewichtskraft $F_G = 1$ kN hochgezogen. Das Gerüst besteht aus den Stäben 1 und 2 in der Zeichenebene und einer horizontalen Abstützung normal zur Zeichenebene.

Ermitteln Sie graphisch und analytisch die Kräfte F_1 und F_2 in den beiden Stäben (mit Angabe ob Zug oder Druck).

Übung 6.5

Die Lokomotivbremse in Bild 6.7 wird durch Druckluft von 10 bar über einen Kolben von ∅160 mm betätigt. Über die Spreizhebel *S* werden die an den Hebeln *B-D* und *C-E* befestigten Bremsklötze auf die Kränze zweier benachbarter Räder gedrückt.

Unter Vernachlässigung der Reibungskräfte sind zu bestimmen:

1. die Kolbenkraft F_K
2. die Kraft F_S in den Spreizhebeln *S*
3. die Normalkraft F_N, mit der jeder Bremsklotz auf den Radkranz drückt.

6.2 Zerlegung einer Kraft nach drei Wirkungslinien

Die drei Wirkungslinien dürfen sich nicht in **einem** Punkt schneiden.

Selbstverständlich kann dieser Aufgabentyp immer auch analytisch gelöst werden. Das folgende graphische Verfahren ist jedoch anschaulicher.

In Bild 6.8a wirken vier Kräfte auf einen ebenen Körper. Gleichgewicht kann nur herrschen, wenn die Resultierenden von je zwei Kräften auf derselben Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich sind:

$$F_{1,2} = F_{3,4}$$

Praktisches Vorgehen:

Gegeben seien die Kraft $\vec{F}_1$ sowie die Wirkungslinien von $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ und $\vec{F}_4$.

Gesucht sind die Beträge F_2, F_3, F_4 und die Richtungen.

Lösung:

1. Man bringt $\vec{F}_1$ mit irgendeiner Wirkungslinie zum Schnitt, z. B. mit der Wirkungslinie von $\vec{F}_2$ (Schnittpunkt I).
2. Man zeichnet den Schnittpunkt II der beiden verbleibenden Wirkungslinien.
3. Die Verbindungslinie I–II heißt CULMANNsche[1] Gerade *C*.
4. Man zeichnet das Krafteck mit $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_C$, also mit den Kräften, deren Wirkungslinien sich in I schneiden, Bild 6.8b (Krafteck I).
5. Man schließt das Krafteck des Punktes II mit den Kräften $-\vec{F}_C$, $\vec{F}_3$ und $\vec{F}_4$ unmittelbar an das erste Krafteck an.
6. Die Pfeile folgen in einem einheitlichen Umfahrungssinn aufeinander.

Beispiel 6.3

Für den Stabverband in Bild 6.9a sind die Kräfte in den Stäben 1 bis 3 sowie die Lagerreaktionen in *A* und *B* zu bestimmen. Alle Stabverbindungen seien reibungsfreie Gelenke.

Lösung:

Wir schneiden ein Teil gemäß Bild 6.9b heraus. Die Stabachsen sind gleichzeitig Wirkungslinien der Stabkräfte (Zweigelenkstäbe). Die äußeren Kräfte $\vec{F}_h$ und $\vec{F}_v$ lassen sich zu einer resultierenden Kraft $\vec{F}$ zusammenfassen, Bild 6.9c. Diese zerlegen wir mittels CULMANNscher Geraden in die drei Wirkungslinien der Stabkräfte.

Hierzu schneiden wir $\vec{F}$ und $\vec{F}_3$ (Punkt I) sowie $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (Punkt II). Zwischen den beiden Schnittpunkten liegt die CULMANNsche Gerade *C*. Für den Punkt I können wir das Krafteck aus $\vec{F}$, $\vec{F}_C$ und $\vec{F}_3$ zeichnen, Bild 6.9c. Daran schließen wir das Krafteck aus $-\vec{F}_C$, $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ für Punkt II an. Die Pfeilrichtung ergibt sich aus der Bedingung, dass die Pfeile einen einheitlichen Umlaufsinn ergeben müssen (hier rechts herum). Für $\vec{F}_C$ kann die Pfeilspitze auch weggelassen werden, da $\vec{F}_C$ im Weiteren nicht mehr interessiert. Die Richtungen von $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ übertragen wir in den Lageplan und erkennen so, ob es sich um einen Zug- oder Druckstab handelt. Lagerreaktion $\vec{F}_A$ ist gleich der Stabkraft $\vec{F}_1$. $\vec{F}_B$ ist die Resultierende aus $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$.

[1] CARL CULMANN 1821 – 1881

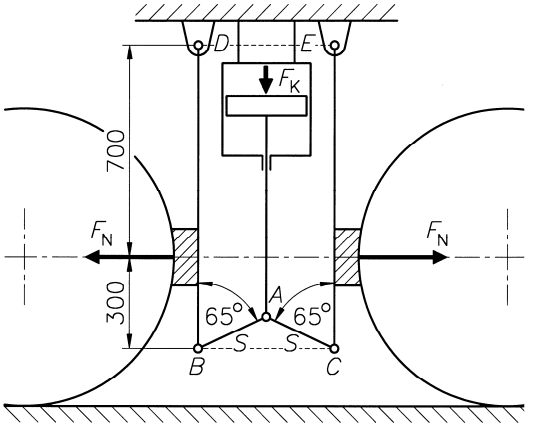


Bild 6.7 Lokomotivbremse aus Übung 6.5

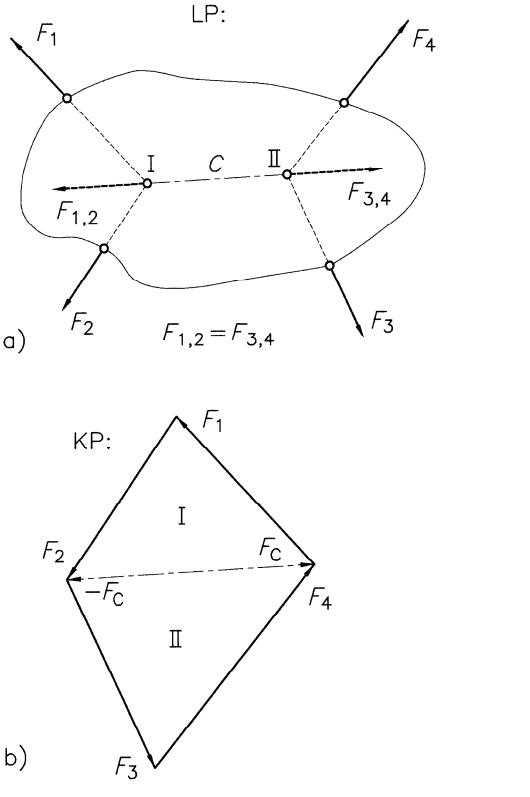


Bild 6.8 Zerlegung einer Kraft nach drei Wirkungslinien
a) Konstruktion der CULMANNschen Geraden
b) Kräfteplan

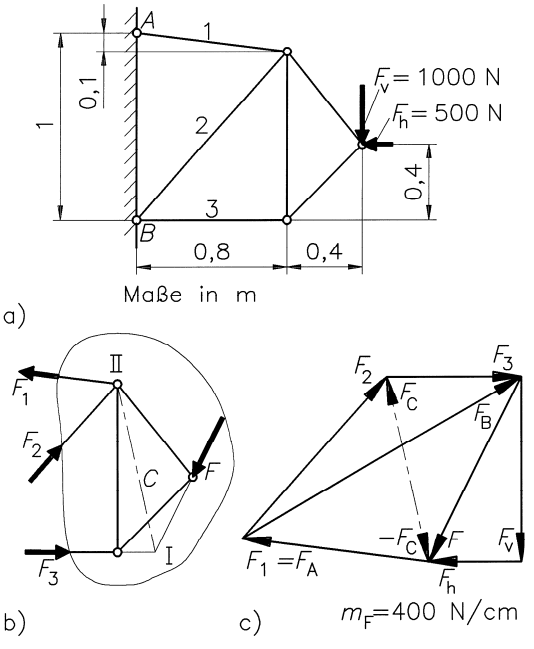


Bild 6.9 Stabverband aus Beispiel 6.3
a) Anordnung
b) herausgeschnittener Teil
c) Kräfteplan

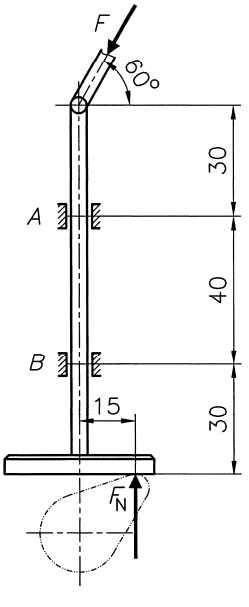


Bild 6.10 Tellerstößel aus Übung 6.6

Ergebnisse:

$F_1 \approx 1010$ N (Zugstab); $F_2 \approx 1170$ N (Druckstab); $F_3 \approx 720$ N (Druckstab); $F_A \approx 1010$ N; $F_B \approx 1740$ N.

Übrigens, auch $\vec{F}$, $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ ergeben ein geschlossenes Krafteck. Das entspricht dem Gleichgewicht von 3 Kräften gemäß Kap. 6.1. Dieser Fall liegt vor, wenn wir das Stabwerk in den Lagerpunkten *A* und *B* freimachen.

Übung 6.6

Der Tellerstößel in Bild 6.10 soll eine Kraft vom Betrag $F = 60$ N ausüben.

1. Mit welcher Kraft $\vec{F}_N$ muss der Kreisbogennocken auf den Teller drücken?
2. Bestimmen Sie auch die Lagerreaktionen $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$.

Hinweis: Reibung ist zu vernachlässigen; graphische Lösung.

Übung 6.7

Der Wagen in Bild 6.11 wird durch die Pendelstütze *D-E* am Wegrollen gehindert. Die Gewichtskraft F_G von Wagen und Ladung beträgt 50 kN.

Bestimmen Sie graphisch die Lagerreaktionen der Räder und die Kraft F_{DE} in der Pendelstütze.

Übung 6.8

Ein Boot ist gemäß Bild 6.12 mittels der Seile S_1 und S_2 sowie des Pfahls *P* am Flussufer festgemacht. Die Strömung übt auf das Boot eine Kraft der Größe $F = 1$ kN aus.

1. Bestimmen Sie graphisch die Seilkräfte $\vec{F}_{S1}$ und $\vec{F}_{S2}$ sowie die Kraft $\vec{F}_P$ mit der der Pfahl auf das Boot drückt.
2. Würde das Boot bei Strömungsumkehr in der gezeichneten Lage bleiben (mit Begründung)?

6.3 Beliebiges ebenes Kräftesystem (einschließlich Einzelmomente)

Diesen Fall lösen wir meist analytisch mit den Gleichgewichtsbedingungen (6.1) bzw. (6.2). In Einzelfällen, wo die Rechnung sehr aufwendig wäre, wenden wir das graphische Seileckverfahren an.

Es folgen je ein Beispiel für die analytische und die graphische Lösung sowie Übungen.

Beispiel 6.4

Bild 6.13a zeigt schematisch Kraftwirkung und Lagerung einer Antriebseinheit. Das Antriebsmoment, das nach außen abgegeben wird, hat ein Gegenmoment $M^* = 100$ Nm zur Folge, das auf die Aufhängung (Lagerung) wirkt. Gleichzeitig ist auch die Gewichtskraft der Antriebseinheit $F_G = 4000$ N und eine Trägheitskraft $F = 2000$ N aufzunehmen. Maße: $a = 0{,}2$ m; $b = 0{,}3$ m; $c = 0{,}1$ m.

Welche Lagerreaktionen treten in A und B auf?

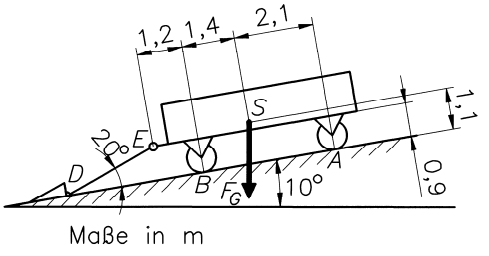


Bild 6.11 Wagen aus Übung 6.7

Lösung:

Bild 6.13b stellt das an den Lagern freigemachte System dar. A ist ein Festlager mit den Lagerreaktionen $\vec{F}_{Ah}$ und $\vec{F}_{Av}$ (horizontal bzw. vertikal). Im Loslager B kann nur eine vertikale Kraft auftreten, kurz $\vec{F}_B$ genannt. Den Richtungssinn einer Lagerreaktion darf man beliebig einzeichnen. Stimmen eingezeichnete und wirkliche Richtung nicht überein, ergibt sich ein negativer Wert für die Lagerreaktion.

Zunächst das Momentengleichgewicht um A:

$$\circlearrowleft (A) \quad F_B \cdot (a+b) - M^* - F_G \cdot a + F \cdot c = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{1}{a+b}\left(M^* + F_G \cdot a - F \cdot c\right)$$

$$F_B = \frac{1}{0{,}5\ \text{m}}\left(100 + 4000 \cdot 0{,}2 - 2000 \cdot 0{,}1\right)\text{Nm} = 1400\ \text{N}$$

Wir schreiben zusätzlich das Momentengleichgewicht um B an. Die nichtverwendete Kraftbedingung ermöglicht am Schluss eine Kontrolle.

$$\circlearrowleft (B) \quad -F_{Av} \cdot (a+b) - M^* + F_G \cdot b + F \cdot c = 0$$

$$\rightarrow F_{Av} = \frac{1}{a+b}\left(-M^* + F_G \cdot b + F \cdot c\right)$$

$$F_{Av} = \frac{1}{0{,}5\ \text{m}}\left(-100 + 4000 \cdot 0{,}3 + 2000 \cdot 0{,}1\right)\text{Nm} = 2600\ \text{N}$$

Horizontales Gleichgewicht:

$$\rightarrow \quad F_{Ah} - F = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_{Ah} = F = 2000\ \text{N}$$

Kontrolle mit Hilfe des vertikalen Gleichgewichtes:

$$\uparrow \quad F_{Av} - F_G + F_B = 2600\ \text{N} - 4000\ \text{N} + 1400\ \text{N} = 0$$

Die Rechnung stimmt.

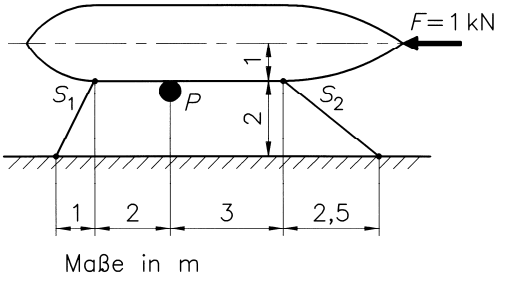


Bild 6.12 Festmachen eines Boots, Übung 6.8

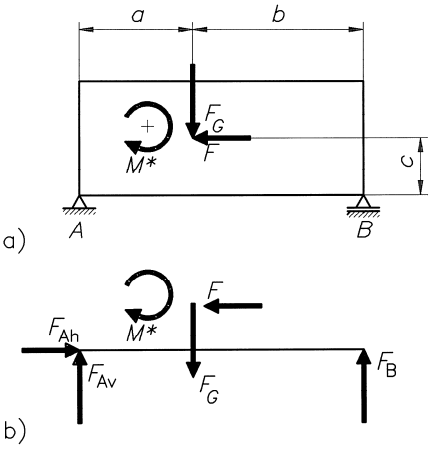


Bild 6.13 Antriebseinheit aus Beispiel 6.4
a) Kraftwirkung und Lagerung
b) mit Lagerreaktionen

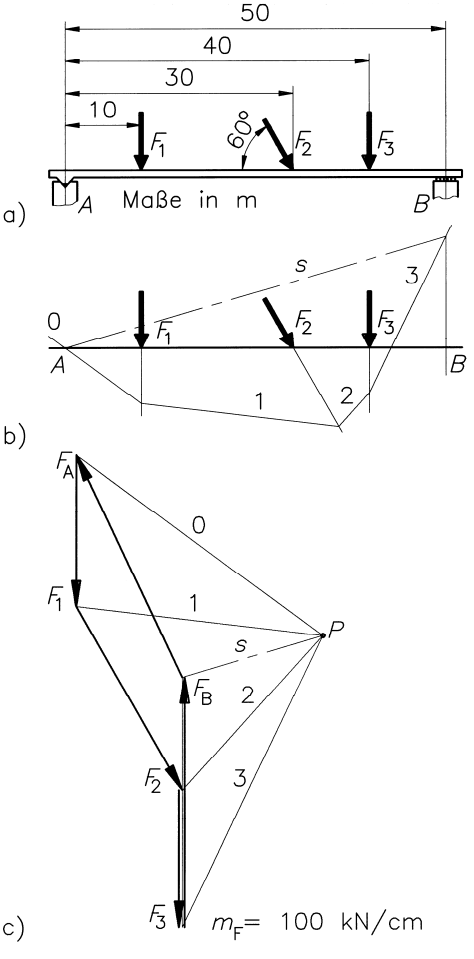


Bild 6.14 Brücktenträger aus Beispiel 6.5
a) Anordnung
b) Lageplan (Seilfigur)
c) Kräfteplan (Polfigur)

Resultierende und Winkel bei *A*:

$$F_A = \sqrt{F_{Ah}^2 + F_{Av}^2} = \sqrt{2000^2 + 2600^2}\ \text{N} \approx 3280\ \text{N}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{Av}}{F_{Ah}} = \arctan \frac{2600\ \text{N}}{2000\ \text{N}} \approx 52°$$

Beispiel 6.5

Der Brückenträger in Bild 6.14a wird durch drei Fahrzeuge mit den Kräften $F_1 = 200$ kN, $F_2 = 280$ kN und $F_3 = 180$ kN belastet.

Über das Seileckverfahren sind die Lagerreaktionen in *A* und *B* zu bestimmen.

Lösung:
In Beispiel 4.2 haben wir für den gleichen Träger mit Hilfe des Seileckverfahrens die Resultierende bestimmt. Jetzt werden wir dieses Verfahren erweitern.

Wir schneiden gemäß Bild 6.14b den Brückenträger von den Lagern frei. Das Rollenlager *B* kann nur eine vertikale Kraft übertragen. Am Gelenk *A* (Festlager) kennen wir die Wirkungslinie nicht.

Würde nur **eine** äußere Kraft wirken, könnten wir graphisch wie in Kap. 6.1 vorgehen. Bei mehr als einer äußeren Kraft kommt man graphisch mit dem Seileckverfahren weiter. Dieses läuft wie folgt ab (hierzu Bild 6.14b und c):

1. Äußere Kräfte im Kräfteplan (Polfigur) maßstäblich antragen.
2. Einen Pol *P* wählen. Die Verbindungslinien (Polstrahlen) von *P* zu den Anfangs- bzw. Endpunkten der Kräfte ziehen. Im vorliegenden Fall die Polstrahlen 0 bis 3.
3. Im Lageplan gemäß Bild 6.14b Parallelen zu den Polstrahlen ziehen, das ergibt die Seilstrahlen. Der Seilstrahl 0 muss durch das zweiwertige Gelenk *A* gehen, für welches die Wirkungslinie der Lagerreaktion nicht bekannt ist.
4. Schlusslinie *s* vom Gelenkpunkt *A* zum Schnittpunkt des Seilstrahls 3 mit der Wirkungslinie von $\vec{F}_B$ ziehen.
5. In der Polfigur teilt die Schlusslinie *s* die Resultierende aus $\vec{F}_1$ bis $\vec{F}_3$ in die Lagerreaktionen $\vec{F}_B$ und $\vec{F}_A$ auf. D. h. zunächst kann das Krafteck aus Schlusslinie *s*, Polstrahl 3 und $\vec{F}_B$ gezeichnet werden. $\vec{F}_A$ muss das Kräftepolygon schließen. Die Pfeilspitzen der Lagerreaktionen ergeben sich aus dem einheitlichen Umlaufsinn im Kräftepolygon.

Ergebnis: $F_A \approx 325$ kN; $F_B \approx 330$ kN

Das Seileckverfahren ist der Handrechnung überlegen, wenn viele äußere Kräfte wirken und die Hebelarme schwierig zu berechnen sind. Das vorgeführte Beispiel erfüllt diese Kriterien nicht, ist jedoch leicht nachvollziehbar.

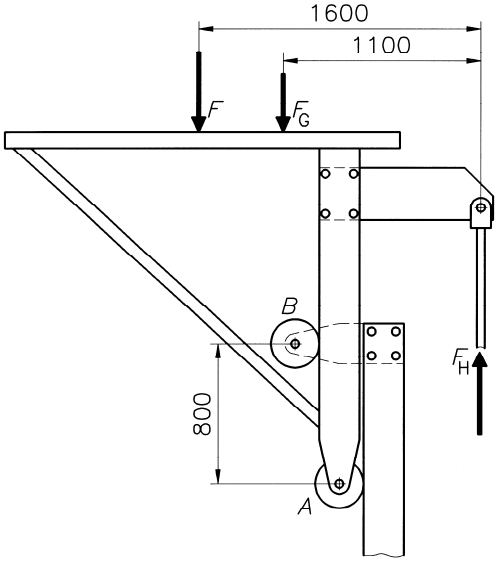


Bild 6.15 Vertikal verfahrbare Arbeitsbühne, Übung 6.9

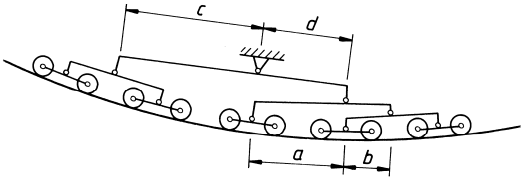


Bild 6.17 Seilumlenkung eines Skiliftes, Übung 6.11

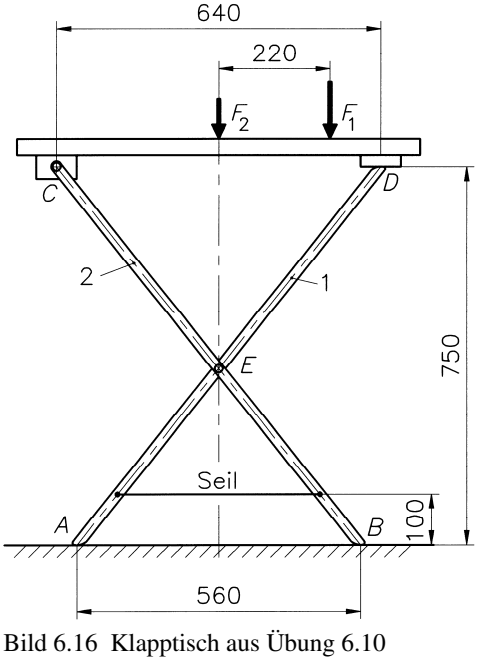


Bild 6.16 Klapptisch aus Übung 6.10

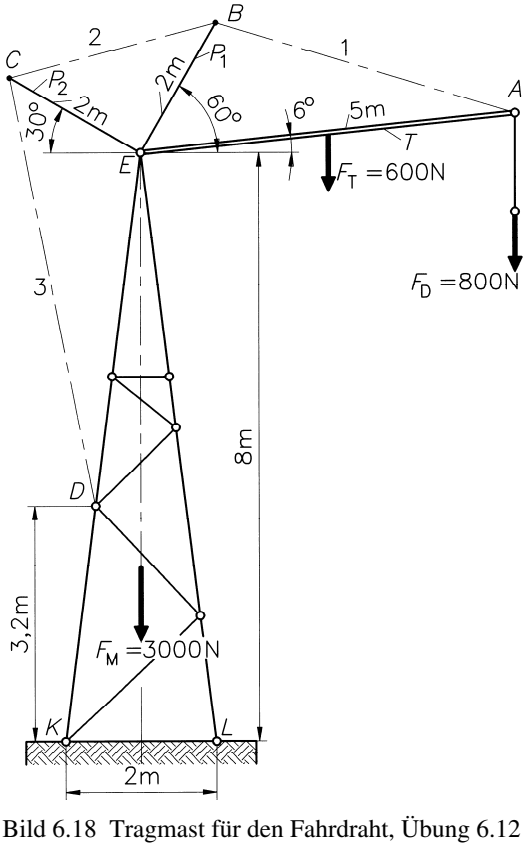


Bild 6.18 Tragmast für den Fahrdraht, Übung 6.12

1

Übung 6.9

Die Arbeitsbühne in Bild 6.15 hat die Eigengewichtskraft $F_G = 1$ kN. Die äußere Kraft beträgt $F = 5$ kN. Mit Hilfe der Hubstange kann die Bühne an der vertikalen Führung nach oben und unten gefahren werden.

Berechnen Sie die Hubkraft F_H und die Kräfte an den Rollen A und B. Reibungskräfte sind zu vernachlässigen.

Übung 6.10

Für den Klapptisch in Bild 6.16 sind zu berechnen:
1. die Kräfte auf die Beine bei A, B, C und D
2. die Seilkraft $\vec{F}_S$
3. die Kraft vom Bein 1 auf Bein 2 im Gelenk E.

$F_1 = 400$ N; $F_2 = 100$ N; Reibungskräfte sind zu vernachlässigen.

Übung 6.11

Für die Seilumlenkung eines Skiliftes, Bild 6.17, sind die Hebelverhältnisse a/b und c/d so festzulegen, dass jede der 10 Rollen (theoretisch) gleich belastet wird. Die schwach gekrümmte Seilkurve kann vereinfachend als gerade Linie angenommen werden, sodass alle Hebel zueinander parallel sind. Außer a, b, c und d sind die Hebel immer symmetrisch angeordnet.

Übung 6.12

Der Mast in Bild 6.18 trägt den Fahrdraht an einer Bahnstrecke. Anteilige Drahtlast $F_D = 800$ N. Der homogene Träger T hat die Gewichtskraft $F_T = 600$ N. Er wird über die drei Seilstücke zwischen den Punkten A, B, C und D sowie den Pendelstützen P_1 und P_2 gehalten. Seile und Pendelstützen werden gewichtslos angenommen. Der Gittermast selbst hat die Gewichtskraft $F_M = 3000$ N.

Über das Seileckverfahren oder analytisch sind zu bestimmen:
1. Seilkraft $\vec{F}_3$ und Gelenkkraft $\vec{F}_E$ (Reaktionskraft des Mastes)
2. die Lagerreaktionen in K und L.

1. Unter welchen Bedingungen ist ein Kräftesystem im Gleichgewicht?
2. Was bedeutet es graphisch, wenn 3 Kräfte im Gleichgewicht sein sollen?
3. In welchem Fall kann man die CULMANNsche Gerade verwenden?
4. Wie erhält man beim Seileckverfahren die Schlusslinie? Durch welchen Punkt im Lageplan muss diese stets gehen?
5. Welche Bedeutung hat die Schlusslinie in der Polfigur?

7 Lagerreaktionen von typischen ebenen Tragwerken

Balken auf zwei Stützen, eingespannter Balken, GERBER-Träger, Dreigelenkbogen

Im Folgenden behandeln wir vier häufig verwendete Tragwerke.

7.1 Balken auf zwei Stützen

Dieser ist uns bereits früher begegnet. Bild 7.1 zeigt vier typische Ausführungen. Als Belastungen treten auf: Einzelkräfte $\vec{F}$, Streckenlasten q und Einzelmomente (Kräftepaare) M^*.

Die Lagerreaktionen ergeben sich analytisch mit den Gleichungen (6.1) bzw. (6.2).

Für den Fall $M^* = 0$ können wir auch die bekannten graphischen Verfahren anwenden, und zwar:
1. Die Wirkungslinien von 3 Kräften schneiden sich in einem Punkt.
2. Seileckverfahren (bei mehr als einer äußeren Kraft).

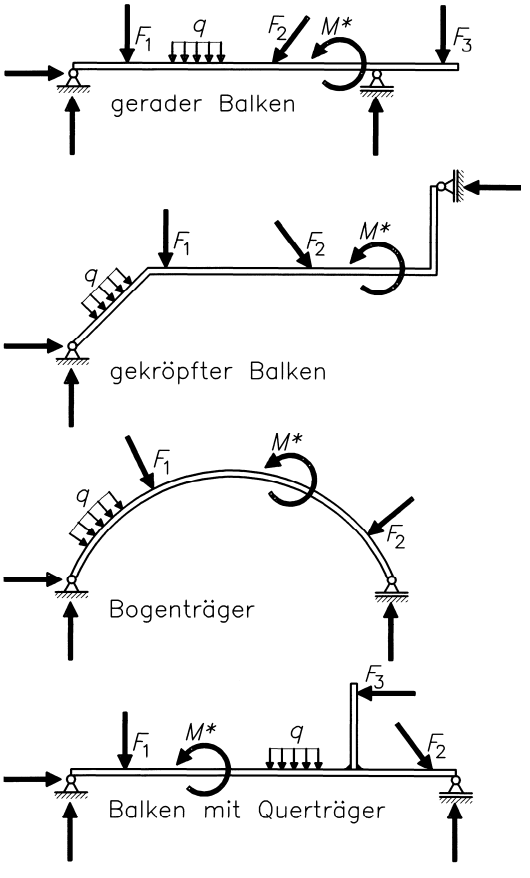


Bild 7.1 Balken auf zwei Stützen: Vier typische Ausführungen (mit angedeuteten Lagerreaktionen)

Übung 7.1

Bild 7.2 zeigt eine Arbeitsbühne, die bei A und B gelenkig gelagert und durch die Kräfte $\vec{F}_1$ bis $\vec{F}_4$ belastet wird. Die rechte Stütze ist bei C gelenkig angeschlossen.

Ermitteln Sie die Lagerreaktionen $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ (analytisch und mit Hilfe des Seileckverfahrens).

Zahlenwerte: $F_1 = 2{,}5$ kN; $F_2 = 1{,}5$ kN; $F_3 = 3$ kN; $F_4 = 1$ kN

7.2 Der eingespannte Balken

Die einfachste Form zeigt Bild 7.3. Darüber hinaus gibt es die verschiedenartigsten Ausführungen, ähnlich denen in Bild 7.1.

Den eingespannten Balken wollen wir nur analytisch mit den Gleichungen (6.1) bzw. (6.2) behandeln.

Übung 7.2

Für den Balken aus Übung 3.1 sind die Lagerreaktionen im Einspannpunkt A zu bestimmen.

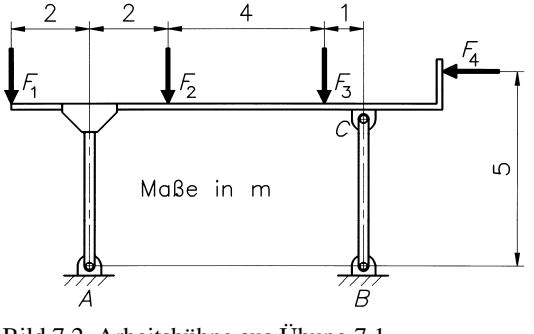


Bild 7.2 Arbeitsbühne aus Übung 7.1

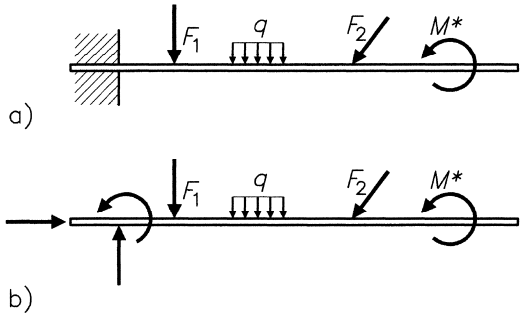


Bild 7.3 Eingespannter Balken
a) Anordnung
b) freigemacht

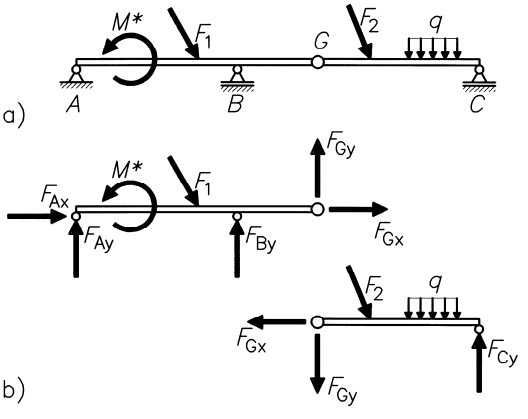


Bild 7.4 GERBER-Träger
a) Anordnung
b) an den Lagern freigemacht und am Gelenk durchgetrennt

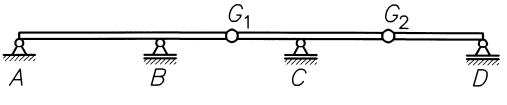


Bild 7.5 Erweiterung des GERBER-Trägers durch je ein Loslager und ein Gelenk

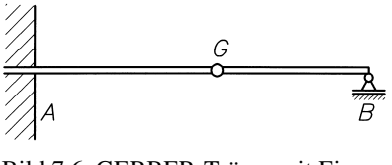


Bild 7.6 GERBER-Träger mit Einspannung *A*, Loslager *B* und Gelenk *G*

7.3 GERBER[1]-Träger

Die prinzipielle Anordnung gibt Bild 7.4a wieder: Der Träger wäre mit einem Festlager und zwei Loslagern 1-fach statisch unbestimmt gelagert, wenn er nicht zusätzlich eine Gelenkverbindung *G* besäße.

Trennen wir den Träger gemäß Bild 7.4b am Gelenk durch, können wir außer den 4 Lagerreaktionen F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}, F_{Cy} die beiden Gelenkkräfte F_{Gx} und F_{Gy} einzeichnen. Zusammen sind das 6 unbekannte Kräfte. Zur Lösung stehen an jedem Balkenteil 3, insgesamt somit 6 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Statt eines Teilsystems kann auch der Gesamtträger ins Gleichgewicht gesetzt werden.

Interessieren die Gelenkkräfte F_{Gx} und F_{Gy} nicht, vereinfacht sich die Rechnung, wenn wir folgendermaßen vorgehen:

1. $M_G = 0$ für den linken oder rechten Trägerabschnitt.
2. $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $M = 0$ für das Gesamtsystem.

Der GERBER-Träger lässt sich gemäß Bild 7.5 beliebig erweitern, wenn wir für jedes zusätzliche Rollenlager je ein Gelenk anbringen.

Bild 7.6 stellt ebenfalls einen GERBER-Träger dar.

Beispiel 7.1

Bild 7.7 a zeigt eine Zugbrücke über einen schmalen Kanal. Die Fahrbahn ist am Festlager *A* sowie an den Loslagern *B* und *C* gelagert. Der Teil *G-C* kann über Seil und Winde hochgezogen werden. Drehpunkt ist das Gelenk *G*. Im heruntergelassenen Zustand hängt das Seil schlaff.

Die Belastung besteht aus den Gewichtskräften der beiden Brückenteile $F_1 = 400$ kN und $F_2 = 160$ kN sowie den Verkehrslasten $F_3 = 200$ kN, $F_4 = 250$ kN und $F_5 = 90$ kN (am Teil *G-C* wirkend, z. B. Bremskraft).

Zu berechnen sind die Lagerreaktionen in *A*, *B* und *C* sowie die Kräfte im Gelenk *G*.

Lösung:
Wir schneiden den Brückenträger an den Lagern und am Gelenk frei und tragen Lagerreaktionen und Gelenkkräfte ein, Bild 7.7 b. Anschließend stellen wir je 3 Gleichgewichtsbedingungen am rechten und linken Teilsystem auf:

[1] GOTTFRIED HEINRICH GERBER 1832 – 1912

Rechtes Teilsystem:

$$\circlearrowleft G \quad F_{Cy} \cdot 8\ \text{m} + F_5 \cdot 2\ \text{m} - F_4 \cdot 2\ \text{m} - F_2 \cdot 4\ \text{m} = 0$$

$$F_{Cy} = \frac{1}{8}\left(-F_5 \cdot 2 + F_4 \cdot 2 + F_2 \cdot 4\right)$$

$$F_{Cy} = \frac{1}{8}\left(-90 \cdot 2 + 250 \cdot 2 + 160 \cdot 4\right)\ \text{kN} = 120\ \text{kN}$$

$$\rightarrow \quad F_{Gx} - F_5 = 0 \ \rightarrow \ F_{Gx} = F_5 = 90\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft C \quad -F_{Gy} \cdot 8\ \text{m} + F_5 \cdot 2\ \text{m} + F_4 \cdot 6\ \text{m} + F_2 \cdot 4\ \text{m} = 0$$

$$F_{Gy} = \frac{1}{8}\left(F_5 \cdot 2 + F_4 \cdot 6 + F_2 \cdot 4\right)$$

$$F_{Gy} = \frac{1}{8}\left(90 \cdot 2 + 250 \cdot 6 + 160 \cdot 4\right)\ \text{kN} = 290\ \text{kN}$$

Kontrolle:

$$\uparrow \quad F_{Gy} - F_4 - F_2 + F_{Cy} = (290 - 250 - 160 + 120)\ \text{kN} = 0$$

Linkes Teilsystem:

$$\circlearrowleft A \quad F_{By} \cdot 14\ \text{m} - F_3 \cdot 5\ \text{m} - F_1 \cdot 7\ \text{m} - F_{Gy} \cdot 16\ \text{m} = 0$$

$$F_{By} = \frac{1}{14}\left(F_3 \cdot 5 + F_1 \cdot 7 + F_{Gy} \cdot 16\right)$$

$$F_{By} = \frac{1}{14}\left(200 \cdot 5 + 400 \cdot 7 + 290 \cdot 16\right)\ \text{kN} \approx 603\ \text{kN}$$

$$\rightarrow \quad F_{Ax} - F_{Gx} = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_{Ax} = F_{Gx} = 90\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft B \quad -F_{Ay} \cdot 14\ \text{m} + F_3 \cdot 9\ \text{m} + F_1 \cdot 7\ \text{m} - F_{Gy} \cdot 2\ \text{m} = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{1}{14}\left(F_3 \cdot 9 + F_1 \cdot 7 - F_{Gy} \cdot 2\right)$$

$$F_{Ay} = \frac{1}{14}\left(200 \cdot 9 + 400 \cdot 7 - 290 \cdot 2\right)\ \text{kN} \approx 287\ \text{kN}$$

Kontrolle:

$$\uparrow \quad F_{Ay} - F_3 - F_1 + F_{By} - F_{Gy} = (287 - 200 - 400 + 603 - 290)\ \text{kN} = 0$$

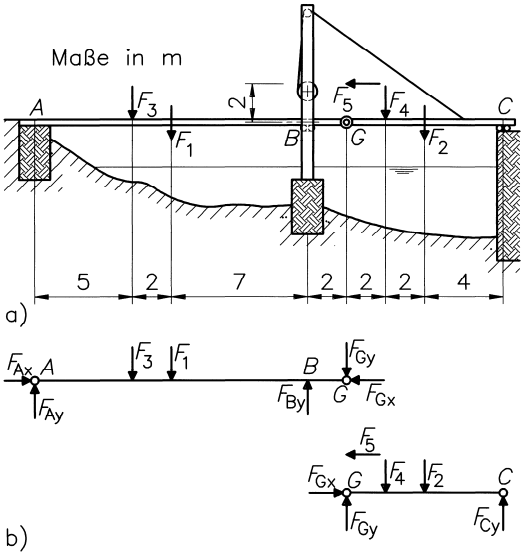


Bild 7.7 Zugbrücke aus Beispiel 7.1
a) Anordnung
b) die freigemachten Teilsysteme

Übung 7.3

Bild 7.8 zeigt ein Pkw-Wohnwagen-Gespann. Für den Fall, dass es auf horizontaler Strecke steht, sind die Radlasten bei *A*, *B* und *C* sowie die Kraft in der Kupplung *K* zu berechnen.

Gewichtskräfte: $F_{G1} = 20\,900$ N; $F_{G2} = 11\,800$ N

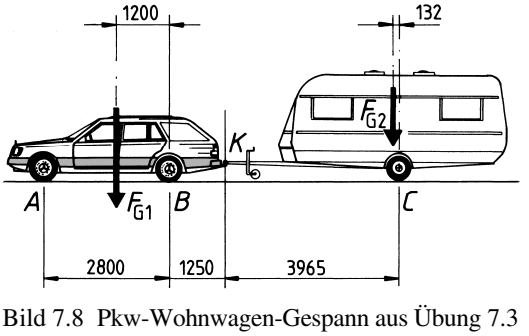


Bild 7.8 Pkw-Wohnwagen-Gespann aus Übung 7.3

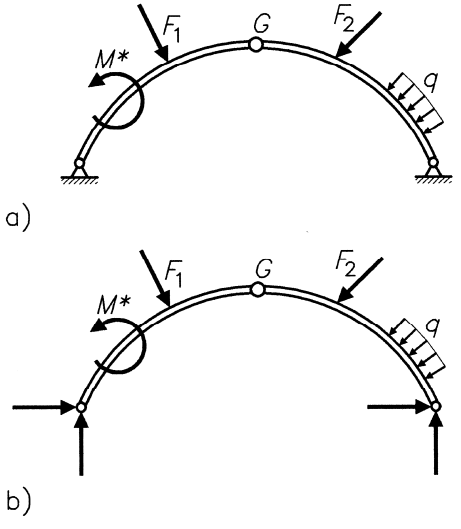


Bild 7.9 Dreigelenkbogen
a) Anordnung
b) an den Lagern freigemacht

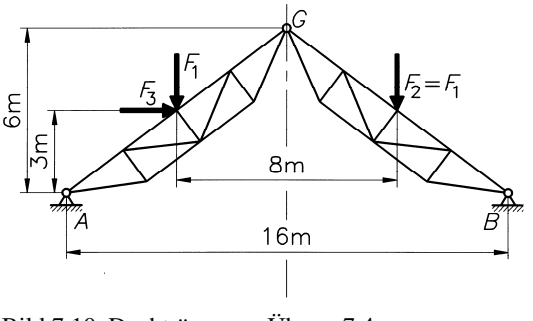


Bild 7.10 Dachträger aus Übung 7.4

7.4 Dreigelenkbogen

Der Dreigelenkbogen (Dreigelenkrahmen) besteht aus zwei beliebig geformten Trägern mit drei Gelenken, die nicht auf einer Linie liegen, symbolische Darstellung Bild 7.9.

Die analytische Lösung zur Bestimmung der Lagerreaktionen und Gelenkkräfte läuft genauso ab wie beim GERBER-Träger.

Übung 7.4

Für den Dachträger gemäß Bild 7.10 sind die Lagerreaktionen in den Lagern A und B und die Gelenkkräfte in G zu bestimmen.

Die Resultierenden der verteilten Lasten: Gewichtskräfte $F_1 = F_2 =$ 60 kN; Windlast $F_3 = 30$ kN.

1. Nennen Sie vier typische ebene Tragwerke.
2. Welche Lastgrößen können auftreten?
3. Wie lässt sich ein GERBER-Träger, bestehend aus Festlager, 2 Loslagern und einem Gelenk erweitern?

8 Das räumliche Kräftesystem

Kartesische Komponenten des Kraft- und Momentenvektors, resultierende Kraft, resultierendes Moment, Lagerungsarten und Lagerreaktionen, Gleichgewicht

Nun erweitern wir die Beziehungen des ebenen Falls um eine Dimension.

8.1 Komponenten einer Kraft im kartesischen Koordinatensystem

Die Kraft $\vec{F}$ können wir uns als Raumdiagonale eines Quaders mit den Kantenlängen F_x, F_y und F_z vorstellen, Bild 8.1. Es gelten somit folgende Zusammenhänge:

F_x: Komponente von $\vec{F}$ in x-Richtung

F_y: Komponente von $\vec{F}$ in y-Richtung

F_z: Komponente von $\vec{F}$ in z-Richtung

α_x: Winkel zwischen der positiven x-Achse und $\vec{F}$

α_y: Winkel zwischen der positiven y-Achse und $\vec{F}$

α_z: Winkel zwischen der positiven z-Achse und $\vec{F}$

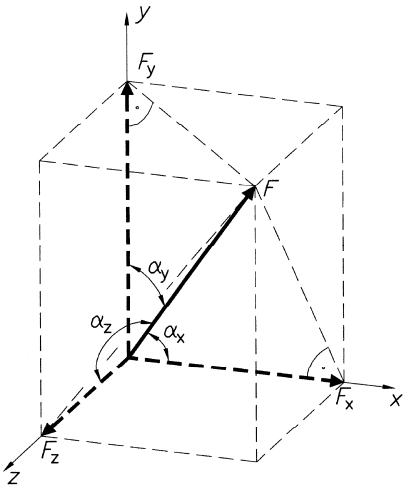


Bild 8.1 Die Kraft $\vec{F}$ und ihre kartesischen Komponenten

Die Kraft ist analytisch festgelegt entweder durch die Komponenten

$$F_x = F \cdot \cos \alpha_x$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha_y \qquad (8.1)$$

$$F_z = F \cdot \cos \alpha_z$$

oder durch den Betrag F und die Winkel α_x, α_y und α_z.

Häufig sind nicht die Winkel α_x, α_y und α_z bekannt, sondern ein Punkt A (x_A, y_A, z_A) auf der Wirkungslinie von $\vec{F}$, Bild 8.2.

Mit

$$l = \overline{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} \qquad (8.2)$$

$$\cos \alpha_x = \frac{x_A}{l}; \quad \cos \alpha_y = \frac{y_A}{l}; \quad \cos \alpha_z = \frac{z_A}{l} \qquad (8.3)$$

folgt für die Kraftkomponenten alternativ

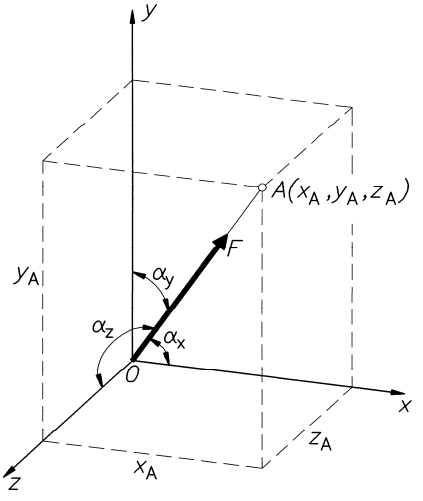


Bild 8.2 Festlegung der Wirkungslinie mit Hilfe des Punktes A

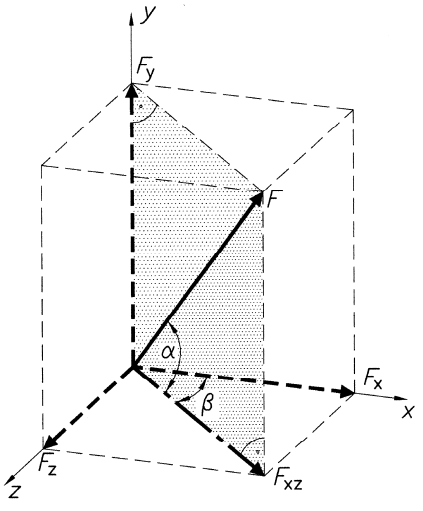


Bild 8.3 Zwei Zerlegungen nacheinander

$$F_x = F \cdot \frac{x_A}{l}$$
$$F_y = F \cdot \frac{y_A}{l} \qquad (8.4)$$
$$F_z = F \cdot \frac{z_A}{l}$$

Gut bewährt, weil anschaulicher, hat sich folgendes Verfahren: Wir zerlegen $\vec{F}$ gemäß Bild 8.3 zunächst in 2 Komponenten, z. B. in F_y und F_{xz}. Letztere teilen wir anschließend in F_x und F_z auf.

Bestimmung der Kraftkomponenten mit zwei aufeinanderfolgenden Zerlegungen:

$$\begin{aligned} F_y &= F \cdot \sin\alpha \\ F_{xz} &= F \cdot \cos\alpha \\ F_x &= F_{xz} \cdot \cos\beta = F \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ F_z &= F_{xz} \cdot \sin\beta = F \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned} \qquad (8.5)$$

Hierbei liegt α zwischen $\vec{F}$ und $\vec{F}_{xz}$, β zwischen $\vec{F}_{xz}$ und der x-Achse. Das Vorzeichen einer Kraftkomponente klärt man am einfachsten anschaulich.

Die Bezeichnungen in (8.5) und Bild 8.3 sind der jeweiligen Situation anzupassen.

8.2 Das Moment einer Kraft und seine kartesischen Komponenten

Im ebenen Fall wurde definiert:

Moment gleich Kraft mal Hebelarm

Dieses Moment dreht in der x,y-Ebene bzw. um die z-Achse.

Im räumlichen Fall gilt die Definition nach wie vor, jedoch gibt es jetzt um alle drei Koordinatenachsen Momente. Häufig ist der lotrechte Abstand vom Bezugspunkt auf die Kraftwirkungslinie nicht einfach zu finden. Dann rechnen wir die kartesischen Komponenten des Momentenvektors über die kartesischen Kraftkomponenten aus, Bild 8.4.

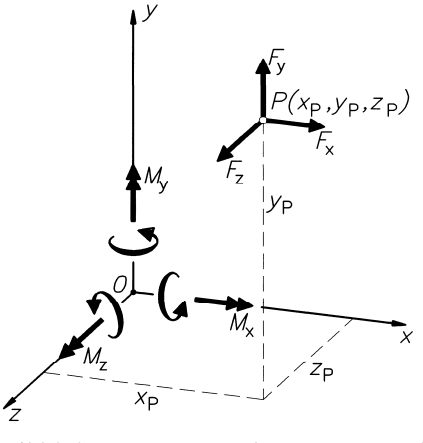


Bild 8.4 Komponenten des Momentenvektors

Komponenten des Momentenvektors:

$$\begin{aligned} M_x &= F_z \cdot y_P - F_y \cdot z_P \\ M_y &= F_x \cdot z_P - F_z \cdot x_P \\ M_z &= F_y \cdot x_P - F_x \cdot y_P \end{aligned} \qquad (8.6)$$

Die letzte Zeile kennen wir bereits vom ebenen Fall, Gleichung (3.1).

Übrigens braucht nur eine der drei Zeilen hergeleitet zu werden; die anderen folgen direkt durch zyklisches Vertauschen der Indizes.

Beispiel 8.1

Ein schwergewichtiger Patient zieht sich mit $F = 400$ N von seinem Krankenlager hoch, Bild 8.5.

Wie groß sind die kartesischen Komponenten des Momentenvektors im Punkt O der Haltestangenbefestigung?

Die Bestimmung der kartesischen Kraftkomponenten soll auf zweierlei Art erfolgen:

1. über den Punkt A ($x^* = -134$ mm; $y^* = -500$ mm; $z^* = 88$ mm) auf der Wirkungslinie von $\vec{F}$; x^* ist parallel zu x usw.
2. über die Winkel $\gamma = 17{,}78°$ und $\beta = 33{,}3°$.

Lösung:

Kraftkomponenten:

1. Mit Hilfe von A:
   Mit (8.2) und (8.4) erhalten wir:

$$l = \overline{PA} = \sqrt{x_A^{*2} + y_A^{*2} + z_A^{*2}} = \sqrt{134^2 + 500^2 + 88^2}\ \text{mm} \approx 525\ \text{mm}$$

$$F_x = F \cdot \frac{x_A^*}{l} = 400\ \text{N} \cdot \frac{-134\ \text{mm}}{525\ \text{mm}} \approx -102\ \text{N}$$

$$F_y = F \cdot \frac{y_A^*}{l} = 400\ \text{N} \cdot \frac{-500\ \text{mm}}{525\ \text{mm}} \approx -381\ \text{N}$$

$$F_z = F \cdot \frac{z_A^*}{l} = 400\ \text{N} \cdot \frac{88\ \text{mm}}{525\ \text{mm}} \approx 67\ \text{N}$$

2. Mit Hilfe der Winkel γ und β:
   Die Zerlegung in der grau markierten Ebene führt mit (8.5) auf:

$$F_y = -F \cdot \sin\alpha = -F \cdot \cos\gamma = -400\ \text{N} \cdot \cos 17{,}78° \approx -381\ \text{N}$$

$$F_{xz} = F \cdot \cos\alpha = F \cdot \sin\gamma = 400\ \text{N} \cdot \sin 17{,}78° \approx 122\ \text{N}$$

$$F_x = -F_{xz} \cdot \cos\beta = -122\ \text{N} \cdot \cos 33{,}3° \approx -102\ \text{N}$$

$$F_z = F_{xz} \cdot \sin\beta = 122\ \text{N} \cdot \sin 33{,}3° \approx 67\ \text{N}$$

Komponenten des Momentenvektors (mit Gl. (8.6) und P ($x = 1050$ mm; $y = 1100$ mm; $z = 0$)):

$$M_x = F_z \cdot y_P - F_y \cdot z_P = \left[67 \cdot 1100 - (-381) \cdot 0\right]\text{Nmm} \approx 74\ \text{Nm}$$

$$M_y = F_x \cdot z_P - F_z \cdot x_P = \left[-102 \cdot 0 - 67 \cdot 1050\right]\text{Nmm} \approx -70\ \text{Nm}$$

$$M_z = F_y \cdot x_P - F_x \cdot y_P = \left[-381 \cdot 1050 - (-102) \cdot 1100\right]\text{Nmm} \approx -288\ \text{Nm}$$

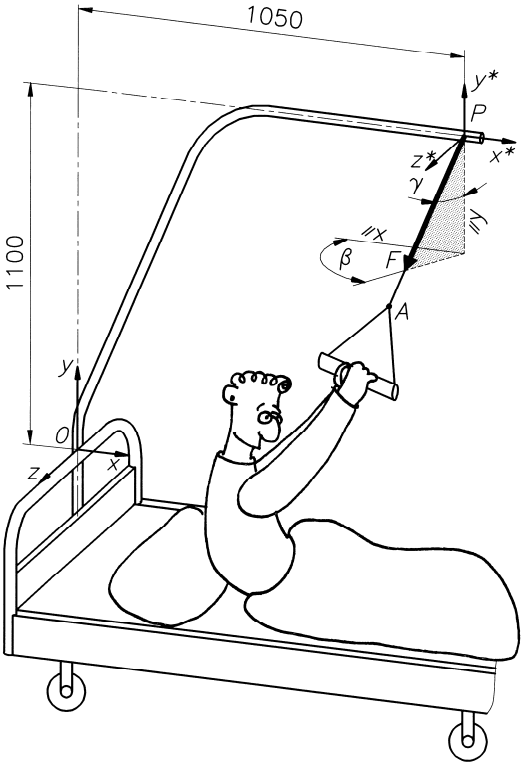


Bild 8.5 Räumliche Kraft $\vec{F}$, Beispiel 8.1

Da häufig nicht alle Kraftkomponenten auftreten oder Hebelarme null sind, werden wir im Folgenden die Momente meist direkt mit Hilfe der Angabenskizze bestimmen, d. h. ohne Gl. (8.6) zu benutzen.

8.3 Resultierende Kraft und resultierendes Moment

Zentrales Kräftesystem:

(Die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.)

Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ von n Kräften folgt aus der Vektoraddition

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ .$$

Für das praktische Arbeiten rechnen wir mit den kartesischen Komponenten.

Größe und Richtung der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$:

$$F_{Rx} = \sum F_{xi}\ ; \quad F_{Ry} = \sum F_{yi}\ ; \quad F_{Rz} = \sum F_{zi} \tag{8.7a}$$

(Summation über alle Einzelkräfte)

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} \tag{8.7b}$$

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{Rx}}{F_R}; \quad \cos\alpha_y = \frac{F_{Ry}}{F_R}; \quad \cos\alpha_z = \frac{F_{Rz}}{F_R} \tag{8.7c}$$

Einzelmomente:

Einzelmomente (Kräftepaare) lassen sich zum resultierenden Moment wie die Kräfte zusammenfassen. Die Momentenvektoren dürfen hierbei beliebig in einen gemeinsamen Punkt parallelverschoben werden. Das haben wir schon in Kap. 3.1 festgestellt.

Beliebiges räumliches Kräftesystem (einschließlich Einzelmomente):

(Die Wirkungslinien der Kräfte schneiden sich nicht alle in einem Punkt.)

Jede Kraft wird in einen gemeinsamen Bezugspunkt parallelverschoben. Mit (8.7) ergibt sich Größe und Richtung der resultierenden Kraft.

Beim Parallelverschieben der Kräfte tritt je ein Versetzungsmoment „Kraft mal lotrechter Verschiebeweg“ auf. Die Versetzungsmomente fassen wir mit den Einzelmomenten zum resultierenden Moment zusammen.

Übung 8.1

An dem Strommast in Bild 8.6 bilden die Drähte einen Winkel von 150°. In einer kalten Winternacht trete in jedem Draht eine Zugkraft von 2 kN auf. Welche resultierende Kraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ und welches Moment $\vec{M}_{\mathrm{A}}$ wirken dabei am Fußpunkt A?

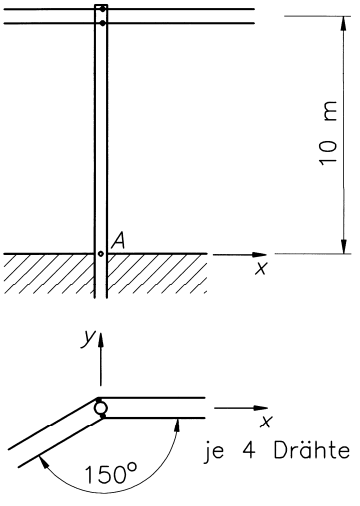


Bild 8.6 Strommast aus Übung 8.1

8.4 Lagerung räumlicher Körper

Ein vollkommen freier Körper hat im Raum 6 Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade):
- je eine Verschiebung (Translation) in x-, y- und z-Richtung
- je eine Drehung (Rotation) um die x-, y- und z-Achse

Die Lager verhindern einzelne oder alle Freiheitsgrade; sie üben einen Zwang auf den Körper aus.

Bild 8.7 zeigt verschiedene Lagerungsarten mit den möglichen Lagerreaktionen.

Einen räumlichen Körper statisch bestimmt richtig zu lagern, fällt nicht immer leicht. Bild 8.8 zeigt eine statisch bestimmte Lagerung mit 3 einwertigen Lagern und einem Kugelgelenk (dreiwertig).

8.5 Räumliche Kräftesysteme im Gleichgewicht

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{M}_{\mathrm{A}} = 0\ . \tag{8.8}$$

In Worten: Resultierende Kraft gleich null, resultierendes Moment bezüglich eines beliebigen Punktes A gleich null.

Mit den kartesischen Komponenten: Symbolisch:

$$F_{\mathrm{Rx}} = \sum F_{\mathrm{xi}} = 0 \qquad \sum F_{\mathrm{x}} = 0$$

$$F_{\mathrm{Ry}} = \sum F_{\mathrm{yi}} = 0 \qquad \sum F_{\mathrm{y}} = 0$$

$$F_{\mathrm{Rz}} = \sum F_{\mathrm{zi}} = 0 \qquad \sum F_{\mathrm{z}} = 0 \tag{8.9}$$

$$M_{\mathrm{xA}} = \sum \left(F_{\mathrm{zi}} \cdot y_{\mathrm{i}} - F_{\mathrm{yi}} \cdot z_{\mathrm{i}} \right) + \sum M^{*}_{\mathrm{xj}} = 0 \qquad \sum M_{\mathrm{xA}} = 0$$

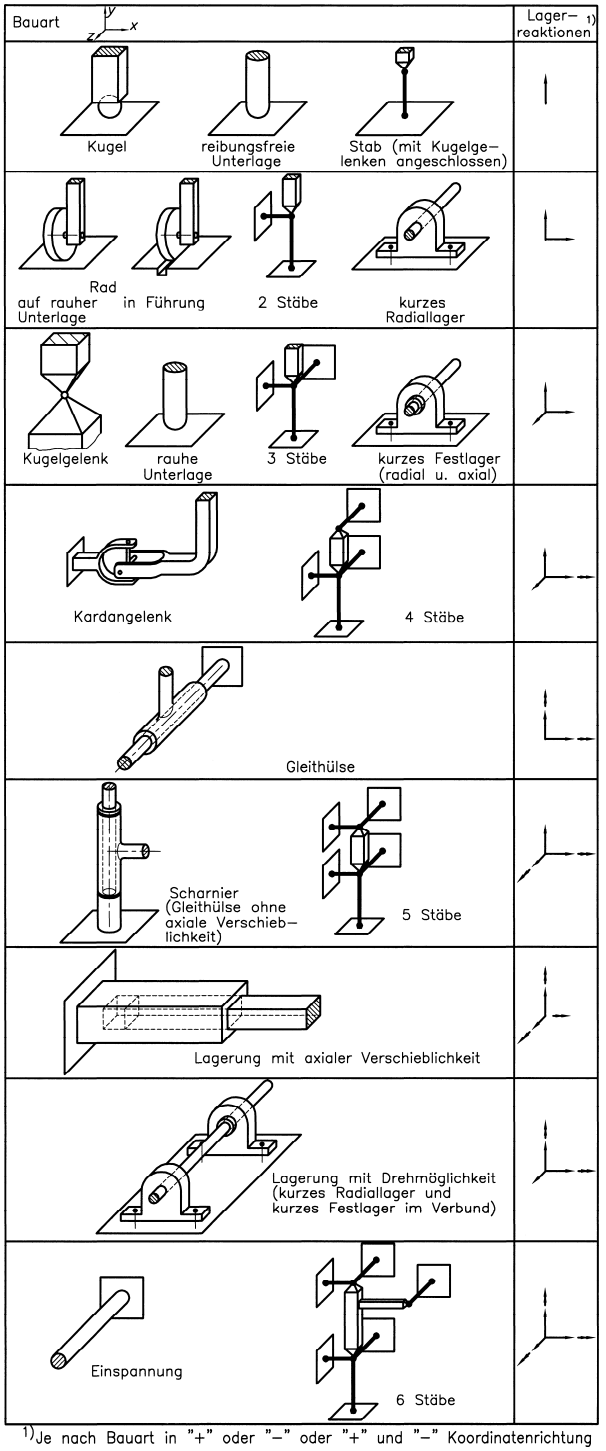


Bild 8.7 Verschiedene Lagerungsarten mit Lagerreaktionen