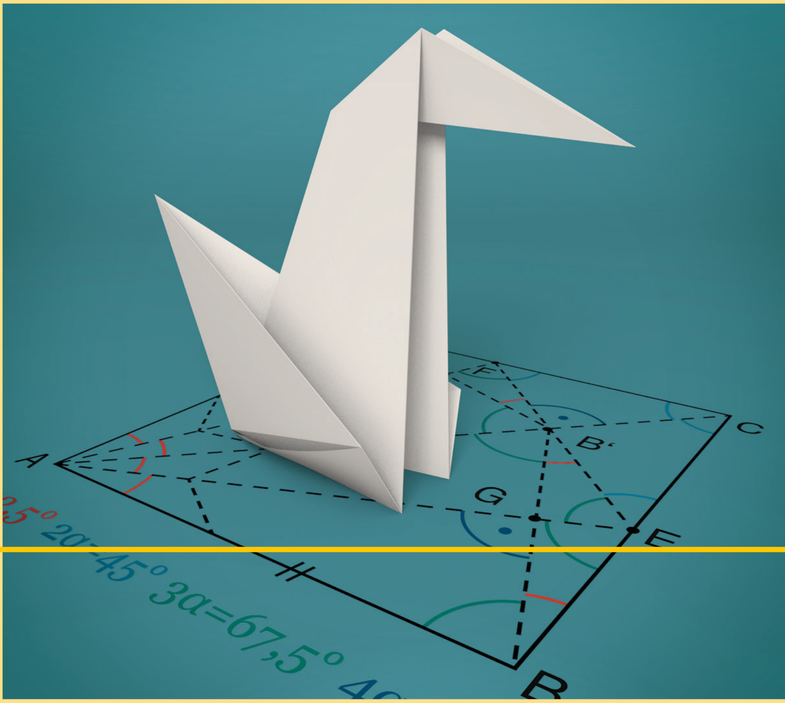
Michael Schmitz

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Mathe kannste knicken

Kreativer und aktivierender Mathematikunterricht mit Papierfalten



HANSER

Schmitz

Mathe kannste knicken

Michael Schmitz

Mathe kannste knicken

Kreativer und aktivierender Mathematikunterricht mit Papierfalten

HANSER

Autor:

Dr. Michael Schmitz, Erfurt

MIX
Papier aus verantwortungs-
vollen Quellen
FSC® C083411

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Satz: Michael Schmitz
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46940-2
E-Book-ISBN 978-3-446-47153-5

Inhalt

Vorwort

Blättert man in Origamibüchern, so kann man schnell die faszinierenden Möglichkeiten entdecken, die Origami auch für den Mathematikunterricht bietet. Man findet in diesen Büchern nicht nur schöne Faltobjekte, sondern es kommen genauso Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, regelmäßige Vielecke, Rhomben, reguläre Körper, Kongruenz, Spiegelung, Strecken- und Flächenverhältnisse, Pyramiden, Tetraeder, Würfel, Quader, $\sqrt{2}$, der Goldene Schnitt und vieles mehr vor.
Schon diese Begriffe legen es nahe, dass das Falten von Papier im Mathematikunterricht eine Rolle spielen sollte. Es können geometrische Begriffe mit konkreten Objekten und Handlungen in Verbindung gebracht werden. Dabei kann man auch Freude an der Ästhetik der entstandenen Objekte empfinden.
Beim Papierfalten werden geometrische Figuren nicht nur auf Papier (in der Ebene) gezeichnet, sie entstehen im Raum und tragen schon dadurch zur Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens bei.
Bereits in der Grundschule ist das Erkunden von geometrischen Sachverhalten durch das Falten von Papier möglich.
Selbstverständlich ist das Papierfalten auch eine sinnvolle Freizeitgestaltung, bei der man die Faltkunst entdecken kann.

Natürlich soll auch darauf hingewiesen werden, dass beim Falten von Papier neben den mathematischen Inhalten ebenfalls exaktes Arbeiten, die Feinmotorik, das Vorstellungsvermögen und das Selbstvertrauen weiterentwickelt werden.
Und es macht Spaß!

Diese Bedeutung des Papierfaltens für Bildung und Erziehung wurde in unserem Kulturkreis bereits von Friedrich Wilhelm August Fröbel (1782–1852) erkannt und genutzt. So waren u. a. das Falten, Schneiden und Kleben von Papier fester Bestandteil in seiner *Kindererziehung*.

Das selbe Ziel verfolgte 1908 Grace Young mit ihrer Einführung in die Geometrie für Kinder im Buch *Der kleine Geometer*. Auch hier steht eine anschauliche Darstellung der Geometrie und Förderung der räumlichen Vorstellung im Mittelpunkt.

Die Arbeit mit Papier und das Erstellen von Modellen ist auch in diesem Buch eine wichtige Vorgehensweise.

Natürlich spielt beim Falten von Papier die alte japanische Kunst *Origami* eine bedeutende Rolle. Das Wort *Origami* selbst entstand aus den beiden Wortteilen *ori* (für falten) und *kami* (für Papier).
In seinem Buch *Origami figürlich und geometrisch* erklärt KUNIHIKO KASAHARA, dass sich Origami als ein traditionelles Faltspiel auffassen lässt, in dem bildnerisch-ästhetische, funktionelle und geometrisch-mathematische Prinzipien zusammenfließen.
Diese Erklärung halte ich für sehr zutreffend, da es zwischen Mathematik und Origami schon seit längerem eine starke Verbindung gibt.
In diesem Zusammenhang wurde die Bezeichnung *Origamics*, eine Zusammensetzung aus *Origami* und *Mathematics*, geprägt. Dieser Begriff wurde von dem japanischen Biologen Haga Kazuo, einem Pionier des mathematischen Papierfaltens, 1994 auf dem 2. Internationalen Kongress für *Origami Science and Scientific Origami* vorgeschlagen.

Um die Verbindung von Mathematik und Origami zu betonen, verwende ich den Begriff *Mathegami*, damit die Mathematik deutlicher zu erkennen ist.
Im Buch wird Origami etwas erweitert als Papierfalten verstanden.
Dadurch können wir auch schneiden und kleben, was schon von Fröbel angewendet wurde, beim traditionellen Origami aber nicht erlaubt ist.

Für mich hat die Beschäftigung mit Origami 2002 mit dem im Abschnitt 16.2 vorgestellten Würfel begonnen.
In der Arbeit mit rechenschwachen Schülern nutzte ich diesen Würfel, um mathematische Begriffe verständlich und *begreifbar* zu machen. Es stellte sich heraus, dass nicht nur das Entstehen eines Würfels aus sechs Quadraten für diese Schüler von großer Bedeutung war, sondern auch die dabei notwendige Ausdauer, Konzentration und Feinmotorik. Außerdem kamen wir so ins Gespräch zu mathematischen Inhalten.

Auch für den Mathematikunterricht oder für Arbeitsgemeinschaften bietet das Falten von Papier eine Vielzahl interessanter Einsatzmöglichkeiten.
Dazu habe ich für dieses Buch einige Beispiele und Anregungen zusammengestellt.
Diese Beispiele stammen aus dem *Seminar zum Papierfalten im Mathematikunterricht*, das ich einige Jahre an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, für Studenten[1] des Lehramts Mathematik (Regelschule und Gymnasium), geleitet habe.

In den ausgewählten Beispielen werden unterschiedliche Papierfaltaufgaben vorgestellt und die Richtigkeit der Konstruktionen mit unterschiedlichen mathematischen Hilfsmitteln untersucht.
Dabei spielen auch Begründen und Beweisen eine zentrale Rolle.

Es werden aber keine isolierten Aufgaben vorgestellt, die man an passender Stelle im Mathematikunterricht einsetzen kann.

---

[1] Selbstverständlich dürfen sich auch StudentInnen, LehrerInnen, SchülerInnen, ... angesprochen fühlen, wenn von Studenten, Lehrern, Schülern, ... die Rede ist.

Es ist die Aufgabe des Lehrers, aus einem für ihn interessanten Thema eine Problemaufgabe, eine Übungsaufgabe, ein Projekt oder eine Aufgabe zur mathematischen Modellierung zu entwickeln, sodass eine Passfähigkeit zu seiner Unterrichtssituation entsteht.
Damit ergeben sich auch Anknüpfungspunkte an die zu entwickelnden mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards und Lehrpläne.

Selbstverständlich ist das Papierfalten im Mathematikunterricht nicht *die* Methode, die den Mathematikunterricht an den Schulen attraktiver macht. Aber es ist eine gute Möglichkeit, Mathematik mit *handwerklichen* Tätigkeiten zu verknüpfen. Dabei spielt nicht nur die technische Anfertigung von Modellen eine Rolle.
Wichtig ist die Mathematik, die unsere Schüler in den gefalteten Modellen entdecken können.
Die Falttechniken finden auch in technischen Bereichen eine Vielzahl von Anwendungen, zum Beispiel beim Stent in der Herzchirurgie, beim Airbag im Auto, beim Sonnensegel in der Raumfahrt und an vielen anderen Stellen.

Für die im Buch vorgestellten Beispiele benötigen wir oft DIN-A4-Papier oder quadratisches Faltpapier, das wir uns auch selbst herstellen können.
Wir können Kopierpapier verwenden, das für unsere Zwecke sogar mehrere Vorteile hat: Es ist fast immer verfügbar, die Papiergröße eignet sich gut zum Experimentieren und man kann gut auf diesem Papier schreiben und zeichnen. Dies ist manchmal sinnvoll, um Faltlinien deutlicher hervorzuheben oder um sich Zusammenhänge klarzumachen.

Ich würde mich freuen, wenn die im Buch vorgestellten Beispiele dazu beitragen würden, den Mathematikunterricht zu bereichern und Mathematik noch interessanter zu machen.
Durch das Falten von Papier findet man eine andere Herangehensweise an mathematische Inhalte und ermöglicht eine Zusammenarbeit von Hand und Kopf.

Also in diesem Sinne: Mathe kannste knicken!

Faltiges Gelingen wünscht
Michael Schmitz Erfurt, Mai 2021

Zusatzmaterialien zum Buch

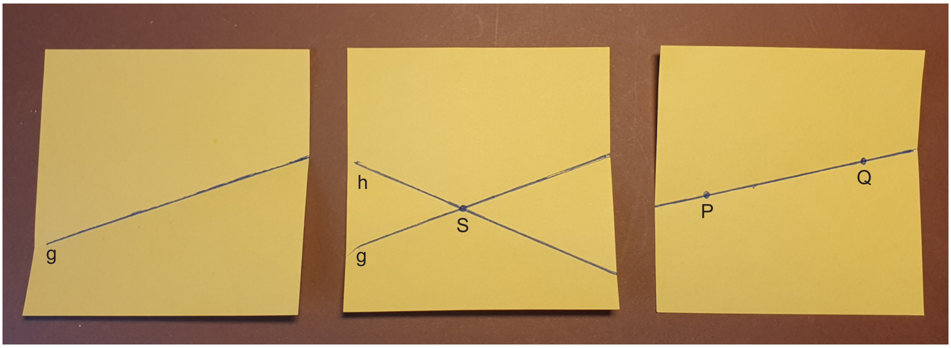
Zu einigen Faltungen im Buch gibt es kurze Videos, die den Faltprozess besser als Bilder und Erklärungen zeigen. Auch zu den beiden Puzzles stehen Druckvorlagen zur Verfügung. Hinweise für diese Zusatzmaterialien befinden sich an den entsprechenden Abbildungen.
Diese Materialien, sowie ein Verzeichnis weiterführender Literatur, findet man auf plus.hanser-fachbuch.de. Der Zugangscode steht auf der ersten Seite des Buchs.

Auf YouTube findet man unter dem Suchwort „mathegami“ ebenfalls Videos zum Buch.

1 Erste Falten

Zu Beginn wollen wir uns mit einigen grundlegenden Faltungen des Papiers befassen und Verbindungen zur euklidischen Geometrie herstellen. Dabei soll hier kein systematischer Aufbau und keine axiomatische Begründung des Papierfaltens geliefert werden. Eine solche axiomatische Begründung des Papierfaltens entstand zwischen 1989 und 2001 und wurde von JACQUES JUSTIN, HUMIAKI HUZITA und KOSHIRO HATORI entwickelt ([17]).

Die beim Falten von Papier entstehenden Faltlinien sind ein gutes Modell für Geraden der euklidischen Ebene (Bild 1.1a).

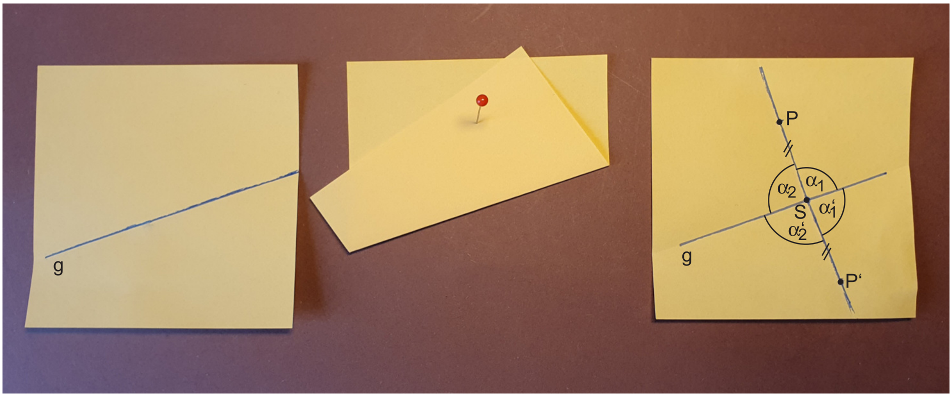


a b c

Bild 1.1 Faltgeraden

Der Schnittpunkt zweier Faltlinien lässt sich leicht ermitteln (Bild 1.1b). Durch zwei gegebene Punkte auf dem Faltpapier können wir (mit etwas Geschick) eine Faltlinie falten (Bild 1.1c).

Aus Bild 1.1a können wir auch sofort entnehmen, dass das Falten von Papier eng mit der Spiegelung an der Geraden verbunden ist, die durch die Faltlinie bestimmten wird. Falten wir nämlich das Papier an einer Faltlinie g um (Bild 1.2a), so entstehen teilweise zwei Schichten des Papiers, die direkt übereinander liegen. Stechen wir z.B. mit einer Nadel durch diese Doppellage hindurch, so markieren wir genau zwei Punkte (einen in jeder Papierlage), die direkt übereinander liegen (Bild 1.2b). Nach dem Auffalten bezeichnen wir diese markierten Punkte mit P und P' und verbinden diese mit Stift und Lineal (Bild 1.2c). Die eingezeichnete Gerade durch P und P' schneidet g in S. An S entstehen vier Winkel: α_1, α_1', α_2 und α_2'. Weil $\sphericalangle P'SP$ ein gestreckter Winkel ist, sind α_1 und α_1' sowie α_2 und α_2' Nebenwinkel zueinander, die aufgrund der Faltung an g auch deckungsgleich zueinander sind. Folglich hat jeder dieser Winkel eine Größe von $90°$. PP' ist damit senkrecht auf g.



a b c

Bild 1.2 Geradenspiegelung

Weiterhin liegen die Strecken SP' und SP nach dem Falten an g direkt aufeinander, sie sind also deckungsgleich und folglich haben sie die gleiche Länge. Aufgrund dieser beiden Eigenschaften beim Falten ($PP' \perp g$ und $|SP'| = |SP|$) ergibt sich, dass das Falten an einer Geraden der Spiegelung an dieser Geraden entspricht.

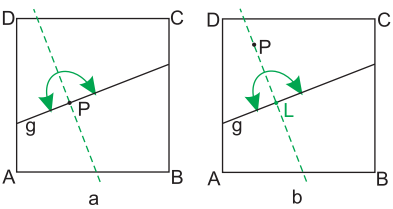


Bild 1.3 Eine Senkrechte

Mit diesen Überlegungen sind wir aber nun in der Lage, rechte Winkel zu falten.
Damit können wir

- in einem markierten Punkt P einer Faltgeraden g die zu g senkrechte Faltgerade falten (Bild 1.3a).
- von einem Punkt P außerhalb einer Faltgeraden g das Lot auf g fällen (Bild 1.3b).

In beiden Fällen müssen wir nur g so auf sich selbst falten, dass die Faltgerade durch P geht.

Und damit können wir auch Mittelpunkte von Strecken bestimmen.
Sind nämlich auf einer Faltgeraden g zwei Punkte P und Q gegeben, so können wir den Mittelpunkt M der Strecke PQ durch Falten bestimmen (Bild 1.4). Dazu bringen wir den Punkt P durch Umfalten auf den Punkt Q und streichen die dadurch bestimmte Faltlinie glatt. Diese Faltlinie schneidet g im gesuchten Mittelpunkt M von PQ. Gleichzeitig ist diese Faltgerade auch die Mittelsenkrechte der Strecke PQ.

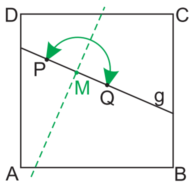


Bild 1.4 Streckenhalbierung

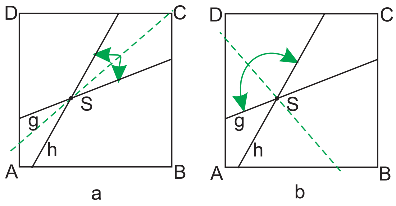


Bild 1.5 Winkelhalbierung

Natürlich können wir durch Falten auch einen gegebenen Winkel halbieren. Sind auf einem Faltpapier zwei Faltgeraden g und h gegeben, die sich in einem Punkt S schneiden, so falten wir g auf h, sodass die Faltgerade durch S geht. Diese Faltgerade halbiert dann den entsprechenden Winkel. Für das Falten von g auf h gibt es genau zwei verschiedene Möglichkeiten, sodass die Winkelhalbierenden von den beiden Winkeln, die durch g und h bestimmt sind, gefunden werden (Bilder 1.5a, b).

1.1 Technisches

Hier kommen drei praktische Falttipps, die beim Falten von Papier nützlich sind.

TIPP 1: Zur Untersuchung unserer Faltungen ist es günstig, wenn wir die Faltlinien mit einem Stift nachziehen. Das können wir machen, indem wir nach dem Falten auf das Papier ein Lineal an die neue Faltlinie anlegen und diese mit einem Stift nachzeichnen. Oder wir öffnen das Papier nach dem Falten nicht ganz und ziehen mit einem Stift direkt in der Falte die Faltlinie nach (Bild 1.6a).

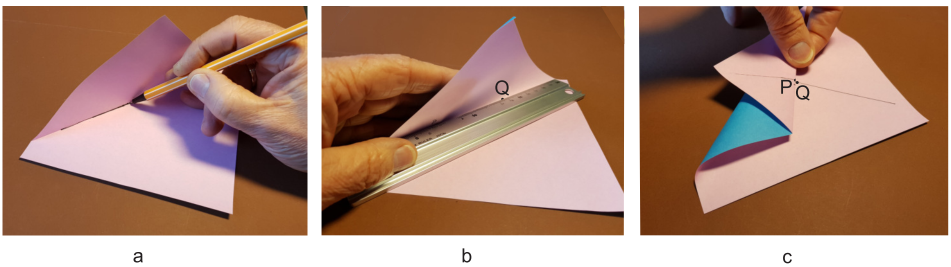


Bild 1.6 Technische Tipps

TIPP 2: Manchmal ist es schwierig, zwei Punkte durch eine Faltgerade zu verbinden. Eine solche Faltgerade können wir gut erzeugen, indem wir ein Lineal an die beiden zu verbindenden Punkte anlegen und dann entlang des Lineals das Papier falten (Bild 1.6b). Natürlich entfernen wir das Lineal dann wieder und ziehen die Faltgerade gut nach.

TIPP 3: Wollen wir, wie im Bild 1.4, den Mittelpunkt oder die Mittelsenkrechte zu einer gegebenen Strecke falten, dann kann es sinnvoll sein, eine zusätzliche Faltlinie zu erzeugen. Und zwar falten wir das Faltpapier nach hinten um, sodass die Faltlinie durch einen der beiden Punkte geht. Nun können wir diesen Punkt besser auf den anderen falten (Bild 1.6c).

1.2 Kleine Anwendungen

Die eben besprochenen Techniken zum Halbieren von Strecken und Winkeln sowie zum Falten von rechten Winkeln sollen nun beim Falten einer Diagonalen im Rechteck und beim Falten eines kleinen Schwans zum Einsatz kommen.

1.2.1 Diagonale im Rechteck

Ist $ABCD$ ein rechteckiges Faltpapier, dann ist es manchmal nicht so einfach in das Rechteck eine Diagonale zu falten. Dies gilt im Besonderen für Rechtecke, bei denen eine Seite deutlich länger ist als die andere.

Zuerst überlegen wir: Wenn die Diagonale $d = AC$ in das Rechteck $ABCD$ gefaltet werden soll (Bild 1.7a), dann betrachten wir dazu die Mittelsenkrechte m, die d in M schneidet (Bild 1.7b).

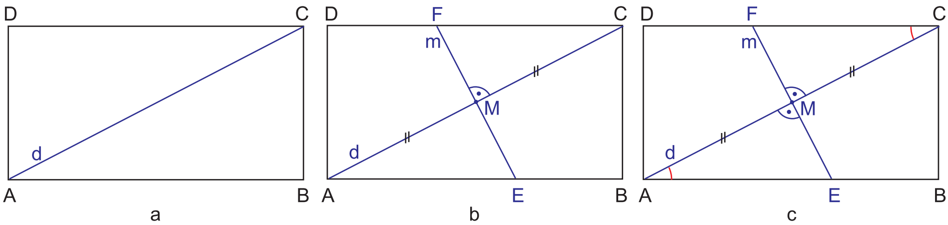


Bild 1.7 Diagonale im Rechteck

E und F sind die Schnittpunkte von m mit AB bzw. CD. Weil m die Mittelsenkrechte von AC ist, ist $|AM| = |MC|$ und M steht senkrecht auf d.
Da AB und CD parallel zueinander sind, sind die beiden im Bild 1.7c markierten Winkel bei A bzw. C kongruent zueinander. Folglich sind auch die beiden Dreiecke AEM und CFM wegen (wsw) kongruent zueinander und damit ergibt sich auch $|EM| = |MF|$. M ist also auch der Mittelpunkt von EF, womit AC auch die Mittelsenkrechte von EF ist.

Jetzt können wir falten, denn die Faltgerade EF lässt sich leicht bestimmen. Dazu müssen wir nur A auf C falten. Die Faltgerade bestimmt die Strecke EF (Bild 1.8a).

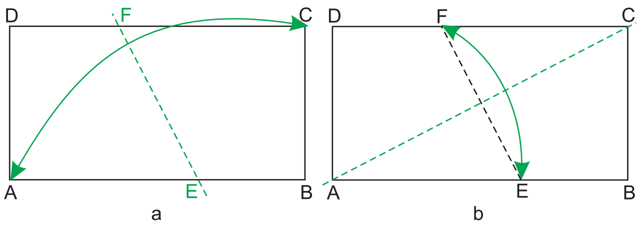


Bild 1.8 Faltfolge zur Diagonalen im Rechteck

Nun müssen wir noch E auf F falten (Bild 1.8b). Die zugehörige Faltgerade ist die gewünschte Diagonale AC.

1.2.2 Ein kleiner Schwan

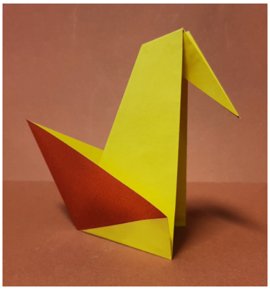


Bild 1.9 Kleiner Schwan

Aus einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ wird jetzt ein kleiner Schwan (Bild 1.9) entstehen, bei dem interessante Winkelbetrachtungen möglich sind.
Die Faltfolge ist den Bildern 1.10a–e zu entnehmen.
Zuerst falten wir die Diagonale AC auf die übliche Weise in das Quadrat $ABCD$. Dann falten wir AB und AD so auf AC, dass die jeweilige Faltlinie durch A geht. Dabei entstehen die Punkte E und F. Nebenbei bemerken wir, dass $AECF$ ein Drachenviereck ist, was sich durch die Faltlinien bzw. entsprechende Geradenspiegelungen nachweisen lässt.

Als nächstes falten wir die Faltlinie EF. Wir wenden unser Faltpapier und falten E so auf AE, dass die Faltlinie durch B' geht, wobei sie nur zwischen E und B' gefaltet wird. Analog verfahren wir mit dem Punkt F, den wir so auf AF falten, dass die Faltlinie auch durch B' geht. Auch hier falten wir die Faltlinie nur zwischen F und B'.

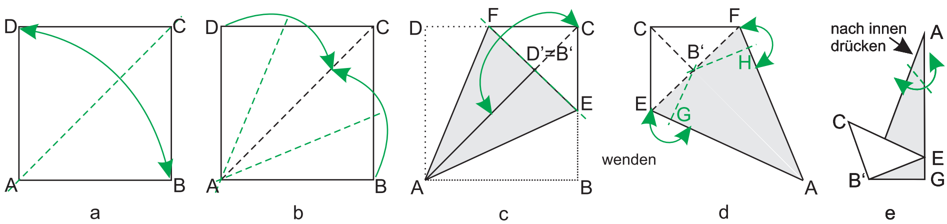


Bild 1.10 Faltfolge Schwan

Jetzt wird es etwas schwieriger. So wie unser Faltpapier jetzt liegt (Bild 1.10d), ist AC eine Bergfalte. Wir falten $B'C$ zur Talfalte um. Gleichzeitig falten wir entlang AB', $B'H$ und $B'G$ so, dass G auf H fällt. Damit ist der kleine Schwan fast fertig (Bild 1.10e). Für Kopf und Schnabel falten wir, wie es im Bild 1.10e zu sehen ist, in der Nähe von A.

Entlang dieser Faltlinie drücken wir die von A ausgehende Faltlinie nach innen. Das Ergebnis sollte dann wie im Bild 1.9 aussehen.

An diesem kleinen Schwan können wir einige Winkelhalbierungen beobachten. So ist die Größe des Winkels in der Spitze des Schnabels gleich $\alpha = \frac{90^\circ}{4} = 22{,}5^\circ$ (Bild 1.11). Weiterhin finden wir auch einen Winkel mit der Größe $45^\circ = 2\alpha$ und einen mit der Größe $90^\circ = 4\alpha$.

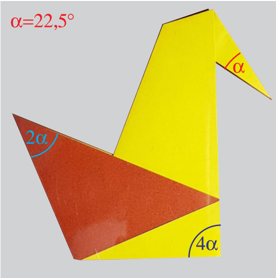


Bild 1.11 Kleiner Schwan

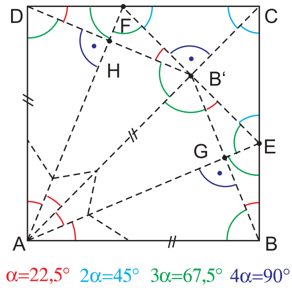


Bild 1.12 Faltmuster

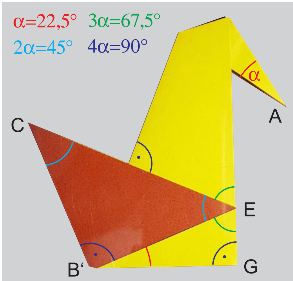


Bild 1.13 Winkel am kleinen Schwan

Falten wir den kleinen Schwan wieder auseinander, können wir das Faltmuster betrachten (Bild 1.12). Dort können wir ausgehend vom Winkel α in der Ecke A, am Schnabel des Schwans, die restlichen Winkel im Faltmuster bestimmen. Dabei treten nur Vielfache des Winkels α auf, wenn wir das Falten des Schnabels nicht berücksichtigen. Die entsprechenden Winkel sind im Bild 1.13 eingezeichnet.

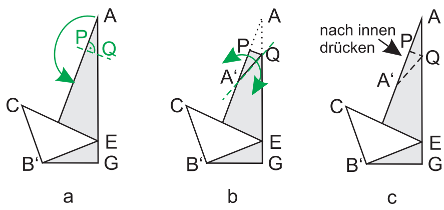


Bild 1.14 Faltfolge Schwan, Schnabel

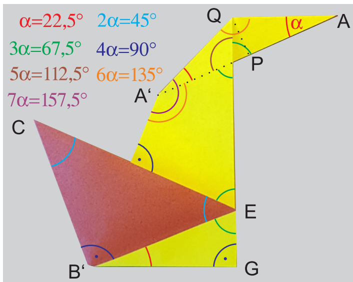


Bild 1.15 Kleiner Schwan

Wollen wir auch beim Falten des Schnabels Winkel erzeugen, die ein Vielfaches von α sind, dann dürfen wir (wie im Bild 1.10e) den Schnabel nicht ganz beliebig falten.
Wir falten A auf $B'A$, wobei die zugehörige Faltlinie PQ senkrecht zu $B'A$ ist und beliebig gewählt werden kann (Bild 1.14a).
Nun falten wir entlang $A'Q$ nach vorn und hinten (Bild 1.14b), anschließend die Spitze A wieder nach oben und drücken $A'A$ nach innen entlang $A'Q$ (Bild 1.14c). Im Bild 1.15 sind alle Winkel eingezeichnet. Alle Winkel sind Vielfache von α. Wir bemerken auch, dass aufgrund der Winkelgrößen QA parallel zu $B'G$ ist.

1.2.3 Einen Winkel mit der Größe 60° falten

Eben haben wir durch Falten verschiedene Winkel erzeugt.
Kann man aber auch einen Winkel mit der Größe 60° falten?

Ein solcher Winkel tritt beim gleichseitigen Dreieck ABC auf (Bild 1.16).
Dort haben wir auch die Mittelsenkrechte zu AB ($|AB| = a$) eingezeichnet, die natürlich durch den Punkt C geht. Weil das Dreieck gleichseitig ist, ist natürlich auch $|AC| = a$ und $|BC| = a$. Daraus können wir sofort eine Faltidee entwickeln: Wir nehmen ein quadratisches Faltpapier $ABCD$ mit der Seitenlänge a und falten die Mittelsenkrechte EF von AB (Bild 1.17a).

Dann müssen wir auf EF nur noch einen Punkt C^* bestimmen, der von A den Abstand a hat. Dieser Punkt hat dann auch automatisch von B den Abstand a, da C^* auf der Mittelsenkrechten von AB liegt. Diesen Punkt C^* bestimmen wir aber durch Falten sehr einfach, indem wir B so auf EF falten, dass die Faltlinie durch A geht (Bild 1.17b). R bezeichnet den Schnittpunkt dieser Faltlinie mit BC.

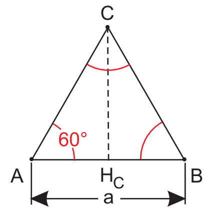


Bild 1.16 Gleichseitiges Dreieck

Dann ist klar, dass $|\sphericalangle BAB'| = 60°$ ist (Bild 1.17c). Es ergibt sich zusätzlich, dass $|\sphericalangle BAR| = |\sphericalangle RAB'| = |\sphericalangle B'AD| = 30°$ ist. Nachdem wir das Faltpapier gewendet haben, falten wir D so auf AR, dass die Faltlinie durch A geht (Bild 1.17d). Jetzt liegen in A drei Winkel mit der Größe 30° übereinander. Nun entfalten und wenden wir das Faltpapier wieder und erhalten ein Quadrat, in dem ein 60°-Winkel in der Ecke A gefaltet ist (Bild 1.17e). Der rechte Winkel in A ist dabei auch gleichzeitig in drei 30°-Winkel eingeteilt.

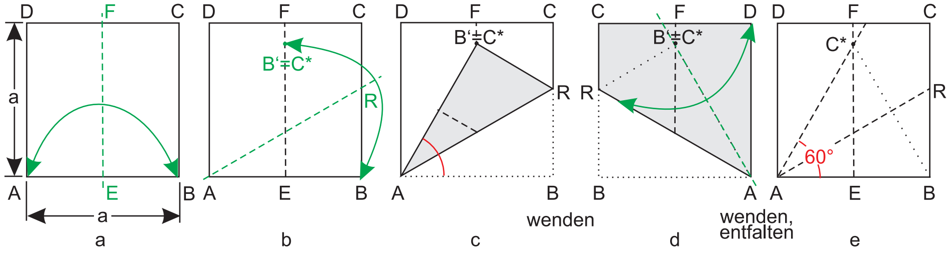


Bild 1.17 60°-Winkel falten

Natürlich können wir auch noch A auf C^* falten und dann an BC^* von hinten wieder umfalten. So erhalten wir auch eine Faltlinie durch B und C^*. Damit haben wir ein komplettes gleichseitiges Dreieck ABC^* im quadratischen Faltpapier $ABCD$ erhalten und somit einen Winkel der Größe 60°. Es folgt dann auch, dass wir Winkel mit den Größen 30° und 15° durch jeweiliges Halbieren erzeugen können.
Auch Winkel mit der Größe 120° treten bei unserer Faltung im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des gleichseitigen Dreiecks auf.

Da $|EC^*| = \frac{a}{2}\sqrt{3} < a$ ist, passt das gleichseitige Dreieck ABC^* *locker* in unser quadratisches Faltpapier. Daher können wir in jedes beliebige Rechteck ein gleichseitiges Dreieck bezüglich der kurzen Rechteckseite falten.

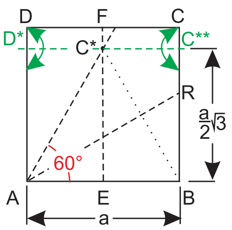


Bild 1.18
$\sqrt{3}$-Rechteck

Bei dieser Gelegenheit falten wir senkrecht zu AD durch C^* und erhalten die Faltlinie D^*C^{**} (Bild 1.18). Die beiden zueinander kongruenten Rechtecke AEC^*D^* und $EBC^{**}C^*$ haben jeweils die Seitenlängen $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, sind also Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{3}$. Damit haben wir neben dem Quadrat $(1 : 1)$ und dem DIN-A-Format $(1 : \sqrt{2})$ ein weiteres Rechteckformat $(1 : \sqrt{3})$ zur Verfügung. Im Bild 1.19 sind diese Rechtecke dargestellt. Zusätzlich ist dort das Goldene Rechteck (vgl. Abschnitt 4) mit dem Seitenverhältnis $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aufgenommen.

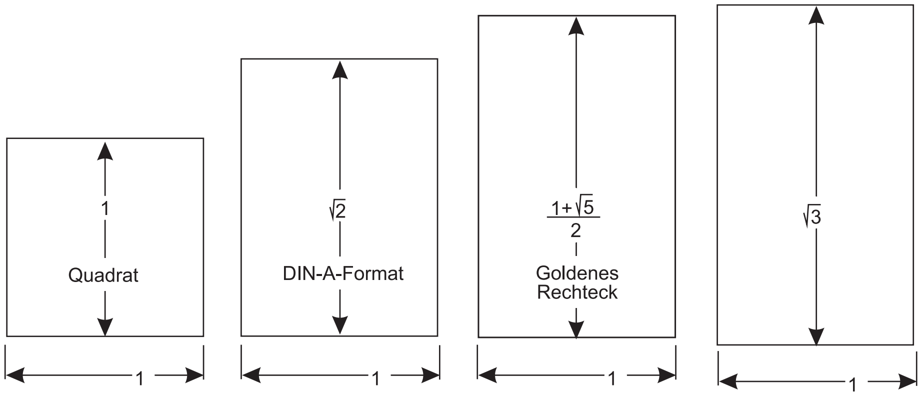


Bild 1.19 Rechteckformate

Nach Bild 1.17e können wir die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle BAR$ und $\sphericalangle C^*AD$ falten, um bei A einen 60°-Winkel zu erhalten (Bild 1.20a). Für die erste Winkelhalbierende falten wir B so auf AR, dass die Faltlinie durch A geht. Für die zweite müssen wir nur D auf C^* falten, dann geht die zugehörige Faltlinie automatisch durch A.
G und H sind die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden mit BC bzw. CD.

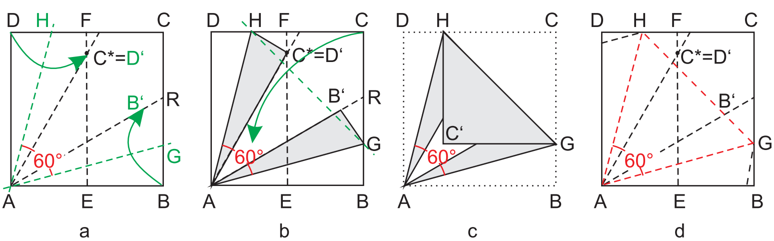


Bild 1.20 Faltfolge 1 zum gleichseitigen Dreieck

Es ist klar, dass $|AG| = |AH|$ und $|\sphericalangle GAH| = 60°$ ist. Damit ist aber das Dreieck AGH gleichseitig (Bild 1.20b).

Wir können C an GH umfalten und erhalten ein gleichseitiges Dreieck (Bild 1.20c). Bild 1.20d zeigt dann das entfaltete Quadrat mit dem gleichseitigen Dreieck AGH.

Vergleichen wir das Dreieck AGH aus Bild 1.20d mit dem Dreieck ABC^* aus Bild 1.17e, so können wir feststellen, dass AGH einen größeren Flächeninhalt als ABC^* (bezogen auf gleich große Ausgangsquadrate) hat. AGH ist sogar das größte gleichseitige Dreieck, das man in ein gegebenes Quadrat einbeschreiben kann. Dies soll allerdings hier nicht bewiesen werden.

Das Falten des Dreiecks AGH aus Bild 1.20d lässt sich auch einfacher als bisher erreichen. Wir bedenken, dass D auf C^* gefaltet wurde und C^* auf der Mittelsenkrechten EF von AB liegt. Also muss beim Umfalten von B, sodass die Faltlinie durch A geht, der Punkt B auf der Mittelsenkrechten von AD liegen.
Den zugehörigen Faltprozess zeigt Bild 1.21.

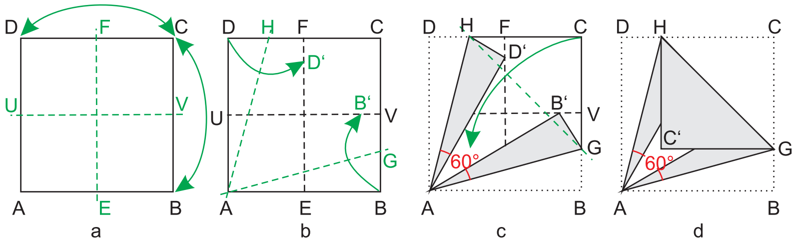


Bild 1.21 Faltfolge 2 zum gleichseitigen Dreieck

1.2.4 Der Flächeninhalt von Dreiecken

Mit Hilfe des Faltens von Papier können wir uns auch die Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken klarmachen. Dazu benötigen wir ein beliebiges Dreieck aus Papier, das wir uns vorher zuschneiden.

Wir bestimmen den Flächeninhalt für spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke getrennt.

1. Fall: ABC ist spitzwinklig (Bild 1.22).

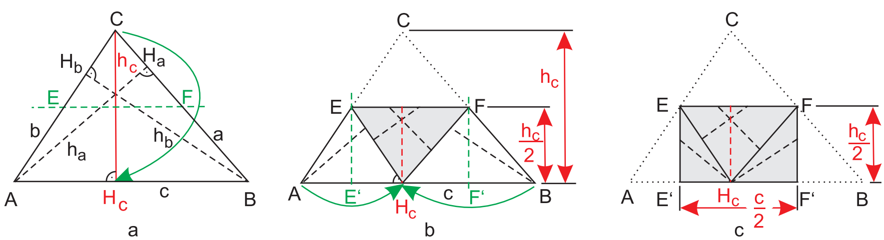


Bild 1.22 Flächeninhalt im spitzwinkligen Dreieck

Dann liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Wir wählen eine Dreiecksseite, etwa AB, aus und falten die Höhe h_c von C auf AB (Bild 1.22a). Dazu falten wir entweder A oder B so auf AB, dass die Faltlinie durch C geht. H_c ist dann der Fußpunkt dieser Höhe. Nun falten wir C auf H_c, wobei die Faltlinie EF entsteht (Bild 1.22b). Weil EF die Höhe h_c halbiert, sind auch E bzw. F Mittelpunkte von AC bzw. BC.
Damit ist $|AE| = |EC| = |EH_c|$ und $|BF| = |FC| = |FH_c|$ und AH_cE bzw. H_cBF sind jeweils gleichschenklig.

Als nächstes falten wir A und B jeweils nach H_c . EE' und FF' sind die zugehörigen Faltlinien, die auch die Mittelsenkrechten von AH_c bzw H_cB sind. Dadurch entsteht das Rechteck $E'F'FE$, das von zwei Papierschichten bedeckt ist (Bild 1.22c). Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC doppelt so groß, wie der des Rechtecks $E'F'FE$.
Da dieses Rechteck die Seitenlängen $\frac{c}{2}$ und $\frac{1}{2}h_c$ hat, gilt:
$|ABC| = 2|E'F'FE| = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2}h_c = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

Wählen wir an Stelle der Dreiecksseite AB die Seite BC oder AC aus, so können wir analog falten und würden $|ABC| = \frac{a \cdot h_a}{2}$ bzw. $|ABC| = \frac{b \cdot h_b}{2}$ erhalten. Damit können wir für den Flächeninhalt eines (spitzwinkligen) Dreiecks kurz $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$ angeben, wobei g (wie üblich) eine der drei Dreiecksseitenlängen a, b oder c angibt.

2. Fall: ABC ist rechtwinklig (Bild 1.23).

Nehmen wir an, dass ABC bei A rechtwinklig ist, dann fällt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks mit A zusammen (Bild 1.23a). Der Höhenfußpunkt H_a liegt im Innern von BC, während H_b und H_c mit A zusammenfallen.

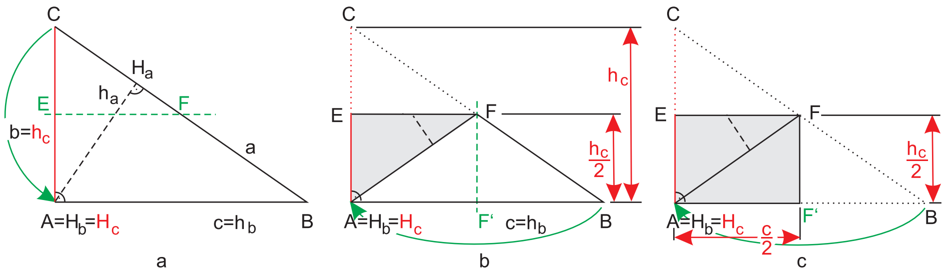


Bild 1.23 Flächeninhalt im rechtwinkligen Dreieck

Würden wir BC als Grundseite zur Bestimmung des Flächeninhalts auswählen, dann würden wir mit der Faltung aus dem 1. Fall hier $|ABC| = \frac{a \cdot h_a}{2}$ erhalten.

Wir wählen aber jetzt eine der Katheten, etwa AB, als Grundseite aus. Dann falten wir C auf $A = H_c$, wobei EF die zugehörige Faltlinie ist. EF halbiert wieder h_c, damit auch AC, und BC (Bild 1.23a). Schließlich falten wir B auf A und erhalten das Rechteck $AF'FE$, welches ebenfalls aus zwei Schichten Papier besteht.

Folglich gilt $|ABC| = 2|AF'FE| = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{h_c}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Analog folgt $|ABC| = \frac{b \cdot h_b}{2}$, wenn wir BC als Grundseite wählen.
Damit gilt auch für rechtwinklige Dreiecke allgemein $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$.

3. Fall: ABC ist stumpfwinklig (Bild 1.24).

Nehmen wir an, dass ABC bei A stumpfwinklig ist, dann liegt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks außerhalb des Dreiecks (Bild 1.24). Der Höhenfußpunkt H_a liegt im Innern von BC, während H_b und H_c außerhalb liegen.

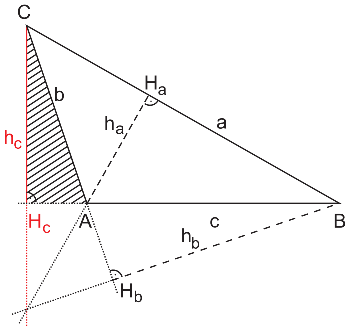


Bild 1.24 Flächeninhalt im stumpfwinkligen Dreieck

Die Bestimmung des Flächeninhalts dieses Dreiecks (durch Falten) ergibt wieder $|ABC| = \frac{a \cdot h_a}{2}$, wie im 1. Fall, wenn wir BC als Grundseite für die Flächeninhaltsbestimmung wählen.

Wählen wir dagegen AB (oder AC) als Grundseite für die Flächeninhaltsbestimmung, so können wir mit dem Falten des Dreiecks nichts erreichen. Wir müssen rechnen. Wählen wir AB als Grundseite, so gilt $|ABC| = |H_cBC| - |H_cAC|$. Dabei sind H_cBC und H_cAC rechtwinklige Dreiecke, für die wir den Flächeninhalt bereits berechnen können.

Also ist $|ABC| = |H_cBC| - |H_cAC| = \frac{(|H_aA|+c) \cdot h_c}{2} - \frac{|H_aA| \cdot h_c}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

Analog erhalten wir $|ABC| = \frac{b \cdot h_b}{2}$, wenn wir AC als Grundseite wählen. Damit gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke allgemein $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$.

Nehmen wir nun alle drei Fälle zusammen, so können wir feststellen:

Der Flächeninhalt $|ABC|$ eines beliebigen Dreiecks ABC lässt sich stets durch $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$ berechnen, wobei g die Länge einer beliebigen Dreiecksseite und h_g die Länge der zugehörigen Höhe ist.

1.2.5 Innenwinkelsumme von Dreiecken

Betrachten wir Bild 1.22 noch einmal, so fällt uns auf, dass die Ecken des Dreiecks ABC in einem Punkt auf AB zusammentreffen und dass sich dort die Innenwinkel des Dreiecks zu 180° ergänzen. Das funktioniert nicht nur für spitzwinklige Dreiecke, sondern auch für rechtwinklige und stumpfwinklige.

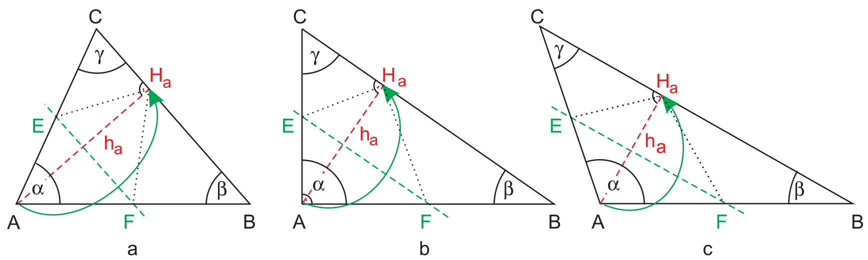


Bild 1.25 Innenwinkelsumme im Dreieck