

Raimond Dallmann

Baustatik 3

Theorie II. Ordnung und computerorientierte
Methoden der Stabtragwerke



2., aktualisierte Auflage



HANSER

Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp · Aufgabensammlung zur Baustatik

Dallmann · *Baustatik*

Band 1: Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

Band 2: Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

Band 3: Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Engel/Lauer · *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Engel/Al-Akel · *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Fouad/Zapke · *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann · *Hydraulik für Bauingenieure*

Göttsche/Petersen · *Festigkeitslehre – klipp und klar
für Studierende des Bauingenieurwesens*

Jochim/Lademann · *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke · *Physik im Bauwesen*

Malpricht · *Schalungsplanung*

Proporowitz (Hrsg.) · *Baubetrieb – Bauverfahren*

Proporowitz (Hrsg.) · *Baubetrieb – Bauwirtschaft*

Prüser · *Konstruieren im Stahlbetonbau 1*

Prüser · *Konstruieren im Stahlbetonbau 2*

Rjasanowa · *Mathematik für Bauingenieure*

Rjasanowa · *Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen*

Raimond Dallmann

Baustatik 3

Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

2., aktualisierte Auflage

Mit 216 Bildern, 41 Beispielen, 28 Aufgaben mit Lösungen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autoren

Prof. Dr.-Ing. Raimond Dallmann
Hochschule Wismar
Fachbereich Bauingenieurwesen
<http://www.bau.hs-wismar.de/Dallmann>

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2015 Carl Hanser Verlag München
www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Philipp Thorwirth
Herstellung: Thomas Gerhardy
Satz: Raimond Dallmann, Tressow
Coverconcept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Kösel, Krugzell
Printed in Germany

ISBN: 978-3-446-44504-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-44508-6

Vorwort

Der dritte Band dieser Lehrbuchreihe vermittelt die grundlegenden Kenntnisse der Theorie II. Ordnung und von computerorientierten Verfahren der Baustatik. Ein großer Teil des Inhalts entspricht den von mir an der Hochschule Wismar gehaltenen Lehrveranstaltungen.

Das Buch richtet sich an Studierende eines Masterstudiengangs Bauingenieurwesen. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Berechnung statisch bestimmter und unbestimmter Tragwerke, die in Band 1 und 2 behandelt wurden. Insbesondere sollte das Drehwinkelverfahren für die Berechnung von Stabtragwerken bekannt sein. Weiterhin sind Grundkenntnisse der höheren Mathematik notwendig.

Der qualifizierte Einsatz des Computers bei der Berechnung von Baukonstruktionen erfordert das Verständnis der den Berechnungsverfahren zugrunde liegenden Methoden. Es ist ein Ziel dieses Buches, das Verständnis der Theorie II. Ordnung zu vermitteln und einen ersten Zugang zu den abstrakteren Verfahren der Baustatik zu ermöglichen.

Es werden in Kapitel 1 zunächst die Grundlagen der Berechnung nach Theorie II. Ordnung dargestellt. Nach der Herleitung der Grundgleichungen erfolgt für einfache Systeme eine Berechnung durch Lösung der Differenzialgleichung, die einen Einblick in das Wesen der Lösung ermöglicht. Am Beispiel einfacher statisch bestimmter Tragwerke wird die Iteration über die Verformungen dargestellt, da diese Methode sehr anschaulich ist. Das Drehwinkelverfahren als klassische Methode der Baustatik wird auf die Anwendung der Theorie II. Ordnung erweitert. Abschließend erfolgt die Erweiterung der Differenzialgleichung des Balkens zur Berücksichtigung einer elastischen Bettung.

Das Allgemeine Weggrößenverfahren in matrizieller Darstellung wird in Kapitel 2 behandelt, wobei auf einen möglichst anschaulichen Zugang Wert gelegt wird. Das

Verfahren wird auf Beispiele nach Theorie I. und II. Ordnung angewandt.

Kapitel 3 ist den Näherungsverfahren der Baustatik gewidmet. Auf Grundlage des Prinzips der virtuellen Arbeiten wird das grundlegende Konzept der Finite Element Methode für Probleme der Balkenbiegung in einer Weggrößen- und einer gemischten Formulierung dargestellt. Anhand einfacher Beispiele wird gezeigt, welchen Einfluss unterschiedliche Näherungsansätze auf die erzielten Ergebnisse haben.

Das 4. Kapitel behandelt das Reduktionsverfahren der Übertragungsmatrizen, das eine wertvolle Ergänzung zum Weggrößenverfahren darstellt.

In jedem Kapitel wird die Anwendung der theoretischen Grundlagen anhand zahlreicher vollständig durchgerechneter Beispiele erläutert.

Auch in diesem Buch sind Übungsaufgaben enthalten, um das eigenständige Üben des Lehrstoffes zu ermöglichen. Die Lösungen sind am Ende des Buches angegeben. Die vollständigen Lösungswege sind im Internet unter <http://www.bau.hs-wismar.de/Dallmann> zu finden.

Ich hoffe, dass dieses Buch den Lesern Verständnis für die dargestellten Inhalte vermitteln kann und zu einer weitergehenden Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff motiviert. Verbesserungsvorschläge zum Inhalt des Buches sind jederzeit willkommen.

Frau Christine Fritsch und Frau Franziska Kaufmann vom Carl Hanser Verlag danke ich sehr herzlich für die sehr freundliche und angenehme Zusammenarbeit.

Mein ganz besonderer Dank gilt Frau Bianca Hennings für die vielen wichtigen Hinweise und Anregungen bei der Kontrolle des Manuskripts.

Die vorliegende zweite Auflage dieses Buches ist inhaltlich unverändert, es wurden jedoch bekannt gewordene Fehler korrigiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Berechnung von Stabtragwerken nach Theorie II. Ordnung	9
1.1	Einführung	9
1.2	Differenzialgleichung der Theorie II. Ordnung	10
1.3	Spannungs- und Stabilitätsproblem	14
1.4	Geometrische Imperfektionen	22
1.5	Iterative Annäherung der Biegelinie	26
1.6	Berechnung nach dem Drehwinkelverfahren	30
1.7	Balken auf elastischer Bettung	53
2	Allgemeines Weggrößenverfahren	59
2.1	Einführung	59
2.2	Matrizendarstellung	60
2.2.1	Steifigkeitsmatrix des Stabes	60
2.2.2	Aufbau des Gesamtgleichungssystems	65
2.2.3	Starre Rand- und Zwischenbedingungen	66
2.2.4	Elastische Lagerungen	67
2.2.5	Schnittgrößenermittlung	68
2.2.6	Struktur der Systemmatrix	68
2.2.7	Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung und Bettung	69
2.2.7.1	Exakte Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung	69
2.2.7.2	Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung und Bettung aus Näherungsansatz	70
2.2.8	Berücksichtigung von Gelenken	70
2.3	Beispiele nach Theorie I. Ordnung	74
2.4	Beispiele nach Theorie II. Ordnung	82
3	Näherungsverfahren der Baustatik	88
3.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	88
3.1.1	Arbeitsgleichung	88
3.1.2	Ansätze über das Gesamtgebiet	90
3.1.3	Ansätze über Teilbereiche	98
3.1.3.1	Ansatzfunktionen	98
3.1.3.2	Aufbau des Gleichungssystems	100
3.1.3.3	Ermittlung der Schnittgrößen	101
3.1.3.4	Schematischer Aufbau des Gleichungssystems	110

3.2	Gemischtes Verfahren	112
3.2.1	Herleitung der Arbeitsgleichungen	112
3.2.2	Ansätze über das Gesamtgebiet	114
3.2.3	Ansätze über Teilbereiche des Systems	118
3.2.3.1	Lineare Ansätze	118
3.2.3.2	Quadratische Ansätze	124
3.3	Numerische Integration	135
4	Das Reduktionsverfahren der Übertragungsmatrizen	143
4.1	Einführung	143
4.2	Übertragungsmatrix des Balkens nach Theorie I. Ordnung	143
4.2.1	Mechanische Interpretation der Elemente der Übertragungsmatrix	144
4.2.2	Erweiterung der Übertragungsmatrix	145
4.3	Randbedingungen	146
4.4	Übertragungsverfahren	148
4.4.1	Elastische Zwischenbedingungen	149
4.4.2	Starre Zwischenbedingungen	157
4.5	Theorie II. Ordnung	163
4.6	Ermittlung der Übertragungsmatrix aus dem Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung	166
4.7	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix aus der Übertragungsmatrix	169
Lösungen		172
Anhang: Tafeln		180
Literaturverzeichnis		184
Sachwortverzeichnis		185

1 Berechnung von Stabtragwerken nach Theorie II. Ordnung

1

1.1 Einführung

Jedes Tragwerk verformt sich infolge seiner Belastung. Wir sind in **Baustatik 1** und **Baustatik 2** davon ausgegangen, dass die Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt werden können. Man nennt dies eine Berechnung nach *Theorie I. Ordnung*.

Bei vielen Problemstellungen der Baustatik ist diese Annahme jedoch nicht gerechtfertigt. Selbst wenn die Verformungen des Tragwerks im Verhältnis zu seinen Abmessungen sehr klein sind, muss bei großen Druck- oder Zugkräften der Einfluss der Verformungen auf das Gleichgewicht berücksichtigt werden.

Diese Berücksichtigung der Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen wird als *Theorie II. Ordnung* bezeichnet. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Unterscheidung:

- Theorie I. Ordnung: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am **unverformten** System.
- Theorie II. Ordnung: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am **verformten** System.

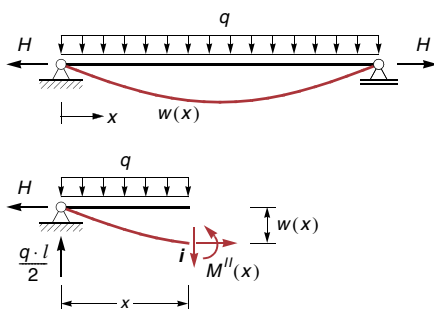


Bild 1.1 Balken mit Längskraft unter Querbelastung

Der Balken in **Bild 1.1** wird durch eine konstante Streckenlast sowie eine Horizontalkraft beansprucht. Für die Berechnung des Biegemomentes an einer beliebigen Stelle x bilden wir die Momentensumme bezüglich des

Punktes i . Aufgrund der Durchbiegung des Balkens hat die horizontale Auflagerkraft den Abstand $w(x)$ zur Balkenachse und geht mit in die Momentensumme ein. Damit folgt:

$$M''(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - H \cdot w(x)$$

$$M''(x) = M_q' - H \cdot w(x) \quad (1.1)$$

Der Anteil am Biegemoment ohne den Einfluss der Horizontalkraft ist in vorheriger Gleichung mit M_q' bezeichnet.

Die Theorie II. Ordnung berücksichtigt zwar die Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen, ist aber eine **geometrisch lineare** Theorie, da wir weiterhin die Linearisierung der kinematischen (geometrischen) Beziehung beibehalten, also von kleinen Verformungen ausgehen.

Die exakte Beziehung zwischen Krümmung des Balkens und der 2. Ableitung der Biegelinie lautet:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

Für kleine Verformungen ist $w'^2 \ll 1$ und kann gegenüber eins vernachlässigt werden. Es gilt also weiterhin die lineare Beziehung $\kappa = -w''$.

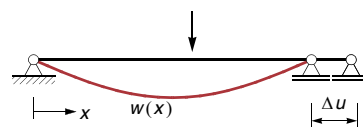


Bild 1.2 Berücksichtigung der horizontalen Auflagerverschiebung bei Theorie III. Ordnung

Bild 1.2 zeigt einen unter der Wirkung einer Kraft verformten Balken. Da die Balkenachse nicht gedehnt wird, also nicht länger wird, muss sich das rechte Auflager nach links verschieben. Dieser Effekt lässt sich nur durch eine geometrisch nichtlineare Theorie erfassen. Man spricht von einer Theorie III. Ordnung. Für kleine Verfor-

mungen ist die Verschiebung Δu gegenüber der Durchbiegung w vernachlässigbar klein.

Entsprechendes gilt für das Beispiel in *Bild 1.3*. Der Balken ist an beiden Enden horizontal gehalten, sodass infolge der Balkendurchbiegung eigentlich horizontale Auflagerkräfte entstehen, die nur durch Theorie III. Ordnung erfasst werden können.

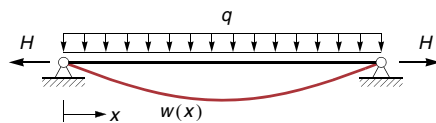


Bild 1.3 Berücksichtigung der Membranwirkung bei Theorie III. Ordnung

1.2 Differenzialgleichung der Theorie II. Ordnung

Wir gehen zunächst von Gl. (1.1) aus und bilden die zweifache Ableitung nach x . Unter der Voraussetzung, dass H konstant ist, folgt:

$$M = M'(q) - H \cdot w(x)$$

$$M'' = (M')'' - H \cdot w''(x) \quad (1.2)$$

Auf den hochgestellten Index II wird verzichtet, unter M ist also das Moment nach Theorie II. Ordnung zu verstehen. Für den Zusammenhang zwischen Moment und Biegelinie gilt unverändert die Beziehung:

$$EIw'' = -M \quad (1.3)$$

da der Einfluss der Theorie II. Ordnung nur in die Gleichgewichtsbedingungen eingeht. Durch zweimaliges Ableiten von Gl. (1.3) und Einsetzen von Gl. (1.2) folgt:

$$(EIw'')'' = -M'' = -(M')' + H \cdot w'(x)$$

Mit der Beziehung

$$(M')' = -q$$

folgt die Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$(EIw'')'' = q + H \cdot w'' \text{ bzw. } (EIw'')'' - H \cdot w'' = q$$

Herleitung am differentiellen Element

Zur Herleitung der Differenzialgleichungen am differentiellen Element betrachten wir das infinitesimale Balken-

element der Länge dx in *Bild 1.4*. Die Zerlegung der resultierenden Schnittkraft erfolgt dabei bezüglich der unverformten Balkenachse.

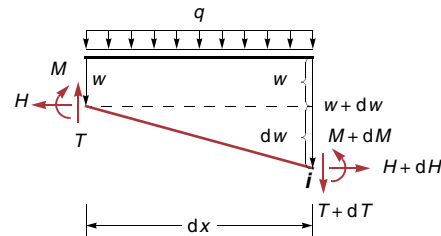


Bild 1.4 Differentielles Element mit Verformung

$$\sum V = 0: -T(x) + T(x) + dT + q(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = T' = -q(x)$$

$$\sum M_{(i)} = 0: -M(x) + M(x) + dM - T(x)dx + H(x)dw - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

Unter Vernachlässigung der Produkte differentieller Größen als von „höherer Ordnung klein“ folgt:

$$dM - T(x)dx + H(x)dw = 0$$

$$\frac{dM}{dx} - T(x) + H(x) \frac{dw}{dx} = 0$$

$$M' = T - Hw' \quad (1.4)$$

$$M'' = T' - (Hw')' \quad (1.5)$$

mit $EIw'' = -M$ bzw. $(EIw'')' = -M'$ folgt:

$$(EIw'')' = -T' + (Hw')'$$

mit $T' = -q$ ergibt sich die Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$(EIw'')' - (Hw')' = q \quad (1.6)$$

Aus Gl. (1.4) folgt:

$$T = M' + Hw' = -EIw''' + Hw' \quad (1.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den Schnittkräften N und V bezüglich der verformten Achse und den Schnittkräften H und T bezüglich der unverformten Achse ist in *Bild 1.5* abzulesen.

$$V = T \cdot \cos \varphi + H \cdot \sin \varphi$$

$$N = -T \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi$$

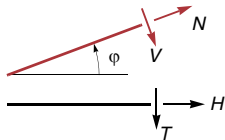


Bild 1.5 Zerlegung der Schnittkräfte

Für kleine Verformungen gilt: $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$. Damit ergibt sich in linearisierter Form:

$$V = T + H \cdot \varphi$$

$$N = -T \cdot \varphi + H$$

Mit der Beziehung $\varphi = -w'$ folgt:

$$V = T - H \cdot w'$$

$$N = T \cdot w' + H \quad (1.8)$$

Da wir kleine Verformungen voraussetzen, ist die Verdrehung $w' = -\varphi$ sehr klein und das Produkt $T \cdot w'$ ist vernachlässigbar, wenn die Horizontalkraft H viel größer ist als die Transversalkraft. Dann gilt näherungsweise:

$$N \approx H \quad (1.9)$$

Aus Gl. (1.4) folgt:

$$M' = T - Hw' = V = -EIw''$$

Die Differenzialgleichungen des Balkens nach Theorie II. Ordnung sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

Tabelle 1.1 Differenzialgleichungen des Balkens nach Theorie II. Ordnung

Differenzialgleichung	Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik
1. Ordnung	$T' = -q$ $M' = T - Hw'$	$\varphi' = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$w' = \gamma - \varphi$
2. Ordnung	$M'' = -q - (Hw')'$	$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$ $w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$\kappa = -w''$
4. Ordnung	$(EIw'')'' - (Hw')' = q$		

Die Änderung gegenüber Theorie I. Ordnung betrifft nur die Spalte des Gleichgewichts.

Lösung der Differenzialgleichung

Wir gehen davon aus, dass die Biegesteifigkeit EI und die Horizontalkraft H bereichsweise konstant sind. Damit folgt die Differenzialgleichung:

$$EIw'''' - Hw'' = q$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Allgemein ergibt sich die Lösung aus der Summe von homogener Lösung w_h und Partikularlösung w_p :

$$w = w_h + w_p$$

• Homogene Lösung

Die homogene Differenzialgleichung lautet:

$$EIw'''' - Hw'' = 0 \quad (1.10)$$

Mit dem Ansatz:

$$w = c \cdot e^{\lambda x}$$

$$w'' = \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

$$w'''' = \lambda^4 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

folgt durch Einsetzen in Gl. (1.10):

$$EI \cdot \lambda^4 \cdot c \cdot e^{\lambda x} - H \cdot \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$(EI \cdot \lambda^4 - H \cdot \lambda^2) \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$

Da $c \cdot e^{\lambda x}$ ungleich null ist, folgt nach Division der Gleichung durch EI die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 - \mu^2 \lambda^2 = 0 \quad \text{mit} \quad \mu^2 = \frac{H}{EI}$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind:

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\mu^2}$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $H > 0$ (Zug)

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm \mu \quad \text{mit} \quad \mu = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 e^{\mu x} + \tilde{c}_4 e^{-\mu x}$$

Die Terme c_1 und $c_2 x$ folgen aus der doppelten Nullstelle $\lambda_{1,2} = 0$.

Mit den Beziehungen:

$$e^{\mu x} = \cosh \mu x + \sinh \mu x$$

$$e^{-\mu x} = \cosh \mu x - \sinh \mu x$$

ergibt sich:

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 (\cosh \mu x + \sinh \mu x) + \tilde{c}_4 (\cosh \mu x - \sinh \mu x)$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + (\tilde{c}_3 + \tilde{c}_4) \cosh \mu x + (\tilde{c}_3 - \tilde{c}_4) \sinh \mu x$$

Die Integrationskonstanten werden umbenannt:

$$c_3 = \tilde{c}_3 + \tilde{c}_4$$

$$c_4 = \tilde{c}_3 - \tilde{c}_4$$

Damit folgt:

$$w_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x$$

2. $H < 0$ (Druck)

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm i\mu \text{ mit } \mu = \sqrt{\frac{|H|}{EI}}$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 e^{i\mu x} + \tilde{c}_4 e^{-i\mu x}$$

Nach Euler/Moivre gilt:

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \sin \mu x$$

$$e^{-i\mu x} = \cos \mu x - i \sin \mu x$$

Durch Einsetzen und Umbenennen der Integrationskonstanten folgt:

$$w_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x \quad (1.11)$$

• Partikularlösung

Für eine konstante Streckenlast folgt die Partikularlösung aus dem Ansatz:

$$w_p = c_5 x^2$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung (1.6) ergibt:

$$-H \cdot c_5 \cdot 2 = q \Rightarrow c_5 = -\frac{q}{2H}$$

Damit lautet die Partikularlösung:

$$w_p = -\frac{q}{2H} x^2$$

Für weitere Belastungen kann die Partikularlösung durch Variation der Konstanten ermittelt werden.

Für den Fall einer Druckkraft ($H < 0$) ergibt sich die Gesamtlösung $w = w_h + w_p$ zu:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x - \frac{q}{2H} x^2 \quad (1.12)$$

Für eine Zugkraft gilt entsprechend:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x - \frac{q}{2H} x^2 \quad (1.13)$$

Die Integrationskonstanten werden durch Anpassen der Gesamtlösung an die Randbedingungen der jeweiligen Problemstellung ermittelt, wie in den nachfolgenden Beispielen gezeigt wird.

Beispiel 1.1

Für den in Bild 1.6 dargestellten Balken sind die Zustandsgrößen nach Theorie II. Ordnung durch Lösung der Differenzialgleichung zu ermitteln.

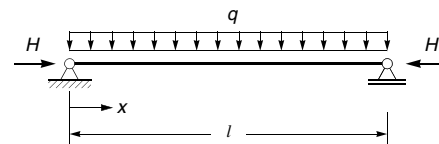


Bild 1.6 System mit Randbedingungen

Aufgrund der beidseitig gelenkigen Lagerung des Balkens sind am Anfangs- und Endpunkt des Balkens die Durchbiegung und das Moment gleich null. Die vier Integrationskonstanten in Gl. (1.12) sind so zu bestimmen, dass diese Randbedingungen erfüllt sind. Die vier Randbedingungen für das vorliegende Problem lauten:

$$1. \quad w(0) = 0$$

$$2. \quad M(0) = 0$$

$$3. \quad w(l) = 0$$

$$4. \quad M(l) = 0$$

Es ergeben sich vier Gleichungen für vier Unbekannte. Die Randbedingungen für das Moment werden mit der Beziehung $EI w'' = -M$ durch die 2. Ableitung der Biegelinie ausgedrückt. Sie ergibt sich zu:

$$w' = c_2 - c_3 \mu \sin \mu x + c_4 \mu \cos \mu x - \frac{q}{H} x$$

$$w'' = -c_3 \mu^2 \cos \mu x - c_4 \mu^2 \sin \mu x - \frac{q}{H}$$

Damit lauten die vier Randbedingungen:

$$w(0) = c_1 + c_3 = 0$$

$$w''(0) = -c_3\mu^2 - \frac{q}{H} = 0$$

$$w(l) = c_1 + c_2 l + c_3 \cos \mu l + c_4 \sin \mu l - \frac{q}{2H} l^2 = 0$$

$$w''(l) = -c_3\mu^2 \cos \mu l - c_4\mu^2 \sin \mu l - \frac{q}{H} = 0$$

In Matrizendarstellung lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & -\mu^2 \cos \mu l & -\mu^2 \sin \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{2H} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ l^2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu^2 H} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{2} \mu^2 \\ -1 \\ \frac{\cos \mu l - 1}{\sin \mu l} \end{bmatrix}$$

Mit der Beziehung:

$$\frac{\cos \mu l - 1}{\sin \mu l} = -\tan \mu \frac{l}{2}$$

folgt:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu^2 H} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{2} \mu^2 \\ -1 \\ -\tan \mu \frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Biegelinie und ihre Ableitungen:

$$w(x) = \frac{q}{\mu^2 H} \left(1 + \frac{l}{2} \mu^2 x - \cos \mu x - \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu x - \frac{\mu^2}{2} x^2 \right)$$

$$w'(x) = \frac{q}{\mu^2 H} \left(\frac{l}{2} \mu^2 + \mu \sin \mu x - \mu \tan \mu \frac{l}{2} \cos \mu x - \mu^2 x \right)$$

$$w''(x) = \frac{q}{H} \left(\cos \mu x + \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu x - 1 \right)$$

$$w'''(x) = \frac{q}{H} \left(-\mu \sin \mu x + \mu \tan \mu \frac{l}{2} \cos \mu x \right)$$

$$M(x) = -EI w'' = -EI \frac{q}{H} \left(\cos \mu x + \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu x - 1 \right)$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = -EI \frac{q}{H} \left(\cos \mu \frac{l}{2} + \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu \frac{l}{2} - 1 \right)$$

$$= -EI \frac{q}{H} \left(\frac{\cos^2 \mu \frac{l}{2} + \sin^2 \mu \frac{l}{2}}{\cos \mu \frac{l}{2}} - 1 \right)$$

$$M_{\max} = EI \frac{q}{H} \left(1 - \frac{1}{\cos \mu \frac{l}{2}} \right) \quad (1.15)$$

Aus Gl. (1.15) ist zu erkennen, dass der Betrag des maximalen Momentes unendlich groß wird, wenn der Nenner des Bruchs in der Klammer gleich null ist. Damit folgt:

$$\cos \mu \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \mu \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{H}{EI}} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow H = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Dies ist die aus der Festigkeitslehre bekannte *Eulersche Knicklast* für den beidseitig gelenkig gelagerten Balken. Im Falle einer Zugkraft erhält man analog:

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = EI \frac{q}{H} \left(1 - \frac{1}{\cosh \mu \frac{l}{2}} \right)$$

In diesem Fall ist $M_{\max}$ immer endlich, da gilt:

$$\frac{1}{\cosh \mu \frac{l}{2}} \leq 1$$

Wie aus Gl. (1.15) deutlich wird, ist bei einer konstanten Horizontalkraft das Moment proportional zur Streckenlast q , es besteht also ein linearer Zusammenhang.

Bei einer *gleichzeitigen* Steigerung von q und H ergibt sich jedoch ein nichtlinearer Zusammenhang, da H durch den Parameter μ als Argument in die Kosinusfunktion eingeht.

1.3 Spannungs- und Stabilitätsproblem

Ist bei einem Tragwerk eine Einwirkung vorhanden, die schon bei geringer Intensität eine Verformung erzeugt, so wird diese Verformung durch den Einfluss einer vorhandenen Druckkraft vergrößert. Dieser Fall wird als *Spannungsproblem* bezeichnet. Fehlt eine solche Einwirkung, so liegt ein *Stabilitätsproblem* vor. Die beiden Fälle sind in *Bild 1.7* am Beispiel eines Einfeldbalkens dargestellt.

Links im Bild ist der Balken durch eine Einzelkraft quer zur Balkenachse beansprucht. Diese Einzelkraft erzeugt von Anfang an eine Durchbiegung, die infolge der Druckkraft H vergrößert wird. Es liegt ein Spannungsproblem vor.

Rechts im Bild ist zunächst eine reine Normalkraftbeanspruchung vorhanden, der Balken wird bei idealer Geometrie nicht gebogen. Wird nun die Druckkraft H gesteigert, so erfolgt ein plötzliches seitliches Ausweichen des Balkens, wenn die Kraft eine bestimmte Größe erreicht. Dieses Phänomen wird als Knicken bezeichnet, es liegt ein Stabilitätsproblem vor.

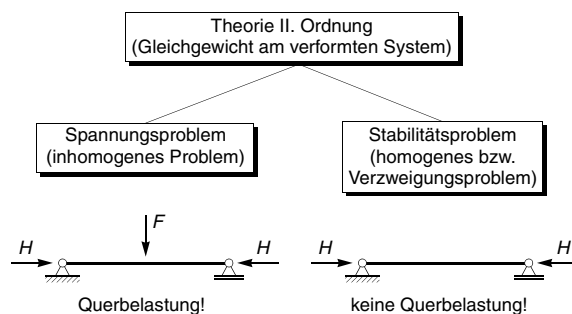


Bild 1.7 Spannungs- und Stabilitätsproblem

Mathematisch ist das Stabilitätsproblem dadurch charakterisiert, dass die Differenzialgleichung homogen ist.

Bild 1.8 zeigt den grundsätzlichen Verlauf des Last-Verformungsdiagramms für Druck- und Zugbeanspruchung. Dargestellt ist die Durchbiegung w der Kragarmspitze in Abhängigkeit des Faktors λ , mit dem sowohl die Horizontalkraft H , als auch die Vertikalkraft F gesteigert werden. Ist die Vertikalkraft F ungleich null, liegt ein

Spannungsproblem vor, und es ergeben sich die beiden gekrümmten Verläufe. Im Falle einer Druckkraft nehmen die Verformungen überproportional zu, im Fall einer Zugkraft ist die Verformungszunahme unterproportional.

Im Fall des Stabilitätsproblems ist keine Vertikalkraft vorhanden, und es entsteht zunächst keine Verformung w . Bei einer Steigerung der Horizontalkraft bis zur Größe der Knicklast versagt der Kragarm schlagartig, und es ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Wie in *Bild 1.8* eingetragen ist, wird dieser Punkt als *Verzweigungspunkt* bezeichnet, da eine Verzweigung von einem stabilen zu einem instabilen Gleichgewichtszustand erfolgt. Die Last-Verformungskurve für das Spannungsproblem bei einer Druckkraft nähert sich asymptotisch der Knicklast, während bei einer Zugkraft keine Grenzlast existiert. Beide Kurven haben im Ursprung die Steigung der Geraden nach Theorie I. Ordnung.

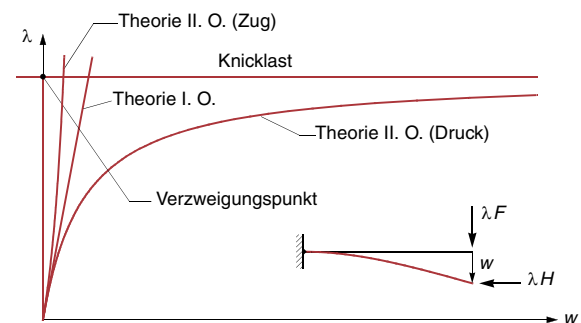


Bild 1.8 Last- Verformungsdiagramm für Theorie I. und II. Ordnung

Die mechanische Bedeutung der Steigung ist die einer Steifigkeit. Eine Steifigkeit ist die Kraftgröße, die sich infolge einer Verformung der Größe eins ergibt. Da der auf der Ordinate aufgetragene Wert γ die Größe der Kraft darstellt, hat demnach die Ableitung $d\gamma/dw$ die Bedeutung einer Steifigkeit. Daraus folgt, dass eine Druckkraft das System weicher macht, eine Zugkraft hingegen versteifend wirkt.

Wie wir bereits in *Beispiel 1.1* gesehen haben, besteht bei einer *gleichzeitigen* Steigerung von Querlast und Horizontalkraft ein nichtlinearer Zusammenhang, sodass das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt. Dies hat zur