GIECK

Technische Formelsammlung

34., erweiterte Auflage

HANSER

K. + R. Gieck

Technische Formelsammlung

K. + R. Gieck

Technische Formelsammlung

34., bearbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg
Herstellung: Björn Gallinge
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Coverrealisation: Max Kostopoulos
Satz: Dr. Steffen Naake
Druck und Bindung: Kösel, Krugzell
Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46115-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-46116-1

Vorwort

Die vorliegende Formelsammlung soll dem Ingenieur in knapp gefasster, klarer und übersichtlicher Form die wichtigsten physikalischen und technischen Formeln, einschließlich dem dazugehörigen mathematischen Rüstzeug, treffsicher aufzeigen. Dabei will sie durch zusammengefasste Begriffserläuterungen auch dann unterstützend eingreifen, wenn sich der Benutzer nur gelegentlich in ein ihm nicht mehr so geläufiges Gebiet begeben muss.

Um dem Benutzer die Möglichkeit zu geben, evtl. Ergänzungen und sonstige Bemerkungen aus seinem Spezialgebiet aufzeichnen zu können, sind die meisten Blätter nur einseitig bedruckt.

Jedes Sachgebiet ist unter einem g r o ß e n Buchstaben zusammengefasst. Die einzelnen Formeln jedes Sachgebietes sind unter dem jeweils gleichen, jedoch k l e i n e n Buchstaben fortlaufend nummeriert. Dies gestattet, die angewandten Formeln eines Rechnungsvorganges zu kennzeichnen.

Vorwort zur 34. Auflage

Neben der Erweiterung des Kapitels O „Wärme“ durch die Anwendungen „HLK“ (Heizungs-, Lüftungs- und Klimaanlagen) wurde das Kapitel W „Umwelttechnik“ überarbeitet und ergänzt.

Unser Dank gilt Frau Prof. Dr.-Ing. K. Kuchta sowie den Herren Prof. Dr.-Ing. M. Gewerke und Dipl.-Ing. B. Kuchta, die bei der Überarbeitung mitgewirkt haben.

Für Vorschläge zur Verbesserung und Weiterentwicklung der Technischen Formelsammlung sind Verfasser und Verlag stets dankbar. Beiträge können direkt an Reiner Gieck, Nimrodstr. 26, 82110 Germering (E-Mail: RGieck@aol.com) gerichtet werden.

R. Gieck
Germering, Sommer 2019

Erläuterungen

zur Benutzung der Technischen Formelsammlung

Die Bestandteile der Gleichungen

Größen und ihre Bestandteile: Zahlenwert und Einheit

Der Zahlenwert einer Größe ist das Verhältnis der Größe zur gewählten Einheit. Der Zahlenwert ist also die Zahl, mit der man die Einheit vervielfachen muss, um die Größe zu erhalten:

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert} \times \text{Einheit}$$

Wählt man eine *n*-mal so große Einheit, so verkleinert sich der Zahlenwert auf den *n*-ten Teil. Das Produkt aus Zahlenwert und Einheit bleibt konstant: die Größe ist *invariant* gegenüber einem Wechsel der Einheit, z. B.

$$1\,\mathrm{m} = 10^3\,\mathrm{mm} = 10^{-3}\,\mathrm{km}$$

Die Werte der Größen werden als Produkt von Zahlenwert und Einheit geschrieben, z. B.

$$I = 3\,\mathrm{mA}; \quad l = 12\,\mathrm{mm}$$

Dabei ist die Zweckbestimmung des Formelzeichens der Größe streng von derjenigen der Einheit zu trennen. Nur das Formelzeichen gibt an, **welche Größe gemeint ist**. Zahlenwert und Einheit geben nur an, **welchen Wert die Größe hat**. Die Einheit darf also keinen Hinweis darauf enthalten, welche Größe gemeint ist.

Beispiele hierzu:

falsch	richtig
$p = 2{,}7\,\text{atü}$ $U = 220\,\mathrm{V_{eff}}$	$p_{\text{ü}} \approx 2{,}7\,\mathrm{bar}$ $U_{\mathrm{eff}} = 220\,\mathrm{V}$

Weitere deswegen in der Bundesrepublik **nicht mehr zulässige Einheiten (Auswahl)**: ata, $\mathrm{N\,m^3} = \mathrm{m_n^3}$, $\mathrm{BW} = \mathrm{W_b}$, AWdg, $\mathrm{V_{ss}}$.

Ausnahmen: $^\circ$C, var, rad, sr.

Die Arten von Gleichungen

Größengleichungen

In Größengleichungen bedeuten die Formelzeichen physikalische Größen. Größengleichungen gelten unabhängig von der Wahl der Einheiten. Aus ihnen lässt sich der zugrunde liegende physikalische Zusammenhang leicht erkennen. Bei der Auswertung von Größengleichungen sind für die Formelzeichen der Größen die **Produkte** aus Zahlenwert **und** Einheit einzusetzen. Dabei können Zahlenwerte und Einheiten in beliebiger (also auch bunter) Reihenfolge geschrieben und in Brüchen auch beliebig gekürzt werden, z. B. Formel l23:

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 80\ \mathrm{m}}{8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{2 \cdot 80\ \mathrm{m\ s}}{8\ \mathrm{m}} = 20\ \mathrm{s}$$

Zugeschnittene Größengleichungen

Größengleichungen, in denen jede Größe durch eine zugehörige Einheit dividiert erscheint, heißen „Zugeschnittene Größengleichungen“, z. B. Formel s88:

$$\frac{F_\mathrm{m}}{\mathrm{N}} \approx 40 \left(\frac{B}{\mathrm{T}}\right)^2 \frac{A}{\mathrm{cm}^2} = 40 \left(\frac{0{,}9\ \mathrm{T}}{\mathrm{T}}\right)^2 \frac{5\ \mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}^2} = 162$$

oder:

$$F_\mathrm{m} \approx 40 \left(\frac{B}{\mathrm{T}}\right)^2 \frac{A}{\mathrm{cm}^2}\ \mathrm{N} = 40 \left(\frac{0{,}9\ \mathrm{T}}{\mathrm{T}}\right)^2 \frac{5\ \mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}^2}\ \mathrm{N} = 162\ \mathrm{N}$$

In diesen Gleichungen stellen die Verhältnisse von Größe und Einheit unmittelbar die Zahlenwerte bei den angegebenen Einheiten dar. Diese Gleichungen sind darum für häufig wiederkehrende Auswertungen (Tabellenrechnen) besonders geeignet.

Einheitengleichungen

Einheitengleichungen geben die zahlenmäßigen Beziehungen zwischen Einheiten an. In ihnen treten also nur Einheiten und Zahlenwerte auf, z. B.

$$1\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{cm}; \qquad 1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m/s^2}$$

Sie werden mit Vorteil so geschrieben, dass auf ihrer linken Seite nur die Zahl 1 steht, z. B.

$$1 = \frac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}} = \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}}; \qquad 1 = \frac{1\ \mathrm{kg\ m}}{1\ \mathrm{N\ s^2}} = \frac{1\ \mathrm{N\ s^2}}{1\ \mathrm{kg\ m}}$$

Sollen Größen in Darstellungen mit anderer Einheit umgerechnet werden, so werden diese Größen oder eine Seite der gesamten Größengleichung mit den jeweils erforderlichen besonderen Darstellungen der 1 multipliziert.

Dadurch ändert sich ihr Wert ja nicht. Die Darstellungen der 1 werden wie oben angegeben gebildet, z. B. Formel m1:

$$F = ma$$

$$F = 30\,\mathrm{kg}\,4\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 30\,\mathrm{kg}\,\frac{1\,\mathrm{N\,s}^2}{1\,\mathrm{kg\,m}} \cdot 4\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{cm}} = 1{,}2\,\mathrm{N}$$

Zahlenwertgleichungen

In Zahlenwertgleichungen bedeuten die Formelzeichen Zahlenwerte. Diese Gleichungen lassen sich stets auch als „Zugeschnittene Größengleichungen" darstellen. Um ein ständiges Umdenken zu vermeiden, enthält die Technische Formelsammlung keine Zahlenwertgleichungen.

Basisgrößen und Basiseinheiten im Internationalen Einheitensystem

SI-Basisgröße		SI-Basiseinheit	
Benennung	Formelzeichen (*kursive Schrift*)	Benennung	Einheiten (senkr. Schrift)
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

Beispiel-Einheiten

Die gelegentlich verwendete Bezeichnung **BE** bedeutet „**B**eispiel-**E**inheit" (also nicht Basiseinheit).

Bei vielen aufgeführten Formeln sind Beispiel-Einheiten angegeben. Dabei ist stets die zuerst angegebene Einheit die gesetzlich vorgeschriebene des Internationalen Einheitensystems. Diese Einheiten sollte man vorzugsweise benutzen, da dadurch die Umrechnungen am einfachsten werden bzw. überhaupt entfallen. Die zusätzlich angegebenen Einheiten sind andere Schreibweisen oder dezimale Vielfache der ersten Einheit.

Ausgelaufene Einheiten und/oder gesetzlich nicht mehr zugelassene – jedoch gelegentlich noch verwendete – Einheiten sind in runden ( ) Klammern aufgeführt.

Griechisches Alphabet

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$	λ	μ
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My
ν	ξ	o	π	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
N	Ξ	O	Π	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
Ny	Xi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Benutzte Formelzeichen

(weitgehend nach DIN 1304)

Raum und Zeit

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Winkel
Ω Raumwinkel
l Länge
b Breite
h Höhe
r, R Radius, Halbmesser, Fahrstrahl
d, D Durchmesser
s Länge, Weglänge
s Dicke
u, U Umfang
A Fläche, Querschnitt
A_m Mantelfläche eines Körpers
A_o Oberfläche eines Körpers
V Volumen
t Zeit, Zeitspanne
ω Winkelgeschwindigkeit
α Winkelbeschleunigung
v Geschwindigkeit
a Beschleunigung
g Fallbeschleunigung

Periodische und verwandte Erscheinungen

T Periodendauer
f Frequenz
n Umdrehungsfrequenz, Drehzahl
ω Kreisfrequenz
λ Wellenlänge
φ Vor- oder Nacheilwinkel, Phasenverschiebungswinkel

Mechanik

m Masse
ϱ Dichte
v Spezifisches Volumen
p Impuls
J Trägheitsmoment
F Kraft
F_G Gewichtskraft (früher Gewicht)
M Kraftmoment
M_R Reibungsmoment
T Drehmoment
p Druck (Kraft durch Fläche)
σ Zug- oder Druckspannung, Normalspannung
τ Schubspannung, Scherspannung
ε Dehnung
γ Schiebung
E Elastizitätsmodul
G Schubmodul
I Flächenmoment 2. Grades
W Widerstandsmoment
H Flächenmoment 1. Grades
S Schwerpunkt
μ Reibungszahl der Gleitreibung
μ_0 Reibungszahl der Haftreibung
μ_q Querlagerreibungszahl
μ_l Längslagerreibungszahl
η Dynamische Viskosität
ν Kinematische Viskosität
W Arbeit, Energie
P Leistung
η Wirkungsgrad

Wärme

T Temperatur in Kelvin
t, ϑ Temperatur in Celsius
α Längenausdehnungskoeffizient
γ Volumenausdehnungskoeffizient
Φ Wärmestrom
φ Wärmestromdichte
Q Wärme
c_p Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_V Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
q Wärme, spezifische
λ Wärmeleitfähigkeit
$\varkappa$ Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten
R spezifische Gaskonstante
l_d Verdampfungswärme, latent, massebezogen
l_f Schmelzwärme, latent, massebezogen
l_s Sublimationswärme, latent, massebezogen
U Wärmedurchgangskoeffizient
V_n Normvolumen
v spezifisches Volumen

Elektrizität und Magnetismus

I Elektrische Stromstärke
J Elektrische Stromdichte
U Elektrische Spannung
U_q Elektrische Quellenspannung
R Elektrischer Widerstand, Wirkwiderstand
G Elektrischer Leitwert, Wirkleitwert
Q Elektrizitätsmenge, Ladung
C Elektrische Kapazität
D Elektrische Flussdichte
E Elektrische Feldstärke
Φ Magnetischer Fluss
B Magnetische Flussdichte, Induktion
L Induktivität
H Magnetische Feldstärke
Θ Elektrische Durchflutung
V Magnetische Spannung
R_m Magnetischer Widerstand
Λ Magnetischer Leitwert
δ Luftspaltlänge
α Temperatur-Koeffizient des elektrischen Widerstandes
γ Elektrische Leitfähigkeit
ϱ Spezifischer elektrischer Widerstand
ε Permittivität
ε_o Elektrische Feldkonstante
ε_r Permittivitätszahl
N Windungszahl
μ Permeabilität ($\mu = \mu_o \cdot \mu_r$)
μ_o Magnetische Feldkonstante
μ_r Permeabilitätszahl
p Polpaarzahl
z Leiterzahl
Q Güte
δ Verlustwinkel
Y Scheinleitwert
Z Scheinwiderstand
X Blindwiderstand
S Scheinleistung
P Wirkleistung
Q Blindleistung
C_M Momentenkonstante

Optische und verwandte elektromagnetische Strahlung

I_e Strahlstärke
I_v Lichtstärke
Φ_e Strahlungsleistung
Φ_v Lichtstrom
Q_e Strahlungsmenge, -energie
Q_v Lichtmenge
E_e Bestrahlungsstärke
E_v Beleuchtungsstärke
H_e Bestrahlung
H_v Belichtung
L_e Strahldichte
L_v Leuchtdichte
c Lichtgeschwindigkeit
n Brechzahl
f Brennweite
D Brechwert

Einheiten

Vorsätze und Vorsatzzeichen

da = Deka = 10^{1}
h = Hekto = 10^{2}
k = Kilo = 10^{3}
M = Mega = 10^{6}
G = Giga = 10^{9}
T = Tera = 10^{12}
P = Peta = 10^{15}
E = Exa = 10^{18}
Z = Zetta = 10^{21}
Y = Yotta = 10^{24}

d = Dezi = 10^{-1}
c = Zenti = 10^{-2}
m = Milli = 10^{-3}
µ = Mikro = 10^{-6}
n = Nano = 10^{-9}
p = Piko = 10^{-12}
f = Femto = 10^{-15}
a = Atto = 10^{-18}
z = Zepto = 10^{-21}
y = Yocto = 10^{-24}

Längen-Einheiten

			m	µm	mm	cm	dm	km
a1	1 m	=	1	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10	10^{-3}
a2	1 µm	=	10^{-6}	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-9}
a3	1 mm	=	10^{-3}	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-6}
a4	1 cm	=	10^{-2}	10^{4}	10	1	10^{-1}	10^{-5}
a5	1 dm	=	10^{-1}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-4}
a6	1 km	=	10^{3}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	1

Längen-Einheiten (Fortsetzung)

			mm	µm	nm	(Å) [1]	pm	(mÅ) [2]
a7	1 mm	=	1	10^{3}	10^{6}	10^{7}	10^{9}	10^{10}
a8	1 µm	=	10^{-3}	1	10^{3}	10^{4}	10^{6}	10^{7}
a9	1 nm	=	10^{-6}	10^{-3}	1	10	10^{3}	10^{4}
a10	(1 Å)	=	10^{-7}	10^{-4}	10^{-1}	1	10^{2}	10^{3}
a11	1 pm	=	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	1	10
a12	(1 mÅ)	=	10^{-10}	10^{-7}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-1}	1

Flächen-Einheiten

			m^2	$µm^2$	mm^2	cm^2	dm^2	km^2
a13	1 m^2	=	1	10^{12}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	10^{-6}
a14	1 $µm^2$	=	10^{-12}	1	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-18}
a15	1 mm^2	=	10^{-6}	10^{6}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-12}
a16	1 cm^2	=	10^{-4}	10^{8}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-10}
a17	1 dm^2	=	10^{-2}	10^{10}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-8}
a18	1 km^2	=	10^{6}	10^{18}	10^{12}	10^{10}	10^{8}	1

[1] Å = Ångström [2] 1 mÅ = 1 XE = 1 X-Einheit

Einheiten

Volumen-Einheiten

		m^3	mm^3	cm^3	dm^3 [1)]	km^3
a19	$1\ m^3 =$	1	10^9	10^6	10^3	10^{-9}
a20	$1\ mm^3 =$	10^{-9}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-18}
a21	$1\ cm^3 =$	10^{-6}	10^3	1	10^{-3}	10^{-15}
a22	$1\ dm^3 =$	10^{-3}	10^6	10^3	1	10^{-12}
a23	$1\ km^3 =$	10^9	10^{18}	10^{15}	10^{12}	1

Massen-Einheiten

		kg	mg	g	dt	t = Mg
a24	1 kg =	1	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}
a25	1 mg =	10^{-6}	1	10^{-3}	10^{-8}	10^{-9}
a26	1 g =	10^{-3}	10^3	1	10^{-5}	10^{-6}
a27	1 dt =	10^2	10^8	10^5	1	10^{-1}
a28	1 t = 1 Mg =	10^3	10^9	10^6	10	1

Zeit-Einheiten

		s	ns	µs	ms	min
a29	1 s =	1	10^9	10^6	10^3	$16{,}66 \cdot 10^{-3}$
a30	1 ns =	10^{-9}	1	10^{-3}	10^{-6}	$16{,}66 \cdot 10^{-12}$
a31	1 µs =	10^{-6}	10^3	1	10^{-3}	$16{,}66 \cdot 10^{-9}$
a32	1 ms =	10^{-3}	10^6	10^3	1	$16{,}66 \cdot 10^{-6}$
a33	1 min =	60	$60 \cdot 10^9$	$60 \cdot 10^6$	$60 \cdot 10^3$	1
a34	1 h =	3600	$3{,}6 \cdot 10^{12}$	$3{,}6 \cdot 10^9$	$3{,}6 \cdot 10^6$	60
a35	1 d =	$86{,}4 \cdot 10^3$	$86{,}4 \cdot 10^{12}$	$86{,}4 \cdot 10^9$	$86{,}4 \cdot 10^6$	1440

Kraft-(Gewichtskraft-)Einheiten

		N [2)]	kN	MN	(kp)	(dyn)
a36	1 N =	1	10^{-3}	10^{-6}	0,102	10^5
a37	1 kN =	10^3	1	10^{-3}	$0{,}102 \cdot 10^3$	10^8
a38	1 MN =	10^6	10^3	1	$0{,}102 \cdot 10^6$	10^{11}
	(1 kp) =	9,806 65			1	$0{,}98 \cdot 10^6$
	(1 dyn) =	10^{-5}			$1{,}02 \cdot 10^{-6}$	1

1) $1\ dm^3 = 1\ l = 1$ Liter 2) $1\ N = 1\ kg\ m/s^2 = 1$ Newton

Einheiten

Druck-Einheiten

Nr.		Pa	N/mm^2	bar	(kp/cm^2)	(Torr)
a39	$1\,Pa = N/m^2$ $=$	1	10^{-6}	10^{-5}	$\approx 1{,}02 \cdot 10^{-5}$	$\approx 0{,}0075$
a40	$1\,N/mm^2$ $=$	10^6	1	10	$\approx 10{,}2$	$\approx 7{,}5 \cdot 10^3$
a41	1 bar $=$	10^5	0,1	1	$\approx 1{,}02$	≈ 750
a42	$(1\,kp/cm^2 = 1\,at)$ $\approx$	98 100	$9{,}81 \cdot 10^{-2}$	0,981	1	736
a43	(1 Torr) [1] $\approx$	133	$0{,}133 \cdot 10^{-3}$	$1{,}33 \cdot 10^{-3}$	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$	1

Arbeits-Einheiten

Nr.		J	kW h	(kp m)	(kcal)	(PS h)
a44	1 J [2] $=$	1	$\approx 0{,}278 \cdot 10^{-6}$	0,102	$\approx 0{,}239 \cdot 10^{-3}$	$\approx 0{,}378 \cdot 10^{-6}$
a45	$1\,kW \cdot h$ $=$	$3{,}60 \cdot 10^6$	1	$367 \cdot 10^3$	860	$\approx 1{,}36$
a46	$(1\,kp \cdot m)$ $=$	9,81	$2{,}72 \cdot 10^{-6}$	1	$2{,}345 \cdot 10^{-3}$	$\approx 3{,}70 \cdot 10^{-6}$
a47	(1 kcal) $=$	4186,8	$1{,}16 \cdot 10^{-3}$	426,9	1	$\approx 1{,}58 \cdot 10^{-3}$
a48	$(1\,PS \cdot h)$ $=$	$2{,}65 \cdot 10^6$	0,735	$0{,}27 \cdot 10^6$	632	1

Leistungs-Einheiten

Nr.		W	kW	(kp m/s)	(kcal/h)	(PS)
a49	1 W [3] $=$	1	10^{-3}	0,102	0,860	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$
a50	1 kW $=$	1000	1	102	860	1,36
a51	$(1\,kp \cdot m/s)$ $=$	9,81	$9{,}81 \cdot 10^{-3}$	1	8,43	$13{,}3 \cdot 10^{-3}$
a52	(1 kcal/h) $=$	1,16	$1{,}16 \cdot 10^{-3}$	0,119	1	$1{,}58 \cdot 10^{-3}$
a53	(1 PS) $=$	735	0,735	75	632	1

Massen-Einheit für Edelsteine

a54 1 Metrisches Karat (Kt) $= 200\,mg = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,kg = 1/5000\,kg$

Feingehalt-Einheit für Edelmetalle

a55 24 Karat $\widehat{=}$ 1000,00 ‰ | 18 Karat $\widehat{=}$ 750,00 ‰

a56 14 Karat $\widehat{=}$ 583,33 ‰ | 8 Karat $\widehat{=}$ 333,33 ‰

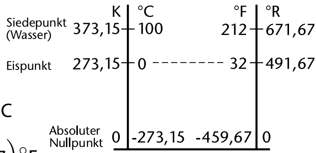
Temperatur-Einheiten

a57 $$T = \left(\frac{t}{°C} + 273{,}15\right) K = \frac{5}{9} \cdot \frac{T_R}{°R}\, K$$

a58 $$T_R = \left(\frac{t_F}{°F} + 459{,}67\right) °R = \frac{9}{5} \cdot \frac{T}{K}\, °R$$

a59 $$t = \frac{5}{9}\left(\frac{t_F}{°F} - 32\right) °C = \left(\frac{T}{K} - 273{,}15\right) °C$$

a60 $$t_F = \left(\frac{9}{5} \cdot \frac{t}{°C} + 32\right) °F = \left(\frac{T_R}{°R} - 459{,}67\right) °F$$



T, T_R, t und t_F sind die Temperaturen in der Kelvin-, Rankine-, Celsius- und Fahrenheit-Skala

1) $1\,Torr = 1/760\,atm = 1{,}333\,22\,mbar \,\widehat{=}\, 1\,mm\,Hg$ (mm QS) bei $t = 0\,°C$

2) $1\,J = 1\,N\,m = 1\,W\,s = 1$ Joule 3) $1\,W = 1\,J/s = 1\,N\,m/s = 1$ Watt

Gegenüberstellung anglo-amerikanischer und metrischer Einheiten

Längen-Einheiten

		in	ft	yd	mm	m	km
a61	1 in =	1	0,08333	0,02778	25,4	0,0254	—
a62	1 ft =	12	1	0,3333	304,8	0,3048	—
a63	1 yd =	36	3	1	914,4	0,9144	—
a64	1 mm =	0,039 37	$3281 \cdot 10^{-6}$	$1094 \cdot 10^{-6}$	1	0,001	10^{-6}
a65	1 m =	39,37	3,281	1,094	1000	1	0,001
a66	1 km =	39 370	3281	1094	10^6	1000	1

Flächen-Einheiten

		sq in	sq ft	sq yd	cm^2	dm^2	m^2
a67	1 sq in =	1	$6{,}944 \cdot 10^{-3}$	$0{,}772 \cdot 10^{-3}$	6,452	0,064 52	$64{,}5 \cdot 10^{-5}$
a68	1 sq ft =	144	1	0,1111	929	9,29	0,0929
a69	1 sq yd =	1296	9	1	8361	83,61	0,8361
a70	1 cm^2 =	0,155	$1{,}076 \cdot 10^{-3}$	$1{,}197 \cdot 10^{-4}$	1	0,01	0,0001
a71	1 dm^2 =	15,5	0,1076	0,011 96	100	1	0,001
a72	1 m^2 =	1550	10,76	1,196	10 000	100	1

Volumen-Einheiten

		cu in	cu ft	cu yd	cm^3	dm^3	m^3
a73	1 cu in =	1	$5{,}786 \cdot 10^{-4}$	$2{,}144 \cdot 10^{-5}$	16,39	0,016 39	$1{,}64 \cdot 10^{-5}$
a74	1 cu ft =	1728	1	0,037	28 316	28,32	0,0283
a75	1 cu yd =	46 656	27	1	764 555	764,55	0,7646
a76	1 cm^3 =	0,061 02	$3532 \cdot 10^{-8}$	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$	1	0,001	10^{-6}
a77	1 dm^3 =	61,02	0,03532	0,00131	1000	1	0,001
a78	1 m^3 =	61 023	35,32	1,307	10^6	1000	1

Massen-Einheiten

		dram	oz	lb	g	kg	Mg
a79	1 dram =	1	0,0625	0,003 906	1,772	0,001 77	$1{,}77 \cdot 10^{-6}$
a80	1 oz =	16	1	0,0625	28,35	0,028 35	$28{,}3 \cdot 10^{-6}$
a81	1 lb =	256	16	1	453,6	0,4536	$4{,}53 \cdot 10^{-4}$
a82	1 g =	0,5643	0,035 27	0,002 205	1	0,001	10^{-6}
a83	1 kg =	564,3	35,27	2,205	1000	1	0,001
a84	1 Mg =	$564{,}3 \cdot 10^3$	35 270	2205	10^6	1000	1

Fortsetzung siehe A5

Fortsetzung von A4

Arbeits-(Energie-)Einheiten

			ft lb	kp m	J = W s	kW h	kcal	Btu
a85	1 ft lb	=	1	0,1383	1,356	$376{,}8 \cdot 10^{-9}$	$324 \cdot 10^{-6}$	$1{,}286 \cdot 10^{-3}$
a86	1 kp m	=	7,233	1	9,807	$2{,}725 \cdot 10^{-6}$	$2{,}344 \cdot 10^{-3}$	$9{,}301 \cdot 10^{-3}$
a87	1 J = 1 W s	=	0,7376	0,102	1	$277{,}8 \cdot 10^{-9}$	$239 \cdot 10^{-6}$	$948{,}4 \cdot 10^{-6}$
a88	1 kW · h	=	$2{,}655 \cdot 10^{6}$	$367{,}1 \cdot 10^{3}$	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	1	860	3413
a89	1 kcal	=	$3{,}087 \cdot 10^{3}$	426,9	4187	$1{,}163 \cdot 10^{-3}$	1	3,968
a90	1 Btu	=	778,6	107,6	1055	$293 \cdot 10^{-6}$	0,252	1

Leistungs-Einheiten

			hp	kp m/s	J/s = W	kW	kcal/s	Btu/s
a91	1 hp	=	1	76,04	745,7	0,7457	0,1782	0,7073
a92	1 kp m/s	=	$13{,}15 \cdot 10^{-3}$	1	9,807	$9{,}807 \cdot 10^{-3}$	$2{,}344 \cdot 10^{-3}$	$9{,}296 \cdot 10^{-3}$
a93	1 J/s = 1 W	=	$1{,}341 \cdot 10^{-3}$	0,102	1	10^{-3}	$239 \cdot 10^{-6}$	$948{,}4 \cdot 10^{-6}$
a94	1 kW	=	1,341	102	1000	1	0,239	0,9484
a95	1 kcal/s	=	5,614	426,9	4187	4,187	1	3,968
a96	1 Btu/s	=	1,415	107,6	1055	1,055	0,252	1

Sonstige Einheiten

a97	1 mil = 10^{-3} in	=	0,0254 mm
a98	1 sq mil = 10^{-6} sq in	=	645,2 μm^2
a99	1 englische Meile	=	1609 m
a100	1 internationale Seemeile	=	1852 m
a101	1 geographische Meile	=	7420 m
a102	1 rod, pole oder perch = 5,5 yd	=	5,092 m
a103	1 sq chain = 16 sq rods	=	404,7 m^2
a104	1 Imp. gallon (Imperial gallon)	=	4,546 dm^3
a105	1 US. gallon (United States gallon)	=	3,785 dm^3
a106	1 Feinunze (oz tr)	=	31,1035 g
a107	1 stone (GB) = 14 lb	=	6,35 kg
a108	1 short quarter (US)	=	11,34 kg
a109	1 long quarter (GB, US)	=	12,70 kg
a110	1 short cwt (US) = 4 short quarter	=	45,36 kg
a111	1 long cwt (GB, US) = 4 long quarter	=	50,80 kg
a112	1 short ton (US)	=	0,9072 Mg
a113	1 long ton (GB, US)	=	1,0160 Mg
a114	1 Btu/cu ft = 8,9046 kcal/m^3	=	37 284 N m/m^3
a115	1 Btu/lb = 0,556 kcal/kg	=	2327 N m/kg
a116	1 lb/sq ft = 4,882 kp/m^2	=	47,8924 N/m^2
a117	1 lb/sq in (= 1 psi) = 0,0703 kp/cm^2	=	0,6896 N/cm^2

Flächen

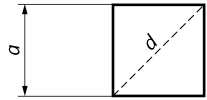
B1

Quadrat

b1 $A = a^2$

b2 $a = \sqrt{A}$

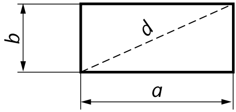
b3 $d = a\sqrt{2}$



Rechteck

b4 $A = a \cdot b$

b5 $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

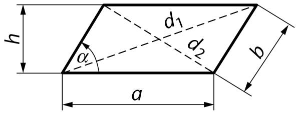


Parallelogramm

b6 $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

b7 $d_1 = \sqrt{(a + h \cdot \cot\alpha)^2 + h^2}$

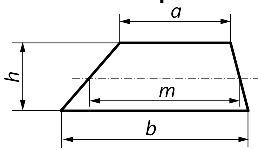
b8 $d_2 = \sqrt{(a - h \cdot \cot\alpha)^2 + h^2}$



Trapez

b9 $A = \dfrac{a + b}{2} h = m \cdot h$

b10 $m = \dfrac{a + b}{2}$



Dreieck

b11/1 $A = \dfrac{a \cdot h}{2} = r \cdot s$

b11/2 $\quad = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

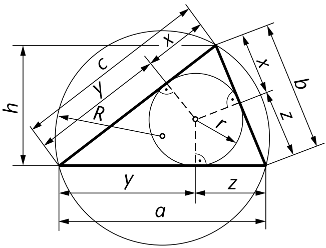
b12 $r = \dfrac{a \cdot h}{2s}; \quad R = \dfrac{b \cdot c}{2h}$

b13/1 $x = s - a$

b13/2 $y = s - b$

b13/3 $z = s - c$

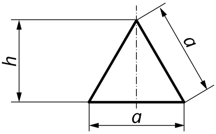
b13/4 $s = (a + b + c)/2$



Gleichseitiges Dreieck

b14 $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

b15 $h = \frac{a}{2}\ \sqrt{3}$



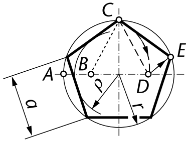
Regelmäßiges Fünfeck

b16 $A = \frac{5}{8}r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

b17 $a = \frac{1}{2}r\ \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

b18 $\varrho = \frac{1}{4}r\ \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

Konstruktion: $\overline{AB} = 0{,}5r$, $\overline{BC} = \overline{BD}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$



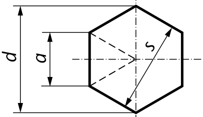
Regelmäßiges Sechseck

b19 $A = \frac{3}{2}\,a^2\sqrt{3}$

b20 $d = 2\,a$

b21 $\quad = \frac{2}{\sqrt{3}}s \approx 1{,}155\,s$

b22 $s\ = \frac{\sqrt{3}}{2}d \approx 0{,}866\,d$



Regelmäßiges Achteck

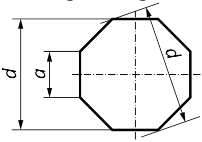
b23 $A = 2\,as \approx 0{,}83\,s^2$

b24 $\quad = 2\,s\sqrt{d^2 - s^2}$

b25 $a = s \cdot \tan 22{,}5^\circ \approx 0{,}415\,s$

b26 $s\ = d \cdot \cos 22{,}5^\circ \approx 0{,}924\,d$

b27 $d = \frac{s}{\cos 22{,}5^\circ} \approx 1{,}083\,s$



Vieleck

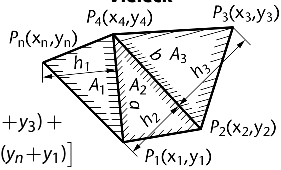
b28 $A = A_1 + A_2 + A_3$

b29 $\quad = \frac{a \cdot h_1 + b \cdot h_2 + b \cdot h_3}{2}$

Wenn Koordinaten der Eckpunkte P_1 bis P_4 bekannt:

$$A = \frac{1}{2}\Big[\,(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) +$$

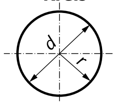
b29a $$+ (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + \ (x_n - x_1)(y_n + y_1)\Big]$$



Hinweis: Werden Eckpunkte gegen den Uhrzeiger durchlaufen, wird $A > 0$, sonst $A < 0$

Flächen

Kreis

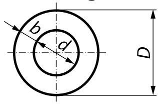


b30 $A = \frac{\pi}{4} d^2 = \pi r^2$

b31 $\approx 0{,}785 d^2$

b32 $U = 2\pi r = \pi d$

Kreisring

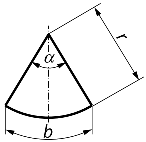


b33 $A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)$

b34 $= \pi(d + b)b$

b35 $b = \frac{D - d}{2}$

Kreisausschnitt



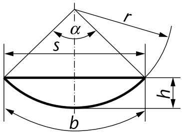
b36 $A = \frac{\pi}{360^\circ} r^2 \alpha = \frac{\widehat{\alpha}}{2} r^2$

b37 $= \frac{br}{2}$

b38 $b = \frac{\pi}{180^\circ} r\alpha$

b39 $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha$ ($\widehat{\alpha}$ im Bogenmaß, α in Grad)

Kreisabschnitt



b40 $s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

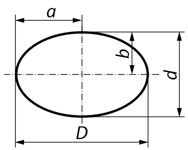
b41 $A = \frac{r^2}{2}\left(\widehat{\alpha} - \sin\alpha\right) \approx \frac{h}{6s}\left(3h^2 + 4s^2\right)$

b42 $r = \frac{h}{2} + \frac{s^2}{8h}$

b43 $h = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{2}\tan\frac{\alpha}{4}$

b44 $\widehat{\alpha} =$ siehe Formel b39

Ellipse



b45 $A = \frac{\pi}{4} Dd = \pi ab$

b46 $U \approx \frac{\pi}{2}\left[3(a + b) - 2\sqrt{ab}\right]$

b47 $$= \pi(a + b)\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \lambda^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \lambda^4 + \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \lambda^6 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \lambda^8 +$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \lambda^{10} + \ldots\right], \quad \text{dabei } \lambda = \frac{a - b}{a + b}$$

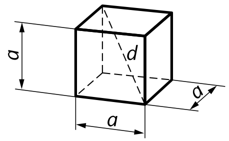
Körper

Würfel

c1 $V = a^3$

c2 $A_O = 6a^2$

c3 $d = \sqrt{3} \cdot a$

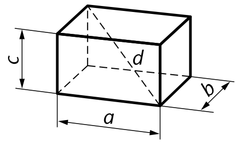


Quader

c4 $V = abc$

c5 $A_O = 2(ab + ac + bc)$

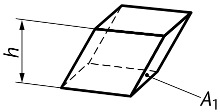
c6 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Schiefer Quader

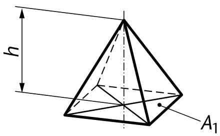
c7 $V = A_1 h$

(Prinzip von Cavalieri)



Pyramide

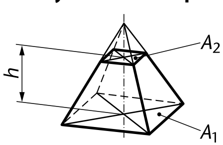
c8 $V = \dfrac{A_1 h}{3}$



Pyramidenstumpf

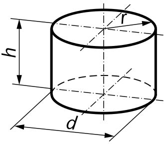
c9 $V = \dfrac{h}{3}\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}\right)$

c10 $\approx h\,\dfrac{A_1 + A_2}{2}$ (wenn $A_1 \approx A_2$)



Körper

Zylinder

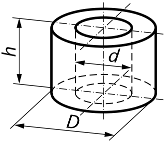


c11 $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

c12 $A_m = 2\pi r h$

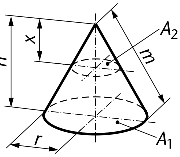
c13 $A_o = 2\pi r(r + h)$

Hohlzylinder



c14 $V = \frac{\pi}{4} h \left(D^2 - d^2\right)$

Kegel



c15 $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

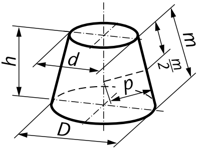
c16 $A_m = \pi r m$

c17 $A_o = \pi r(r + m)$

c18 $m = \sqrt{h^2 + r^2}$

c19 $A_2 : A_1 = x^2 : h^2$

Kegelstumpf

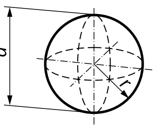


c20 $V = \frac{\pi}{12} h \left(D^2 + D \cdot d + d^2\right)$

c21 $A_m = \frac{\pi}{2} m(D + d) = 2\pi p m$

c22 $m = \sqrt{\left(\frac{D - d}{2}\right)^2 + h^2}$

Kugel



c23 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot d^3$

c24 $\approx 4{,}189 r^3$

c25 $A_o = 4\pi r^2 = \pi d^2$

Körper

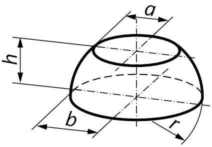
C3

Kugelschicht

c26 $V = \frac{\pi}{6}h\left(3a^2 + 3b^2 + h^2\right)$

c27 $A_m = 2\pi rh$ (Kugelzone)

c28 $A_o = \pi\left(2rh + a^2 + b^2\right)$



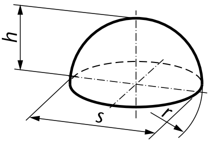
Kugelabschnitt

c29 $V = \frac{\pi}{6}h\left(\frac{3}{4}s^2 + h^2\right)$

$= \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$

c30 $A_m = 2\pi rh$ (Kugelkappe)

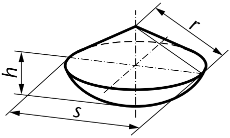
c31 $= \frac{\pi}{4}\left(s^2 + 4h^2\right)$



Kugelausschnitt

c32 $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$

c33 $A_o = \frac{\pi}{2}r(4h + s)$



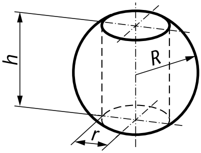
Zylindrisch durchbohrte Kugel

c34 $V = \frac{\pi}{6}h^3$

c35/1 $A_o = 4\pi\sqrt{(R + r)^3(R - r)}$

c35/2 $= 2\pi h(R + r)$

c35/3 $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

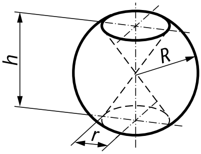


Keglig durchbohrte Kugel

c36 $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

c37/1 $A_o = 2\pi R\left(h + \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}\right)$

c37/2 $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

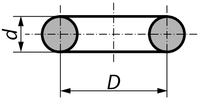


Körper

Kreisring

c38 $$V = \frac{\pi^2}{4} D d^2$$

c39 $$A_o = \pi^2 D d$$

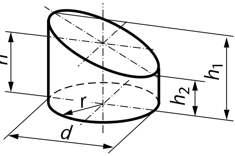


Schief abgeschnittener Zylinder

c40/1 $$V = \frac{\pi}{4} d^2 h$$

c40/2 $$A_m = \pi d h$$

c40/3 $$A_o = \pi r \left[h_1 + h_2 + r + \sqrt{r^2 + (h_1 - h_2)^2/4} \right]$$

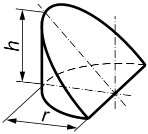


Zylinderhuf

c41 $$V = \frac{2}{3} r^2 h$$

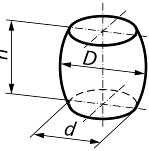
c42 $$A_m = 2 r h$$

c43 $$A_o = A_m + \frac{\pi}{2} r^2 + \frac{\pi}{2} r \sqrt{r^2 + h^2}$$



Fass

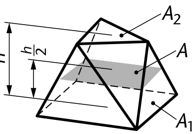
c44 $$V \approx \frac{\pi}{12} h \left(2D^2 + d^2 \right)$$



Prismatoid

c45 $$V = \frac{h}{6} (A_1 + A_2 + 4A)$$

Nach dieser Formel lassen sich die auf C1 … C3 aufgeführten Körper – demnach auch die Kugel und ihre Teile – berechnen.



Arithmetik

Potenzen, Wurzeln

D1

Regeln für Potenz- und Wurzel-Rechnungen

	Allgemein	Zahlenbeispiele	
d1	$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q)a^n$	$3a^4 + 4a^4 = 7a^4$	
d2	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^8 \cdot a^4 = a^{12}$	
d3	$a^m / a^n = a^{m-n}$	$a^8 / a^2 = a^{8-2} = a^6$	
d4	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$	$(a^3)^2 = (a^2)^3 = a^{2\cdot 3} = a^6$	
d5	$a^{-n} = 1/a^n$	$a^{-4} = 1/a^4$	
d6	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$\dfrac{a^3}{b^3} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$	
d7	$p \sqrt[n]{a} \pm q \sqrt[n]{a} = (p \pm q) \sqrt[n]{a}$	$4 \sqrt[3]{x} + 7 \sqrt[3]{x} = 11 \sqrt[3]{x}$	$a, b \geq 0$
d8	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81}$	
d9	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$	
d10	$\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a^4}$	
d11	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$ *)	$\sqrt[4]{a^3} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{4}}$	
d12	$\sqrt{-a} = \mathrm{i}\sqrt{a}; \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$	$\sqrt{-9} = \mathrm{i}\sqrt{9} = \mathrm{i} \cdot 3$	

*) Gilt nicht in Sonderfällen, z. B. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = +2$; $\left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$.
Exponenten von Potenzen und Wurzeln müssen stets dimensionslos sein.

Quadratische Gleichung (Gleichung 2ten Grades)

d13 Normalform $x^2 + px + q = 0$

d14 Lösungen $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

d15 Satz von Vieta $p = -(x_1 + x_2); \quad q = x_1 \cdot x_2$

Arithmetische Bestimmung einer beliebigen Wurzel

d16 Wenn $x = \sqrt[n]{A}$, dann ist $$x = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_0 + \frac{A}{x_0^{n-1}}\right]$$

x_0 ist der zunächst geschätzte Wert von x. Mehrmals wiederholtes Einsetzen des erhaltenen x als x_0 erhöht immer mehr die Genauigkeit von x.

Umformung gewöhnlicher algebraischer Ausdrücke

d17 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

d18 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

d19 $$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots b^n$$

d20 $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

d21 $(a - b + c)^2 = a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2bc + c^2$

d22 $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

d23 $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

d24 $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

d25 $a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Binomischer Satz

d26 $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots$ [1)]

d27 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$ [1)]

1) Dabei muss n eine ganze Zahl sein.

d28 $$(a + b)^4 = 1a^4 + \frac{4}{1}a^{4-1} \cdot b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}a^{4-2} \cdot b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{4-3} \cdot b^3 + b^4 \\ = a^4 + 4a^3 \cdot b + 6a^2 \cdot b^2 + 4a \cdot b^3 + b^4$$

Schematische Auflösung

d29 **Die Koeffizienten nach dem Pascal'schen Dreieck**

$(a+b)^0$							1						
$(a+b)^1$						1		1					
$(a+b)^2$					1		2		1				
$(a+b)^3$				1		3		3		1			
$(a+b)^4$			1		4		6 ↓		4		1		
$(a+b)^5$		1		5 ↓		10		10		5		1	
$(a+b)^6$	1		6		15		20		15		6		1

Fortsetzung so, dass jede Zeile mit 1 beginnt und endet. Zweite und vorletzte Zahl entspricht dem Exponenten. Übrige Zahlen sind die Summen der jeweils rechts und links darüber stehenden Zahlen.

d30 **Exponenten:** Die Summe der Exponenten von a und b jedes Gliedes ist gleich dem Binom-Exponenten n. Mit fallenden Potenzen von a steigen die Potenzen von b.

d31 **Vorzeichen:** Bei $(a + b)$ stets positiv. Bei $(a - b)$ mit $+$ beginnend, dann von Glied zu Glied wechselnde Vorzeichen.

d32 *Beispiele:*

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a - b)^5 = + a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Gebrochen rationale Funktion

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} \qquad n > m, \quad n \text{ und } m \text{ ganzzahlig}$$

Die Koeffizienten a_ν, b_μ können reell oder komplex sein. Sind n_i die Nullstellen von $Q(x)$, so erhält man die faktorisierte Form.

d33
$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a \cdot (x - n_1)^{k1} \cdot (x - n_2)^{k2} \cdot \ldots \cdot (x - n_q)^{kq}}$$

Dabei können $k_1, k_2, \ldots, k_q$-fache Nullstellen von $Q(x)$ auftreten, die reell oder komplex sein können; a ist ein konstanter Faktor.

Partialbruchzerlegung

Zur einfacheren Behandlung von $y(x)$, z. B. zur Integration, ist es oft zweckmäßig, $y(x)$ in Teilbrüche zu zerlegen.

d34
$$\begin{aligned} y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - n_1} + \frac{A_{12}}{(x - n_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k1}}{(x - n_1)^{k1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x - n_2} + \frac{A_{22}}{(x - n_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k2}}{(x - n_2)^{k2}} + \ldots + \\ &+ \frac{A_{q1}}{x - n_q} + \frac{A_{q2}}{(x - n_q)^2} + \ldots + \frac{A_{qkq}}{(x - n_q)^{kq}} \end{aligned}$$

Bei reellen Koeffizienten von $Q(x)$ treten komplexe Nullstellen paarweise (konjugiert komplex) auf. Zur Zerlegung werden diese Paare zu reellen Teilbrüchen zusammengefasst. Sind in d33 die Nullstellen $n_2 = \overline{n}_1$ (konjugiert komplex zu n_1) und wird wegen ihres paarweisen Auftretens $k_1 = k_2 = k$, so lassen sich die Teilbrüche von d34 mit den Konstanten $A_{11} \ldots A_{2k2}$ zu folgenden Teilbrüchen zusammenfassen:

d35
$$\frac{B_{11} x + C_{11}}{x^2 + ax + b} + \frac{B_{12} x + C_{12}}{(x^2 + ax + b)^2} + \ldots + \frac{B_{1k} x + C_{1k}}{(x^2 + ax + b)^k}$$

Die Konstanten von A_{11} bis A_{qkq} bzw. B_{11}, C_{11} bis B_{1k}, C_{1k} erhält man durch Koeffizienten-Vergleich gleicher Potenzen in x zwischen linker und rechter Seite der Gleichung, nachdem man die rechte in Teilbrüche zerlegte Seite auf den Hauptnenner $Q(x)$ gebracht hat.

Beispiel:

$$y(x) = \frac{2x-1}{(x+1-2i)(x+1+2i)(x+1)^2} = \frac{2x-1}{Q(x)} = \frac{B_{11} x + C_{11}}{x^2+2x+5} + \frac{A_{q1}}{x+1} + \frac{A_{q2}}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x-1}{Q(x)} = \frac{B_{11} x (x+1)^2 + C_{11}(x+1)^2 + A_{q1}(x+1)(x^2+2x+5) + A_{q2}(x^2+2x+5)}{Q(x)}$$

$$\begin{aligned} 2x-1 &= (A_{q1} + B_{11})x^3 + (3A_{q1} + A_{q2} + 2B_{11} + C_{11})x^2 \\ &+ (7A_{q1} + 2A_{q2} + B_{11} + 2C_{11})x + 5A_{q1} + 5A_{q2} + C_{11} \end{aligned}$$

Koeffizienten-Vergleich zwischen linker und rechter Seite ergibt:

$$B_{11} = -1/2; \quad C_{11} = 1/4; \quad A_{q1} = 1/2; \quad A_{q2} = -3/4$$

Bei einfachen Nullstellen n_i lassen sich die Konstanten $A_{11}, A_{21} \ldots A_{q1}$ von Gleichung d34 wie folgt berechnen:

d36
$$A_{11} = P(n_1)/Q'(n_1); \quad A_{21} = P(n_2)/Q'(n_2); \quad \ldots \quad A_q = P(n_q)/Q'(n_q)$$

Arithmetik

Logarithmen

Allgemeines

	System	Logarithmus mit der Basis	Bezeichnung
d37	$\log_a$	a	Logarithmus zur Basis a
d38	$\log_{10} = \lg$	10	Zehner-Logarithmus
d39	$\log_e = \ln$	e	Natürlicher Logarithmus
d40	$\log_2 = \mathrm{lb}$	2	Zweier-Logarithmus

Jn $\log_a x = b$ heißt a Basis
x Numerus
b Logarithmus

Regeln für logarithmische Rechnungen

d41 $$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

d42 $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

d43 $$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

d44 $$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

Exponential-Gleichung

d45 $$b^x = d = e^{x \cdot \ln b}$$

d46 hieraus: $$x = \frac{\log_a d}{\log_a b} \quad \Big| \quad b = \sqrt[x]{d}$$

Umrechnung von Logarithmen

d47 $$\lg x = \lg e \cdot \ln x = 0{,}434\,294 \cdot \ln x$$

d48 $$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = 2{,}302\,585 \cdot \lg x$$

d49 $$\mathrm{lb}\, x = 1{,}442\,695 \cdot \ln x = 3{,}321\,928 \cdot \lg x$$

Basis der natürlichen Logarithmen e $= 2{,}718\,281\,828\,459 \ldots$

Kennziffern des Zehner-Logarithmus einer Zahl

d50 $\lg 0{,}01 = -2$ oder $8.\ldots - 10$
d51 $\lg 0{,}1 = -1$ oder $9.\ldots - 10$
d52 $\lg 1 = 0$
d53 $\lg 10 = 1$
d54 $\lg 100 = 2$ usw.

Bemerkung: Der Numerus eines Logarithmus muss stets dimensionslos sein.

Permutationen oder Vertauschungen

Anzahl Vertauschungen von n Elementen (mit Berücksichtigung ihrer Anordnung):

d55 $$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$ [1]

Beispiel: Die $n = 3$ Elemente a, b, c lassen sich auf folgende 6 Arten untereinander vertauschen:

$$\begin{matrix} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{matrix}$$

d56 $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ Permutationen

Sonderfall: Sind bei Vertauschung von n Elementen n_1 gleiche Elemente einer Art, n_2 gleiche Elemente einer 2. Art usw. und n_k gleiche Elemente einer k-ten Art, so gibt es:

d57 $$P_{n,k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \text{ Permutationen}$$

Beispiel: Die $n = 3$ Elemente a, a, b lassen sich auf folgende Arten vertauschen:

$$aab \quad aba \quad baa$$

Hierin ist $n = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, also

d58 $$P_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \text{ Permutationen}$$

Variationen und Kombinationen

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche man von n Elementen k Elemente mit Berücksichtigung ihrer Anordnung herausgreifen kann, heißt die Anzahl Variationen der n Elemente.

$$V_k^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}; \quad n \geqq k$$

Ohne Berücksichtigung der Anordnung der k Elemente spricht man von Kombinationen

$$C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$ [2]

Zusätzlich wird noch unterschieden, ob sich die einzelnen Elemente wiederholen oder nicht (Schreibweise ${}^wV_k^n$ bzw. ${}^wC_k^n$ bei Wiederholung).

Die Tabelle auf Seite D6 zeigt die Gegenüberstellung von Variationen und Kombinationen mit und ohne Wiederholung der Elemente.

[1] $n!$ sprich „n Fakultät"

[2] Berechnung gemäß d27

Kombinationen und Variationen

(Erläuterungen siehe D5)

	d62	d61	d60	d59
	Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung und <u>ohne</u> Berücksichtigung ihrer Anordnung	Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung und <u>ohne</u> Berücksichtigung ihrer Anordnung	Anzahl der Variationen ohne Wiederholung und <u>mit</u> Berücksichtigung ihrer Anordnung	Anzahl der Variationen mit Wiederholung und <u>mit</u> Berücksichtigung ihrer Anordnung
Formel	$C_k^n = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dbinom{n}{n-k}^{1)} = \dbinom{n}{k}^{1)}$	${}^wC_k^n = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \dbinom{n+k-1}{k}^{1)}$	$V_k^n = C_k^n \cdot P_k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dbinom{n}{k}k!^{1)}$	${}^wV_k^n = n^k$
Erläuterung der Formelzeichen	C Anzahl möglicher Kombinationen n Anzahl gegebener Elemente k Anzahl herausgegriffener Elemente aus n gegebenen Elementen		V Anzahl möglicher Variationen	
Beispiele: Gegeben	$n = 3$ Elemente a, b, c $k = 2$ herausgegriffene Elemente aus den vorstehenden 3 Elementen			
Beispiele: Möglichkeiten	· *ab* *ac* · · *bc* · · ·	*aa* *ab* *ac* · *bb* *bc* · · *cc*	· *ab* *ac* *ba* · *bc* *ca* *cb* ·	*aa* *ab* *ac* *ba* *bb* *bc* *ca* *cb* *cc*
Beispiele: Berechnung der Anzahl Möglichkeiten	$C_2^3 = \dfrac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$ $= \dbinom{3}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$ $= \dbinom{3}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$	${}^wC_2^3 = \dfrac{(3+2-1)!}{2! \cdot (3-1)!} = 6$ $= \dbinom{3+2-1}{2}$ $= \dbinom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$	$V_2^3 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3!}{1!} = 6$ $= \dbinom{3}{2} \cdot 2!$ $= \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 2! = 6$	${}^wV_2^3 = 3^2$ $= 9$
Bemerkung	Es entsprechen z. B. *ab* und *ba* den gleichen Kombinationen		Es entsprechen z. B. *ab* und *ba* verschiedenen Variationen	

1) Berechnung gemäß d27

Zweireihige Determinanten

d63
$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = r_1 \qquad\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = r_2$$

r-Spalte einsetzen anstelle der

x-Spalte	*y*-Spalte
$D_1 = \begin{vmatrix} r_1 & a_{12} \\ r_2 & a_{22} \end{vmatrix} = r_1 \cdot a_{22} - r_2 \cdot a_{12}$	$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & r_1 \\ a_{21} & r_2 \end{vmatrix} = r_2 \cdot a_{11} - r_1 \cdot a_{21}$
$x = \dfrac{D_1}{D}$	$y = \dfrac{D_2}{D}$

d64

Dreireihige Determinanten (Regel nach Sarrus)

d65
$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = r_1$$
$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = r_2$$
$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = r_3$$

d66
$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right| = \begin{array}{l} \, a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{array}$$

x-Spalte durch *r*-Spalte ersetzen:

d67
$$D_1 = \left| \begin{array}{ccc|cc} r_1 & a_{12} & a_{13} & r_1 & a_{12} \\ r_2 & a_{22} & a_{23} & r_2 & a_{22} \\ r_3 & a_{32} & a_{33} & r_3 & a_{32} \end{array} \right| = \begin{array}{l} \, r_1 \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot r_3 \\ + a_{13} \cdot r_2 \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot r_3 \\ - r_1 \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot r_2 \cdot a_{33} \end{array}$$

D_2 bzw. D_3 ebenso entwickeln durch Ersetzen der *y*- bzw. *z*- Spalte durch die *r*- Spalte, dann wird:

d68 $x = \dfrac{D_1}{D}$; $\qquad y = \dfrac{D_2}{D}$; $\qquad z = \dfrac{D_3}{D}$

Fortsetzung siehe D8

Mehr als zweireihige Determinanten

(Bei einer 3-reihigen Determinante kann auch die Sarrus'sche Regel nach D7 angewendet werden.)

Matrix bilden und durch Addition oder Subtraktion zweier oder mehrerer Zeilen, die vorher evtl. durch Multiplikation oder Division umgeformt wurden, Nullen erzeugen.

Determinante nach der Zeile oder Spalte mit den meisten Nullstellen entwickeln, dabei abwechselnde Vorzeichen (bei a_{11} mit $+$ beginnend) einsetzen.

Beispiel:

$$\begin{array}{cccc}
\overset{+}{a}_{11} & \overset{-}{a}_{12} & \overset{+}{a}_{13} & 0^{-} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \overset{+}{a}_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \overset{-}{a}_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0^{+}
\end{array}$$

Entwicklung nach der 4. Spalte ergibt:

$$a_{24}\begin{vmatrix} \overset{+}{a}_{11} & \overset{-}{a}_{12} & \overset{+}{a}_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{34}\begin{vmatrix} \overset{+}{a}_{11} & \overset{-}{a}_{12} & \overset{+}{a}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Sofern sich nicht wie oben weitere Nullen erreichen lassen, ergibt sich folgende Entwicklung z. B. nach den ersten Zeilen von d70:

d69
$$D = a_{24}\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\right) - a_{34}\left(\ldots\right)$$

Für die Unterdeterminanten $D_1, D_2, \ldots$ die r-Spalten entsprechend Blatt D7 einsetzen und dann Entwicklung wie bei der Determinante D.

Ermittlung der n Unbekannten $u_{1\ldots n}$ nach den Formeln:

d70
$$u_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad u_2 = \frac{D_2}{D}; \qquad \ldots; \qquad u_n = \frac{D_n}{D}$$

Anmerkung: Für die n-reihige Determinante Entwicklung so lange fortsetzen, bis mindestens 3-reihige Determinanten erreicht sind.

Definition einer algebraischen Gleichung

Eine algebraische Gleichung hat die Form:

d71 $$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Dabei können einzelne Glieder fehlen, bei denen die Koeffizienten $a_\mu = 0$ sind mit $\mu < n$.

Unter der Lösung einer algebraischen Gleichung versteht man die Ermittlung von Nullstellen – auch Wurzeln genannt – dieser Gleichung, für die $f_n(x) = 0$ wird.

Eigenschaften:

1. Die algebraische Gleichung $f_n(x) = 0$ vom Grade n besitzt genau n Nullstellen (Wurzeln).
2. Sind alle Koeffizienten a_ν reell, so können nur reelle oder konjugiert komplexe Nullstellen als Lösungen vorkommen.
3. Sind alle Koeffizienten $a_\nu \geqq 0$, so gibt es keine Lösungen, deren Realteil > 0 ist.
4. Bei ungeradem Grad von n ist mindestens eine Nullstelle reell, vorausgesetzt, alle Koeffizienten a_ν sind reell.
5. Die Zusammenhänge zwischen den Nullstellen x_μ und den Koeffizienten sind folgende:

d72 $$\sum x_i = -a_{n-1}/a_n \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

d73 $$\sum x_i \cdot x_j = a_{n-2}/a_{n-1} \quad \text{für} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{wobei} \quad i \neq j$$

d74 $$\sum x_i \cdot x_j \cdot x_n = -a_{n-3}/a_{n-2} \quad \text{für} \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{wobei} \quad i \neq j \neq k$$

$$\vdots$$

d75 $$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0/a_1$$

6. Die Anzahl der positiv reellen Wurzeln der gesuchten Gleichung ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizientenfolge

d76 $$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$$ oder

um eine gerade Zahl kleiner als diese (Satz von Descartes).

d77 *Beispiel:* $f_3(x) = 2 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 12 = 0$ hat die Vorzeichen

$+ \quad - \quad + \quad +$

und damit wegen der 2 Vorzeichenwechsel entweder 2 oder 0 positiv reelle Wurzeln.

Fortsetzung siehe D10

Fortsetzung von D9

7. Die Anzahl der negativ reellen Wurzeln der gesuchten Gleichung wird durch Substitution $x = -z$ ermittelt:
   Dabei ist die Zahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizientenfolge
   d78 $a_n^*,\ a_{n-1}^*,\ a_{n-2}^*, \ldots,\ a_2^*,\ a_1^*,\ a_0^*$ gleich der Zahl der negativ reellen Wurzeln oder um eine gerade Zahl kleiner als diese. Angewendet auf das Beispiel von D9, Punkt 6:

   d79 $$f_3(z) = -2z^3 - 15z^2 - 16z + 12 = 0$$

   hat die Vorzeichen $\quad - \quad - \quad - \quad +$
   und damit Gleichung d77 wegen nur einem Vorzeichenwechsel nur eine negativ reelle Wurzel.

Allgemeine Lösung

Ist x_1 Nullstelle einer algebraischen Gleichung n-ten Grades $f_n(x) = 0$, lässt sich bei Division von $f_n(x)$ durch $(x - x_1)$ die Gleichung um einen Grad auf $f_{n-1}(x) = 0$ erniedrigen. Ist x_2 als weitere Nullstelle bekannt, so lässt sich die Gleichung bei Division mit $(x - x_2)$ um einen weiteren Grad erniedrigen, usw.

d80 $$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

d81 $$f_n/(x - x_1) = f_{n-1}(x) = a_n{}' x^{n-1} + a_{n-1}{}' x^{n-2} + \ldots + a_2{}' x + a_1{}'$$

d82 $$f_{n-1}/(x - x_2) = f_{n-2}(x) = a_n{}'' x^{n-2} + a_{n-2}{}'' x^{n-3} + \ldots + a_2{}'' x + a_1{}''$$

$$f_{n-2}/(x - x_3) = \ldots \quad \text{usw.}$$

$$\vdots$$

d83 $$f_1/(x - x_n) = f_0(x) = a_n^{(n)}$$

Sind die Nullstellen im speziellen Fall konjugiert komplex, so wird nach Division der Grad der Gleichung um 2 reduziert. Die Division der algebraischen Gleichung $f_n(x)$ durch $(x - x_\mu)$ kann auf einfache Weise mit dem Horner-Schema (siehe D11) durchgeführt werden.

Horner-Schema

Das Horner-Schema ist ein Rechenschema, das auf das Polynom P n-ten Grades

d84 $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

für folgende Aufgaben verwendet werden kann:

- Berechnung des Wertes von $P_n(x)$ an der Stelle $x = x_0$.
- Berechnung der Werte der Ableitungen von $P_n{}'(x)$, $P_n{}''(x)$ usw. bis $P_n^{(n)}(x)$ an der Stelle $x = x_0$.
- Reduzierung des Grades von $P_n(x)$ bei bekannten Nullstellen (Wurzeln).
- Ermittlung von Nullstellen (Wurzeln).

Fortsetzung siehe D11

D11 Arithmetik

Algebraische Gleichungen beliebigen Grades

Horner-Schema (siehe untenstehendes Schema)

Man setzt die Koeffizienten $a_\nu = a_\nu{}^{(0)}$ und schreibt die Koeffizienten des Polynoms $P_n(x)$ – mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz beginnend – in die 1. Zeile. Nicht belegte Potenzen werden mit 0 eingetragen!

Zeile	Schema	
1	$a_n{}^{(0)} \quad a_{n-1}{}^{(0)} \quad a_{n-2}{}^{(0)} \quad a_{n-3}{}^{(0)} \ldots \quad a_2{}^{(0)} \quad a_1{}^{(0)} \quad a_0{}^{(0)}$	d85
2	$x_0 \quad x_0 a_n{}^{(1)} \quad x_0 a_{n-1}{}^{(1)} \quad x_0 a_{n-2}{}^{(1)} \ldots \quad x_0 a_3{}^{(1)} \quad x_0 a_2{}^{(1)} \quad x_0 a_1{}^{(1)}$	d86
3	$a_n{}^{(1)} \quad a_{n-1}{}^{(1)} \quad a_{n-2}{}^{(1)} \quad a_{n-3}{}^{(1)} \ldots \quad a_2{}^{(1)} \quad a_1{}^{(1)} \quad \boxed{a_0{}^{(1)} = b_0 = P_n(x_0)}$	d87
4	$x_0 \quad x_0 a_n{}^{(2)} \quad x_0 a_{n-1}{}^{(2)} \quad x_0 a_{n-2}{}^{(2)} \ldots \quad x_0 a_3{}^{(2)} \quad x_0 a_2{}^{(2)}$	d88
5	$a_n{}^{(2)} \quad a_{n-1}{}^{(2)} \quad a_{n-2}{}^{(2)} \quad a_{n-3}{}^{(2)} \ldots \quad a_2{}^{(2)} \quad \boxed{a_1{}^{(2)} = b_1 = 1/1! \cdot P_n{}'(x_0)}$	d89
6	$x_0 \quad x_0 a_n{}^{(3)} \quad x_0 a_{n-1}{}^{(3)} \quad x_0 a_{n-2}{}^{(3)} \ldots \quad x_0 a_3{}^{(3)}$	d90
	$a_n{}^{(3)} \quad a_{n-1}{}^{(3)} \quad a_{n-2}{}^{(3)} \quad a_{n-3}{}^{(3)} \ldots \quad \boxed{a_2{}^{(3)} = b_2 = 1/2! \cdot P_n{}''(x_0)}$	d91
	$\vdots$	
	$x_0 \quad x_0 a_n{}^{(n)}$	d92
	$a_n{}^{(n)} \quad \boxed{a_{n-1}{}^{(n)} = b_{n-1} = 1/(n-1)! \cdot P_n{}^{(n-1)}(x_0)}$	d93
	x_0	d94
	$\boxed{a_n{}^{(n)} = a_n = b_n = 1/n! \cdot P_n{}^{(n)}(x_0)}$	d95

Beispiel 1 zum Horner-Schema

Berechnung der Werte $P_n(x)$, $P_n{}'(x)$, $P_n{}''(x)$, und $P_n{}'''(x)$ an der Stelle $x = x_0$; $x_0 = 4$:

$$P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \qquad \text{d96}$$

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & a_3{}^{(0)} & a_2{}^{(0)} & a_1{}^{(0)} & a_0{}^{(0)} & \text{d97}\\
 & 1 & -6 & 11 & -6 & \text{d98}\\
x_0 = 4 & & 4 & -8 & 12 & \text{d99}\\ \hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{6 = P_n(4)} & \text{d100}\\
4 & & 4 & 8 & & \text{d101}\\ \hline
 & 1 & 2 & \boxed{11 = P_n{}'(4)} & & \text{d102}\\
4 & & 4 & & & \text{d103}\\ \hline
 & 1 & \boxed{6 = P_n{}''(4) \cdot 1/2!;} & P_n{}''(4) = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 & & \text{d104}\\ \hline
 & 1 = P_n{}'''(4) \cdot 1/3!; & P_n{}'''(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 & & & \text{d105}
\end{array}$$

Erläuterung zum Horner-Schema

Der Wert eines Polynoms und seiner Ableitungen an der festen Stelle $x = x_0$ sollen berechnet werden.

In die 2. Zeile werden dazu die Ergebnisse von Multiplikationen von x_0 mit den Multiplikanten $a_n{}^{(1)}$, $a_{n-1}{}^{(1)}$ usw. gemäß gerasterter Linien eingetragen (z. B. $x_0 \cdot a_n{}^{(1)} = x_0\, a_n{}^{(1)}$).

Die 3. Zeile stellt Ergebnisse der Addition von Zeile 1 und 2 dar:

d106 z. B. $a_{n-1}{}^{(1)} = a_{n-1}{}^{(0)} + x_0 \cdot a_n{}^{(1)}$; dabei $a_n{}^{(1)} = a_n{}^{(0)}$

d107 $a_{n-2}{}^{(1)} = a_{n-2}{}^{(0)} + x_0 \cdot a_{n-1}{}^{(1)}$

Dabei bedeutet speziell:

d108 $$a_0{}^{(1)} = a_0{}^{(0)} + x_0 \cdot a_1{}^{(1)} = b_0 = P_n(x_0)$$

den Wert des Polynoms an der Stelle x_0.

Führt man nach dem gleichen Schema – von Zeile 3 ausgehend – die Multiplikationen und Additionen durch, so erhält man in Zeile 5 mit

d109 $$a_1{}^{(2)} = b_1 = P_n{}'(x_0)$$

den Wert der ersten Ableitung von $P_n(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Dieses Schema lässt sich n-mal durchführen, da ein Polynom vom Grad n genau n Ableitungen besitzt.

Nach dieser Entwicklung gilt:

d110 $$P_n(x) = a_0{}^{(1)} + a_1{}^{(2)}(x - x_0) + a_2{}^{(3)}(x - x_0)^2 + \ldots + \ldots + a_{n-1}{}^{(n)}(x - x_0)^{n-1} + a_n{}^{(n)}(x - x_0)^n$$

d111 $$= P_n(x_0) + 1/1! \cdot P_n{}'(x_0) \cdot (x - x_0) + 1/2! \cdot P_n{}''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \ldots + 1/(n-1)! \cdot P_n{}^{(n-1)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-1} + 1/n! \cdot P_n{}^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$$

Beispiel 2 zum Horner-Schema

Reduzierung des Grades bei bekannter Nullstelle (Wurzel) x_0, d. h. Bestimmung von $P_{n-1}(x)$ gemäß:

d112 $$P_n(x)/(x - x_0) = P_{n-1}(x)$$

d113 Gegeben: $P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ mit Wurzel $x_0 = 1$.

d114–d117 Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
 & a_3{}^{(0)} & a_2{}^{(0)} & a_1{}^{(0)} & a_0{}^{(0)} & \\
 & 1 & -6 & 11 & -6 & \\
x_0 = 1 & & 1 & -5 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & 0 & = P_n(1)
\end{array}$$

Ergebnis $P_n(1) = 0$ beweist, dass $x_0 = 1$ eine Nullstelle von $P_n(x)$ ist.

d118 Damit ist $P_{n-1}(x) = 1x^2 - 5x + 6$.

Aus letzter Gleichung lassen sich die Wurzeln zu $x_1 = 2$ und $x_3 = 3$ nach d14 sehr einfach bestimmen.

Allgemeines

Nachdem die genaue Bestimmung der Nullstellen – auch Wurzeln genannt – von algebraischen oder gar transzendenten Gleichungen analytisch nur bedingt möglich ist, werden unter D14 … D16 für Näherungslösungen folgende Verfahren erläutert:

- Newton'sches Verfahren
- Sekantenverfahren
- Lineare Interpolation (Regula falsi)

Ausgehend von einer ersten groben Näherung wird durch Iteration deren Genauigkeit beliebig erhöht.

Beispiel für eine algebraische Gleichung (Polynom):

d119 $$x^4 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$$

Beispiel für eine transzendente Gleichung:

d120 $$x \cdot \lg(x) - 1 = 0$$

Vorgehensweise:

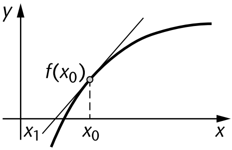
- Ersten Näherungswert durch Grobschätzung oder durch Aufzeichnen der Kurve nach Wertetabelle bestimmen.

- Auswahl eines der obigen 3 Verfahren. Dabei ist zu berücksichtigen, dass das Verfahren „Lineare Interpolation" immer konvergiert. Bei den beiden anderen Verfahren ist eine Konvergenz nur unter den in D14 und D15 genannten Bedingungen garantiert. Der Nachteil dieser zusätzlichen Überprüfung auf Einhaltung der Bedingungen wird beim Newton'schen und Sekantenverfahren im Allgemeinen durch wesentlich raschere Konvergenz dieser Verfahren wieder ausgeglichen.

- Zur schnelleren Konvergenz ist es oft besser, zunächst mit einem geeigneten Verfahren zu beginnen und mit einem anderen fortzufahren. Dies gilt besonders dann, wenn sich mit dem anfänglich ausgewählten Verfahren nach einigen Iterationen keine besseren Ergebnisse erzielen lassen.

Newton'sches Näherungsverfahren

Man wählt x_0 als ersten Näherungswert für die Wurzel n_0 der Gleichung $f(x) = 0$, legt im Punkt $y = f(x_0)$ die Tangente an und berechnet den Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse. Man erhält damit einen besseren Näherungswert x_1 durch die folgende Vorschrift:



d121 $$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

Eine weitere Verbesserung x_2 ergibt sich, wenn der Wert x_1 entsprechend verwendet wird:

d122 $$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) \quad \text{usw.}$$

Durch häufiges Wiederholen dieses Verfahrens lässt sich eine Wurzel mit beliebiger Genauigkeit bestimmen.

Allgemeine Vorschrift:

d123 $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k); \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Voraussetzung für die Konvergenz dieses Verfahrens:

- n_0 ist eine einfache Wurzel ($f'(x_0) \neq 0$).
- Zwischen x_0 und n_0 keine Extremwerte der Funktion $f(x)$ zulässig.

Konvergenz: lokal konvergent.

Hinweis: Die beim Newton'schen Verfahren benötigten Werte $f(x_k)$ und $f'(x_k)$ können mithilfe des unter D11 angegebenen Horner-Schemas auf einfache Weise berechnet werden.

d124 Beispiel: $f(x) = x \cdot \lg x - 1$. Der erste Näherungswert für eine Wurzel sei $x_0 = 3$, mit dem $f(x) = 0$ erfüllt wird.

d125 *1. Schritt:* Da nach Gleichung d121 der Wert der Ableitung $f'(x)$ zur Näherung benötigt wird, wird $f'(x)$ ermittelt:

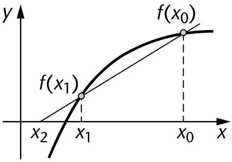
d126 $$f'(x) = \lg(x) + \lg(e) = \lg(x) + 0{,}434\,294$$

d127 *2. Schritt:* Ermittlung eines verbesserten Wertes x_1:
Nach Gleichung d121 ergibt sich für $x_0 = 3$, $f(x_0) = 0{,}431\,364$ und $f'(x_0) = 0{,}911\,415$ der verbesserte Wert $x_1 = 2{,}526\,710$.

d128 *3. Schritt:* Ermittlung eines verbesserten Wertes x_2:
Nach Gleichung d122 ergibt sich für $x_1 = 2{,}526\,710$, $f(x_1) = 0{,}017\,141$ und $f'(x_1) = 0{,}836\,849$ der verbesserte Wert $x_2 = 2{,}506\,227$; Fehler $+0{,}000\,036$. Mit dem Wert von x_2 wird die Nullstelle bis auf einen Fehler von 0,000 036 genau erreicht.

d129 *4. Schritt:* Ist die Genauigkeit noch nicht ausreichend, müssen weitere Näherungsschritte ausgeführt werden.

Sekantenverfahren



Die Ableitung $f'(x)$ der Newton'schen Näherung wird durch den Differenzialquotienten ersetzt. Durch 2 benachbarte Punkte $f(x_0)$ und $f(x_1)$ wird eine Gerade gelegt und der Schnittpunkt x_2 dieser Geraden mit der x-Achse berechnet. Dieser Wert ist die erste Näherung für die gesuchte Nullstelle n_0.

d130 $$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Im nächsten Schritt wird $f(x_1)$ mit $f(x_2)$ verbunden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse ist die nächste Näherung.

Allgemeine Iterationsvorschrift:

d131 $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}; \qquad k = 1, 2, \ldots; \quad f(x_k) \neq f(x_{k-1})$$

Bemerkung: Eine besonders schnelle Konvergenz kann häufig erreicht werden, wenn zwischen Sekanten- und Newton'schem Verfahren abgewechselt wird.

Konvergenz: lokal konvergent.

d132 Beispiel: $f(x) = x \cdot \lg x - 1;\;\; x_0 = 4;\;\; x_1 = 3.$

$$f(x_0) = 1{,}408\,240; \qquad f(x_1) = 0{,}431\,364$$

d133 1. Näherungswert: $x_2 = 3 - 0{,}431\,364 \cdot (3-4)/(0{,}431\,364 - 1{,}408\,240)$
$= 2{,}558\,425.$

d134 Fehler: $f(x_2) = 0{,}043\,768.$

2. Näherungswert mit $x_1, x_2, f(x_1)$ und $f(x_2)$ berechnet

d135 $x_3 = 2{,}558\,425 - 0{,}043\,768 \cdot (2{,}558\,425 - 3)/(0{,}043\,768 - 0{,}431\,364)$
$x_3 = 2{,}508\,562$

d136 Fehler: $f(x_3) = 0{,}001\,982.$

Anstelle mit dem Sekantenverfahren fortzufahren, kann man bereits mit x_2 das Newton'sche Verfahren anwenden:

d137 Dazu ist $f(x_2)$ zu berechnen: $f'(x) = \lg x + \lg(\mathrm{e})$

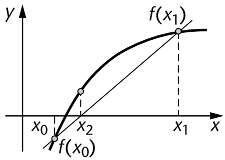
d138 $f'(x_2) = \lg(2{,}558\,425) + 0{,}434\,294$
$= 0{,}842\,267.$

d139 $x_3{}^* = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 2{,}558\,425 - 0{,}043\,768/0{,}842\,267 = 2{,}506\,460.$

d140 Fehler: $f(x_3{}^*) = 0{,}000\,230$. $x_3{}^*$ führt demnach zu einem kleineren Fehler als der Wert x_3, der allein nach dem Sekantenverfahren gewonnen wurde.

Lineare Interpolation (Regula falsi)

Man wählt 2 Werte x_0 und x_1 so, dass $f(x_0)$ und $f(x_1)$ verschiedene Vorzeichen haben. Zwischen diesen beiden Werten liegt mindestens eine Wurzel n_0. Schnittpunkt x_2 der Geraden durch $f(x_0)$ und $f(x_1)$ mit der x-Achse ist eine erste Näherung für n_0.



Zur Ermittlung des nächstbesseren Näherungswertes x_3 wird von $f(x_2)$ wiederum eine Gerade zu einem der zuletzt benutzten Punkte gezogen und erneut der Schnittpunkt mit der x-Achse berechnet. Dabei wird immer der Punkt verwendet, der gegenüber $f(x_2)$ verschiedenes Vorzeichen hat, damit

d141 $\quad f(x_2) \cdot f(x_1) < 0 \quad$ oder $\quad f(x_2) \cdot f(x_0) < 0 \quad$ erfüllt wird.

Allgemeine Vorschrift:

d142 $$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_j}{f(x_k) - f(x_j)}; \quad k = 1, 2, \ldots; \; 0 \leqq j \leqq k-1; \; f(x_k) \neq f(x_j)$$

Dabei ist j die größtmögliche Zahl, kleiner als k, für die $f(x_k) \cdot f(x_j) < 0$ gilt.

Konvergenz: stets konvergent.

d143 *Beispiel:* $f(x) = x \cdot \lg x - 1$; Wahl von $x_0 = 1$ mit $f(x_0) = -1$ und $x_1 = 3$ mit $f(x_1) = +0{,}431\,364$

d144 Damit ist $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ erfüllt.

d145 $$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 3 - 0{,}431\,364 \cdot \frac{3 - 1}{0{,}431\,364 + 1} = 2{,}397\,269$$

d146 $f(x_2) = 2{,}397\,269 \cdot \lg 2{,}397\,269 - 1 = -0{,}089\,717$. Dieser Wert stellt gleichermaßen die Genauigkeit dar, mit der x_2 die Nullstelle annähert.

d147 $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$. Damit wird die Gerade durch $f(x_2)$ und $f(x_1)$ gelegt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse ist:

d148 $$x_3 = x_2 - f(x_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 2{,}501\,044; \qquad f(x_3) = -0{,}004\,281$$

d149 $f(x_3) \cdot f(x_2) > 0$; $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$. Damit wird die Gerade durch $f(x_3)$ und $f(x_1)$ gelegt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse ist:

d150 $$x_4 = x_3 - f(x_3) \cdot \frac{x_3 - x_1}{f(x_3) - f(x_1)} = 2{,}505\,947$$

d151 $f(x_4) = -0{,}000\,197\,5$

Zur weiteren Erhöhung der Genauigkeit muss der Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte $f(x_4)$ und $f(x_1)$ mit der x-Achse berechnet werden, da wegen $f(x_4) \cdot f(x_3) > 0$ und $f(x_4) \cdot f(x_2) > 0$ die Werte $f(x_3)$ und $f(x_2)$ nicht verwendet werden können.

Arithmetische Reihe

Eine arithmetische Reihe ist die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge (Differenz d zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant, z. B. 1, 4, 7, 10).

d152 $$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = a_1 n + \frac{n(n-1)d}{2} \qquad \text{mit } d = a_n - a_{n-1}$$

d153 $$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Arithmetisches Mittel: Jedes Glied einer arithmetischen Reihe ist das arithmetische Mittel a_m seiner beiden Nachbarglieder a_{m-1} und a_{m+1}.

d154 Für das m-te Glied ist: $$a_m = \frac{(a_{m-1} + a_{m+1})}{2} \qquad \text{für } 1 < m < n$$

(z. B. ist in obiger Reihe: $a_3 = \frac{4+10}{2} = 7$)

Geometrische Reihe

Eine geometrische Reihe ist die Summe der Glieder einer geometrischen Folge (Quotient q zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant, z. B. 1, 2, 4, 8).

d155 $$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q \cdot a_n - a_1}{q - 1} \qquad \text{mit } q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

d156 $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Für unendliche geometrische Reihen ($n \to \infty$; $|q| < 1$) wird

d157 $$a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0; \qquad s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

Geometrisches Mittel: Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist das geometrische Mittel a_m seiner beiden Nachbarglieder a_{m-1} und a_{m+1}.

d158 Für das m-te Glied ist: $$a_m = \sqrt{a_{m-1} \cdot a_{m+1}} \qquad \text{für } 1 < m < n$$

(z. B. ist in obiger Reihe: $a_3 = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$)

Dezimal-geometrische Reihe

Anwendung zur Ermittlung von Normzahl-Reihen

Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder heißt „Stufensprung φ".

d159 $$\varphi = \sqrt[b]{10} \qquad b \geqq 1, \text{ ganzzahlig}$$

b gibt an, wie viele Glieder bzw. Normzahlen eine Reihe innerhalb einer Dekade enthalten soll. Die noch zu rundenden Werte der Glieder errechnen sich gemäß d158:

d160 $$a_n = a_1 \left(\sqrt[b]{10}\right)^{n-1} = a_n \left(10^{\frac{1}{b}}\right)^{n-1}; \qquad n = 1, \ldots, b$$

Dabei beginnend mit $a_1 = 1$ oder $a_1 = 10$ oder $a_1 = 100$ oder …

Beispiele:

b	Bezeichnung	Anmerkung
6, 12, 24, …	E6, E12, E24, …	internat. E-Reihe, siehe Z22
5, 10, 20, …	R5, R10, R20, …	DIN-Reihe, siehe R1

a_1 Anfangsglied
a_n Endglied
d Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder
n Anzahl der Glieder
s_n Summe aller Glieder
q Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

Binomische Reihe

d161 $$f(x) = (1 \pm x)^{\alpha} = 1 \pm \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 \pm \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots$$

Dabei α beliebig, also sowohl positiv oder negativ als auch ganz- oder nichtganzzahlig.

Auflösung des Binomial-Koeffizienten:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n}$$

Beispiele:

		für:
d162	$\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \ldots$	$\lvert x\rvert<1$
d163	$\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \ldots$	$\lvert x\rvert<1$
d164	$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \ldots$	$\lvert x\rvert<1$

Taylor'sche Reihe

d165 $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

Hieraus Mac Laurin'sche Form, also wenn $a = 0$ ist

d166 $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Beispiele:

		für:
d167	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	alle x
d168	$a^x = 1 + \frac{x \cdot \ln a}{1!} + \frac{(x \cdot \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \cdot \ln a)^3}{3!} + \ldots$	alle x
d169	$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$	$x > 0$
d170	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$	$-1 < x$; $x \leqq +1$

d171 $$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Fortsetzung siehe D19

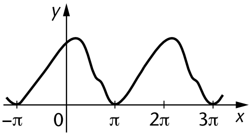
Taylor'sche Reihe

Fortsetzung von D18

Beispiele:

		für:
d172	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	alle x
d173	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$	alle x
d174	$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
d175	$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \ldots$	$0 < \lvert x\rvert$; $\lvert x\rvert < \pi$
d176	$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
d177	$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
d178	$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
d179	$\operatorname{Arccot} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$	$\lvert x\rvert \leqq 1$
d180	$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$	alle x
d181	$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$	alle x
d182	$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \ldots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
d183	$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 - \ldots$	$0 < \lvert x\rvert$; $\lvert x\rvert < \pi$
d184	$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
d185	$\operatorname{arcosh} x = \ln 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6x^6} - \ldots$	$\lvert x\rvert > 1$
d186	$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots$	$\lvert x\rvert < 1$
d187	$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots$	$\lvert x\rvert > 1$

Fourier-Reihen



Allgemein: Jede periodische Funktion $f(x)$, deren Periodizitätsintervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$ sich derart in endlich viele Teilintervalle zerlegen lässt, dass $f(x)$ in jedem dieser Teilintervalle durch ein *glattes* Kurvenstück dargestellt wird, lässt sich in diesem Intervall in konvergente Reihen folgender Form zerlegen ($x = \omega t$):

d188 $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

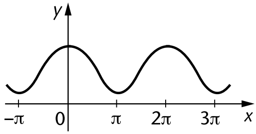
Die einzelnen Koeffizienten errechnen sich dabei zu:

d189 $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

jeweils für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vereinfachung der Koeffizienten-Berechnung bei Symmetrie:

Gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$

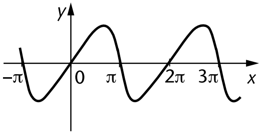


d190 $$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$

d191 $$b_k = 0$$

Ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$



d192 $$a_k = 0$$

d193 $$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$

	Gerade Vollsymmetrie	Ungerade Vollsymmetrie
d194	Falls $f(x) = f(-x)$ und	Falls $f(x) = -f(-x)$ und
d195	$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ werden	$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ werden
d196	$a_k = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} f(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x$ für $k = 1, 3, 5, \ldots$	$b_k = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} f(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x$ für $k = 1, 3, 5, \ldots$
d197	$a_k = 0$ für $k = 0, 2, 4, \ldots$	$a_k = 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$
d198	$b_k = 0$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$	$b_k = 0$ für $k = 2, 4, 6, \ldots$