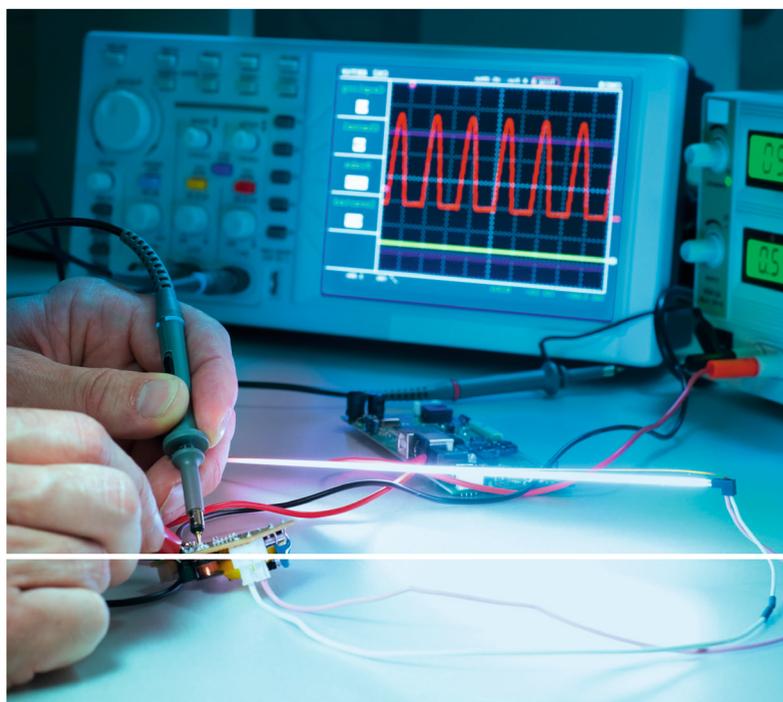


Rainer Ose



# Elektrotechnik für Ingenieure Übungsbuch



HANSER

**Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-g381q-ew8t1

[plus.hanser-fachbuch.de](http://plus.hanser-fachbuch.de)

**Blieben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)

# Formelzeichenverzeichnis

$A$	Dämpfung, Fläche, Kettenparameter	$n$	Ladungsträgerkonzentration
$A_0, A_n$	FOURIER-Koeffizient	$P$	Leistung, Wirkleistung
$\underline{a}$	Phasenoperator	$p$	Leistungsdichte
$B$	Bandbreite, Blindleitwert, magnetische Flussdichte	$Q$	Blindleistung, Güte, elektrische Ladung
$B_n$	FOURIER-Koeffizient	$R$	elektrischer Widerstand
$B_r$	Remanenzflussdichte	$R_a$	Lastwiderstand
$C$	elektrische Kapazität	$R_i$	Innenwiderstand
$D$	elektrische Flussdichte, Diffusionskoeffizient	$R_m$	magnetischer Widerstand
$d$	Dicke, Abstand, Verlustfaktor	$r$	differenzieller Widerstand, Radius
$E$	elektrische Feldstärke	$S$	Scheinleistung, (Stromdichte)
$e_0$	Elementarladung	$\underline{S}$	komplexe Leistung
$F$	Kraft	$s$	Bogenlänge, Schrittlänge
$F_C$	COULOMB-Kraft	$T$	KELVIN-Temperatur, Periodendauer
$F_L$	LORENTZ-Kraft	$t$	Zeit
$f$	Frequenz	$t_H$	Halbwertszeit
$f_0$	Resonanzfrequenz	$U$	elektrische Spannung
$f_g$	Grenzfrequenz	$U_H$	HALL-Spannung
$G$	elektrischer Leitwert	$U_k$	Klemmenspannung
$H$	magnetische Feldstärke	$U_L$	Leerlaufspannung, Leiterspannung
$H_c$	Koerzitivfeldstärke	$U_S$	Schleusenspannung, Strangspannung
$h$	Höhe, Eingrabetiefe	$U_s$	Schrittspannung
$I$	elektrische Stromstärke	$U_z$	Z-Spannung
$I_D$	Diffusionsstrom	$U_q$	Quellenspannung
$I_F$	Feldstrom	$u$	zeitlich veränderliche Spannung
$I_K$	Kurzschlussstrom	$u_{ind}$	Selbstinduktionsspannung
$I_k$	Konvektionsstrom	$u_M$	Gegeninduktionsspannung
$I_L$	Leiterstrom	$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis
$I_S$	Sättigungsstrom, Strangstrom	$V$	Volumen
$I_V$	Verschiebungsstrom	$v$	Geschwindigkeit
$i$	zeitlich veränderlicher Strom	$W$	Energie, Arbeit
$J$	elektrische Stromdichte	$W_{el}$	elektrische Energie
$K_H$	HALL-Konstante	$W_m$	magnetische Energie
$k$	Klirrfaktor, Kopplungsfaktor	$X$	Blindwiderstand
$L$	Induktivität	$Y$	Scheinleitwert
$l$	Länge	$\underline{Y}$	komplexer Leitwert
$M$	Gegeninduktivität	$Z$	Scheinwiderstand
$N$	Windungszahl	$\underline{Z}$	komplexer Widerstand

Rainer Ose

# Elektrotechnik für Ingenieure

Übungsbuch

HANSER

## Autor:

Prof. Dr.-Ing. Rainer Ose, Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften, Wolfenbüttel,  
Fakultät Elektrotechnik



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2020 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelbild: © [shutterstock.com/anyaivanova](http://shutterstock.com/anyaivanova)

Satz: Rainer Ose

Druck und Bindung: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46444-5

E-Book-ISBN 978-3-446-46502-2

---

## Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Übungsbuch wurde als studienbegleitendes Material für Studierende aller technischen Studienrichtungen an Hochschulen/Fachhochschulen konzipiert. Es ist nach Vorbild des Lehrbuchs [14] aufgebaut und gliedert sich in die drei klassischen Grundlagenbereiche: Gleichstromlehre – Wechselstromtechnik – Elektrische und magnetische Felder.

Im Vordergrund stehen Betrachtungen zu Vorgängen in elektrischen Stromkreisen aus der Sicht der Schaltungstechnik. Damit soll das Ziel verfolgt werden, das in den Vorlesungen „Grundlagen der Elektrotechnik“ und im Lehrbuch vermittelte Grundlagenwissen in anwendungsbereiter Form für die nachfolgenden Lehrveranstaltungen bereitzustellen.

In jedem Kapitel befinden sich Beispiele zur Erklärung typischer Erscheinungen der Elektrotechnik sowie zur Demonstration von Berechnungsmethoden und -verfahren. Sie werden in allgemeiner Form vorgerechnet und in vielen Fällen mit Zahlenwerten und einer Probe erweitert. Damit gelingt es den Anwendern, den Lösungsweg nachzuvollziehen und den Aufgabentyp selbstständig zu bearbeiten.

Zur Unterstützung der selbstständigen Bearbeitung dienen Modelle und Analogien, die komplizierte Sachverhalte in möglichst einfacher und leicht verständlicher Form darlegen. Ausgewählte Funktionsverläufe, Prinzipskizzen und Ersatzschaltungen sollen zur Erhöhung der Anschaulichkeit beitragen.

Die 1. Auflage des Übungsbuchs entstand infolge der vollständigen Überarbeitung und Erweiterung der 5. Auflage des Lehrbuchs. Alle Berechnungsbeispiele befinden sich jetzt in erweiterter Form im vorliegenden Übungsbuch und wurden durch viele neue Beispiele ergänzt. Das Übungsbuch enthält zusätzlich einen Anhang mit Übungsaufgaben. Die Lösungen sind über das Internet zugänglich.

Wolfenbüttel, im August 2020

Rainer Ose  
e-mail: [r.ose@ostfalia.de](mailto:r.ose@ostfalia.de)

## Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Das vorliegende Übungsbuch sollte in Kombination mit dem Lehrbuch bearbeitet werden. Aus diesem Grund wurde am Anfang jedes Kapitels eine kurze Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen dargestellt. Es folgen Fragen, die sich die Bearbeiter selbst beantworten sollten. Machen Sie sich zunächst mit den theoretischen Grundlagen vertraut. Dann können Sie die Beispiele des Übungsbuchs durcharbeiten. Diese Beispiele tragen zur Erhöhung des Verständnisses für die betrachteten Stoffgebiete bei. Das gilt auch für die selbstständige Bearbeitung der Übungsaufgaben im Anhang.

### • Berechnungsbeispiele:

Die Berechnungsbeispiele dienen dazu, ein grundlegendes Verständnis für den im Lehrbuch behandelten Sachverhalt mit einem praxisnahen und überschaubaren Beispiel bzw. mit einer Verständnis-aufgabe zu entwickeln. Sie wurden für jedes Kapitel des Lehrbuchs erstellt und behandeln ausgewählte Themen, zu denen es eventuell zusätzlichen Erklärungsbedarf geben könnte. Dazu zählen das Aufstellen allgemeiner Lösungsansätze und die Durchführung einfacher Berechnungen sowie die Vermittlung von Vorstellungen über ausgewählte Erscheinungen der Elektrotechnik.

### • Übungsaufgaben: (Lösungen: [https://www.ostfalia.de/cms/de/pws/ose/Buch\\_ET\\_6A/](https://www.ostfalia.de/cms/de/pws/ose/Buch_ET_6A/))

Im Anhang des Buches befinden sich Übungsaufgaben. Sie sollen von den Studierenden möglichst selbstständig abgearbeitet werden. Übungsaufgaben werden im Sinne einer zielgerichteten Prüfungsvorbereitung mit der folgenden Kennzeichnung dem jeweiligen Grundlagenbereich zugeordnet:

ÜA\_1 = Gleichstromlehre, ÜA\_2 = Wechselstromtechnik und ÜA\_3 = Felder.

Die meisten Beispiele und Übungsaufgaben können mit Simulationsprogrammen nachvollzogen werden. Entsprechende Hinweise zur Arbeit mit PSpice findet man bei Bedarf in [11] – Kap. 1.

---

# Inhaltsverzeichnis

## I Gleichstromlehre

<b>1</b>	<b>Elektrische Grundgrößen</b>	<b>12</b>
1.1	Berechnung Leitungsquerschnitt	13
1.2	Vergleich Leiterwerkstoffe	13
1.3	Quellen- und Verbraucher-Charakteristik	14
1.4	Belastete Spannungsquelle	15
1.5	Temperaturabhängigkeit von Leiterwerkstoffen	16
<b>2</b>	<b>Gesetze zur Berechnung elektrischer Stromkreise</b>	<b>18</b>
2.1	Lastfälle im Grundstromkreis	19
2.2	Unabhängigkeit von Knotengleichungen	20
2.3	Vollständige Leistungsbilanz	21
<b>3</b>	<b>Lineare elektrische Gleichstromkreise</b>	<b>22</b>
3.1	Abgleich eines Widerstandswertes	23
3.2	Einstellung Spannungsverhältnis	23
3.3	Berechnung einer gemischten Schaltung A	24
3.4	Berechnung einer gemischten Schaltung B	25
3.5	Einstellung Spannungsabfall	25
3.6	Gleicher Leistungsumsatz	27
3.7	Überlastung von Widerständen	27
3.8	Leistungsaufnahme eines Lastwiderstandes	28
3.9	Leistung und Wirkungsgrad	29
3.10	Lampe im Nennbetrieb	30
3.11	Funktionsverläufe im Grundstromkreis	31
<b>4</b>	<b>Grundschaltungen der elektrischen Messtechnik</b>	<b>32</b>
4.1	Erweiterung des Strommessbereichs	33
4.2	Austausch von Messinstrumenten	33
4.3	Belastungskennlinie eines Akkumulators	34
4.4	Abgleich einer Brückenschaltung	36
4.5	Gesamtwiderstand einer nicht abgeglichenen Brücke	36
4.6	Nicht abgeglichene Brückenkonfiguration	38
<b>5</b>	<b>Verfahren zur Berechnung linearer Netzwerke</b>	<b>41</b>
5.1	Masche eines Netzwerkes	42
5.2	Zweigströme über KIRCHHOFF	42
5.3	Gleichungssystem nach KIRCHHOFF	43
5.4	Dimensionierung Emitterschaltung	44

5.5	HELMHOLTZscher Überlagerungssatz A .....	45
5.6	HELMHOLTZscher Überlagerungssatz B .....	46
5.7	HELMHOLTZscher Überlagerungssatz C .....	46
5.8	Zweipoltheorie A .....	47
5.9	Spannungsquellen-Ersatzschaltung .....	47
5.10	Leerlaufspannung .....	48
5.11	Kettenschaltung – Zweipoltheorie .....	49
5.12	Brückenschaltung – Zweipoltheorie .....	50
5.13	Zweipoltheorie B .....	51
5.14	Zweipoltheorie C .....	52
5.15	Umlaufanalyse .....	53
5.16	Umlaufanalyse – Leistungsbilanz .....	55
5.17	Vergleich der Analyseverfahren .....	56
5.18	Knotenanalyse .....	58
5.19	Komplexbeispiel .....	59
<b>6</b>	<b>Stromkreise mit nichtlinearen Bauelementen .....</b>	<b>64</b>
6.1	Bestimmung des Arbeitspunktes .....	65
6.2	Brücke mit Dioden .....	66
6.3	Leistungsumsatz in Glühlampen .....	66
6.4	Arbeitspunkt von Glühlampe und Diode .....	67
6.5	Brückenschaltung zur Temperaturmessung .....	68
<b>II</b>	<b>Wechselstromtechnik</b>	
<b>7</b>	<b>Beschreibung von Wechselgrößen .....</b>	<b>70</b>
7.1	Symmetrische Dreieck-Impulsfolge .....	71
7.2	Sägezahn-Impulsfolge .....	72
7.3	Periodische Rechteck-Impulsfolge .....	73
<b>8</b>	<b>Widerstände im Wechselstromkreis .....</b>	<b>75</b>
8.1	Kapazitätsbestimmung .....	76
8.2	Phasenverschiebung .....	76
8.3	Güte einer realen Spule .....	77
8.4	Zeigerbilder eines realen Reihenschwingkreises .....	78
8.5	Zeigerbilder eines realen Parallelschwingkreises .....	78
8.6	Anwendung des THALES-Kreises .....	79
8.7	Zeigerbilder einer allgemeinen Wechselstromschaltung .....	80
8.8	Maßstäbliches Spannungszeigerbild .....	82
8.9	Prinzipzeigerbilder einer Freileitung .....	83
<b>9</b>	<b>Berechnung von Stromkreisen bei sinusförmiger Einspeisung .....</b>	<b>85</b>
9.1	Konstruktion eines Leitwertzeigers .....	86

---

9.2	Zeigerbild der Widerstände/Leitwerte .....	86
9.3	Berechnung einer allgemeinen Wechselstromschaltung A .....	88
9.4	Ortskurve des komplexen Widerstandes .....	89
9.5	Berechnung einer allgemeinen Wechselstromschaltung B .....	90
9.6	Berechnung eines Lastzweipols A .....	90
9.7	Berechnung eines Lastzweipols B .....	91
9.8	Anwendung der Teilerregeln .....	92
9.9	Ortskurve des Stromes .....	93
9.10	RC-Phasenschiebekette .....	94
9.11	HUMMEL-Schaltung .....	95
9.12	Wechselstrom-Paradoxon .....	96
9.13	Erzeugung einer definierten Phasenverschiebung A .....	97
9.14	Erzeugung einer definierten Phasenverschiebung B .....	98
9.15	Umrechnungen .....	99
9.16	Abgleichbarkeit einer Brücke A .....	100
9.17	Induktivitätsmessbrücke .....	100
9.18	Abgleichbarkeit einer Brücke B .....	101
9.19	Maßstäbliches Spannungszeigerbild .....	102
9.20	Einstellung gleicher Spannungszeiger .....	103
9.21	Anwendung des Überlagerungssatzes .....	104
9.22	Anwendung der Zweipoltheorie .....	106
9.23	Anwendung der Analyseverfahren .....	108
9.24	RC-Phasenschiebekette mit Analyseverfahren .....	109
<b>10</b>	<b>Frequenzabhängigkeit der Wechselstromkreise .....</b>	<b>112</b>
10.1	RL-Tiefpass .....	113
10.2	RL-Hochpass .....	114
10.3	Vergleich von RC- und RL-Gliedern .....	116
10.4	RC-Tiefpass mit Parallelwiderstand .....	117
10.5	Anwendung der Zweipoltheorie .....	118
10.6	RC-Tiefpass mit Reihenwiderstand .....	118
10.7	RC-Hochpass mit Parallelwiderstand .....	120
10.8	RC-Hochpass mit Reihenwiderstand .....	121
10.9	RL-Tiefpass mit Reihenwiderstand .....	123
10.10	RC-Tiefpass 2. Ordnung .....	125
10.11	Reihenschwingkreis mit realen Bauelementen .....	128
10.12	Parallelschwingkreis mit realen Bauelementen .....	129
10.13	Spannungsüberhöhung .....	130
10.14	Elementarer Reihenschwingkreis .....	130
10.15	LC-Übertragungsvierpol .....	133
10.16	CR-RC-Übertragungsvierpol .....	135
10.17	Vergleich der Berechnungsverfahren (Komplexbeispiel) .....	137

<b>11</b>	<b>Leistungsbetrachtungen im Wechselstromkreis</b>	<b>141</b>
11.1	Zeitfunktion der Leistung	142
11.2	Blindstromkompensation	142
11.3	Blindleistungskompensation	144
11.4	Maximaler Umsatz von Wirkleistung	145
11.5	Komplexe Anpassung	145
11.6	Leistungsbilanz eines Lastzweipols	146
11.7	Vollständige Leistungsbilanz A	147
11.8	Vollständige Leistungsbilanz B	149
<b>12</b>	<b>Dreiphasensysteme</b>	<b>151</b>
12.1	Sternschaltung Elektroherd	152
12.2	Umrechnung Dreieck – Stern	153
12.3	Verbraucher-Dreieckschaltung A	155
12.4	Verbraucher-Dreieckschaltung B	156
12.5	Verbraucher-Dreieckschaltung C	158
12.6	Symmetrierung einer Verbraucher-Dreieckschaltung	159
12.7	Stromzeigerbild einer Verbraucher-Dreieckschaltung	161
12.8	Betriebskapazität eines Gürtelkabels	163
<b>III</b>	<b>Elektrische und magnetische Felder</b>	
<b>13</b>	<b>Feldbegriff</b>	<b>165</b>
13.1	Elektrisches Potential – Potentialbezugspunkt	166
13.2	Elektrisches Potential – Bezugswert	168
13.3	Wert einer Äquipotentiallinie	170
<b>14</b>	<b>Stationäres elektrisches Strömungsfeld</b>	<b>171</b>
14.1	Messtechnische Beschreibung von Feldmodellen	172
14.2	Einfache Feldstärkemessung	173
14.3	Leitfähiger Bügel	174
14.4	Bezugspunkt im zylindersymmetrischen Feld	176
14.5	Übergangswiderstand eines Halbkugelerders	177
14.6	Zusammenwirken von zwei Halbkugelerdern	178
14.7	Schrittspannung eines Vollkugelerders	180
14.8	Feldstärkeverlauf eines Vollkugelerders	181
<b>15</b>	<b>Elektrostatistisches Feld</b>	<b>183</b>
15.1	Übung zur Kapazitätsberechnung	184
15.2	Koaxialleitung	185
15.3	Zylinderkondensator mit geschichtetem Dielektrikum	186
15.4	Maximale Feldstärke	187

---

15.5	Drei Punktladungen im Raum .....	187
15.6	Gespeicherte Energie .....	188
15.7	Kapazität einer Freileitung .....	189
15.8	Kräfte auf Schichtflächen .....	191
<b>16</b>	<b>Elektrisches Verhalten des Kondensators .....</b>	<b>192</b>
16.1	Dimensionierung eines Kondensators .....	193
16.2	Gemischte Kondensatorschaltung .....	193
16.3	Laden eines Kondensators .....	194
16.4	Laden und Entladen .....	195
16.5	Ausgleichsvorgänge in einer Reihenschaltung .....	196
16.6	Kapazitives Netz A .....	198
16.7	Kapazitives Netz B .....	200
16.8	Kapazitives Netz C .....	201
16.9	Kapazitives Netz D .....	202
16.10	Brückenähnliches kapazitives Netz .....	203
16.11	Kapazitives Netz mit zwei Quellen .....	205
<b>17</b>	<b>Stationäres magnetisches Feld .....</b>	<b>207</b>
17.1	Permeabilität nichtferromagnetischer Stoffe .....	208
17.2	Induktivität einer Zylinderspule .....	208
17.3	Vergleich unterschiedlicher Kernmaterialien .....	209
17.4	Ringspule mit Kunststoffkern .....	210
17.5	Ringspule aus Dynamoblech .....	212
17.6	Geteilter ferromagnetischer Ring .....	213
17.7	Berechnung eines Rechteckkerns .....	214
17.8	Verzweigter magnetischer Kreis A .....	217
17.9	Verzweigter magnetischer Kreis B .....	218
17.10	Verzweigter magnetischer Kreis C .....	219
17.11	Feldstärke eines stromdurchflossenen Rohrs .....	221
17.12	Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern .....	222
17.13	Messung mit einer HALL-Sonde .....	223
17.14	Berechnung der Magnetisierungskennlinie .....	225
17.15	Induktivität einer Doppelleitung .....	226
17.16	Dimensionierung eines Ferritropfkerns .....	227
<b>18</b>	<b>Zeitlich veränderliches magnetisches Feld .....</b>	<b>229</b>
18.1	Bewegungsinduktion – Radialfeld .....	230
18.2	Bewegungsinduktion – induzierte Spannung .....	231
18.3	Ruheinduktion .....	233
18.4	Leiter im Magnetfeld .....	235
18.5	Selbst- und Gegeninduktivität .....	235
18.6	Wicklungssinn .....	237

---

18.7	Induktivität einer Freileitung .....	237
18.8	Speicherung magnetischer Energie .....	240
18.9	Hystereseschleife – Oszilloskop .....	240
18.10	Hystereseschleife – Simulation .....	242
<b>19</b>	<b>Elektrisches Verhalten der Spule .....</b>	<b>243</b>
19.1	Verkoppelte Induktivitäten .....	244
19.2	Reihen- und Parallelschaltung .....	246
19.3	Induktivitätsberechnung .....	246
19.4	Schaltvorgänge in einer RL-Kombination .....	248
19.5	Umschalten bei Vormagnetisierung .....	249
19.6	Leerlauf -Eingangswiderstand .....	252
19.7	Leerlauf und Kurzschluss beim Trafo .....	253
19.8	Lastfälle beim Transformator .....	254
19.9	Zeigerbild des Transformators .....	256
<b>20</b>	<b>Wechselwirkungen .....</b>	<b>257</b>
20.1	Ladungsbewegungen im pn-Übergang .....	258
20.2	Plattenkondensator – Verschiebungsstrom .....	260
20.3	Wirbelströme .....	262
20.4	Grundbeziehungen .....	265
	<b>Übungsaufgaben .....</b>	<b>266</b>
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>289</b>
	<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>290</b>
	<b>Formelzeichenverzeichnis</b>	

# 1 Elektrische Grundgrößen

## • **Schwerpunkte:**

- ⇒ Alle physikalischen Zustände, Prozesse und Erscheinungen, die in der Elektrotechnik auftreten, werden durch ruhende oder bewegte elektrische Ladungen verursacht.
- ⇒ Die elektrische Stromstärke  $i$  beschreibt einen Ladungstransport pro Zeiteinheit.
- ⇒ Die Richtung des elektrischen Stromes ist mit  $I > 0$  A gegen die Bewegungsrichtung der Elektronen definiert und wird mit einem Richtungspfeil gekennzeichnet.
- ⇒ Der elektrische Strom ist eine in sich geschlossene Erscheinung.
- ⇒ Das elektrische Potential  $\varphi$  ist ein Maß für das auf die Ladung bezogene Energieniveau eines Punktes in einem elektrischen Stromkreis.
- ⇒ Die elektrische Spannung beschreibt die Differenz der Potentiale zweier Punkte in einem elektrischen Stromkreis.
- ⇒ In einem elektrischen Stromkreis muss zwischen zwei verschiedenen Zählpfeilsystemen unterschieden werden: Quellen-Zählpfeilsystem und Verbraucher-Zählpfeilsystem.
- ⇒ Der ohmsche Widerstand  $R$  beschreibt die Fähigkeit eines stofflichen Gebildes zur Begrenzung des elektrischen Stromes.
- ⇒ Der elektrische Leitwert  $G$  ergibt sich aus dem Kehrwert des ohmschen Widerstandes  $R$ .

## • **Lernziele:**

Entwickeln Sie zu den genannten Schwerpunkten ein grundlegendes Verständnis. Machen Sie sich die verwendeten Fachbegriffe klar. Formulieren Sie sich einfache Fragen als Selbsttest und beantworten Sie diese Fragen mit eigenen Formulierungen.

*Beispiele* zu Fragen zum Kapitel 1:

- ☞ Warum werden für den Strom verschiedene Schreibweisen (Klein- oder Großbuchstabe) verwendet?
- ☞ Warum ist der elektrische Strom eine in sich geschlossene Erscheinung?
- ☞ Warum ist das elektrische Potential keine Spannung? Wie groß ist die Spannung in einem Punkt?
- ☞ Was ist aus der Sicht des Stromes der Unterschied zwischen einem offenen und einem geschlossenen Stromkreis?
- ☞ In welchem Zählpfeilsystem haben die Pfeile von  $U$  und  $I$  die gleiche Richtung?
- ☞ Was ist der Unterschied zwischen einem Widerstand und einem Leitwert?

Arbeiten Sie die folgenden Berechnungsbeispiele und Übungsaufgaben durch. Versuchen Sie zunächst, einen eigenen Lösungsweg zu finden. Vergleichen Sie dann Ihren Ansatz mit dem vorgegebenen Lösungsweg. Häufig sind mehrere Lösungswege möglich.

### Berechnungsbeispiel 1.1: Berechnung Leitungsquerschnitt

Für ein Starter-Hilfskabel soll ein geeigneter Leitungsquerschnitt gewählt werden. Es besteht die Forderung, dass der Gesamtwiderstand des Kabels (ohne die Polzangen) einen Wert von 10 mΩ nicht überschreiten darf. Die beiden Einzelkabel haben eine Länge von je 3,5 m (also:  $l_{\text{ges}} = 7 \text{ m}$ ). Es steht Aluminium-Kabel mit folgenden Querschnitten zur Verfügung: 6 mm<sup>2</sup>, 10 mm<sup>2</sup>, 16 mm<sup>2</sup>, 25 mm<sup>2</sup> und 35 mm<sup>2</sup>.

Zur Berechnung verwenden wir Gleich. (1.6). Tabelle B\_1.1 liefert die erforderliche Information zum spezifischen elektrischen Widerstand von Aluminium:  $\rho = \rho_{\text{Al}} = 0,028 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ .

$$A_1 = 6 \text{ mm}^2: \quad R_1 = \rho \cdot \frac{l}{A_1} = 0,028 \cdot \frac{2 \cdot 3,5}{6} \Omega = 32,67 \text{ m}\Omega$$

$$A_2 = 10 \text{ mm}^2: \quad R_2 = \rho \cdot \frac{l}{A_2} = 0,028 \cdot \frac{2 \cdot 3,5}{10} \Omega = 19,6 \text{ m}\Omega$$

$$A_3 = 16 \text{ mm}^2: \quad R_3 = \rho \cdot \frac{l}{A_3} = 0,028 \cdot \frac{2 \cdot 3,5}{16} \Omega = 12,25 \text{ m}\Omega$$

$$A_4 = 25 \text{ mm}^2: \quad R_4 = \rho \cdot \frac{l}{A_4} = 0,028 \cdot \frac{2 \cdot 3,5}{25} \Omega = 7,84 \text{ m}\Omega$$

$$A_5 = 35 \text{ mm}^2: \quad R_5 = \rho \cdot \frac{l}{A_5} = 0,028 \cdot \frac{2 \cdot 3,5}{35} \Omega = 5,6 \text{ m}\Omega$$

Der Querschnitt  $A_4 = 25 \text{ mm}^2$  erfüllt bereits die Forderung der Aufgabenstellung. Der Querschnitt mit  $A_5 = 35 \text{ mm}^2$  würde bei einer technischen Realisierung zusätzliche Kosten verursachen.

### Berechnungsbeispiel 1.2: Vergleich Leiterwerkstoffe

Für eine Energie-Übertragungsleitung soll eine Vergleichsrechnung angestellt werden. Solche Leitungen werden in der Praxis als Bündel realisiert. Sie bestehen aus Stahlseilen, die mit Aluminiumadern umseilt werden (Verbundseile). In der Vergleichsrechnung geht es lediglich um den Materialeinsatz. Somit kann von einem vollen Leiterbündel aus gleichem Material ausgegangen werden.

Bestimmen Sie den ohmschen Widerstand eines Leiters mit 1 km Länge und  $A = 100 \text{ mm}^2$  für Kupfer, Aluminium und Eisen bei Raumtemperatur.

Zur Berechnung verwenden wir wieder Gleich. (1.6). Tabelle B\_1.1 liefert die erforderliche Information zur spezifischen elektrischen Leitfähigkeit des verwendeten Leitermaterials.

$$R_{\text{Cu}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Cu}} \cdot A} = \frac{1000}{56 \cdot 100} \Omega = \frac{10}{56} \Omega \approx 178,6 \text{ m}\Omega$$

$$R_{\text{Al}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Al}} \cdot A} = \frac{1000}{36 \cdot 100} \Omega = \frac{10}{36} \Omega \approx 277,8 \text{ m}\Omega \quad \text{und:} \quad R_{\text{Fe}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Fe}} \cdot A} = \frac{1000}{10 \cdot 100} \Omega = 1 \Omega$$

Tabelle B\_1.1 zeigt in einer kleinen Übersicht die Werte von  $\rho$  und  $\kappa$  für bekannte Werkstoffe.

Tabelle B\_1.1: Spezifische elektrische Leitfähigkeit ausgewählter Werkstoffe bei 20 °C

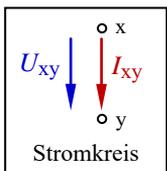
Werkstoff ( $T = 293 \text{ K}$ )	$\rho$ in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$	$\kappa$ in $\frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$
Silber	0,016	62
Gold	0,022	44
Kupfer	0,018	56
Aluminium	0,028	36
Zink	0,06	16,7
Messing	0,07	14,3
Eisen	0,1	10

Es ist deutlich erkennbar, dass für die technische Realisierung eines Leiters (Spezialfälle ausgeschlossen) aus wirtschaftlicher Sicht nur Kupfer und Aluminium infrage kommen können. Der Einsatz entsprechender Legierungen ist zur Lösung spezieller Aufgabenstellungen denkbar.

Das Stahlseil eines Verbundseils trägt nicht maßgeblich zur Leitfähigkeit bei. Sein Einsatz dient lediglich zur mechanischen Verfestigung des Übertragungssystems.

### Berechnungsbeispiel 1.3: Quellen- und Verbraucher-Charakteristik

In einem elektrischen Stromkreis befindet sich zwischen den Punkten x und y ein beliebiges Element. Für dieses Element werden Zählpfeile (also willkürliche Festlegung der Richtung) zugeordnet. Interpretieren Sie die folgenden Messwerte / Werte einer Berechnung bezüglich des Verhaltens des betrachteten Bauelementes (Quellen- oder Verbraucher-Charakteristik):



a)  $U_{xy} = +5 \text{ V}$  und  $I_{xy} = +12 \text{ mA}$

b)  $U_{xy} = +5 \text{ V}$  und  $I_{xy} = -12 \text{ mA}$

c)  $U_{xy} = -5 \text{ V}$  und  $I_{xy} = +12 \text{ mA}$

d)  $U_{xy} = -5 \text{ V}$  und  $I_{xy} = -12 \text{ mA}$

Bild B\_1.1: Zählpfeilsituation im Berechnungsbeispiel 1.3

Fall a): Verbraucher-Charakteristik. Das Element nimmt Leistung auf. Die Zählpfeile von Spannung und Strom sind zugleich Richtungspfeile.

Fall b): Quellen-Charakteristik. Das Element gibt Leistung ab. Der Zählpfeil der Spannung ist zugleich ein Richtungspfeil.

Fall c): Quellen-Charakteristik. Das Element gibt Leistung ab. Der Zählpfeil des Stromes ist zugleich ein Richtungspfeil.

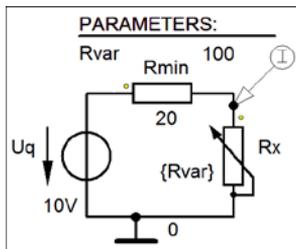
Fall d): Verbraucher-Charakteristik. Das Element nimmt Leistung auf. Die Zählpfeile von Spannung und Strom sind keine Richtungspfeile.

Wir erkennen, dass die willkürliche Festlegung eines Richtungssinnes (Zählpfeil) für die Auswertung des Ergebnisses einer Berechnung / Messung völlig ausreicht. Man muss lediglich die Vorzeichen im Zusammenhang mit den Zählpfeilen richtig interpretieren.

### Berechnungsbeispiel 1.4: Belastete Spannungsquelle

Eine Spannungsquelle mit  $U_q = 10 \text{ V}$  wird mit einem veränderlichen Widerstand  $R_a$  belastet. Der Widerstand ändert seinen Wert von  $R_{\min} = 20 \text{ } \Omega$  bis  $R_{\max} = 420 \text{ } \Omega$  ( $R_a = R_{\min} + R_{\text{var}}$ ). Stellen Sie den Verlauf des Stromes als Funktion des Widerstandes  $I = f(R_a)$  grafisch dar. Verwenden Sie dazu ein geeignetes Simulationsprogramm.

Wir entscheiden uns für den Einsatz von PSPICE. Die Simulationsschaltung besteht aus einer Spannungsquelle (VDC), einem Festwiderstand  $R_{\min}$  und einem variablen Widerstand  $R_x$  {Rvar}. Zunächst legen wir die Festwerte für die Bauelemente fest ( $U_q = 10 \text{ V}$  und  $R_{\min} = 20 \text{ } \Omega$ ).



Der variable Widerstand  $R_x = R_{\text{var}}$  wird in seiner PartName-Liste mit  $\text{VALUE}=\{\text{Rvar}\}$  festgelegt. In der Parameter-Liste ordnen wir ihm einen Namen ( $\text{NAME1}=\text{Rvar}$ ) und einen Wert aus seinem Wertevorrat ( $\text{VALUE1}=100$ ) zu. Nun können wir den Sweep festlegen. Im Analysis-Setup-Fenster wählen wir DC-Sweep () und nehmen folgende Einstellungen vor:

⊙ Global Parameter; ⊙ Linear; Name: Rvar  
Start Value: 0; End Value: 400; Increment: 0.1 (OK).  
Zur Strommessung setzen wir den Current Marker an Pin 1 von  $R_x$ .

Bild B\_1.2: Simulationsschaltung zum Berechnungsbeispiel 1.4

Nun kann die Simulation gestartet werden. PSPICE berechnet jetzt 4000 Funktionswerte (400/0,1).

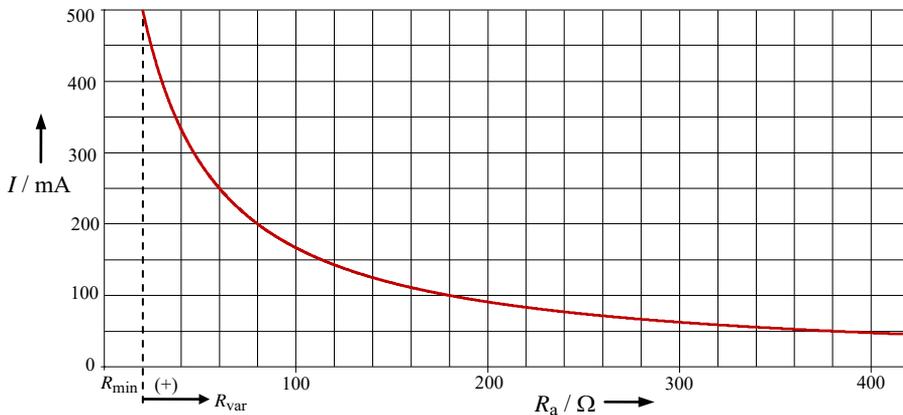


Bild B\_1.3: Stromverlauf im Berechnungsbeispiel 1.4

Die Simulation des Stromverlaufs läuft von  $R_a = R_{\min}$  bis  $R_a = R_{\min} + R_{\text{var}}$ . Der Strom bei  $R_a = R_{\min}$  beträgt 500 mA. Bei  $R_a = 60 \text{ } \Omega = 3R_{\min}$  ist er auf den halben Wert abgesunken.

Wir erkennen, dass mit Zunahme des Wertes des Lastwiderstandes der Strom immer kleiner wird. Bei  $R_a = 400 \text{ } \Omega$  beträgt er noch ca. 50 mA. Er wird null, wenn der Lastwiderstand gegen unendlich strebt.

Wir hätten die Simulation auch ohne den zusätzlichen Widerstand  $R_{\min}$  durchführen können. Dann müssen im Analysis-Setup-Fenster folgende Einstellungen geändert werden:

Start Value: 20; End Value: 420

### Berechnungsbeispiel 1.5: Temperaturabhängigkeit von Leiterwerkstoffen

Vergleichen Sie die Temperaturabhängigkeit verschiedener Widerstandswerkstoffe miteinander. Als Referenzobjekt dient der Leiterwerkstoff Kupfer mit  $TK_{Cu} = 3,82 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

Für den Vergleich verwenden wir wieder PSPICE. Zur Simulation der Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes dient das Element Rbreak aus der *Part*-Liste der Library BREAKOUT.SLB.

Nach der Positionierung in der Simulationsschaltung und der Festlegung des Widerstandswertes  $R_{20}$  (z.B.  $R_{20} = 100 \text{ } \Omega$ ) wird das Element durch einen Mausklick markiert. Danach öffnet man über die Menüfolge *Edit* → *Model* das *Edit-Model*-Fenster. Durch Betätigung der Schaltfläche > Edit Instance Model (Text) < gelangt man in den Modelleditor von PSPICE, der folgende Einstellungen anzeigt:

.model Rbreak-RES

R=1

\*§

TC1=3.82m

Der aktuelle Temperaturkoeffizient wird nicht angezeigt (Default: TC1=0). Durch Einfügen eines neuen Temperaturkoeffizienten in eine neue Zeile nach R=1 (z.B. für Kupfer:  $TK_{Cu} = 3,82 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ) wird der alte TC1-Wert mit > OK < überschrieben. Nun besitzt dieses Element den neuen Temperaturkoeffizienten von Kupfer. Zur Simulation der Kennlinie  $R = f(\vartheta)$  werden im *DC-Sweep*-Fenster (Main-Sweep) z.B. folgende Einstellungen vorgenommen:

- ☉ Temperature            Start Value: -20
- ☉ Linear                    End Value: 50
- Increment: 0.1 (OK)

Der Temperatur-Sweep durchläuft jetzt in der °C-Skala einen Temperaturbereich von  $\vartheta_{\min} = -20 \text{ } ^\circ\text{C}$  in Schritten von 0,1 °C bis zu einem Endwert von  $\vartheta_{\max} = +50 \text{ } ^\circ\text{C}$  (oder:  $\Delta T = 343 \text{ K} - 273 \text{ K} = 70 \text{ K}$ ).

Wenn mehrere Widerstände mit unterschiedlichen Temperaturkoeffizienten miteinander verglichen werden sollen, kann man zusätzlich einen DC-Nested-Sweep einfügen. Dazu werden im *DC-Nested-Sweep*-Fenster folgende Einstellungen vorgenommen (Res steht für Resistor):

- ☉ Model Parameter        Model Type: Res
- ☉ Value List                Model Name: Rbreak
- Param. Name: TC1
- Values: -0.6m\_ -0.03m\_ 0.2m (Unterstrich = Leerzeichen)

Der vorher gesetzte TC1-Wert für Kupfer wird jetzt ignoriert. Dafür gelten die folgenden Werte für den Temperaturkoeffizienten ( $TK = \alpha$ ):

$$TK_{1,1} = -0,6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{für Kohle}$$

$$TK_{1,2} = -0,03 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{für Konstantan}$$

$$TK_{1,3} = +0,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \text{ca. für Nickelin (Nickelin: 67 % Cu; 30 % Ni; 3 % Mn).}$$

Bild B\_1.4 zeigt die Simulationsergebnisse für  $\vartheta_{\text{Bezug}} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Das muss in PSPICE eingestellt werden.

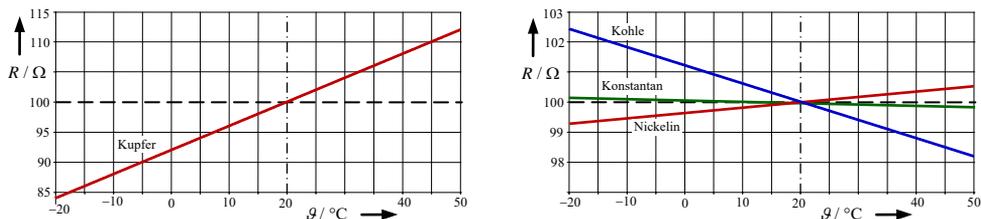


Bild B\_1.4: Simulationsergebnisse zum Berechnungsbeispiel 1.5

Das simulierte Temperaturverhalten weist auf Temperaturkoeffizienten mit unterschiedlichen Vorzeichen hin. Kupfer und Nickelin haben einen positiven Temperaturkoeffizienten (PTC). Bei Kupfer ändert sich der Widerstand  $R_{Cu} = f(\vartheta)$  im Vergleich zu Nickelin so stark, dass im Bild B\_1.4 (links) ein anderer Widerstandsmaßstab gewählt werden musste.

Kohle und Konstantan haben einen negativen Temperaturkoeffizienten (NTC). Hier nimmt der Widerstandswert mit steigender Temperatur ab. Bei Konstantan ändert sich der Widerstandswert allerdings kaum. Konstantan (oder auch Manganin) sind demzufolge für die technische Realisierung von Messwiderständen gut geeignet, da sie ihren Widerstandswert unabhängig von Temperaturänderungen nahezu beibehalten.

Für spezielle Einsatzfälle (z.B. in einer Temperaturmessbrücke) bevorzugt man dagegen Widerstandswerkstoffe mit einem betragsmäßig großen  $TK$ -Wert, um bereits bei kleinen Temperaturänderungen eine auswertbare Widerstandsänderung zu erreichen.

Wir wollen die Eckwerte des Widerstandsverlaufes berechnen. Mit Gleich. (1.9) gilt:

$$\text{Kupfer: } R_{Cu}(-20^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 + 3,82 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (273 - 293)\text{K}] = 84,72\Omega$$

$$R_{Cu}(+50^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 + 3,82 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (323 - 293)\text{K}] = 111,46\Omega$$

$$\text{Kohle: } R_{Ko}(-20^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 - 0,6 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (273 - 293)\text{K}] = 102,4\Omega$$

$$R_{Ko}(+50^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 - 0,6 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (323 - 293)\text{K}] = 98,2\Omega$$

$$\text{Konstantan: } R_{Konst}(-20^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 - 0,03 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (273 - 293)\text{K}] = 100,12\Omega$$

$$R_{Konst}(+50^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 - 0,03 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (323 - 293)\text{K}] = 99,91\Omega$$

$$\text{Nickelin: } R_{Ni}(-20^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 + 0,2 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (273 - 293)\text{K}] = 99,2\Omega$$

$$R_{Ni}(+50^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 + 0,2 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (323 - 293)\text{K}] = 100,6\Omega$$

Die Berechnungsergebnisse stimmen (wie erwartet) mit den Simulationsergebnissen überein. Dabei gilt Gleich. (1.9) eigentlich nur näherungsweise. PSpice simuliert aber hier das Element Rbreak mit einem konstanten TC1-Wert.

Streng genommen müssten wir bei größeren Temperaturänderungen einen weiteren Temperaturkoeffizienten ( $TK_2$  oder  $\beta$ ) berücksichtigen. Gleich. (1.9) stellt lediglich eine lineare Näherung des eigentlichen nichtlinearen Verlaufes der Widerstands-Temperatur-Kennlinie dar. Exakt gilt:

$$R(T) = R_{20} \cdot [1 + TK_1 \cdot \Delta T + TK_2 \cdot (\Delta T)^2] = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot (\Delta T)^2] \quad (1.9.a)$$

Den Unterschied wollen wir anhand der Widerstandsrechnung für Kupfer mit (1.9.a) überprüfen. Es gilt:  $\beta_{Cu} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-2}$ .

$$R_{Cu}(-20^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 + 3,82 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (-20)\text{K} + 0,6 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-2} \cdot 400\text{K}^2] = 84,96\Omega$$

$$R_{Cu}(+50^\circ\text{C}) = 100\Omega \cdot [1 + 3,82 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot (+30)\text{K} + 0,6 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-2} \cdot 900\text{K}^2] = 112,0\Omega$$

Die Abweichung von unserer Näherungsrechnung liegt in der Größenordnung von +0,3% bis +0,5%. Bei kleinen Temperaturänderungen ist es demzufolge durchaus vertretbar, mit der linearen Näherung gemäß Gleich. (1.9) zu arbeiten.

## 2 Gesetze zur Berechnung elektrischer Stromkreise

### • **Schwerpunkte:**

- ⇒ Das OHMSche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der elektrischen Spannung und dem elektrischen Strom.
- ⇒ Dieser Zusammenhang kann über die Strom-Spannungs-Kennlinie  $I = f(U)$  grafisch dargestellt werden. Im Falle eines ohmschen Widerstandes ist die Kennlinie eine Gerade.
- ⇒ Man unterscheidet zwischen einem Gleichstromwiderstand  $R$  und einem differentiellen Widerstand  $r$ .
- ⇒ Der Maschensatz sagt aus, dass die Summe aller vorzeichenbehafteten Spannungen längs eines geschlossenen Umlaufs gleich null ist.
- ⇒ Der Knotenpunktsatz sagt aus, dass die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme in einem Knotenpunkt gleich null ist.
- ⇒ Unter Energie versteht man das Vermögen, Arbeit zu verrichten.
- ⇒ Die Summe aller Energien in einem in sich geschlossenen System ist konstant.
- ⇒ Eine vollständige Leistungsbilanz sagt aus, dass die Summe aller vorzeichenbehafteten Leistungen in einem abgeschlossenen System gleich null ist.

### • **Lernziele:**

Entwickeln Sie zu den genannten Schwerpunkten ein grundlegendes Verständnis. Machen Sie sich die verwendeten Fachbegriffe klar. Formulieren Sie sich einfache Fragen als Selbsttest und beantworten Sie diese Fragen mit eigenen Formulierungen.

*Beispiele zu Fragen zum Kapitel 2:*

- ☞ Warum ist bei einem ohmschen Widerstand der Gleichstromwiderstand identisch mit dem differentiellen Widerstand?
- ☞ Warum fließt in einem Zweig immer nur ein Strom?
- ☞ Warum ist in einem Knotenpunkt die Summe aller zufließenden Ströme gleich der Summe aller abfließenden Ströme?
- ☞ Warum kann man Gleich. (2.7) in der Form  $P = I^2 R$  nicht direkt zur Berechnung einer Quellenleistung verwenden?
- ☞ Woran erkennt man, dass eine Quelle Leistung aufnimmt?
- ☞ Welche Vorzeichenregel repräsentiert die Gleich. (2.9) im Vergleich zur Gleich. (2.8)? Warum trägt demzufolge Gleich. (2.9) eine allgemein gültige Information?

Arbeiten Sie die folgenden Berechnungsbeispiele und Übungsaufgaben durch. Versuchen Sie zunächst, einen eigenen Lösungsweg zu finden. Vergleichen Sie dann Ihren Ansatz mit dem vorgegebenen Lösungsweg. Häufig sind mehrere Lösungswege möglich.

### Berechnungsbeispiel 2.1: Lastfälle im Grundstromkreis

Ein Grundstromkreis ( $U_q = 24 \text{ V}$  und  $R_i = 10 \text{ }\Omega$ ) wird mit unterschiedlichen Widerständen belastet. Skizzieren Sie die Strom-Spannungs-Kennlinie für folgende Lastwiderstände und zeichnen Sie die unterschiedlichen Arbeitspunkte ein.

Geg.:  $R_{a1} = 10 \text{ }\Omega$ ,  $R_{a2} = 20 \text{ }\Omega$ ,  $R_{a3} = 50 \text{ }\Omega$  und  $R_{a4} = 100 \text{ }\Omega$ .

Wir wollen zunächst die vier Arbeitspunkte berechnen. Die Kennlinien der ohmschen Widerstände sind ja Geraden, die vom Koordinatenursprung durch den jeweiligen Arbeitspunkt verlaufen müssen.

$$R_{a1}: \quad I_1 = \frac{U_q}{R_i + R_{a1}} = \frac{24 \text{ V}}{20 \text{ }\Omega} = 1,2 \text{ A} = 1200 \text{ mA} \quad \text{und:} \quad U_{a1} = I_1 \cdot R_{a1} = 1,2 \text{ A} \cdot 10 \text{ }\Omega = 12 \text{ V}$$

$$R_{a2}: \quad I_2 = \frac{U_q}{R_i + R_{a2}} = \frac{24 \text{ V}}{30 \text{ }\Omega} = 0,8 \text{ A} = 800 \text{ mA} \quad \text{und:} \quad U_{a2} = I_2 \cdot R_{a2} = 0,8 \text{ A} \cdot 20 \text{ }\Omega = 16 \text{ V}$$

$$R_{a3}: \quad I_3 = \frac{U_q}{R_i + R_{a3}} = \frac{24 \text{ V}}{60 \text{ }\Omega} = 0,4 \text{ A} = 400 \text{ mA} \quad \text{und:} \quad U_{a3} = I_3 \cdot R_{a3} = 0,4 \text{ A} \cdot 50 \text{ }\Omega = 20 \text{ V}$$

$$R_{a4}: \quad I_4 = \frac{U_q}{R_i + R_{a4}} = \frac{24 \text{ V}}{110 \text{ }\Omega} \approx 218,2 \text{ mA} \quad \text{und:} \quad U_{a4} = I_4 \cdot R_{a4} = 21,82 \text{ V}$$

Nun können wir die Kennlinien zeichnen.

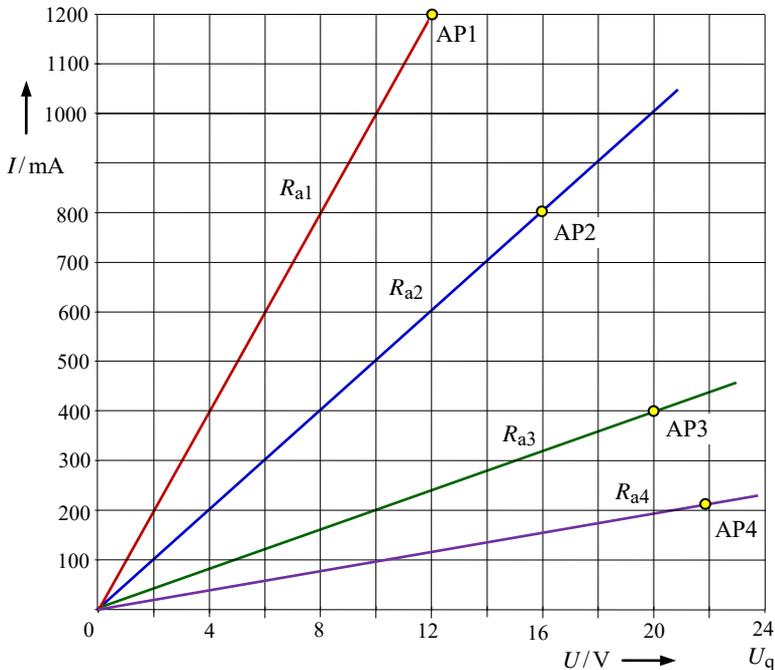


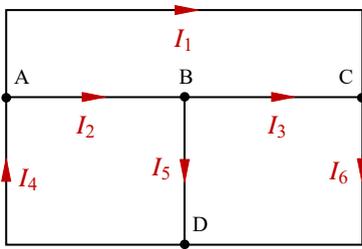
Bild B\_2.1: Kennlinien zum Berechnungsbeispiel 2.1

Bild B\_2.1 zeigt, dass der Anstieg der Kennlinien mit zunehmendem Lastwiderstand kleiner wird. Somit nimmt der Kehrwert des Anstieges (Lastwiderstand) zu. Es gilt:  $R_{a1} < R_{a2} < R_{a3} < R_{a4}$ .

**Berechnungsbeispiel 2.2: Unabhängigkeit von Knotengleichungen**

Weisen Sie am Beispiel des Bildes B\_2.2 nach, dass bei der Anwendung des Knotenpunktsatzes nur  $(k - 1)$  Gleichungen voneinander linear unabhängig sind. In diesem Bild wird lediglich die Grundstruktur (sog. Graph) der schaltungstechnischen Realisierung angegeben.

Zur Beantwortung der Frage, welche Gleichungen in das Gleichungssystem einbezogen werden (und welche nicht), wenden wir auf alle Knoten den Knotenpunktsatz an. Um Verwechslungen auszuschließen, werden die Knoten gekennzeichnet (hier: A bis D).



Mit dem Knotenpunktsatz gilt:

Knoten A:  $I_4 - I_1 - I_2 = 0$

Knoten B:  $I_2 - I_3 - I_5 = 0$

Knoten C:  $I_1 + I_3 - I_6 = 0$

Knoten D:  $I_5 + I_6 - I_4 = 0$

Bild B\_2.2: Struktur zum Berechnungsbeispiel 2.2

Wenn man diese Gleichungen sortiert, entsteht folgende Übersicht:

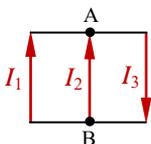
A	$-I_1$	$-I_2$		$+I_4$			0
B		$+I_2$	$-I_3$		$-I_5$		0
C	$+I_1$		$+I_3$			$-I_6$	0
D				$-I_4$	$+I_5$	$+I_6$	0

Die mit null belegten Koeffizienten wurden aus Übersichtsgründen nicht mit eingetragen. Nun ist deutlich zu sehen, dass jeder Strom zweimal (einmal positiv und einmal negativ) auftritt. Die Summe aller vier Gleichungen ergibt somit null. Eine Gleichung trägt redundante Information.

- Warum muss das so sein? Begründen Sie kurz Ihre Aussage.

Aus der Aussage „Summe aller Knotenpunktgleichungen ist gleich null“ lässt sich folgende Aussage ableiten: Diese Summe beschreibt einen Großknoten. Jede Gleichung stellt die Linearkombination mehrerer Gleichungen dieses Großknotens dar. Es sind demzufolge immer nur  $(k - 1)$  Gleichungen voneinander unabhängig. Beim Aufstellen des Gleichungssystems zur Berechnung aller Zweigströme müssen wir somit einen Knoten (egal, welchen) weglassen.

Ein elementares Beispiel soll diesen Sachverhalt noch einmal verdeutlichen. Wir betrachten eine Struktur mit zwei Knoten. Von einem Knoten (z.B. A) fließt ein Strom ab – dann kann er beim zweiten Knoten (B) nur zufließen (und umgekehrt).



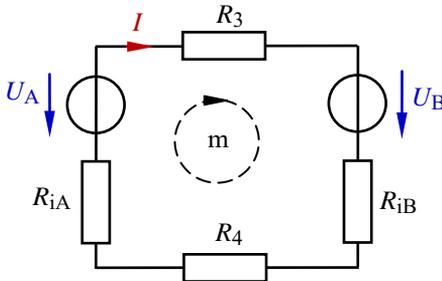
Knoten A:  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Knoten B:  $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$

Die Gleichung (B) ist eine Linearkombination zur Gleichung (A). Durch die Multiplikation von (B) mit  $(-1)$  erhalten wir die Gleichung (A).

**Berechnungsbeispiel 2.3: Vollständige Leistungsbilanz**

Stellen Sie für die Schaltung im Bild B\_2.3 die vollständige Leistungsbilanz (dargestellt im Quellen-Zählpfeilsystem) auf.



$$\begin{aligned} \text{Geg.: } U_A &= 24 \text{ V und } U_B = 12 \text{ V} \\ R_{iA} &= R_{iB} = 1 \Omega \\ R_3 &= R_4 = 5 \Omega \end{aligned}$$

Bild B\_2.3: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 2.3

Bei diesem Beispiel handelt es sich um eine gegenseitige Reihenschaltung zweier realer Spannungsquellen (vgl. auch Abschn. 3.4). Für den eingezeichneten Umlauf  $m$  gilt:

$$I \cdot R_3 + U_B + I \cdot R_{iB} + I \cdot R_4 + I \cdot R_{iA} - U_A = 0$$

Daraus kann der Strom  $I$  berechnet werden:

$$I = \frac{U_A - U_B}{R_{iA} + R_{iB} + R_3 + R_4} = \frac{12 \text{ V}}{12 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Der in dieser Reihenschaltung fließende Strom wird in seiner Richtung durch die Quelle A bestimmt ( $U_A > U_B$ ). Er fließt gegen den Spannungszählpfeil von  $U_A$  (Quellenwirkung) und in Richtung des Spannungszählpfeils von  $U_B$ . Die Quelle B nimmt demzufolge Leistung auf und wirkt im vorliegenden Fall wie ein Verbraucher. Es ergeben sich folgende Leistungen:

$$P_1 = I^2 \cdot R_{iA} = -1 \text{ W}$$

$$P_2 = I^2 \cdot R_{iB} = -1 \text{ W}$$

$$P_3 = I^2 \cdot R_3 = -5 \text{ W}$$

$$P_4 = I^2 \cdot R_4 = -5 \text{ W}$$

$$P_A = U_A \cdot (+I) = +24 \text{ W} \quad (\text{Quellenleistung})$$

$$P_B = U_B \cdot (-I) = -12 \text{ W} \quad (\text{Verbraucherleistung})$$

---


$$\Sigma P = 0 \text{ W} \quad \text{Die Summe aller Leistungen ist gleich null.}$$

Bei einer Darstellung im Verbraucher-Zählpfeilsystem ändern sich die Vorzeichen aller Leistungen. In diesem Fall würden wir folgende Leistungsbilanz erhalten:

$$\Sigma P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_A + P_B = 1 \text{ W} + 1 \text{ W} + 5 \text{ W} + 5 \text{ W} - 24 \text{ W} + 12 \text{ W} = 0$$

Oder nach Gleich. (2.8):  $\Sigma P_q = P_A = 24 \text{ W}$  (Q-ZPS) und  $\Sigma P_v$  im V-ZPS:

$$\Sigma P_v = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_B = 1 \text{ W} + 1 \text{ W} + 5 \text{ W} + 5 \text{ W} + 12 \text{ W} = 24 \text{ W}$$

$$\Sigma P_q = \Sigma P_v$$

### 3 Lineare elektrische Gleichstromkreise

#### • **Schwerpunkte:**

- ⇒ Elektrische Stromkreise können eine unverzweigte Struktur (Reihenschaltung) oder eine verzweigte Struktur (Parallelschaltung bzw. gemischte Schaltung) aufweisen.
- ⇒ In einer Reihenschaltung gilt die Spannungsteilerregel: Die Spannungen verhalten sich proportional zu den Widerständen, über denen diese Spannungen abfallen.
- ⇒ In einer Parallelschaltung gilt die Stromteilerregel: Die Ströme verhalten sich umgekehrt proportional zu den Widerständen, durch die diese Ströme fließen.
- ⇒ Elektrische Quellen sind in der Lage, durch innere physikalische Effekte Ladungen zu beschleunigen.
- ⇒ Der Wirkungsgrad beschreibt das Verhältnis der abgegebenen zur zugeführten Leistung. Er gilt nur für eine festgelegte Trennstelle zwischen Quelle und Verbraucher.
- ⇒ Im Anpassungsfall nimmt ein Verbraucher maximale Leistung auf. Dazu ist der Lastwiderstand an den Innenwiderstand der Quelle anzupassen.
- ⇒ Bei Variation des Lastwiderstandes ändern sich lastseitig Spannung, Strom und Leistung nach nichtlinearen Funktionen, obwohl ein linearer Stromkreis betrachtet wird.
- ⇒ Ein belasteter Spannungsteiler sollte so dimensioniert werden, dass er möglichst linear arbeitet. Dazu muss der Lastwiderstand viel größer als der Stellwiderstand sein.

#### • **Lernziele:**

Entwickeln Sie zu den genannten Schwerpunkten ein grundlegendes Verständnis. Formulieren Sie sich einfache Aufgaben als Selbsttest und bearbeiten Sie diese Aufgaben durch Anwendung der bisher behandelten Berechnungsvorschriften.

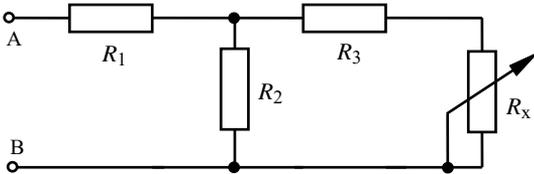
*Beispiele zu Fragen zum Kapitel 3:*

- ☞ Warum ist ein zu einer Reihenschaltung parallel geschalteter Widerstand nicht an der aktuellen Spannungsteilung beteiligt?
- ☞ Warum ist ein zu einer Parallelschaltung in Reihe geschalteter Widerstand nicht an der aktuellen Stromteilung beteiligt?
- ☞ Warum fließt der Strom in einem geschlossenen Stromkreis auch durch die Quelle?
- ☞ Wie groß sind Spannung, Strom und Leistung im Anpassungsfall?
- ☞ Wie ist das Verhalten eines elektrischen Stromkreises für folgende Fälle zu interpretieren: a) Leerlauf fall    b) Anpassungsfall    c) Kurzschlussfall?

Arbeiten Sie die folgenden Berechnungsbeispiele und Übungsaufgaben durch. Versuchen Sie zunächst, einen eigenen Lösungsweg zu finden. Vergleichen Sie dann Ihren Ansatz mit dem vorgegebenen Lösungsweg. Jetzt sind immer mehrere Lösungswege möglich.

**Berechnungsbeispiel 3.1: Abgleich eines Widerstandswertes**

Auf welchen Wert muss der Widerstand  $R_x$  im Bild B\_3.1 eingestellt werden, wenn er gleich dem Gesamtwiderstand  $R_{AB}$  sein soll? Gesucht ist eine allgemeine Lösung und der entsprechende Zahlenwert.



Geg.:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$

$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$

$R_3 = 6 \text{ k}\Omega$

Ges.:  $R_x = f(R_1, R_2, R_3)$

Bild B\_3.1: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.1

Ansatz:  $R_{AB} = R_x = R_1 + R_2 // (R_3 + R_x)$

- Parallelzeichen auflösen
- Hauptnenner bilden
- über Kreuz multiplizieren

$$R_x = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + R_x) + R_2 \cdot (R_3 + R_x)}{R_2 + R_3 + R_x}$$

$$R_x \cdot R_2 + R_x \cdot R_3 + R_x^2 = R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_x + R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_x$$

Zur Bestimmung von  $R_x$  ergibt sich eine quadratische Gleichung. Durch Ordnen und Zusammenfassen erhalten wir die Normalform:

$$R_x^2 + R_x \cdot (R_3 - R_1) - (R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3) = 0 \quad \bullet \text{ Lösungsbeziehung anwenden}$$

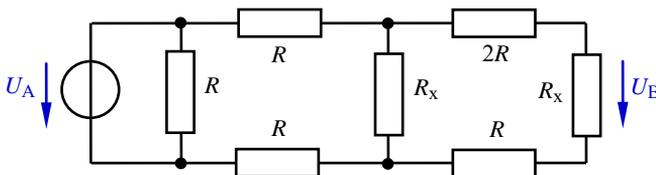
$$R_{x1,2} = -\frac{R_3 - R_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(R_3 - R_1)^2}{4} + R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

Die negative Lösung entfällt, da ein ohmscher Widerstand nicht negativ werden kann.

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhalten wir das Ergebnis:  $R_x = -2,5 \text{ k}\Omega + 5,12 \text{ k}\Omega = 2,62 \text{ k}\Omega$

**Berechnungsbeispiel 3.2: Einstellung Spannungsverhältnis**

Berechnen Sie den Widerstand  $R_x$  so, dass die Spannung  $U_B$  ein Fünftel von  $U_A$  beträgt.



Geg.:  $R = 2 \text{ k}\Omega$

Bild B\_3.2: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.2

Als Lösungsansatz wird die Spannungsteilerregel angewendet. Es gilt:  $\frac{U_B}{U_A} = \frac{1}{5}$

$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{R_x}{R_x + 2R + R} \cdot \frac{R_x // (R_x + 2R + R)}{R + R + R_x // (R_x + 2R + R)}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{R_x^2}{2R \cdot (2R_x + 3R) + R_x \cdot (R_x + 3R)}$$

$$5R_x^2 = 4R_x \cdot R + 6R^2 + R_x^2 + 3R_x \cdot R$$

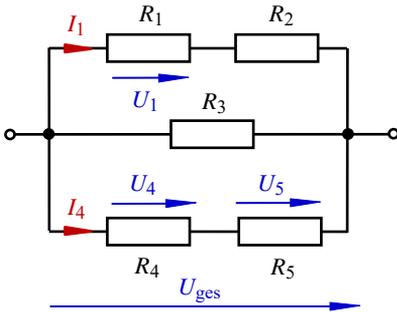
$$R_x^2 - R_x \cdot (1,75R) - 1,5R^2 = 0$$

$$R_x = 0,875R + 1,5R = 2,375R = 4,75 \text{ k}\Omega$$

- Parallelzeichen auflösen und Hauptnenner bilden
- über Kreuz multiplizieren
- Normalform bilden
- Lösungsbeziehung anwenden

### Berechnungsbeispiel 3.3: Berechnung einer gemischten Schaltung A

Man bestimme den Gesamtwiderstand, den Spannungsabfall über  $R_5$ , den Strom durch  $R_1$  sowie die Teilverhältnisse  $I_1 / I_4$  und  $U_1 / U_4$ .



$$\text{Geg.: } U_{\text{ges}} = 12 \text{ V}$$

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 4 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 5 \text{ k}\Omega$$

Bild B\_3.3: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.3

$$R_{\text{ges}} = (R_1 + R_2) // R_3 // (R_4 + R_5) = 3 \text{ k}\Omega // 3 \text{ k}\Omega // 9 \text{ k}\Omega \approx 1,29 \text{ k}\Omega$$

$$U_5 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_5}{R_4 + R_5} = U_{\text{ges}} \cdot \frac{5}{9} = 6,6 \bar{6} \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1 + R_2} = \frac{12 \text{ V}}{3 \text{ k}\Omega} = 4 \text{ mA}$$

oder zur Übung mit der Stromteilerregel:

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_3 // (R_4 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_3 // (R_4 + R_5)} = \frac{27}{63} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{3}{7} \cdot \frac{12 \text{ V}}{1,29 \text{ k}\Omega} = 4 \text{ mA}$$

$$\frac{I_1}{I_4} = \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow I_1 = 3 \cdot I_4$$

$$\frac{U_1}{U_4} = \frac{U_1}{U_{\text{ges}}} \cdot \frac{U_{\text{ges}}}{U_4} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_4 + R_5}{R_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow U_1 = 0,75 \cdot U_4$$

**Berechnungsbeispiel 3.4: Berechnung einer gemischten Schaltung B**

Von der Schaltung im Bild B\_3.4 ist der Widerstand  $R$  bekannt. Man berechne den Gesamtwiderstand, das Verhältnis der Spannungen  $U_a/U_b$  und das Verhältnis der Ströme  $I_x/I_y$ .

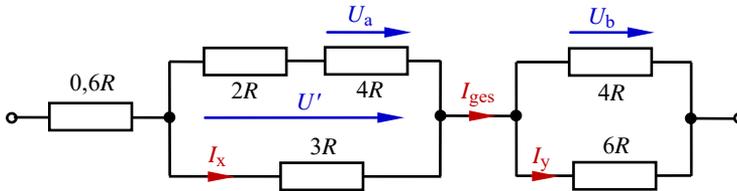


Bild B\_3.4: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.4

$$R_{ges} = 0,6R + 3R // (2R + 4R) + 4R // 6R = 0,6R + 2R + 2,4R = 5R$$

Zur Bestimmung des Spannungsverhältnisses wird schrittweise die Spannungsteilerregel angewendet, indem man die Spannung  $U_a$  zu  $U'$  und dann die Spannung  $U'$  zu  $U_b$  ins Verhältnis setzt.

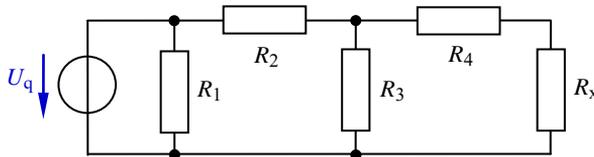
$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{U_a}{U'} \cdot \frac{U'}{U_b} = \frac{4R}{4R + 2R} \cdot \frac{3R // (2R + 4R)}{4R // 6R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2,4} = \frac{4}{7,2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Das gesuchte Stromverhältnis wird ermittelt, indem man die beiden Ströme unter schrittweiser Anwendung der Stromteilerregel auf den Gesamtstrom bezieht.

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{I_x}{I_{ges}} \cdot \frac{I_{ges}}{I_y} = \frac{2R + 4R}{2R + 4R + 3R} \cdot \frac{4R + 6R}{4R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$$

**Berechnungsbeispiel 3.5: Einstellung Spannungsabfall**

Welchen Wert muss  $R_x$  haben, damit über ihm ein Viertel der Gesamtspannung abfällt?



Geg.:  $U_q = 12 \text{ V}$   
 $R_1 = R_2 = R_A = 2 \text{ k}\Omega$   
 $R_3 = R_4 = R_B = 3 \text{ k}\Omega$

Bild B\_3.5: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.5

- a) Berechnen Sie  $R_x$  in allgemeiner Form  $R_x = f(R_A, R_B)$  und als Zahlenwert.
- b) In welchem Verhältnis müssen die Widerstandswerte von  $R_A$  und  $R_B$  mindestens stehen, damit die Bedingung  $U_x = 0,25 \cdot U_q$  überhaupt erfüllt werden kann?
- c) Bestimmen Sie  $R_{ges}$ ,  $U_4$ ,  $I_3$  sowie die Verhältnisse  $\frac{I_1}{I_3}$  und  $\frac{U_2}{U_4}$ .

Zu a) Zur Bestimmung des Verhältnisses von  $U_x$  und  $U_q$  wird die Spannungsteilerregel (doppelter Spannungsteiler; siehe Bild B\_3.5) angewendet. Laut Aufgabenstellung muss das Verhältnis 0,25 sein.

$$\frac{U_x}{U_q} = \frac{U_x}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_q} = \frac{R_x}{R_x + R_4} \cdot \frac{R_3 // (R_x + R_4)}{R_2 + R_3 // (R_x + R_4)} = \frac{R_x \cdot R_3 \cdot (R_x + R_4)}{(R_x + R_4) \cdot [R_2 \cdot (R_3 + R_x + R_4) + R_3 \cdot (R_x + R_4)]}$$

$$\frac{U_x}{U_q} = \frac{R_x \cdot R_3}{R_2 \cdot (R_3 + R_x + R_4) + R_3 \cdot (R_x + R_4)} = \frac{R_x \cdot R_3}{R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_x + R_2 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_x + R_3 \cdot R_4}$$

Durch Einsetzen der Vereinfachungen für  $R_1 = R_2 = R_A$  und  $R_3 = R_4 = R_B$  erhält man:

$$\frac{U_x}{U_q} = \frac{R_x \cdot R_B}{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_x + R_A \cdot R_B + R_B \cdot R_x + R_B^2} = \frac{1}{4}$$

Diese Gleichung ist nun auszumultiplizieren und nach  $R_x$  umzustellen.

$$4R_x \cdot R_B = 2R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_x + R_B \cdot R_x + R_B^2$$

$$R_x = \frac{2R_A \cdot R_B + R_B^2}{3R_B - R_A} = 3 \text{ k}\Omega$$

Zu b) Aus der Berechnungsvorschrift für  $R_x$  ist erkennbar, dass das Ergebnis durchaus negativ werden kann. Das bedeutet, dass die Schaltung nicht unter allen Bedingungen in der Lage ist, ein Spannungsverhältnis von  $U_x / U_q = 0,25$  zu erzeugen. Da es keine negativen ohmschen Widerstände gibt, muss bei der Dimensionierung der Schaltung die Randbedingung  $R_A < 3 R_B$  eingehalten werden.

Zu c) Zur Übung der Widerstandsrechnung sowie der Anwendung der Spannungs- und Stromteilerregel sollten Sie die folgenden Schritte selbstständig ausführen. Die angegebenen Lösungsansätze dienen im Zusammenhang mit dem Rechenergebnis lediglich zum Vergleich. Für die Spannungen und die Ströme wurden die Indizes der Widerstände verwendet. Zeichnen Sie sich die Zählpfeile der Spannungen und Ströme in die Schaltung des Bildes B\_3.5 ein!

$$R_{\text{ges}} = R_1 // [R_2 + R_3 // (R_x + R_4)] = 1,3 \text{ k}\Omega$$

$$U_4 = U_q \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_x} \cdot \frac{R_3 // (R_4 + R_x)}{R_2 + R_3 // (R_4 + R_x)} = 3 \text{ V}$$

$$I_3 = I_2 \cdot \frac{R_4 + R_x}{R_3 + R_4 + R_x} = \frac{U_q}{R_2 + R_3 // (R_4 + R_x)} \cdot \frac{R_4 + R_x}{R_3 + R_4 + R_x} = 2 \text{ mA}$$

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{R_2 + R_3 // (R_4 + R_x)}{R_1} \cdot \frac{R_3 + R_4 + R_x}{R_4 + R_x} = 3$$

$$\frac{U_2}{U_4} = \frac{R_2}{R_3 // (R_4 + R_x)} \cdot \frac{R_4 + R_x}{R_4} = 2$$

**Berechnungsbeispiel 3.6: Gleicher Leistungsumsatz**

Wie groß muss der Widerstand  $R_3$  sein, damit in ihm die gleiche Leistung umgesetzt wird wie im Widerstand  $R_7$ ? Es gilt:  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R = 1,6 \text{ k}\Omega$  und  $U_q = 12 \text{ V}$ .

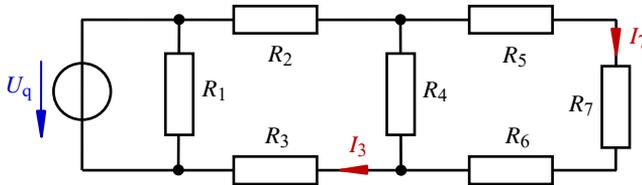


Bild B\_3.6: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.6

Laut Aufgabenstellung muss gelten:

$$P_3 = P_7 \quad \text{bzw.:} \quad I_3^2 \cdot R_3 = I_7^2 \cdot R_7 \quad \text{oder:} \quad \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{U_7^2}{R_7}$$

Die Aufgabe ist demzufolge über zwei Varianten lösbar. Zunächst wird über die Ströme gerechnet.

$$\frac{I_7}{I_3} = \frac{R_4}{R_4 + R_5 + R_6 + R_7} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad I_7 = \frac{I_3}{4}$$

$$\text{Für den Leistungsansatz gilt:} \quad I_3^2 \cdot R_3 = \left(\frac{I_3}{4}\right)^2 \cdot R_7 \quad \Rightarrow \quad R_3 = \frac{R_7}{16} = \frac{R}{16} = 100 \Omega$$

Zur Übung wollen wir die Aufgabe zusätzlich über den Spannungsteiler berechnen:

$$\frac{U_3}{U_7} = \frac{R_3}{R_4 \parallel (R_5 + R_6 + R_7)} \cdot \frac{R_5 + R_6 + R_7}{R_7} = \frac{R_3}{0,75R} \cdot \frac{3R}{R} = \frac{4R_3}{R} \quad \Rightarrow \quad U_7 = U_3 \cdot \frac{R}{4R_3}$$

$$\text{Für den Leistungsansatz gilt jetzt:} \quad \frac{U_3^2}{R_3} = \left(U_3 \cdot \frac{R}{4R_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_7} \quad \Rightarrow \quad R_3 = \frac{R}{16} = 100 \Omega$$

**Berechnungsbeispiel 3.7: Überlastung von Widerständen**

Welche Spannung  $U_{AB}$  darf maximal an die Schaltung im Bild B\_3.7 gelegt werden, damit keiner der Widerstände überlastet wird?

$Geg.: R_1 = R_4 = R_5 = 40 \Omega$	$R_2 = 110 \Omega$	$R_3 = 60 \Omega$	$R_6 = 100 \Omega$
$P_1 = P_4 = P_5 = 10 \text{ W}$	$P_2 = 18 \text{ W}$	$P_3 = 15 \text{ W}$	$P_6 = 36 \text{ W}$

Zunächst werden mit den Widerstandsdaten und den maximal zulässigen Leistungen die zulässigen Teilspannungen berechnet. Alle Spannungszählpfeile zeigen nach rechts ( $\rightarrow$ ).

Es gilt:  $U_{\max} = \sqrt{P_{\max} \cdot R}$       bzw.:

$$U_{1,\max} = U_{4,\max} = U_{5,\max} = 20 \text{ V} \quad U_{2,\max} \approx 44,5 \text{ V} \quad U_{3,\max} = 30 \text{ V} \quad U_{6,\max} = 60 \text{ V}$$

Nun bestimmen wir mit der Spannungsteilerregel für jeden Widerstand aus der maximal zulässigen Teilspannung die jeweils maximal zulässige Gesamtspannung.

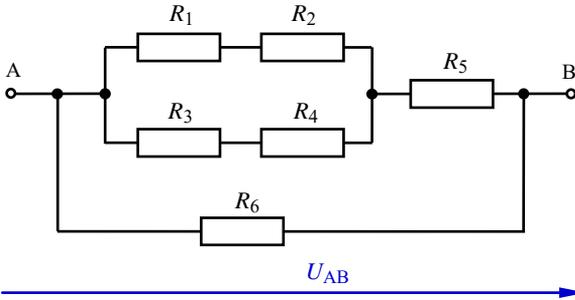


Bild B\_3.7: Schaltung zum Berechnungsbeispiel 3.7

$$\frac{U_1}{U_{AB}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)}{R_5 + (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)} = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad U_{AB1, \max} = U_{1, \max} \cdot \frac{25}{4} = 125 \text{ V}$$

$$\frac{U_2}{U_{AB}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)}{R_5 + (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)} = \frac{11}{15} \cdot \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad U_{AB2, \max} = U_{2, \max} \cdot \frac{25}{11} = 101,1 \text{ V}$$

$$\frac{U_3}{U_{AB}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{(R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)}{R_5 + (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad U_{AB3, \max} = U_{3, \max} \cdot \frac{25}{9} = 83,3 \text{ V}$$

$$\frac{U_4}{U_{AB}} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{(R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)}{R_5 + (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad U_{AB4, \max} = U_{4, \max} \cdot \frac{25}{6} = 83,3 \text{ V}$$

$$\frac{U_5}{U_{AB}} = \frac{R_5}{R_5 + (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad U_{AB5, \max} = U_{5, \max} \cdot \frac{5}{2} = 50 \text{ V}$$

$$U_6 = U_{AB} \quad \Rightarrow \quad U_{AB6, \max} = U_{6, \max} = 60 \text{ V}$$

Die kleinste errechnete Gesamtspannung  $U_{AB5, \max}$  ist diejenige Gesamtspannung, die maximal an die Widerstandskonfiguration gelegt werden darf. Das sind in diesem Beispiel 50 V. Beim Überschreiten dieser Spannung würde der Widerstand  $R_5$  zuerst überlastet.

### Berechnungsbeispiel 3.8: Leistungsaufnahme eines Lastwiderstandes

An eine Quelle mit der Quellenspannung  $U_q = 15 \text{ V}$  und einem Innenwiderstand  $R_i = 2,5 \Omega$  wird ein variabler Lastwiderstand  $R_a$  angeschlossen.

a) Auf welchen Wert muss der Lastwiderstand  $R_a$  eingestellt werden, damit er eine Leistung  $P_a = 20 \text{ W}$  aufnimmt?

b) Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für den erforderlichen Strom her, der diese Leistungsaufnahme bewirkt.

Zu a) Im Anpassungsfall wird in  $R_a$  eine maximale Leistung umgesetzt:  $P_{a,max} = \frac{U_q^2}{4R_1} = 22,5 \text{ W}$

Für einen Leistungsumsatz kleiner als  $P_{a,max}$  (laut Aufgabenstellung:  $P_a = 20 \text{ W}$ ) müssen sich gemäß dem Funktionsverlauf  $P_a = f(R_a)$  zwei Lastwiderstände ergeben, in denen die gleiche Leistung umgesetzt wird. Es ist also eine quadratische Gleichung zu erwarten.

$$P_a = I^2 \cdot R_a = \frac{U_q^2 \cdot R_a}{(R_1 + R_a)^2} \quad \Rightarrow \quad R_a^2 + 2R_1 \cdot R_a - \frac{U_q^2 \cdot R_a}{P_a} + R_1^2 = 0$$

$R_{a1,2} = 3,125 \Omega \pm 1,875 \Omega$ . Damit ergeben sich zwei Lösungen für  $R_a$ :  $R_{a1} = 1,25 \Omega$  und  $R_{a2} = 5 \Omega$ .

Zu b) Zur Herleitung eines Ausdruckes für den Strom, der ja durch  $R_{ges} = R_1 + R_a$  fließt, ist es zweckmäßig, mit  $R_a = R_{ges} - R_1$  zu rechnen.

$$P_a = I^2 \cdot R_a = I^2 \cdot R_{ges} - I^2 \cdot R_1 = \frac{I^2 \cdot U_q}{I} - I^2 \cdot R_1 = U_q \cdot I - I^2 \cdot R_1$$

Daraus entsteht durch Ausmultiplizieren und Ordnen die Normalform einer quadratischen Gleichung einschließlich ihrer Lösung in allgemeiner Form:

$$I^2 - I \frac{U_q}{R_1} + \frac{P_a}{R_1} = 0 \quad I_{1,2} = \frac{U_q}{2R_1} \pm \sqrt{\frac{U_q^2}{4R_1^2} - \frac{P_a}{R_1}}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergeben sich die beiden Ströme mit  $I_1 = 4 \text{ A}$  und  $I_2 = 2 \text{ A}$ .

### Berechnungsbeispiel 3.9: Leistung und Wirkungsgrad

Die Schaltungen im Bild B\_3.8 unterscheiden sich im Aufbau ihres aktiven Zweipols (links von der Trennstelle d – e). Geg.:  $U_q = 12 \text{ V}$   $R_1 = 30 \Omega$   $R_2 = 60 \Omega$   $R_3 = 20 \Omega$

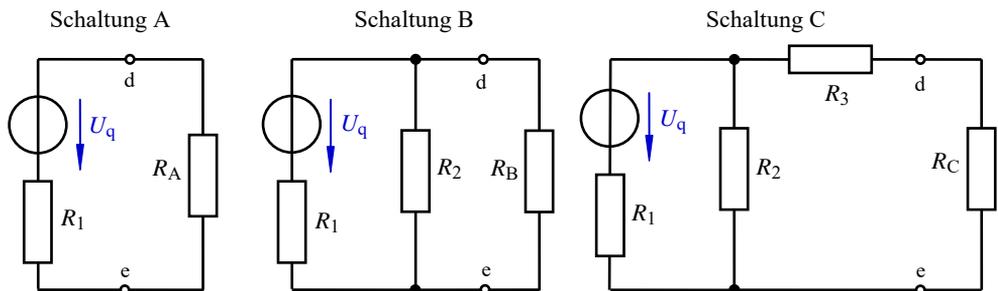


Bild B\_3.8: Schaltungsvarianten zum Berechnungsbeispiel 3.9

- Wie müssen die Lastwiderstände  $R_A$ ,  $R_B$  und  $R_C$  dimensioniert werden, damit die abgegebene Leistung ein Maximum wird? Berechnen Sie diese Leistungen.
- Welchen Wirkungsgrad weist die jeweilige Schaltung auf, wenn der Lastwiderstand einheitlich auf  $R_a = 20 \Omega$  eingestellt wird? Wie groß sind jetzt die abgegebenen Leistungen?