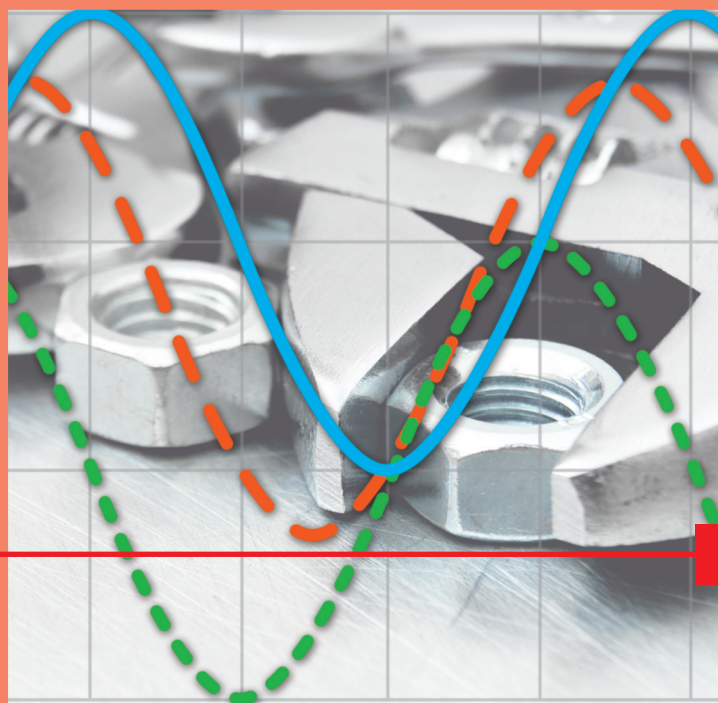


Stephan Bucher

# Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker



HANSER

Stephan Bucher  
Anwendungsorientierte  
Mathematik für Techniker



Stephan Bucher

# Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker

Mit 85 Bildern, 184 durchgerechneten Beispielen  
und 479 Aufgaben mit Lösungen im Internet



**Fachbuchverlag Leipzig**  
im Carl Hanser Verlag

**Autor:**

Stephan E. Bucher  
Dr. sc. nat. ETH (Physiker)

stephan.bucher@bioconsult.ch

Ergänzende Unterlagen zu diesem Buch finden sich auf  
<http://www.bioconsult.ch/Inovatech>



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44244-3  
E-Book-ISBN 978-3-446-44179-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.  
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag  
© 2016 Carl Hanser Verlag München  
[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)  
Lektorat: Christine Fritzsch  
Herstellung: Katrin Wulst  
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk  
Satz: Kösel Media GmbH, Krugzell  
Druck und Bindung: Friedrich Pustet, Regensburg  
Printed in Germany

# Vorwort

Das Buch entstand im Laufe der Unterrichtstätigkeit des Autors an der Inovatech, einer Höheren Fachschule für Technik. Technikerstudenten sind Praktiker mit einer ersten Berufserfahrung. Das Schwergewicht wird deshalb im Unterricht, wo immer möglich, auf die kürzeste Verbindung von der Theorie zur praktischen Anwendung gelegt; auf Beweise, die Diskussion exotischer Spezialfälle und theoretische Spitzfindigkeiten wird weitgehend verzichtet, manchmal vielleicht vom Standpunkt der „reinen Lehre“ aus betrachtet bis hart an die Grenze des Vertretbaren. Auch wird darauf Wert gelegt, den Studierenden jeweils eine Methode zu präsentieren, die immer anwendbar ist – wir sind der Ansicht, dass sich der Technikerstudent nicht mit verschiedenen Methoden für die gleiche Problemlösung belasten sollte.

Mathematik-Lehrbücher für Techniker gibt es im deutschen Sprachraum schon mehrere. Wir beginnen bei den Grundlagen, haben aber bewusst auch anspruchsvolle Beispiele und Anwendungen eingeschlossen, die nicht zum Standardrepertoire für Techniker gehören. Es geht uns dabei darum, den Studierenden die Breite der Anwendbarkeit der vermittelten Mathematik aufzuzeigen und sie darauf hinzuweisen, dass alles überall noch weitergeht. Damit, und indem wir entsprechende Stichworte und Anknüpfungspunkte geben, möchten wir interessierte Leser dazu ermutigen, selbständig ihre Kenntnisse zu erweitern und zu vertiefen. Sehr viel Information kann im Internet gefunden werden, und es gibt ausgezeichnete weiterführende Werke im Buchhandel (siehe Literaturverzeichnis).

Bei Herleitungen und Berechnungen haben wir darauf geachtet, alle wichtigen Schritte und Konzepte aufzuzeigen. Wir hoffen deshalb, dass das Buch auch beim Selbststudium von Nutzen sei. Fundierte Kritik und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen.

Die Aufteilung des Stoffes auf die Semester im Inovatech-Lehrplan ist ungefähr folgende: 1. Semester Kapitel 1 und 2, 2. Semester Kapitel 3 bis 5, 3. Semester Kapitel 6 bis 8, 4. Semester Kapitel 8 (Rest Anwendungen) und 9 sowie, je nach vorhandener Zeit, weitere Anwendungen, z. B. aus Mechanik oder Elektrotechnik. Nach den Sommerferien kommt im vierten Semester bald die Zeit der Vorbereitung auf die Vordiplomprüfung. Der Aufbau ist so gehalten, dass die Betriebstechniker – die an der Inovatech nur zwei Semester Mathematikunterricht erhalten – die Anwendungen von Ungleichungen (Abschnitte 4.2.6 und 4.2.7, Lineare Optimierung) und Statistik (Qualitätskontrolle) auch noch mitbekommen, die sie im Beruf möglicherweise brauchen können. Den Betriebstechnikern zuliebe wurden auch einzelne Beispiele aus der Wirtschaftsmathematik aufgenommen (2.9.2, 4.5). Diese können natürlich für andere Studienrichtungen ohne Nachteil übersprungen werden.

An Taschenrechner werden keine besonderen Anforderungen gestellt; fast alle der im Kurs zu lösenden Probleme sind mit einem TI-30 eco RS zu bewältigen, der einfach und intuitiv zu bedienen ist. Gut geeignet für Techniker ist der etwas anspruchsvollere TI-30X Pro, der quadratische und kubische Gleichungen sowie Gleichungssysteme mit 2 und 3 Unbekannten löst, Integrale numerisch auswertet, und, neben statistischen Berechnungen und Regressionen, sogar einen beschränkt brauchbaren numerischen Gleichungslöser enthält. Mit programmierbaren Rechnern sind die meisten unserer Studierenden überfordert – im Unterricht kann dazu keine Unterstützung geleistet werden – und die kompliziertere Bedienung wirkt sich als Nachteil aus.

Immer häufiger wird im Alltag für Berechnungen direkt der PC eingesetzt, was die Dokumentation und Wiederverwendung umfangreicher Berechnungsvorgänge ermöglicht. Wir bevorzugen dafür Mathcad, für tabellenorientierte Anwendungen Excel, und stellen dazu auch Beispiele zur Verfügung. Verhängnisvoll ist, wenn der Studierende die Mathematik darauf reduziert, welches Programm-Icon zu welcher Art von Aufgabe gehört – damit lernt man keine mathematischen Zusammenhänge erkennen und wird versagen, wenn man in Prüfungen oder im Berufsleben Probleme lösen sollte, die über Routinearbeiten auf Sachbearbeiterniveau hinausgehen.

Ich danke dem Fachbuchverlag Leipzig und seinen Mitarbeitern, insbesondere der Lektorin Frau Chr. Fritsch für ihre sehr engagierte, umsichtige und professionelle Unterstützung und Beharrlichkeit während der nicht immer einfachen Vorbereitungszeit, und Frau K. Wulst für ihre wertvollen Beiträge zur Gestaltung.

Zum Schluss möchte ich mich bei der Schulleitung der Inovatech dafür bedanken, dass sie Vorschlägen gegenüber stets aufgeschlossen ist und eine Atmosphäre des Vertrauens schafft, in der der Dozent bei der Vermittlung der Lehrinhalte Freiheit genießt und nicht über Gebühr administrativ belastet wird.

Rickenbach im Sommer 2015

*Stephan Bucher*

# Inhalt

<b>■</b>	<b>Vorwort .....</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen .....</b>	<b>15</b>
1.1	Die Zahlen .....	15
1.2	Arithmetische Grundoperationen .....	16
1.3	Rechenregeln .....	16
1.3.1	Reihenfolge der Operanden .....	16
1.3.2	Vorzeichen .....	16
1.3.3	Reihenfolge der Operationen .....	17
1.3.4	Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken .....	18
1.3.5	Multiplikation von Klammerausdrücken .....	18
1.4	Bruchrechnen .....	18
1.4.1	Begriffe .....	18
1.4.2	Addition von Brüchen; das kleinste gemeinsame Vielfache ...	19
1.4.3	Kürzen .....	20
1.4.4	Multiplikation von Brüchen .....	21
1.4.5	Division von Brüchen .....	21
1.4.6	Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche .....	22
1.5	Potenzen und Wurzeln .....	22
1.5.1	Potenzen .....	22
1.5.2	Quadratische binomische Ausdrücke .....	23
1.5.3	Höhere Potenzen binomischer Ausdrücke .....	24
1.5.4	Wurzeln .....	25
1.6	Logarithmen .....	26
1.6.1	Begriff .....	26
1.6.2	Rechenregeln .....	27
1.6.3	Wechsel der Basis .....	27
1.6.4	Die Bedeutung der Logarithmen .....	28
1.7	Zahlensysteme .....	29
1.8	Übungsaufgaben .....	30
1.8.1	Zu Abschnitt 1.3 .....	30
1.8.2	Zu Abschnitt 1.4 .....	31
1.8.3	Zu Abschnitt 1.5 .....	32
1.8.4	Zu Abschnitt 1.6 .....	33



<b>2</b>	<b>Gleichungen</b> .....	<b>34</b>
2.1	Begriffe .....	34
2.2	Das Umformen von Gleichungen .....	35
2.2.1	Begriff .....	35
2.2.2	Äquivalenzumformungen .....	35
2.2.3	Nichtäquivalente Umformungen .....	35
2.3	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten .....	36
2.3.1	Lösungsverfahren .....	36
2.3.2	Angewandte Aufgaben .....	36
2.4	Systeme linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten .....	37
2.4.1	Grundlagen .....	37
2.4.2	Lösung durch Substitution .....	38
2.4.3	Lösung mit Matrizenrechnung .....	38
2.4.4	Lösung eines Gleichungssystems mit der Determinantenmethode .....	40
2.5	Quadratische Gleichungen .....	42
2.5.1	Allgemeine Lösungsformel .....	42
2.5.2	Der Satz von Vieta .....	43
2.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades .....	44
2.6.1	Lösungen .....	44
2.6.2	Lösung mit dem TI-30X Pro .....	44
2.7	Nichtlineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten .....	45
2.7.1	Lösungsverfahren .....	45
2.7.2	Anwendungsbeispiel: Koordinatenbestimmung .....	45
2.8	Wurzelgleichungen .....	47
2.9	Exponentialgleichungen .....	49
2.9.1	Lösungsmethodik .....	49
2.9.2	Zins- und Investitionsrechnung .....	51
2.10	„Unlösbare“ Gleichungen: Der numerische Gleichungslöser des TI-30X Pro .....	53
2.11	Ungleichungen .....	54
2.11.1	Definition .....	54
2.11.2	Das Lösen von Ungleichungen .....	55
2.11.3	Lineare Ungleichungen .....	55
2.11.4	Nichtlineare Ungleichungen .....	56
2.12	Übungsaufgaben .....	59
2.12.1	Zu Abschnitt 2.2 .....	59
2.12.2	Zu Abschnitt 2.3 .....	59
2.12.3	Zu Abschnitt 2.4 .....	63
2.12.4	Zu Abschnitt 2.5 .....	66
2.12.5	Zu Abschnitt 2.6 .....	67
2.12.6	Zu Abschnitt 2.7 .....	68
2.12.7	Zu Abschnitt 2.8 .....	69
2.12.8	Zu Abschnitt 2.9 .....	69
2.12.9	Zu Abschnitt 2.10 .....	70

<b>3</b>	<b>Trigonometrie</b> .....	<b>71</b>
3.1	Winkel .....	71
3.2	Die Winkelfunktionen .....	72
3.2.1	Definition am rechtwinkligen Dreieck .....	72
3.2.2	Umrechnungen, Darstellung am Einheitskreis .....	73
3.3	Berechnungen am Dreieck .....	75
3.3.1	Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck .....	75
3.3.2	Dreiecksfläche .....	76
3.3.3	Der Sinussatz .....	76
3.3.4	Der Kosinussatz .....	77
3.4	Weitere Formeln .....	78
3.4.1	Additionstheoreme .....	78
3.4.2	Winkelfunktionen für doppelte und halbe Winkel .....	79
3.4.3	Halbwinkelformeln .....	80
3.5	Das Lösen goniometrischer Gleichungen .....	81
3.6	Anwendungen .....	85
3.6.1	Klassische Vermessungsaufgaben .....	85
3.6.2	Vermessung beim Tunnelbau .....	88
3.6.3	Schallmessortung .....	88
3.7	Übungsaufgaben .....	91
3.7.1	Zu Abschnitt 3.2 .....	91
3.7.2	Zu Abschnitt 3.3 .....	92
3.7.3	Zu Abschnitt 3.4.1 .....	93
3.7.4	Zu Abschnitt 3.5 .....	93
<b>4</b>	<b>Funktionen</b> .....	<b>94</b>
4.1	Der Funktionsbegriff .....	94
4.2	Lineare Funktionen .....	95
4.2.1	Ganzrationale Funktionen: Begriff und allgemeine Eigenschaften .....	95
4.2.2	Eigenschaften linearer Funktionen .....	95
4.2.3	Anwendungsbeispiel: Schnittpunkt .....	98
4.2.4	Graphische Darstellung linearer Gleichungssysteme .....	99
4.2.5	Lineare Ungleichungen in 2 Variablen .....	100
4.2.6	Systeme linearer Ungleichungen in 2 Variablen .....	101
4.2.7	Lineare Optimierung .....	102
4.3	Quadratische Funktionen .....	105
4.4	Ganzrationale Funktionen höheren Grades .....	107
4.5	Anwendung ganzrationaler Funktionen .....	110
4.6	Gebrochenrationale Funktionen .....	114
4.6.1	Begriff und allgemeine Eigenschaften .....	114
4.6.2	Asymptoten .....	115
4.7	Potenz- und Wurzelfunktionen .....	117
4.7.1	Potenzfunktionen .....	117
4.7.2	Wurzelfunktionen .....	117
4.7.3	Beispiele .....	118

4.8	Exponentialfunktionen	122
4.8.1	Allgemeine Eigenschaften	122
4.8.2	Beispiele	123
	Radioaktiver Zerfall	124
4.9	Logarithmusfunktionen	127
4.10	Trigonometrische Funktionen	127
4.10.1	Periodizität	127
4.10.2	Funktionen mit Parametern	128
4.10.3	Schwingungen in der Technik	129
4.11	Umkehrfunktionen	130
4.11.1	Begriff	130
4.11.2	Bestimmung der Umkehrfunktion	130
4.11.3	Einige Funktionen und ihre Umkehrungen	131
4.11.4	Temperaturskala	131
4.12	Übungsaufgaben	132
4.12.1	Zu Abschnitt 4.2	132
4.12.2	Zu Abschnitt 4.3	135
4.12.3	Zu Abschnitt 4.11.4	136

## **5** Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ..... 137

5.1	Einführung	137
5.2	Zufall und Wahrscheinlichkeit	138
5.3	Einfache Kombinatorik	141
5.4	Binomialverteilung	143
5.4.1	Grundlagen	143
5.4.2	Anwendungsbeispiel: Qualitätskontrolle	145
5.4.3	Verallgemeinerung: Multinomiale Verteilung	147
5.5	Beschreibung einer statistischen Gesamtheit	147
5.5.1	Streuung	147
5.5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	147
5.5.3	Mittelwert und Standardabweichung	150
5.5.4	Beschreibung einer Gesamtheit von Daten mit Kenngrößen	151
5.6	Die Normalverteilung	152
5.7	Messdatenauswertung	156
5.7.1	Resultatangabe und Vertrauensintervall	156
5.7.2	Ausgleichsrechnung	157
5.8	Statistische Entscheidungsfindung	161
5.8.1	Statistisches Testen	161
5.8.2	Prozessbeherrschung	163
5.9	Elektronische Hilfsmittel	164
5.10	Übungsaufgaben	165
5.10.1	Zu Abschnitt 5.4	165
5.10.2	Zu Abschnitt 5.5	166
5.10.3	Zu Abschnitt 5.6	167
5.10.4	Zu Abschnitt 5.7	167
5.10.5	Zu Abschnitt 5.8	170

<b>6</b>	<b>Komplexe Zahlen .....</b>	<b>172</b>
6.1	Definition und Grundbegriffe .....	172
6.1.1	Definition .....	172
6.1.2	Die Gauß'sche Zahlenebene .....	173
6.1.3	Komplexe Konjugation .....	173
6.1.4	Betrag .....	173
6.1.5	Argument .....	173
6.2	Darstellungsformen .....	174
6.2.1	Algebraische Form .....	174
6.2.2	Trigonometrische Form .....	174
6.2.3	Umrechnungen .....	174
6.3	Die vier Grundrechenarten .....	175
6.3.1	Addition und Subtraktion .....	175
6.3.2	Multiplikation und Division .....	175
6.3.3	Multiplikation und Division in trigonometrischer Darstellung .....	176
6.3.4	Möglichkeiten des TI-30X Pro .....	176
6.4	Höhere Rechenarten .....	177
6.4.1	Potenzen .....	177
6.4.2	Wurzeln .....	177
6.4.3	Exponentialfunktion .....	177
6.5	Der Fundamentalsatz der Algebra .....	178
6.6	Die Lösungsformel der kubischen Gleichung .....	179
6.7	Anwendung: Wechselstromrechnung (Kurzer Abriss) .....	180
6.7.1	Einführung .....	180
6.7.2	Überlagerung von zwei Wechselspannungen .....	181
6.7.3	Komplexe Widerstände (Impedanzen) .....	182
<b>7</b>	<b>Folgen und Reihen .....</b>	<b>184</b>
7.1	Begriffe und Definitionen .....	184
7.1.1	Folgen .....	184
7.1.2	Reihen .....	185
7.2	Arithmetische Folgen und Reihen .....	186
7.2.1	Arithmetische Folgen .....	186
7.2.2	Arithmetische Reihen .....	186
7.3	Geometrische Folgen und Reihen .....	187
7.3.1	Geometrische Folgen .....	187
7.3.2	Geometrische Reihen .....	187
7.3.3	Unendliche geometrische Reihen .....	187
7.4	Anwendung: Potenzreihen bekannter Funktionen .....	188
7.5	Übungsaufgaben .....	189
7.5.1	Zu Abschnitt 7.1 .....	189
7.5.2	Zu Abschnitt 7.2 .....	189
7.5.3	Zu Abschnitt 7.3 .....	190

<b>8</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	<b>191</b>
8.1	Grundlagen	191
8.1.1	Grenzwerte von Zahlenfolgen	191
8.1.2	Grenzwerte von Funktionen	192
8.1.3	Stetigkeit	194
8.2	Die Ableitung	194
8.2.1	Der Differenzialquotient	194
8.2.2	Wichtige Ableitungsregeln	195
8.2.3	Die Ableitung ganzrationaler Funktionen	197
8.2.4	Die Ableitungsfunktion	197
8.3	Die Bedeutung der 1. bis 3. Ableitung	198
8.3.1	Maxima	198
8.3.2	Minima	199
8.3.3	Krümmung	199
8.3.4	Wendepunkte	200
8.3.5	Beispiel	200
8.4	Weitere Ableitungsregeln	201
8.4.1	Produktregel	201
8.4.2	Quotientenregel	201
8.4.3	Kettenregel	202
8.4.4	Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen	203
8.4.5	Die Ableitung von Logarithmusfunktionen	204
8.4.6	Die Ableitung der Umkehrfunktion	205
8.4.7	Die Ableitung von Exponentialfunktionen	206
8.5	Funktionen mit mehreren Variablen	206
8.6	Anwendungen	206
8.6.1	Kurvendiskussion	206
8.6.2	Extremwertprobleme	207
8.6.3	Einige Extremalprinzipien aus der Physik	208
8.6.4	Ausgleichsrechnung: Beispiel Lineare Regression	210
8.6.5	Maschinenbau: Wechselkräfte in einer Kolbenmaschine	211
8.6.6	Das Newton-Verfahren zur numerischen Auflösung von Gleichungen	214
8.6.7	Vereinfachung des Newton-Verfahrens: Regula falsi	218
8.6.8	Bestimmung aller Lösungen einer algebraischen Gleichung	219
8.6.9	Parameterbestimmung in der Physik: Gas-Zustandsgleichung	220
8.6.10	Fehlerfortpflanzung	222
8.6.11	Unsicherheitsabschätzung	223
8.7	Übungsaufgaben	224
8.7.1	Zu Abschnitt 8.1	224
8.7.2	Zu Abschnitt 8.2	225
8.7.3	Zu Abschnitt 8.3	225
8.7.4	Zu Abschnitt 8.4	225
8.7.5	Zu Abschnitt 8.6.2	227

<b>9</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>231</b>
9.1	Das bestimmte Integral	231
9.1.1	Begriffe und Grundlagen	231
9.1.2	Berechnung bestimmter Integrale	232
9.2	Die Stammfunktion und ihre Ableitung	233
9.3	Das unbestimmte Integral	234
9.4	Integrationsregeln	235
9.4.1	Integrationsregeln aus Ableitungsregeln	235
9.4.2	Logarithmische Ableitung	236
9.4.3	Partielle Integration	236
9.4.4	Integration durch Substitution	237
9.5	Numerische Integration	237
9.5.1	Integration durch Approximation	237
9.5.2	Trapez-Integration	238
9.5.3	Romberg-Integration	238
9.6	Anwendungen	239
9.6.1	Mittelwert einer Funktion in einem Intervall	239
9.6.2	Flächenschwerpunkt	240
9.6.3	Bogenlänge	241
9.6.4	Linien­schwerpunkt	242
9.6.5	Flächen- und Trägheitsmomente	243
9.6.6	Arbeit/Energie bei ortsabhängiger Kraft	244
9.6.7	Das RC-Glied	246
9.6.8	Leistung des Wechselstroms	247
9.6.9	Frequenzanalyse (Fourier-Analyse, harmonische Analyse)	249
9.6.10	Seilreibung	253
9.6.11	Abkühlung	254
9.6.12	Barometrische Höhenformel	256
9.6.13	Berechnung des Integrals einer punktw­eise gegebenen Funktion	257
9.6.14	Bewegungsprobleme in der Physik	257
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>259</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>261</b>

