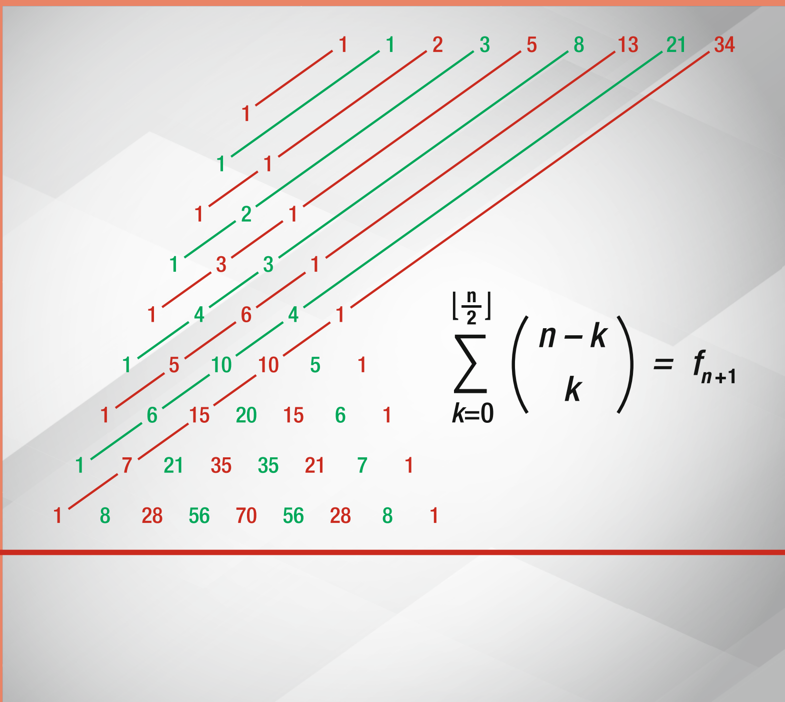
Claudia Albertini
Martin Huber

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Grundbegriffe der Mathematik

Logik – Mengen – Relationen und Funktionen – Zahlbegriff



3., überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Albertini, Huber

Grundbegriffe der Mathematik

Claudia Albertini, Martin Huber

Grundbegriffe der Mathematik

Logik – Mengen – Relationen und Funktionen – Zahlbegriff

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Die ersten beiden Auflagen sind unter dem Titel "EAGLE-STARTHILFE. Grundbegriffe der Mathematik." beim Verlag Edition am Gutenbergplatz Leipzig erschienen.

Die Autoren:

Dr. Claudia Albertini, PH Zürich und Universität Zürich

Dr. Martin Huber, FH Winterthur und Universität Zürich

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
www.fsc.org

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Hintergrund Titelmotiv: © shutterstock.com/BK_graphic
Grafiken: Claudia Albertini, Martin Huber
Satz: le-tex publishing services, Leipzig
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47563-2
E-Book-ISBN 978-3-446-47723-0

Vorwort

Vorwort zur dritten Auflage

Wir freuen uns sehr, dass wir eine dritte überarbeitete und erweiterte Auflage dieses Buches beim Hanser Verlag publizieren können. Der größere Umfang gibt uns Gelegenheit, jedes Kapitel mit Aufgaben zu versehen. Zudem haben wir den Text um mehrere kleine Exkurse bereichert, die als „Wissenswert“ gekennzeichnet sind.

Bedanken möchten wir uns bei Frau Natalia Silakova vom Hanser Verlag für die begeisterte Aufnahme der „Grundbegriffe“, sowie bei den Assistierenden der UZH Violetta Weger und Zouhair Ouaggag für ihre wertvollen Beiträge zu den Aufgaben.

Uster und Zürich, im November 2022 — Claudia Albertini / Martin Huber

Vorwort zur zweiten Auflage

Der Erfolg der ersten Auflage 2014 ermöglicht bereits jetzt eine zweite, bearbeitete und erweiterte Auflage 2015. Die zweite Auflage enthält zusätzlich einen Abschnitt über die symmetrische Differenz von Mengen. Zudem wurden einige Aktualisierungen und Korrekturen vorgenommen.

Zürich, im Januar 2015 — Martin Huber / Claudia Albertini

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist aus der Vorlesung „Grundbegriffe der Mathematik“ entstanden, welche seit vielen Jahren an der Universität Zürich für Studierende des Sekundarlehramtes gehalten wird. Es wendet sich nicht nur an zukünftige Lehrpersonen, sondern auch an Studierende der Informatik und anderer technisch orientierter Studiengänge.

In den ersten beiden Kapiteln geht es um den sprachlichen Aspekt der Mathematik. In der Logik, dem Thema des ersten Kapitels, werden formale Sprachen betrachtet, welche zwar ein Optimum an Präzision bieten, jedoch eher unanschaulich sind. In diesem einführenden Buch wird bewusst nicht zwischen Syntax und Semantik unterschieden. Das zweite Kapitel ist den Mengen gewidmet. Mit der Mengensprache hat sich ein Werkzeug herausgebildet, welches ebenso präzis ist wie die Sprache der Prädikatlogik, ohne dass bei dessen Verwendung auf Anschaulichkeit verzichtet werden muss. Die meisten mathematischen Grundbegriffe basieren deshalb heute, sowohl in der Theorie als auch in ihren Anwendungen, auf dem Mengenbegriff. Letzteres gilt insbesondere für Relationen und Funktionen, welches die Themen des zentralen dritten Kapitels sind. Funktionen werden hier als spezielle Relationen definiert. Ein separater Abschnitt ist den Äquivalenz- und Ordnungsrelationen gewidmet.

In den Kapiteln 1 bis 3 geben Zahlen und Zahlmengen immer wieder Beispiele ab, mit deren Hilfe Grundbegriffe der Mathematik illustriert werden. Umgekehrt werden im vierten Kapitel die eingeführten Grundbegriffe zum Aufbau der Zahlen verwendet. Die Menge der natürlichen Zahlen wird hier axiomatisch eingeführt. Der Fokus liegt dabei auf Induktion und Rekursion. Für die Erweiterung zu den Mengen der ganzen bzw. rationalen Zahlen werden dann geeignete Modelle konstruiert. Im letzten Kapitel geht es schließlich um die Mächtigkeit endlicher Mengen, mit einem Ausblick in die Kombinatorik und einer Herleitung des Binomischen Lehrsatzes.

Danken möchten wir dem ehemaligen Direktor der Sekundar- und Fachlehrerausbildung an der Universität Zürich, Herrn Walter Hohl, der die Vorlesung zunächst gehalten und später mit großem Wohlwollen begleitet hat. Ein besonderer Dank geht an die beiden Assistenten an der Universität Zürich Tobias Berner und Marko Seric für die kompetente Hilfe beim Erstellen der Druckvorlage des Manuskripts.

Außerdem danken wir Herrn Jürgen Weiß vom unabhängigen Wissenschaftsverlag „Edition am Gutenbergplatz Leipzig“ für die gute und effiziente Zusammenarbeit.

Zürich, im Januar 2014 — Martin Huber / Claudia Albertini

Inhalt

1 Logik

Es geht zunächst um die Frage, welche *Sprache* für den präzisen Ausdruck mathematischer Sachverhalte geeignet sei. Die *Umgangssprache* ist anschaulich und handlich, jedoch sind viele ihrer Ausdrücke und Wendungen unscharf oder mehrdeutig. Deshalb ist sie für unsere Zwecke nicht immer geeignet. In der Mathematischen Logik werden *formale Sprachen* betrachtet. Eine solche Sprache bietet das Maximum an Präzision, sie ist jedoch eher unanschaulich und unhandlich.

1.1 Sprachliche Grundelemente

In jeder wissenschaftlichen Theorie werden Erfahrungsbereiche in Begriffe gefasst. Begriffe werden in einer *Sprache* formuliert, und diese Sprache ist aus gewissen *Grundelementen* aufgebaut. In der Mathematik sind diese Grundelemente die *Konstanten* und die *Variablen*.

Beispiel 1 (aus der Arithmetik):

- Konstante: „Zahl", 0, 1, +, π (Kreiszahl), e (Eulersche Zahl)
- Variable: $a, b, c, \ldots, x, y, z; A, B, C, \ldots$ (lateinische Buchstaben)

Die **Konstanten** haben eine genau festgelegte Bedeutung, die im Laufe der Überlegungen unverändert bleibt. Die **Variablen** haben keine selbständige Bedeutung; sie stehen für gewisse Objekte (in der Arithmetik meist für Zahlen) – sie sind Platzhalter, Leerstellen (wie bei einem Formular).

Zur *Illustration des Unterschieds* zwischen Konstanten und Variablen: Die Frage, ob 0 eine ganze Zahl sei, ist sinnvoll; sie kann mit *ja* oder *nein* beantwortet werden. Hingegen macht die Frage: „Ist x eine ganze Zahl?" keinen Sinn.

Aussagen und Aussageformen

Eine **Aussage** (im Sinne von Aristoteles[1]) ist ein sprachliches Gebilde (im weitesten Sinne), von dem prinzipiell feststeht, ob es *wahr* oder *falsch* ist.

Bild 1.1 Aristoteles

Beispiel 2

a) Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz.

b) $2+3=5$.

c) Die Gleichung $x^3+y^3=z^3$ besitzt außer der trivialen keine ganzzahligen Lösungen.

d) Tycho Brahe wurde 1601 von J. Kepler vergiftet.

e) $x+3=5$

Nach der obigen Umschreibung sind die Beispiele a) bis d) Aussagen: a) ist falsch, b) ist wahr. Bei c) und d) sind wir zwar überzeugt, dass sie entweder wahr oder falsch sind; wir sind jedoch nicht in der Lage, dies zu entscheiden. Dass Aussage c) wahr ist, hat schon Leonhard Euler[2] bewiesen. Diesen Beweis nachzuvollziehen erfordert jedoch mathematische Kenntnisse, die über das hinausgehen, was man am Gymnasium üblicherweise gelernt hat. Der Beweis, dass c) wahr ist, war ein erster Schritt zur Lösung des berühmten Fermatschen Problems (vgl. Kapitel 2, S. 30). Zu d): Seit kurzem weiß man, dass Tycho Brahe an einer Bleivergiftung gestorben ist. Diese Tatsache hat zu wilden Spekulationen geführt. Beispiel e) ist keine Aussage: Da x eine Variable ist, kann nicht entschieden werden, ob dies wahr oder falsch ist.

„$x+3=5$“ ist eine **Aussageform**, d. h. ein sprachliches Gebilde mit mindestens einer Variablen, welches nach Einsetzen von Konstanten für die Variablen in eine Aussage übergeht. Hier ist z. B. „$2+3=5$“ eine wahre, „$0+3=5$“ hingegen eine falsche Aussage.

[1] Aristoteles (384–322 v. Chr.), bedeutender griechischer Philosoph

[2] Leonhard Euler (1707–1783), bedeutender Schweizer Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur

Begriff der Lösung

Eine gegebene Aussageform wird von einer Konstanten **erfüllt**, falls durch Einsetzen dieser Konstanten eine wahre Aussage entsteht. Man sagt, diese Konstante sei eine **Lösung** der betreffenden Aussageform.

Beispiel 3

a) „$x+3=5$“: 2 ist Lösung; 0, 1 sind keine Lösungen.

b) „$x+y=5$“: die Paare $(2,3)$, $(1,4)$ sind Lösungen.

c) „$x<3$“: 1, 2 sind Lösungen; 3, 4 sind keine Lösungen.

Begriff des Terms

„x^2-5x+6“ ist keine Aussageform, sondern ein (arithmetischer) *Term*.

Terme können *iterativ* (d. h. schrittweise) wie folgt definiert werden:

1. Konstante und Variable sind Terme.
2. Ersetzen einer Variablen durch einen Term ergibt wieder einen Term.
3. Ausüben der im betrachteten Bereich definierten Operationen auf Terme liefert wieder Terme.

Beispiel 4 (aus der Arithmetik):

$$T_1 := x^2-5x+6\,, \qquad T_2 := 2^n+1\,, \qquad T_3 := \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,.$$

Die Terme T_1, T_2, T_3 sind aus Konstanten und Variablen mittels mehrfacher Anwendung von 3. gebildet worden.

Zur Anwendung von Regel 2.:

- Einsetzen von 4 in den Term T_1 liefert den Term $4^2-5\cdot 4+6$.
- Einsetzen von T_2 in T_1 liefert $(2^n+1)^2-5\,(2^n+1)+6 =: T_4$. Durch Umformung erhalten wir $2^{2n}-3\cdot 2^n+2 =: T_5$.
  Beachte, dass die Terme T_4 und T_5 verschieden sind. Da das Einsetzen einer beliebigen Konstanten stets dasselbe Ergebnis liefert, nennt man sie *äquivalent* (deutsch: *gleichwertig*).

Generelle und existentielle Aussagen

1. Die Aussageform „$x+y=y+x$“ ist im Bereich der (ganzen) Zahlen **allgemeingültig** oder eine **Identität**; d. h. sie wird von jeder Zahl erfüllt. Dies kann auch so ausgedrückt werden:

   „Für beliebige Zahlen x, y gilt: $x+y=y+x$.“

Damit ist die gegebene allgemeingültige Aussageform in eine wahre Aussage übergegangen. Kürzer schreiben wir:

$$\forall x, y\, (x + y = y + x) \qquad \text{oder präziser:} \qquad \forall x \forall y\, (x + y = y + x)\,.$$

Dies ist eine **generelle** Aussage; sie wird eingeleitet durch den **Allquantor** „$\forall x, y$“ (in Worten: „für alle x, y“). Durch Voransetzen des Quantors „$\forall x, y$“ sind die ursprünglich *freien* Variablen x, y *gebunden* worden. Durch Binden der freien Variablen geht eine Aussageform in eine Aussage über.

2. Die Aussageform „$x > y + 1$“ ist nicht allgemeingültig. Durch Voransetzen des Allquantors „$\forall x, y$“ geht sie demzufolge in eine falsche Aussage über. (Beachte, dass *ein* Gegenbeispiel genügt!) Hingegen ist folgende Aussage wahr:

   „Es gibt eine Zahl x und es gibt eine Zahl y so, dass $x > y + 1$.“

   Setzt man nämlich $x = 4$ und $y = 2$ ein, so ist die Ungleichung erfüllt. (Beachte, dass eine Lösung genügt!)

   Für die obige Aussage schreiben wir kürzer:

   $$\exists x, y\, (x > y + 1) \qquad \text{oder präziser:} \qquad \exists x \exists y\, (x > y + 1)\,.$$

   Dies ist eine **existentielle** Aussage ; sie wird eingeleitet durch den **Existenzquantor** „$\exists x, y$“ (in Worten: „es gibt x, y“). Wiederum *bindet* der Quantor „$\exists x, y$“ die ursprünglich *freien* Variablen x, y.

3. In der Formel $\forall x, y\, \exists z\, (x = y + z)$ sind alle drei Variablen x, y, z durch Quantoren gebunden. Es handelt sich also um eine (wahre) Aussage; es ist dies eine sog. **bedingt existentielle Aussage**.

   Hingegen ist die Formel $\exists z\, (x = y + z)$ eine (allgemeingültige) Aussageform mit den freien Variablen x, y.

Bemerkung Auch in anderen Bereichen der Mathematik können Variable gebunden werden, beispielsweise

- $\sum_{k=1}^{n} k^2$: n ist eine freie, k eine gebundene Variable.
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$: f, a, b sind freie, x ist eine gebundene Variable.

Zur Bedeutung der Variablen

Die Verwendung von Variablen kann das Formulieren und Beweisen von mathematischen Lehrsätzen wesentlich erleichtern.

Beispiel 5 [Tar77, S. 26/27]

$$\forall\, x, y\, \left[\, x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + x \cdot y + y^2\right)\right]$$

Formulierung ohne Variable:
„Die Differenz der dritten Potenzen zweier beliebiger Zahlen ist gleich dem Produkt der Differenz dieser Zahlen und der Summe dreier Summanden, von denen der erste das Quadrat der ersten Zahl, der zweite das Produkt der beiden Zahlen und der dritte das Quadrat der zweiten Zahl ist.“