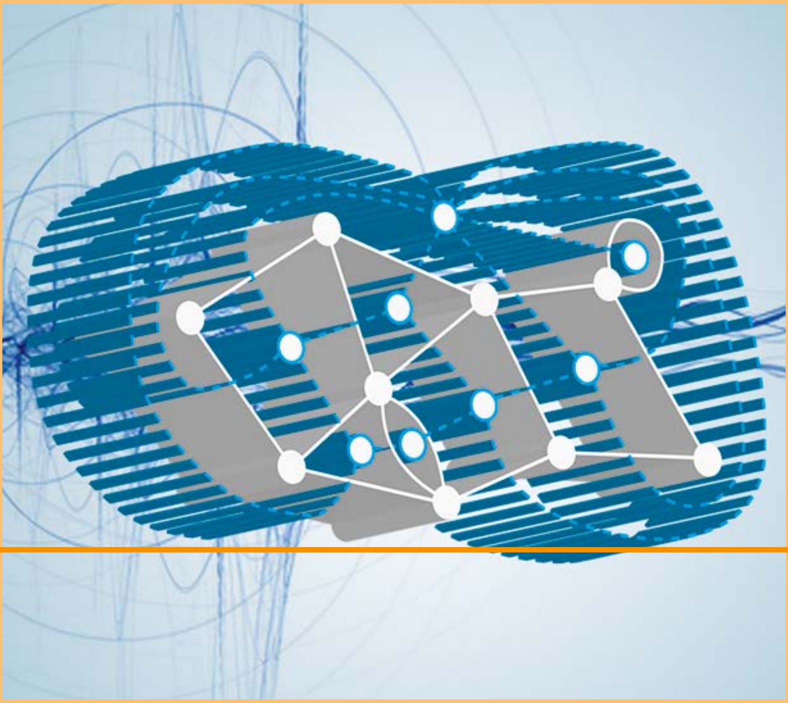
Peter Tittmann

Graphentheorie

Eine anwendungsorientierte Einführung



5., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Tittmann

Graphentheorie

Mathematik–Studienhilfen

Herausgegeben von

Prof. Dr. Bernd Engelmann

Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig,

Fachbereich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Zu dieser Buchreihe

Die Reihe Mathematik-Studienhilfen richtet sich vor allem an Studierende technischer und wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten.

Die mathematische Theorie und die daraus resultierenden Methoden werden korrekt aber knapp dargestellt. Breiten Raum nehmen ausführlich durchgerechnete Beispiele ein, welche die Anwendung der Methoden demonstrieren und zur Übung zumindest teilweise selbstständig bearbeitet werden sollten.

In der Reihe werden neben mehreren Bänden zu den mathematischen Grundlagen auch verschiedene Einzelgebiete behandelt, die je nach Studienrichtung ausgewählt werden können. Die Bände der Reihe können vorlesungsbegleitend oder zum Selbststudium eingesetzt werden.

Lieferbar:

Gramlich, *Lineare Algebra*
Gramlich, *Anwendungen der Linearen Algebra*
Knorrenschild, *Numerische Mathematik*
Knorrenschild, *Vorkurs Mathematik*
Martin, *Finanzmathematik*
Nitschke, *Geometrie*
Preuß, *Funktionaltransformationen*
Sachs, *Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik*
Tittmann, *Graphentheorie*

Peter Tittmann

Graphentheorie

Eine anwendungsorientierte Einführung

5., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Über den Autor:
Prof. Peter Tittmann hält Vorlesungen zur Mathematik für Mathematik- und Informatikstudenten an der Hochschule Mittweida.

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-48423-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-48481-8

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Kolbergerstraße 22 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Thomas West
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Vorwort

Mit der Entwicklung und dem massenhaften Einsatz des Computers hat die Mathematik einen tiefgreifenden Wandel erfahren. Diese Veränderungen zeichnen sich durch eine stärkere Betonung diskreter und algebraischer Methoden der Mathematik aus. Gleichzeitig erfordern moderne technische Entwicklungen wie Computer- und Kommunikationsnetze, Mobilfunksysteme, automatische Systeme im Logistikbereich und in der Gentechnologie zunehmend Methoden aus der Diskreten Mathematik. Dazu zählen insbesondere Graphentheorie, Kombinatorik, Kombinatorische Optimierung, Kodierungstheorie, Algorithmenanalyse und Computeralgebra.

Dieses Buch liefert eine Einführung in die Graphentheorie – ein Lehrgebiet, das heute nicht nur in der Mathematikausbildung eine große Rolle spielt. Die vielfältigen Anwendungen der Graphentheorie erlangten auch für Informatiker, Wirtschaftler, Chemiker und Ingenieure eine große Bedeutung. Graphen finden überall dort Anwendung, wo netzartige Strukturen zu analysieren sind. Das können Computernetze, Energieleitungssysteme, elektronische Schaltungen, chemische Verbindungen, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen, Programmablaufpläne oder soziale Netze sein. Das Gemeinsame an all diesen Erscheinungsformen von Netzen ist die abstrakte Grundstruktur, die mathematisch durch einen Graphen dargestellt werden kann.

Für den Lernenden besitzt die Graphentheorie einen Vorteil gegenüber anderen Lehrgebieten: Für das Verständnis der Graphentheorie sind nur geringe Vorkenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich. Im Wesentlichen genügen mathematische Schulkenntnisse. Lediglich im zweiten und neunten Kapitel werden die Grundbegriffe der linearen Algebra vorausgesetzt. Dafür wird aber vom Leser die Bereitschaft zum Mitdenken erwartet.

Um selbst Kenntnisse der Graphentheorie für die Analyse von Netzwerken oder für die Entwicklung von Algorithmen einsetzen zu können, ist das Verstehen der Denkweise der Graphentheorie wichtig. Eine große Zahl von Übungsaufgaben und zahlreiche Abbildungen sollen dem Leser helfen, dieses Verständnis zu erlangen. Zunächst muss jedoch das umfangreiche Vokabular der Graphentheorie erlernt werden. Aus diesem Grunde hat dieses Buch einen etwas stärkeren Lehrbuchcharakter als die anderen Bände dieser Reihe. Ein umfangreiches Sachwortverzeichnis und ein Symbolverzeichnis am Ende des Buches erleichtern das schnelle Wiederfinden der Definitionen.

Die hier vorliegende Einführung in die Graphentheorie entstand aus einer Vorlesungsreihe zur Graphentheorie für Studenten der Angewandten Mathematik und der Computertechnologie an der Hochschule Mittweida.

Die ersten acht Kapitel dieses Buches behandeln die Grundlagen der Theorie ungerichteter Graphen. Nach einer Einführung in den Sprachgebrauch der Graphentheorie im ersten Kapitel sind planare Graphen, Unabhängigkeit, Färbungsprobleme, der Zusammenhang von Graphen sowie Bäume und Kreise weitere Schwerpunkte. Das neunte Kapitel liefert eine kurze Einführung zum Thema gerichtete Graphen und Flussnetzwerke. Im zehnten Kapitel werden weiterführende Themen aus der Theorie ungerichteter Graphen behandelt, die wahlweise als Ergänzungen entsprechend dem Anwendungs- oder Interessengebiet studiert werden können. Das elfte Kapitel über Graphenalgorithmen liefert die Grundlagen für die Lösung graphentheoretischer Probleme mit dem Computer.

Für die Aufnahme dieses Textes in die *Mathematik-Studienhilfen* danke ich dem Herausgeber dieser Reihe, Herrn Prof. Dr. Bernd Engelmann. Besonders herzlich möchte ich mich bei Frau Christine Fritzsch, Frau Natalia Silakova und Frau Christina Kubiak vom Carl Hanser Verlag für die stets sehr gute Zusammenarbeit und Unterstützung bedanken.

Ich bedanke mich bei jenen aufmerksamen Lesern des Buches, die mir Hinweise, Kommentare und Anfragen schickten, die zu Verbesserungen und Korrekturen des Buches führten. Ich freue mich über die gute Resonanz, die nun bereits eine fünfte Auflage ermöglicht, die das neue Kapitel 10, zahlreiche neue Aufgaben und einige Korrekturen enthält.

Mittweida, Februar 2025 Peter Tittmann

Inhalt

1 Graphen

Graphen sind mathematische Modelle für netzartige Strukturen in Natur und Technik. Dazu zählen Straßennetze, Computernetze, elektrische Schaltungen, Programmablaufpläne, Wasser- und Gasleitungsnetze, chemische Moleküle oder wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen. Allen diesen Netzen ist eine Grundeigenschaft gemeinsam. Sie bestehen stets aus zwei verschiedenartigen Mengen von Objekten. Die Objekte der ersten Art sind zum Beispiel Orte im Straßennetz oder Computer. Sie werden durch Objekte der zweiten Art verbunden. Das sind zum Beispiel Straßen oder Übertragungsleitungen. In der Sprache der Graphentheorie werden wir diese Objekte als Knoten und Kanten eines Graphen bezeichnen. Viele Anwendungen der Graphentheorie erfordern eine Untersuchung spezieller Eigenschaften des jeweiligen Netzes. Für die Planung einer Urlaubsreise ist die Bestimmung eines *kürzesten Weges* zwischen zwei Orten eines Straßennetzes ein interessantes Problem. Eine Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der Längen (Durchfahrzeiten) der einzelnen Straßen des Netzes. Die Bestimmung der *Zuverlässigkeit eines Kommunikationsnetzes* beantwortet die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines intakten Weges zwischen zwei Punkten des Netzes. Als Ausgangsdaten benötigt man hier neben der Netzstruktur die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Knoten (Computer) und Kanten (Übertragungsleitungen). In der Chemie interessiert man sich für die Anzahl der *Isomere* einer Verbindung. Das sind unterschiedliche Molekülstrukturen bei gleicher chemischer Zusammensetzung. Diese Fragestellung lässt sich darstellen als Zählung von Graphen mit bestimmten Eigenschaften.

In der Graphentheorie untersucht man zunächst nur die rein topologischen Fragen einer Netzstruktur. Ein Graph ist allein durch die Menge seiner Knoten und seiner Kanten sowie durch die Zuordnung der Endknoten einer Kante bestimmt. Damit gehen in diesem abstrakten Modell alle Informationen über die konkrete Art und Beschaffenheit der Knoten und Kanten verloren. Es verbleiben jedoch erstaunlich viele Eigenschaften eines Netzes, die bereits auf dieser Abstraktionsstufe untersucht werden können. Dazu zählen die folgenden Fragen:

- Kann man die Kanten des Graphen so durchlaufen, dass man jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besucht?
- Wie viele Kanten muss man mindestens durchlaufen, um von einem Knoten zu einem anderen zu gelangen?
- Wie viele Knoten muss man mindestens besetzen, damit alle anderen Knoten des Graphen in der Nachbarschaft eines besetzten Knotens liegen?
- Gibt es zwischen je zwei Knoten einen Weg?
- Wie viele Kanten kann man aus dem Graphen auswählen, sodass keine zwei ausgewählten Kanten einen gemeinsamen Endknoten besitzen?
- Wie viele verschiedene Graphen mit einer gegebenen Knoten- und Kantenanzahl gibt es? Wie viele davon sind strukturell gleich?
- Wie viele Knoten oder Kanten kann man aus einem Graphen entfernen, ohne dass dieser den Zusammenhang (oder andere wichtige Eigenschaften) verliert?
- Kann man einen gegebenen Graphen so in die Ebene zeichnen, dass sich keine zwei Kanten überkreuzen?

Die Beantwortung dieser Fragen liefert die Grundlage für die Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme auf Graphen und für die Konstruktion von Algorithmen zum Entwurf und zur Analyse von Netzstrukturen.

1.1 Definitionen

Wie jedes Gebiet der Wissenschaft hat auch die Graphentheorie ihren eigenen Sprachgebrauch. Wir wollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Grundbegriffe bereitstellen.

Ein **ungerichteter Graph** G besteht aus einer **Knotenmenge** $V(G)$ und einer **Kantenmenge** $E(G)$, wobei jeder **Kante** $e \in E(G)$ von G zwei (nicht notwendig verschiedene) **Knoten** aus $V(G)$ zugeordnet sind.

Bemerkung: In der Literatur schreibt man auch $G = (V, E)$, um auszudrücken, dass V die Knotenmenge und E die Kantenmenge des Graphen G ist.

Die Anzahl der Knoten von G nennen wir auch die **Ordnung** von G.

Die Bezeichnungen $V(G)$ und $E(G)$ für die Knoten- und Kantenmenge eines Graphen kommen von den englischen Wörtern **vertex** (Knoten) und **edge** (Kante). Die Anzahl der Knoten und Kanten eines Graphen werden wir häufig mit n beziehungsweise m bezeichnen. Wir beschreiben eine Kante in der Form $e = \{u, v\}$ wobei u und v die **Endknoten** der Kante e sind. Wenn v ein Endknoten der Kante e ist, so sagen wir auch v ist **inzident** zu e. Ein ungerichteter Graph G heißt **endlich**, wenn die Mengen $V(G)$ und $E(G)$ endlich sind. Wir werden in diesem und den folgenden Kapiteln ausschließlich endliche ungerichtete Graphen betrachten, die wir deshalb auch kurz Graphen nennen. Im Gegensatz dazu gibt es auch gerichtete Graphen, die jedoch erst später eingeführt werden. Gerichtete Graphen enthalten Kanten, die zusätzlich einen Richtungssinn aufweisen. Auf diese Weise können zum Beispiel Straßennetze mit Einbahnstraßen modelliert werden.

Eine Kante der Form $e = \{v, v\}$, für welche die Endknoten zusammenfallen, heißt eine **Schlinge**. Zwei Kanten $e = \{u, v\}$ und $f = \{u, v\}$ zwischen denselben Endknoten heißen **parallel**. Ein Graph, der weder Schlingen noch parallele Kanten besitzt, heißt ein **schlichter Graph**.

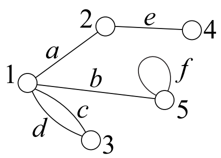


Bild 1.1 Ein ungerichteter Graph

Um einen Graphen graphisch zu veranschaulichen, stellen wir die Knoten als Punkte oder kleine Kreise dar. Eine Kante wird durch eine Strecke oder eine Kurve, die zwei Knoten verbindet, dargestellt. Das Bild 1.1 zeigt einen Graphen mit fünf Knoten und sechs Kanten. Dieser Graph kann auch eindeutig durch die Angabe seiner Knotenmenge, seiner Kantenmenge und der Endknoten jeder Kante beschrieben werden. Wir erhalten

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

mit

$$a = \{1, 2\},\ b = \{1, 5\},\ c = \{1, 3\},\ d = \{1, 3\},\ e = \{2, 4\},\ f = \{5, 5\}$$

Bemerkung: Die hier angegebene Schreibweise $c = \{1, 3\}$ und $d = \{1, 3\}$ ist mathematisch etwas fragwürdig, da daraus $c = d$ folgen würde. Somit wären parallele Kanten nicht unterscheidbar. Der Konflikt lässt sich jedoch leicht lösen, indem man eine **Inzidenzfunktion** einführt, die jeder Kante die Menge ihrer Endknoten zuordnet.

Diese Information lässt sich auch in Form einer Tabelle speichern:

Kante	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Endknoten	1 2	1 5	1 3	1 3	2 4	5 5

1.1.1 Knotengrade

Zwei Knoten $u, v \in V(G)$, die durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden sind, heißen **adjazent** (benachbart) in G. Die Menge $N(v)$ aller zu einem Knoten $v \in V(G)$ adjazenten

Knoten nennen wir die **Nachbarschaft** von v. Der **Grad** $\deg v$ eines Knotens $v \in V(G)$ ist die Anzahl der von v ausgehenden Kanten in G (die Anzahl der zu v inzidenten Kanten von G). Schlingen werden hierbei doppelt gezählt. Ein **isolierter Knoten** ist ein Knoten vom Grade null. Ein isolierter Knoten besitzt keine Nachbarknoten. In einem schlichten Graphen gilt $\deg v = |N(v)|$. Nun können wir bereits einen ersten Satz formulieren.

Satz 1.1 In einem Graphen $G = (V, E)$ mit m Kanten gilt stets

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m\ .$$

Beweis: Die links stehende Summe zählt für jeden Knoten die Kanten, die von diesem Knoten ausgehen. Dabei wird jedoch jede Kante genau zweimal gezählt. □

Da die Summe der Knotengrade in diesem Satz stets eine gerade Zahl liefert, erhalten wir auch die folgende Aussage.

Folgerung 1.2 Die Anzahl der Knoten eines Graphen mit einem ungeraden Grad ist stets eine gerade Zahl.

Der **Maximalgrad** $\Delta(G)$ eines Graphen G ist das Maximum der Grade aller Knoten von G:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg v$$

Analog ist der **Minimalgrad** $\delta(G)$ durch

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg v$$

definiert. Das Bild 1.2 zeigt einen Graphen mit dem Minimalgrad 1 und dem Maximalgrad 5.

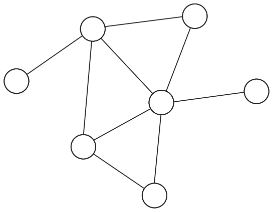


Bild 1.2 Ein Graph mit $\delta(G) = 1$ und $\Delta(G) = 5$

1.1.2 Wege und Kreise

Eine **Kantenfolge** ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

von Knoten und Kanten eines Graphen G, sodass die Kante e_i für $i = 1, \ldots, k-1$ jeweils die Endknoten v_i und v_{i+1} besitzt. Wir sagen auch, diese Kantenfolge **verbindet** v_1 mit v_k. Die **Länge** der Kantenfolge ist die Anzahl der Kanten dieser Folge. Wir werden formal auch einen einzelnen Knoten als eine Kantenfolge der Länge null betrachten. Eine Kantenfolge in einem Graphen G ist ein **Weg**, wenn jeder Knoten aus $V(G)$ höchstens einmal in dieser Folge auftritt. In einem Weg kann somit auch keine Kante doppelt vorkommen. Gilt $v_1 = v_k$ in der Kantenfolge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$$

so sprechen wir von einer **geschlossenen Kantenfolge**. Kommt, mit Ausnahme von v_k, kein Knoten doppelt in der geschlossenen Kantenfolge vor, so bildet diese Folge einen **Kreis** des Graphen. Wege und Kreise eines Graphen sind eindeutig durch die Menge der Kanten der jeweiligen Kantenfolge bestimmt. Eine Schlinge bildet einen Kreis der Länge 1; ein paralleles Kantenpaar bildet einen Kreis der Länge 2. In einem schlichten Graphen haben alle Kreise eine Länge von mindestens 3. Einen Kreis der Länge 3 nennen wir auch ein **Dreieck**.

1.1.3 Zusammenhang

Ein Graph H ist ein **Untergraph** des Graphen G, wenn $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$ gilt. Es sei $W \subseteq V(G)$ eine Teilmenge der Knotenmenge des Graphen G. Ein Untergraph H von G mit $V(H) = W$, der alle Kanten aus G enthält, die zwei Knoten aus W verbinden, heißt ein von der Teilmenge W **induzierter Untergraph** von G. Ein **aufspannender Untergraph** eines Graphen G besitzt dieselbe Knotenmenge wie der Ausgangsgraph.

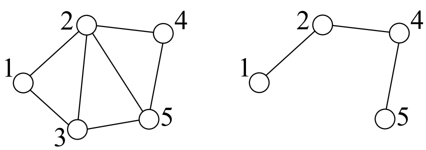


Bild 1.3 Ein Graph und ein Untergraph dieses Graphen

Das Bild 1.3 zeigt einen Graphen und einen darin enthaltenen Untergraphen.

Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn zwischen je zwei Knoten u und v seiner Knotenmenge ein Weg existiert. Ein maximaler zusammenhängender Untergraph eines Graphen G heißt eine **Komponente** von G. Das Bild 1.4 zeigt einen nicht zusammenhängenden Graphen mit vier Komponenten. Wenn H ein Untergraph von G ist, so gilt für den Maximalgrad $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Gilt diese Relation auch für den Minimalgrad?

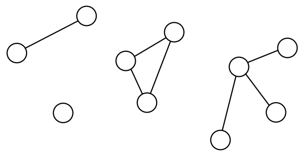


Bild 1.4 Ein nicht zusammenhängender Graph

1.1.4 Brücken und Artikulationen

Es sei $c(G)$ die Anzahl der Komponenten eines Graphen G. Eine Kante $e \in E$ eines Graphen G mit der Eigenschaft $c(G - e) > c(G)$ heißt eine **Brücke** von G. Ein Knoten $v \in V$ mit der Eigenschaft $c(G - v) > c(G)$ heißt eine **Artikulation** von G. In einem zusammenhängendem Graphen G sind Brücken und Artikulationen genau solche Kanten und Knoten, deren Entfernen aus G den Zusammenhang zerstört.

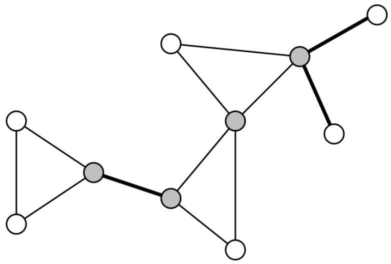


Bild 1.5 Brücken und Artikulationen

Bild 1.5 zeigt einen Beispielgraphen mit drei Brücken und vier Artikulationen. Alle Brücken in diesem Graphen werden durch stärkere Kanten repräsentiert. Die Artikulationen sind die grau dargestellten Knoten.

1.2 Operationen mit Graphen

Für die Beschreibung von Eigenschaften von Graphen und für die Berechnung von Kenngrößen von Graphen sind oft strukturelle Umformungen eines Graphen erforderlich. Wir beschreiben im Folgenden einige wichtige Operationen mit Graphen.

1.2.1 Entfernen von Knoten und Kanten

Es sei G ein Graph. Das **Entfernen einer Kante** $e \in E(G)$ erzeugt aus G einen neuen Graphen $G - e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$. Wenn $F \subseteq E(G)$ eine Kantenteilmenge des Graphen G ist, so sei $G - F$ der Graph, der aus G durch Entfernen aller Kanten aus F hervorgeht. Man überzeugt sich leicht, dass die Reihenfolge des Entfernens der Kanten aus F hierbei keine Rolle spielt.

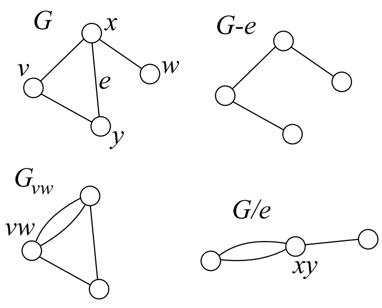


Bild 1.6 Knoten- und Kantenoperationen mit Graphen

Für einen Knoten $v \in V(G)$ definieren wir $G - v$ als den Graphen, der aus G durch **Entfernen des Knotens** v hervorgeht. Das Entfernen eines Knotens v schließt hierbei das gleichzeitige Entfernen aller zu v inzidenten Kanten des Graphen ein. Auch diese Operation verallgemeinern wir für eine beliebige Knotenteilmenge $X \subseteq V(G)$. Der Graph $G - X$ ist dann der Graph, der durch Entfernen aller Knoten aus X aus dem Graphen G hervorgeht.

1.2.2 Fusion und Kontraktion

Die **Fusion** (das **Verschmelzen**) von zwei Knoten u und v eines Graphen G ist das Identifizieren dieser beiden Knoten in einem Knoten, der zu allen Kanten inzident ist, die vorher einen dieser beiden Knoten als Endknoten hatten. Wir bezeichnen den entstehenden Graphen mit G_{uv}. Auch für diese Operation lassen wir eine Verallgemeinerung auf eine beliebige Teilmenge $X \subseteq V(G)$ zu, durch deren Fusion dann der Graph G_X entsteht.

Die **Kontraktion** einer Kante $e = \{u, v\}$ eines Graphen G ist das Entfernen von e mit der anschließenden Fusion der Endknoten u und v. Wir bezeichnen den durch Kontraktion von e aus G hervorgehenden Graphen mit G/e. Das Bild 1.6 zeigt die hier vorgestellten Operationen an einem Beispielgraphen.

Ein Graph H, der aus einem Graphen G durch ausschließliche Anwendung der drei Operationen Entfernen einer Kante, Kontraktion einer Kante und Entfernen eines isolierten Knotens hervorgeht, heißt ein **Minor** von G.

Es sei $e = \{u, v\}$ eine Kante des Graphen G und $s, t \in V(G)$. Wenn in G ein Weg von s nach t existiert, so existiert auch in G/e ein Weg von s nach t. Um dies einzusehen, betrachten wir zwei Fälle:

- Die Kante e liegt auf dem st-Weg. Es sei

  $$s, \dots, e_j, u, e, v, e_k, \dots, t$$

  dieser Weg. Durch Kontraktion der Kante e fallen die beiden Endknoten u und v zusammen, wobei der neue Knoten uv entsteht. Dieser ist zu e_j und e_k inzident,