Günter Mühlbach

Repetitorium Stochastik

Ein Zugang über Beispiele

HANSER

Einige Definitionen und Formeln

Mathematische Symbole findet man im **Symbolverzeichnis** am Ende des Buches. Die Seiten, auf denen ausführliche Behandlungen der hier abgedruckten **Begriffe** und Formeln stehen, findet man unter deren **Namen** im **Index** am Ende des Buches.

Das Axiomensystem von Kolmogorov

E sei die Menge aller Elementarereignisse, die zu einem bestimmten Zufallsexperiment gehören. Ein System $S \subset \mathcal{P}(E)$ heißt **Ereignisfeld über** E, wenn

(i) $E \in S, \quad \emptyset \in S$

(ii) $A \in S \Rightarrow E \backslash A = \overline{A} \in S$

(iii) $A_i \in S \quad (i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in S, A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in S.$

Die Elemente eines Ereignisfeldes heißen (zufällige) **Ereignisse**. Eine Funktion $\mathcal{P} : \mathcal{S} \mapsto [0,1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsbelegung**, wenn

(iv) $P(A) \geq 0$ für jedes $A \in S$

(v) $P(E) = 1$

(vi) Aus $A_i \in S \quad (i = 1, 2, \ldots)$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$ (σ-**Additivität**)

Für jedes Ereignis $A \in S$ heißt die Zahl $P(A)$ die **Wahrscheinlichkeit des Ereignisses** A. Das Tripel (E, S, P) heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

(i) $P(\emptyset) = 0, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis A.

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ **Gegenwahrscheinlichkeit** zu A.

(iii) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ Die Wahrscheinlichkeit ist **monoton**.

(iv) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ **Additionssatz**

(v) $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

(vi) $$P(\sum_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n} P(A_{j_1} \cdot \ldots \cdot A_{j_k})$$
Formel von **Poincaré-Sylvester**

$P(A|B) := \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ **bedingte Wahrscheinlichkeit**

(vii) $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$
Produktsatz

Es seien A_k paarweise unvereinbare Ereignisse mit positiven Wahrscheinlichkeiten, deren Summe das sichere Ereignis E ist (**vollständige Fallunterscheidung**). Dann gilt für jedes Ereignis A

$$P(A) = \sum_{k} P(A_k) \cdot P(A|A_k).$$ **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**

Wenn $P(A) > 0$ ist, gilt $$P(A_k|A) = \frac{P(A_k) \cdot P(A|A_k)}{\sum_{i} P(A_i) \cdot P(A|A_i)}.$$

Satz von Bayes oder Satz von der **Wahrscheinlichkeit a posteriori**

Zufallsvariable

Es sei (E, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine **Zufallsvariable** (ZV) ist eine Abbildung $X : E \to \mathbb{R}$, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $X^{-1}(-\infty, x) \in S$ $\big(\Leftrightarrow$: $X < x$ ist ein Ereignis$\big)$. **kumulative Verteilungsfunktion**:

$$F(x) := F_X(x) := P(X < x) := P(X^{-1}(-\infty, x))$$

diskrete Zufallsvariable: nimmt nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte $x_1, x_2, \ldots$ mitWahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = p_i$ an, $p_1 + p_2 + \cdots = 1$.

Verteilung: $f(x) = \begin{cases} p_i & \text{, wenn } x = x_i,\ i = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

stetige Zufallsvariable: besitzt eine **integrierbare Dichtefunktion** f $(f(x) := F'(x)$, wo F differenzierbar ist)

$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i < x} p_i & \text{, } X \text{ diskrete ZV} \\ \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, & X \text{ stetige ZV} \end{cases}$	$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$ $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$

X Zufallsvariable und g Funktion $\Longrightarrow$ $g \circ X = g(X)$ Zufallsvariable

Parameter einer Verteilung

Erwartungswert: $\mu = E[X]$ (auch **Mittelwert** genannt)

Varianz oder **Streuung**: $\sigma^2 = V[X] := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V[X]}$

	E[X]	E[g(X)]	V[X]	
X diskr.	$\sum\limits_i x_i \cdot p_i$, wenn $\sum\limits_i \lvert x_i \rvert \cdot p_i < \infty$	$\sum\limits_i g(x_i) \cdot p_i$, wenn $\sum\limits_i \lvert g(x_i) \rvert \cdot p_i < \infty$	$\sum\limits_i (x_i - E[X])^2 p_i$	$p_i =$ $P(X = x_i)$
X stetig	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$, wenn $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert x \rvert f(x)\, dx < \infty$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$, wenn $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert g(x) \rvert f(x)\, dx < \infty$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)\, dx$	$f(x)$ Dichte, $g(X)$ Funktion von X.

Quantil von F zur W. p: x_p mit $F(x_p) \le p \le F(x_p + 0) := \lim\limits_{x \to x_p +} F(x)$

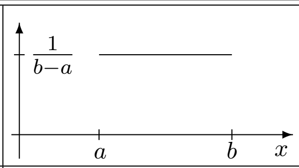
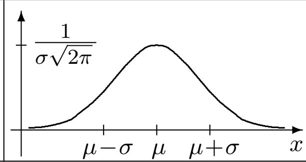
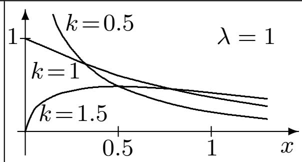
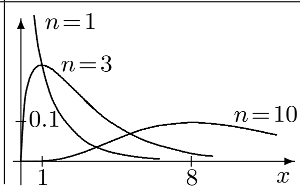
Median: $x_{\frac{1}{2}}$

Moment k–ter Ordnung: $m_k = E[X^k]$

k–tes **zentrales Moment**: $\mu_k = E[(X - E[X])^k]$, $\quad \mu_2 = \sigma^2$

Standardisierung von X**:** $X^* := \frac{1}{\sqrt{V[X]}}(X - E[X]) \Rightarrow \begin{cases} E[X^*] = 0 \\ V[X^*] = 1 \end{cases}$

Verteilungen einiger stetiger Zufallsvariablen

Verteilung	**Wert–menge $W(X)$**	**Dichte $f: W(X) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$**	$E[X]$	$V[X]$	**Diagramm** der Dichte
Gleich–Verteilung in $[a,b]$ (Rechtecks–verteilung)	(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normal–Verteilung $N(\mu,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	μ	σ^2	
Gamma–Verteilung $\Gamma(k,\lambda)$	$(0,\infty)$	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$	
χ^2 **–Verteilung** mit n Freiheitsgraden $\chi^2_n = \Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$	$(0,\infty)$	$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$	n	$2n$	

Übersicht über einige diskrete Verteilungen

Verteilung von N	Wertmenge von N	$P(N=k)$	$E[N]$	$V[N]$
Null–Eins–Verteilung	$1, 0$	p $q := 1-p$	p	$p \cdot q$
Binomial–Verteilung $B(n,p)$	$0, 1, \ldots, n$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	nqp
hypergeometr. Verteilung $H(N,r,n)$	$\max\{0, n-(N-r)\} \le k \le \min\{n,r\}$	$\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{r}{N}$	$n\frac{r}{N}\frac{N-r}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Poisson–Verteilung $P(\lambda)$	$0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung mit dem Parameter p	$0, 1, 2, \ldots$	$p \cdot q^k$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Zwei oder mehr **vollständige Fallunterscheidungen** eines Zufallsexperimentes $A_1 + A_2 + \ldots = E, B_1 + B_2 + \ldots = E, \ldots$ heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle möglichen Indizes $\kappa, \lambda, \ldots$ gilt: $P(A_\kappa \cdot B_\lambda \cdots) = P(A_\kappa)P(B_\lambda) \cdots$.
Zwei oder mehr **Ereignisse** $A, B, \ldots$ heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn die Fallunterscheidungen $A + \overline{A} = E, B + \overline{B} = E, \ldots$ unabhängig sind. Zwei oder mehr Zufallsvariablen $X, Y, \ldots$ heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle $x, y, \ldots \in \mathbb{R}$ die Ereignisse $X < x, Y < y, \ldots$ unabhängig sind.

Summen von unabhängigen Zufallsvariablen

X_1	X_2	$S = X_1 + X_2$
$B(n_1, p)$	$B(n_2, p)$	$B(n_1 + n_2, p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1 + \lambda_2)$
$N(\mu_1, \sigma_1^2)$	$N(\mu_2, \sigma_2^2)$	$N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
$\Gamma(k_1, \lambda)$	$\Gamma(k_2, \lambda)$	$\Gamma(k_1 + k_2, \lambda)$

$X_1 \sim B(n_1, p) \quad :\Longleftrightarrow \quad X_1$ besitzt eine $B(n_1, p)$–Verteilung

Zentraler Grenzwertsatz

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$ fr̈ alle $i = 1, 2, \ldots$. Dann gilt:

(1) $\bar{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ asymptotisch, für $n \to \infty$

(2) $Z_n := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1),$ asymptotisch, für $n \to \infty$ d.h.

(3) $P(Z_n < z) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

(4) $P(Z_n < z) = \Phi(z)$, wenn $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sqrt{n}$–Gesetz

Grenzwertsatz von Moivre–Laplace

$X_n \sim B(n, p) \Longrightarrow X_n \sim N(np, np(1 - p))$ asymptotisch ist, für $n \to \infty$

$\Longrightarrow \quad Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$ asymptotisch für $n \to \infty$

$P(Z_n < z) \approx \Phi(z)$ sehr gute / gute Näherung, wenn $n \cdot p(1-p)$ > 9 / > 4 ist.

Gesetz seltener Ereignisse

$X_n \sim B(n, p_n)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot p_n = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n \to \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ k \in \mathbb{N}_0$

Stochastik

Ein Zugang über Beispiele

Günter Mühlbach

1. Auflage, Ebook

Binomi Verlag Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon 05105 6624000
E-Mail verlag@binomi.de

Zu beziehen beim Verlag

ISBN 978-3-923 923-81-6

Hannover 4/21

Vorwort

Aus schriftlichen Begleitungen zu zweistündigen Vorlesungen entstanden, die der Verfasser wiederholt für Studierende der Ingenieurwissenschaften und für Lehramtskandidaten gehalten hat, ist im Jahr 2000 das Skript "Repetitorium der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik" erschienen. Sein Hauptanliegen lag auf einer möglichst anschaulichen, durch viele Beispiele motivierten Einführung in die Grundbegriffe und Methoden von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Dabei wurden nur mathematische Vorkenntnisse vorausgesetzt, wie sie heute üblicherweise in der Sekundarstufe II vermittelt werden, auf jeden Fall aber in den Grundkursen der Ingenieurmathematik an Universitäten oder Fachhochschulen.

Das vorliegende Skript **"Stochastik - Ein Zugang über Beispiele"** ist eine erweiterte Neubearbeitung des "Repetitoriums". Einige Korrekturen sind vorgenommen worden, und viele Beispiele und Aufgaben sind hinzugefügt worden.

Zu jedem Abschnitt werden Aufgaben gestellt, deren Ergebnisse im letzten Abschnitt angegeben sind. Es wird dem Leser empfohlen, diese Aufgaben zu bearbeiten und die erzielten Ergebnisse mit den angegebenen zu vergleichen. Der ausführliche Index soll Lesern mit Vorkenntnissen den Quereinstieg zu ihren Themen erleichtern. Dabei wird das Symbolverzeichnis (am Ende des Buches) nützlich sein.

Für ein weitergehendes und vertieftes Studium der Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik) sind die in der Literaturliste aufgeführten Bücher hilfreich. An vielen Stellen des Skriptes habe ich Verweise (mit Seitenangaben) auf Titel der Literaturliste eingefügt. Dort findet man den Beweis, der im Skript an der betreffenden Stelle nicht ausgeführt worden ist. Die Hinweise auf Statistik-Software mögen dem an Anwendungen Interessierten die Bearbeitung seiner Aufgaben erleichtern. Ich habe einige web-Adressen angegeben, wo man interessante applets oder Animationen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung findet. Alle aufgeführten web-Adressen sind vom Stand: Oktober 2011 .

Ich hoffe, dass bei der Neubearbeitung der Charakter des Skriptes als ein kompakter und dennoch tiefergehender Zugang zur Stochastik erhalten geblieben ist.

Hannover, im Oktober 2011 Günter Mühlbach

1 Einleitung

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik entstanden als mathematische Theorien aus dem Wunsch, zufällige Vorgänge mathematisch zu beschreiben. Man fasst heute beide unter der Bezeichnung **Stochastik**[1] zusammen. Die Stochastik stellt gewissermaßen als Präzisierung der Erfahrungswelt mathematische Modelle bereit, die für Anwendungen auf zufällige Vorgänge in Technik, Wirtschaft, Medizin usw. jeweils geeignet anzupassen sind.

Wie jede mathematische Theorie operiert die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Grundbegriffen, die inhaltlich nicht definiert, sondern von denen nur einige Eigenschaften axiomatisch gefordert werden. Bei Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind ihre Grundbegriffe geeignet zu interpretieren, d.h. in Beziehung zu setzen mit Begriffen in dem betreffenden Anwendungsbereich. Die Statistik lehrt Methoden, wie das geschehen kann.

Innerhalb des wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells einer Anwendung lassen sich rein rechnerisch aus speziellen Annahmen über die Verteilung von Grundwahrscheinlichkeiten abgeleitete Wahrscheinlichkeiten bestimmen: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet; die Statistik lehrt, wie man jene Grundwahrscheinlichkeiten ermittelt. Letzteres ist jedoch nicht eindeutig, nur im Sinne eines Eingrenzens und nur mit einer gewissen, jedoch genau abschätzbaren Sicherheit durchführbar.

Mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik kann man Hypothesen über einen Erfahrungsbereich nicht beweisen, ebensowenig wie man die Gesetze der Physik im mathematischen Sinne beweisen kann. In beiden Fällen ist nur eine Prüfung an Hand von Erfahrungen möglich. Jedoch kann die Statistik mit vorgegebenem (positiven) Irrtumsrisiko Hypothesen daraufhin überprüfen, ob sie mit vorliegenden Erfahrungsdaten verträglich sind.

Eine weitere Hauptaufgabe der Statistik ist es, aus Stichproben Rückschlüsse auf größere Gesamtheiten zu ziehen. Weil das möglich ist, wenn auch wiederum nur mit abschätzbarem Irrtumsrisiko, finden die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik immer größere Anwendungsbereiche, und zwar auch deshalb, weil sie gegenüber anderen Methoden (wenn überhaupt außer statistischen noch andere, z.B. deterministische Methoden anwendbar sind) im allgemeinen die Vorteile haben, relativ einfach und billig zu sein.

[1] griechisch: ὁ $\sigma\tau\acute{o}\chi o\sigma$ = das Vermutete

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

a	j	s
b	k	t
c	l	u
d	m	v
e	n	w
f	o	x
g	p	y
h	q	z
i	r	

1 Vorbereitungen

1.1 Naive Mengenlehre

In der Mathematik wird jede Zusammenfassung von (mehreren) verschiedenen Gegenständen zu einer Gesamtheit eine **Menge** genannt.

Eine **Menge** ist definiert, wenn feststeht, welche Objekte zu dieser Menge gehören und welche nicht. Die zur Menge gehörigen Objekte heißen ihre **Elemente**.

Die in der Mathematik betrachteten Gegenstände werden durch Symbole bezeichnet, und zwar meist durch Buchstaben. Z.B. werden Mengen im folgenden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Es gibt zwei Möglichkeiten Mengen zu definieren:

- Durch Aufzählung ihrer Elemente, die in (beliebiger Reihenfolge) zwischen geschweiften Klammern {**Mengenklammern**} geschrieben und durch Kommata getrennt werden: $A = \{\ldots, \ldots, \ldots\}$.

- Durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft der Elemente der Menge: $A = \{x|x$ hat die Eigenschaft $\ldots\}$ (gesprochen: A ist die Menge aller x mit der Eigenschaft ...).

Beispiel 1

$A := \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ = Menge derjenigen natürlichen Zahlen, durch die sich 20 ohne Rest teilen läßt.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\} \\ &= \{n|n \text{ ist eine ganze positive (= \textbf{natürliche}) Zahl }\} \\ &= \text{Menge der natürlichen Zahlen.} \end{aligned}$$

Beispiel 3

B = Menge aller (auch sinnloser) Wörter mit genau 4 Buchstaben
= { aaaa, aaab, aaac, ..., aaaz, aaba, aabb, ..., aber, ..., zzzz}

Beispiel 4

$C = \{x|x$ ist ein mögliches Ziehungsergebnis beim Zahlenlotto 6 aus 49$\}$

Gehört ein Objekt a einer Menge M an, so schreibt man

$$a \in M$$

(gesprochen: a ist **Element** von M). Gehört a nicht zu M, so schreibt man

$$a \notin M$$

Beispiel 5

$1 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

Wenn jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B ist, nennt man A eine **Teilmenge** von B und schreibt

$$A \subset B$$

Man sagt auch, A ist in B enthalten.

Beispiel 6

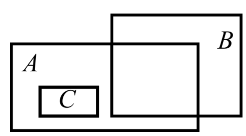
Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst: $A \subset A$.

Beispiel 7

Die Menge A aus Bsp. 1 ist eine Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

Beispiel 8

Von den nebenstehend skizzierten Punktmengen ist C eine Teilmenge von A, jedoch nicht B.



Es ist zweckmäßig, eine Menge zu definieren, die kein Element enthält; die sogenannte **leere Menge** $\emptyset$:

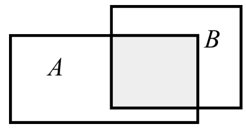
$$\emptyset := \text{ die Menge, die kein Element enthält.}$$

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Zu je zwei Mengen A und B kann man die folgenden Mengen bilden:

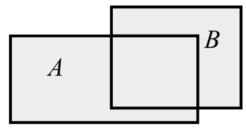
$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

$A \cap B$ heißt der **Durchschnitt** der Mengen A und B (grau).



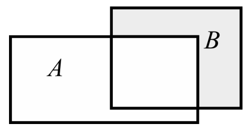
$$A \cup B := \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$A \cup B$ heißt die **Vereinigung** der Mengen A und B (grau).



$$B \backslash A := \{x | x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

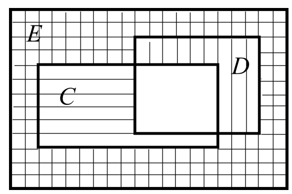
$B \backslash A$ heißt **Komplement** von A bzgl. B (grau).



Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** oder **elementfremd**, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Sind C und D Teilmengen einer Menge E, so gelten für die Komplemente $\overline{C} := E \backslash C$ und $\overline{D} := E \backslash D$ von C bzw. D die Formeln von **de Morgan**:

$$\overline{C} \cap \overline{D} = \overline{C \cup D} \qquad \overline{C} \cup \overline{D} = \overline{C \cap D}$$



($\overline{C} := E \backslash C$ ist senkrecht schraffiert, $\overline{D} := E \backslash D$ waagerecht.)

Beispiel 9

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = Menge der möglichen Ergebnisse beim Würfeln.
$C = \{1, 3, 5\}$ = Würfeln einer ungeraden Zahl.
$D = \{1, 2, 3\}$ = Würfeln einer Zahl ≤ 3.
$C \cap D = \{1, 3\}$ = Würfeln einer 1 oder 3.
$C \cup D = \{1, 2, 3, 5\} = \ldots$
$\overline{C} = E \backslash C = \{2, 4, 6\}$ = Würfeln einer geraden Zahl.
$\overline{D} = E \backslash D = \{4, 5, 6\}$ = Würfeln einer Zahl > 3.
$\overline{C} \cap \overline{D} = \{4, 6\} = \overline{C \cup D}, \quad \overline{C} \cup \overline{D} = \{2, 4, 5, 6\} = \overline{C \cap D}$

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt die **Potenzmenge** von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{A | A \subset M\}.$$

Beispiel 10

Für die Menge $M = \{K, Z\}$ = Menge der möglichen Ergebnisse beim Münzwurf (Kopf oder Zahl) ist $\qquad \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{K\}, \{Z\}, \{K, Z\}\}$.

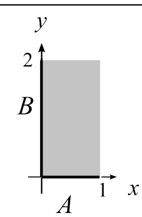
Unter dem **cartesischen Produkt** zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei die erste Komponente a stets aus A und die zweite Komponente b stets aus B ist:

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Beispiel 11

$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad B = \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

$A \times B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ (grau).



Das **cartesische Produkt** von k Mengen $A_1, \ldots, A_k$ ist die Menge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k := \{(a_1, , \ldots, a_k) | a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k\}$ aller geordneten k-tupel $(a_1, \ldots, a_k)$, wobei an erster Stelle stets ein Element a_1 aus A_1 steht, an zweiter Stelle ein Element $a_2 \in A_2$ usw.. Wenn $A := A_1 = \ldots = A_k$ gilt, schreibt man für

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k} := A^k.$$

Beispiel 12

A sei eine Menge von n verschiedenen Urnen, nummeriert mit $1, 2, \ldots, n$. Verteilt man k unterscheidbare Kugeln irgendwie auf diese n Urnen, so läßt sich jede Verteilung durch ein k-tupel

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k), 1 \leq i_j \leq n$$

beschreiben: die erste Kugel befindet sich in der Urne i_1, die zweite in der Urne $i_2, \ldots,$ die k-te Kugel in der Urne i_k. Die Menge aller Verteilungen von k Kugeln in n Urnen kann mit der Menge $A^k = A \times \cdots \times A$ (k Faktoren) identifiziert werden.

Bezeichnungen:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen

1.2 Elementare Kombinatorik

Multiplikationsregel

Gegeben seien k Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ und k natürliche Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Es werden k-tupel (die Reihenfolge ist zu berücksichtigen)

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k), \quad a_i \in A_i$$

gebildet, wobei zur Besetzung des ersten Platzes n_1 verschiedene Elemente $a_1 \in A_1$ ausgewählt werden können, zur Besetzung des zweiten Platzes n_2 verschiedene Elemente $a_2 \in A_2$ usw. und schließlich zur Besetzung des k-ten Platzes n_k verschiedene Elemente $a_k \in A_k$.
Die Anzahl dieser k-tupel beträgt $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Beispiel 13

$A_1 = A_2$ sei die Menge der Belegschaftsmitglieder eines Betriebes (n Angestellte, m Arbeiter). Es sollen ein Bestriebssprecher und dessen Stellvertreter in dieser Reihenfolge gewählt werden, wobei der Betriebssprecher ein Arbeiter sein muss. Auf wieviele Weisen ist das möglich?
Lsg.: $m(n + m - 1)$
Als Sprecher kann jeder der m Arbeiter gewählt werden, als Stellvertreter dann jeder der $n + m - 1$ übrigen Belegschaftsmitglieder.

Gegeben sei eine Menge A von n verschiedenen Elementen. Jedes **geordnete** k-tupel von k dieser Elemente

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k), \quad a_i \in A_i$$

heißt eine **k-Permutation** von n Elementen mit Wiederholungen. [2] Ein solches k-tupel heißt eine **k-Permutation** von n Elementen (ohne Wiederholungen) [3], wenn $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Die n-Permutationen von n verschiedenen Dingen heißen einfach **Permutationen**.

Beispiel 14

A sei die Menge der 26 Buchstaben unseres Alphabets. Jedes (auch sinnlose) Wort mit 6 Buchstaben (die auch wiederholt werden dürfen) ist eine 6-Permutation der 26 Buchstaben mit Wiederholung. Jedes (auch sinnlose) Wort mit 6 verschiedenen Buchstaben ist eine 6-Permutation der 26 Buchstaben.

[2] auch: **k-Variationen** von n Elementen oder geordnete Probe aus A vom Umfang k mit Wiederholung.

[3] auch: geordnete Probe aus A vom Umfang k ohne Wiederholung.

Beispiel 15

Die Menge A enthalte die Buchstaben S,T,R,O,H. Jedes Wort, das durch die Veränderung der Reihenfolge dieser Buchstaben entsteht, ist eine Permutation dieser Buchstaben, z.B. HORST.

Gegeben sei eine Menge A von n verschiedenen Elementen. Jede **ungeordnete** Klasse von k Elementen

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \quad a_i \in A$$

(zwei Klassen von k Elementen werden als gleich angesehen, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden) heißt eine

- **k-Kombination** von n Elementen **mit Wiederholung** (ohne Berücksichtigung der Anordnung), wenn Wiederholungen zugelassen sind. [4]
- **k-Kombination** von n Elementen **ohne Wiederholung** (ohne Berücksichtigung der Anordnung), wenn Wiederholungen verboten sind. [5]

Beispiel 16

Jede Teilmenge von genau k Elementen einer Menge A (die mindestens k Elemente enthält) ist eine k-Kombination ohne Wiederholung.

Beispiel 17

Jedes Ergebnis einer Ziehung beim Zahlenlotto 6 aus 49 ist eine 6-Kombination von 49 Elementen ohne Wiederholung (weil die Reihenfolge, in der die einzelnen Zahlen gezogen werden, für die Gewinnausschüttung unberücksichtigt bleibt, und weil ohne Zurücklegen gezogen wird).

Beispiel 18

$A = \{a, b\}$. Alle möglichen 2-Kombinationen der zwei Elemente a, b mit Wiederholung (ohne Berücksichtigung der Anordnung) sind $a, a;\ a, b;\ b, b$.

[4] auch: ungeordnete Probe aus A vom Umfang k mit Wiederholung.
[5] auch: ungeordnete Probe aus A vom Umfang k ohne Wiederholung.