

Rolf Scherzer
Rolf Martin

Brücken zur Mechanik

Statik: Aufgaben



HANSER

Disclaimer zur Barrierefreiheit

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Dazu gehört auch, dass Bilder oder Tabellen für blinde und sehbehinderte Menschen zugänglich gemacht werden. Dies geschieht durch zusätzliche beschreibende Texte (Alternativtexte), die in den Daten integriert sind. Die Alternativtexte können von assistiven Technologien (z. B. Screenreadern) vorgelesen werden. Bei der Erstellung dieser Texte kommt eine KI zum Einsatz. Die inhaltliche Verantwortung liegt weiterhin bei den Lektor:innen und Autor:innen.

Scherzer / Martin
Brücken zur Mechanik



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Rolf Scherzer
Rolf Martin

Brücken zur Mechanik

Statik: Aufgaben

HANSER

Die Autoren waren viele Jahre als Professoren an der Hochschule Esslingen tätig.

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Ing. Rolf Martin Scherzer lehrte 26 Jahre Mechanik, Konstruktion, CAD und Technisches Zeichnen und Prof. Dr. rer. nat. Dr. h.c. Rolf Martin lehrte über 30 Jahre Physik und Optoelektronik.



Print-ISBN: 978-3-446-48149-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-48396-5

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2025 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Eberl & Koesel Studio, Kempten

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © gettyimages.de/gaspr13

Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Inhalt

Vorwort	VII
1 Einleitung	1
2 Häufige Defizite und Fehler	3
3 Ebene Fachwerke	13
4 Schwerpunkt	37
4.1 Linienschwerpunkt	40
4.2 Flächenschwerpunkt	45
4.3 Räumlicher Schwerpunkt	66
5 Reibung	69
6 Ebene ein- und mehrteilige Systeme (2D)	97
7 Räumliche Statik (3D)	131
8 Balkenstatik	169

Vorwort

Den Studierenden der Technischen Mechanik 1 (Statik) und allen Interessierten stellen wir hiermit eine umfangreiche Sammlung ausgewählter Übungsaufgaben zur Verfügung. Sie dient als Ergänzung zum Lehrbuch „Brücken zur Mechanik – Statik“. Die Anregungen dazu stammen zu einem gewissen Teil von unseren geschätzten Kollegen der Fakultäten Fahrzeugtechnik, Grundlagen und Maschinenbau der Hochschule Esslingen. Namentlich bedanken möchten wir uns bei den Professoren Hartmut Bathelt, Joachim Berkemer, Helmut von Eiff, Andreas Fritz, Harro Kümmerer, Werner Lang, Roland Mastel, Gerhard Ott, Fritz Silberberger und bei Frau Professorin Monika Rack. Zudem gilt unser Dank den Mitarbeiterinnen des Carl Hanser Verlags in München, insbesondere Frau Natalia Silakova für das Lektorat und Frau Christina Kubiak von den Editorial Services.

Seit kurzer Zeit sprechen uns einige unserer ehemaligen Studierenden an, dass die hier vorgelegten „Brücken zur Mechanik“ leider ein paar Jahre zu spät erscheinen würden. Mittlerweile nutze man an Schulen und Hochschulen sogenannte (generative) KI-Löser zum softwaregestützten Berechnen von Mathematik- und Mechanik-aufgaben. Die Autoren haben dabei allerdings milde Zweifel, ob diese „Suchmaschinen“, die sich bisher nur auf bereits hinlänglich bekanntes Datenbankwissen stützen, tatsächlich in der Lage sind, künftige und vor allem bisher noch ungelöste Ingenieur-aufgaben zuverlässig lösen zu können. Und das vor allem im Hinblick auf Qualität, Praxistauglichkeit und die Verantwortung der Ingenieur:innen für ihre Entwicklungen einschließlich ihrer persönlichen Produkthaftung.

Die Erfahrung zeigt, dass KI-gestützte Programme auch Fehler machen, die – wenn sie nicht von Fachleuten als solche erkannt werden – schlimmen Schaden anrichten können. Man denke etwa an falsche Diagnosen in der Medizin. Es muss also stets der Mensch das letzte Wort haben und deshalb ist es wichtig, dass Ingenieurstudierende eine umfassende Ausbildung in den Grundlagenfächern erhalten, denn nur dann

sind sie in der Lage, Ergebnisse einer KI-Rechnung zu interpretieren, d. h. zu validieren oder ggf. zu verwerfen.

Merke: Nur das selbstständige Rechnen und mühsame Bearbeiten von Aufgaben in den MINT-Fächern formt den robusten, kritischen und erfahrenen Ingenieur und schärft seine Sinne, NICHT das Bedienen neuer Mode-Tools. Möge sich die aktuelle KI-Begeisterung nicht über kurz oder lang als fataler Irrtum herausstellen.

Esslingen und Königen, im August 2025

Rolf Martin Scherzer, Rolf Martin

1

Einleitung

Diese insgesamt **280** Statik-Aufgaben sind nach Themen gegliedert, beginnend bei den eher einfachen Fachwerken bis hin zur etwas anspruchsvolleren Balkenstatik. Innerhalb der Kapitel sind sie nach ihrem Schwierigkeitsgrad (leicht – mittel – schwer) sortiert. Die leichten stehen am Anfang, die schwierigen am Ende. Die jeweilige Einschätzung des Schwierigkeitsgrades ist sehr individuell und hängt vom eigenen Kenntnisstand ab. Daher fehlen bei den jeweiligen Aufgaben entsprechende Vermerke. In der Aufgabenstellung werden – falls erforderlich – Kurzhinweise zur Lösung gegeben. Die Kurzlösungen stehen jeweils in eckigen Klammern direkt unter den jeweiligen Aufgaben. In der Balkenstatik finden sich die grafischen Schnittgrößenverläufe jeweils am Aufgabennende direkt unter den Kurzlösungen.

Es wurde absichtlich auf die Vorgabe von empfohlenen Bearbeitungszeiten verzichtet, um den geneigten Leser weder zu irritieren noch unter Druck zu setzen. Natürlich ist es den Autoren bewusst, dass die Fülle dieser Aufgaben den Rahmen **jedweder** Klausurvorbereitung bei Weitem überschreitet. Hauptziel hierbei ist stets die Unterstützung der Studierenden. Eine weitere Intention war es, die Vielfalt und den Variantenreichtum an Aufgabenstellungen zu dokumentieren.

Merke: In diesen Übungsaufgaben wirken bzw. verlaufen – soweit nicht bemaßt – alle Einzelkräfte, Streckenlasten und Fachwerkstäbe in horizontaler bzw. vertikaler Richtung.

Komplette Musterlösungen zu den jeweiligen Themen samt ausführlicher Lösungsanleitung werden im Lehrbuch „Brücken zur Mechanik – Statik“ gezeigt.

Verwendete Abkürzungen

2D	zwei Dimensionen, zweidimensional
3D	drei Dimensionen, dreidimensional
äK	äußere Kraft
Ba	Balkenaufgabe
BGA	Bereichsgrenzenanalyse (Balkenstatik)
BT	Bewegungstendenz
BR	Bewegungsrichtung
EMGS	Erstarrungsmethode Gesamtsystem (bei mehrteiligen Systemen und Fachwerken)
FhGdB	Freiheitsgrade der Bewegung (in 2D: 3, in 3D: 6)
FSP	Flächenschwerpunkt (2D)
FW	Fachwerk (2D, eben) bzw. Fachwerkaufgabe
iK	innere Kraft
K	Kontakt- bzw. Kippunkt
Kn	Anzahl Knoten eines Fachwerks
LGS	lineares Gleichungssystem
LöStra	Lösungsstrategie
LSP	Linienschwerpunkt (2D)
MKS	Einheitensystem Meter, Kilogramm, Sekunde
<i>n</i>	Anzahl Einzelteile eines Mechanischen Systems
PS	Pendelstütze
PSA	Pendelstützen-Analyse (Zerlegen schräger Stabkräfte in Kraftkomponenten entsprechend der vorgegebenen Einbaubemaßung oder des Einbauwinkels)
<i>q</i>	Belastungsintensität bei Rechteckslasten
<i>q</i> ₀	Maximalwert der Belastungsintensität bei Dreieckslasten
Re	Reibaufgabe
RSP	räumlicher Schwerpunkt (3D)
SG	Systemgrenze (beim Abgrenzen)
SP	Schwerpunkt bzw. Schwerpunktaufgabe
St	Anzahl Stäbe eines Fachwerks
TM	Technische Mechanik
<i>w</i>	Wertigkeit(en) innerer und/oder äußerer Lager

2

Häufige Defizite und Fehler

Nach Jahrzehnten der Lehre müssen die Autoren feststellen, dass die mathematischen Fähigkeiten selbst „sehr guter“ Abiturienten ungefähr seit der Einführung der reformierten Oberstufe (1972), spätestens aber seit dem Wendejahr 1989 kontinuierlich abnehmen. Besonders fatal wirken sich bei den Studierenden der MINT-Fächer die weitverbreiteten Lücken in der Mittelstufenmathematik aus. Ganz konkret gibt es gravierende Mängel beim a) kleinen und großen Einmaleins, b) einfachsten Umstellen von Gleichungen, c) Kürzen, d) Erweitern, e) Potenzieren, f) Wurzelziehen, g) Suchen des gemeinsamen Nenners etc.

Diese Grundtechniken werden teilweise nur noch rudimentär gelehrt, wenig geübt und dadurch selten korrigiert und – in letzter Konsequenz – dementsprechend von vielen Studierenden kaum noch beherrscht.

Der geneigte Leser wird sehr schnell feststellen, dass ihm nicht die Mechanik Schwierigkeiten bereitet, sondern aus o. g. Gründen die fehlenden einfach(st)en Rechengrundlagen der 5. bis 10. Klasse. Also dient ihm diese Aufgabensammlung zusätzlich als Übungsfeld, um die mathematischen Grundfähigkeiten für die Anforderungen an den Ingenieurberuf zu erlangen.

Nach der Korrektur von mehr als 20 000 TM-Klausuren stellt man fest, dass sich einige grobe Fehler über Jahrzehnte statistisch häufen und immer wieder gemacht werden. Vor diesen sei hier ausdrücklich gewarnt. Dazu zählen vor allem:

- **Oberflächliches Durchlesen:** Oft werden die Aufgaben nur flüchtig überflogen und dabei wesentliche Angaben übersehen. Bei 3D-Aufgaben wird häufig die Gewichtskraft bzw. das Eigengewicht des Bauteils vergessen. **Abhilfe:** Den Aufgabentext zweimal langsam durchlesen und wichtige Informationen farblich markieren.
- **Der viel zu frühe Griff zum Taschenrechner** erschwert oder verhindert die Kontrolle über die physikalischen Einheiten. Es gab immer wieder Hinweise, dass sich

Abiturprüfungen in Mathematik allein mithilfe eines vollprogrammierbaren graphikfähigen Taschenrechners bestehen ließen. Immer mehr kann man beobachten, dass Studierende beim Versuch, Mechanikaufgaben zu lösen, sofort reflexartig zum Rechner greifen oder mittlerweile gleich im Internet nach der jeweiligen Lösung suchen. **Das ist der falsche Ansatz.**

Es wird empfohlen, a) die jeweilige Aufgabe so lange wie möglich allgemein (mit physikalischen Größen und Unbekannten) zu lösen, b) bei der Lösung die algebraisch kompakteste Form anzustreben und c) erst zum Schluss Zahlenwerte einzusetzen. Daher wird bei einigen Aufgaben erst ganz am Ende nach Zahlenwerten gefragt (siehe **SP_09, SP_10, SP_12, SP_17**). Das fördert die algebraischen Fähigkeiten ungemein.

- **Fehlende Kontrolle über die physikalischen Einheiten.** Es gilt der eherne Grundsatz: **Einheit vor Zahl.** Gewöhnen Sie sich an, die physikalischen Einheiten so lange im Rechenweg mitzuführen, bis Sie eine reproduzierbare Fehlerfreiheit erlangt haben. Erst auf diesem Niveau dürfen Sie auf die Einheiten verzichten. **Merke:** Fehler in den Einheiten bedeuten **immer** Rechenfehler. Finden Sie Ihre Fehler selber, bevor es **andere** tun.
- **Oberflächliche oder unvollständige Bezeichnung** von unbekannten Stabkraftkomponenten S_i . Wir sprechen hier von einem Stabkraftverhältnis $S_x : S_y$. Gelegentlich werden Kraftkomponenten bei der Stabkraftzerlegung (PSA) folgendermaßen ins Verhältnis gesetzt:

$$\frac{5x}{5y} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow x = y$$

Wenn man auf die Bezeichnung S verzichtet, darf man sich über die Konsequenzen solcher mathematischer „Großtaten“ nicht wundern.

- **Unsicherheiten bei der statischen Bestimmtheit:** Überprüft man nach dem Durchlesen der Aufgabe die statische Bestimmtheit des Bauteils bzw. des mechanischen Systems, ergeben sich folgende Vorteile:
 - a. Man verschafft sich Gewissheit über die äußereren und inneren Lagerwertigkeiten.
 - b. Dabei kann man sicher sein, dass statisch unbestimmte Systeme in der Statik eine absolute Ausnahme darstellen, sie werden in der Festigkeitslehre behandelt.
 - c. Bei unsauberer bzw. unklarer Darstellung der Lagersymbole kann man bei dem der Zuständigen nachfragen.

Dabei ist zu beachten, dass es für die statische Bestimmtheit **vier** verschiedene Bestimmungsgleichungen gibt. Hierbei bezeichnet w die Wertigkeit(en) aller inneren

und/oder äußerer Lager, n die Anzahl der Einzelteile eines Mechanischen Systems, St die Anzahl der Stäbe eines Fachwerks und Kn die Anzahl der Knoten eines Fachwerks:

- a. Für ebene mehrteilige mechanische Systeme **ohne** Reibung gilt $\Sigma w = 3 \cdot n$.
- b. Gibt es einen oder mehrere Reibpunkte r , kann man pro Reibpunkt eine separate Reibgleichung nach *Coulomb* aufstellen. Für ebene mehrteilige mechanische Systeme **mit** Reibung gilt $\Sigma w = 3 \cdot n + r$.
- c. Im Raum haben wir sechs FhGdB. Dementsprechend gilt für 3D-Körper $\Sigma w = 6 \cdot n$.
- d. Ebene Fachwerke haben – wegen der Zweiwertigkeit des Fachwerknotens – ihre eigene Bestimmungsgleichung, sie lautet $\Sigma w + \Sigma St = 2 \cdot \Sigma Kn$.

Achtung: Bei den ersten drei Bestimmungsgleichungen bedeutet Σw die Summe aller **äußerer und innerer** Lagerwertigkeiten. Im vierten Fall ist mit Σw nur die Summe aller **äußerer** gemeint.

Wendet man bei ebenen mehrteiligen Systemen die **EMGS** an, dann handelt es sich beim erstarrten Gesamtsystem um $n = 1$ Bauteil. Also lautet die Bestimmungsgleichung dafür $3 = 3 \cdot 1$. Sollte das Gesamtsystem vierfach, also einfach überbestimmt gelagert sein, lässt sich die EMGS trotzdem anwenden (siehe **FW_16** und **FW_18**). Die fehlende vierte Gleichung erhält man im Laufe der Aufgabenbearbeitung aus der Analyse der Einzelteile.

- **Einbauzustand beachten:** Pendelstützen, Federn und Seile haben zwar an jedem Ende ein (zweiwertiges) Gelenk bzw. eine Öse, dennoch sind sie im eingebauten Zustand stets **einwertig**.
- **Fehler beim Abgrenzen:** Häufig wird nicht erkannt, ob ein Gesamtsystem analysiert werden soll oder nur einzelne Gruppen bzw. Einzelteile daraus. In Extremfällen werden sogar nur die Symbole der äußeren Lager abgegrenzt und das vorgegebene Bauteil/System schlachtweg ignoriert oder gar völlig weggelassen. Abhilfe: das Abgrenzen muss geübt und sicher beherrscht werden. Zeichnen Sie anfänglich die Systemgrenze (SG) um das abgegrenzte d.h. zu analysierende Bauteil/System farblich ein und denken Sie sich den umliegenden Rest einfach weg.
- **Falsches Koordinatensystem:** Vor der Verwendung „individueller“ Koordinatensysteme wird ausdrücklich gewarnt. Gelegentlich verwechseln nervöse Prüflinge die Achsbezeichnungen x und y . Für das Lösen der ebenen und räumlichen Aufgaben ist ein Rechtssystem zwingend erforderlich.
- **Mangelhafte bzw. unvollständige Freischneidskizze:** Nur sehr wenige Studierende sind in der Lage, eine Mechanikaufgabe ohne Freischneidskizze fehlerfrei bis zum Schluss durchzurechnen. Erfahrungsgemäß gilt: Mangelhafte (schludrige) Skizzen führen nie zum Erfolg. Abhilfe: Fertigen Sie trotz Zeitdruck eine saubere

Freischneidskizze an. Nutzen Sie diese kurze „Zwangspause“, um sich in die Aufgabe hineinzudenken und etwas Nervosität abzubauen.

- **Fehlerhaftes Freischneiden:** Sicheres und richtiges Freischneiden gehört nach dem Abgrenzen zu den absoluten Grundlagen der Technischen Mechanik. Es erfolgt ganz am Anfang jeder Aufgabenlösung und muss geübt und sehr sicher angewendet werden. Vorgehensweise: beim Freischneiden werden die an die Systemgrenze (SG) angrenzenden Bauteile (in den Lagerstellen) gedanklich entfernt und dort durch Kraftpfeile ersetzt. Wegfallende Bauteile können dabei entweder mit Strichlinie gezeichnet oder am besten gleich weggelassen werden. Hierbei müssen
 - a. die Lagerwertigkeiten,
 - b. das Wechselwirkungsgesetz und
 - c. die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Kräften bekannt sein und sicher beherrscht werden.

Einwertige Bauteile (Pendelstützen, Seile und Federn) werden entsprechend der gegebenen Einbaulage in ihre Kraftkomponenten zerlegt und als Kraftpfeile am Angriffsort (auf der Systemgrenze!) eingezeichnet.

Gelegentlich werden **Pendelstützen** (Gelenkstäbe) nicht erkannt und falls doch, dann leider falsch freigeschnitten. Grundsätzlich gilt:

- a. Es wird nur ein Paar Gelenkkraftkomponenten für beide Gelenkenden eingeführt, also z.B. nur A_x und A_y ,
 - b. Deren Verhältnis ergibt sich aus dem Einbauwinkel oder der Einbaubemessung.
 - c. Bei Zugstäben ziehen alle Komponenten an den beiden Gelenken, bei Druckstäben entsprechend umgekehrt:
 - d. das Wechselwirkungsgesetz ist auch hier konsequent zu berücksichtigen.
- **Unkenntnis des Wechselwirkungsgesetzes:** bei mehreren Einzelteilen gilt an den Kraftübertragungsstellen (Lagerstellen) das Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio). Gelegentlich wird recht munter actio = actio freigeschnitten, d.h. die Lagerkräfte zeigen auf beiden Seiten des getrennten Gelenks bzw. Lagers in die gleiche Richtung. Das ist mehr als grober Unfug, verdirbt das LGS und führt unweigerlich zu fatalen und schwer zu findenden Fehlern.
 - **Unsicherheit bei den Lagerwertigkeiten:** sehr häufig wird bei festen Einspannungen das Einspannmoment weggelassen. Gelegentlich werden bei der klassischen 2-1-Lagerung das Punktlager und das feste Gelenk schlichtweg vertauscht. Die Wertigkeiten der Lager in der Ebene (2D) und im Raum (3D) werden im Lehrbuch „Brücken zur Mechanik – Teil 1“ ausführlich besprochen.

- **Fehler bei der Unterscheidung zwischen inneren (iK) und äußeren Kräften (äK):** Falls diese Unterscheidung nicht sicher gelingt, passieren auch hier gravierende Fehler. Die Ursache dafür liegt im mangelhaften Abgrenzen (s. o.). Gelegentlich werden völlig unbekümmert innere und äußere Kräfte in den Gleichgewichtsbedingungen aufgeführt. Das Lineare Gleichungssystem (LGS) wird dadurch unlösbar, die Aufgabe ist verdorben. Das soll an einer Beispielaufgabe gezeigt werden. Wir analysieren dazu die Balkenaufgabe **Ba_51**, wobei $q_0 = 3F/a$ und $M = Fa$ gegeben sind.

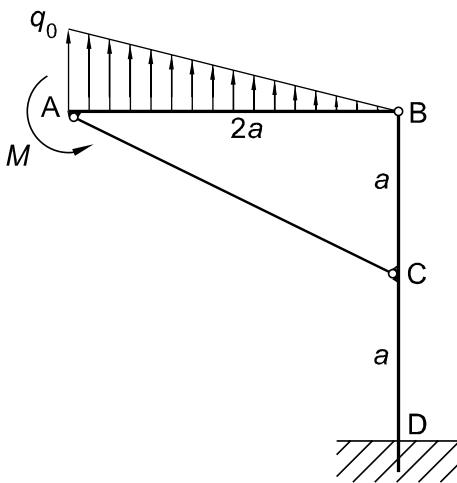


Bild 2.1

Unterscheidung von inneren und äußeren Kräften am Beispiel der Balkenaufgabe **Ba_51**

In der Teilaufgabe a) sind die Einspannreaktionen in D, die Gelenkkraftkomponenten in B sowie die Stabkraft AC als Vielfache von F und a gesucht. Zudem soll geklärt werden, ob es sich bei AC um einen Zug- oder Druckstab handelt. Empfohlen wird im Hinweis, zunächst das Gesamtsystem mit der EMGS-Methode zu betrachten, danach den Träger AB.

Wir betrachten zunächst das Gesamtsystem, frieren es gedanklich als Ganzes ein und ziehen die Systemgrenze (SG) entsprechend um alle Bauteile. Das Gesamtsystem ist in D fest eingespannt, also dreiwertig und somit statisch bestimmt (gelagert).

Wir schneiden entsprechend der EMGS frei, ersetzen die Dreieckslast $q_0 = 3F/a$ durch die Ersatzkraft $3F$ und tragen das äußere Moment $M = Fa$ betragsmäßig ein. Die Gelenkkräfte in A, B und C sind hierbei innere Kräfte (iK). Sie heben sich paarweise auf und werden nicht berücksichtigt.

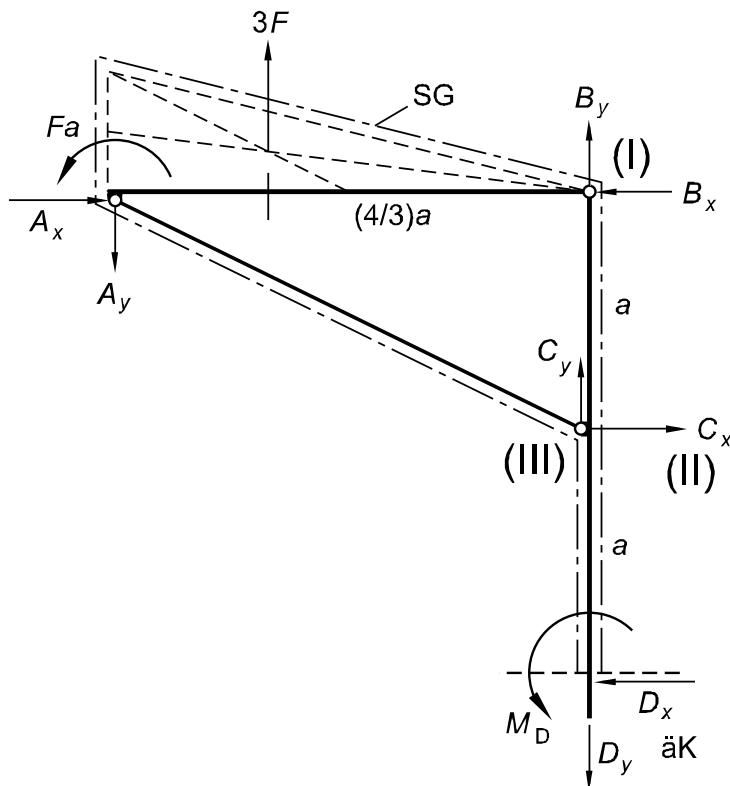


Bild 2.2 Freischneidbild Ba_51: EMGS

Nun können wir die drei Gleichgewichtsbedingungen für die drei **äußeren** Einspannreaktionen in D aufstellen:

$$\rightarrow : D_x = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow : D_y = 3F \quad (2)$$

$$\widehat{D} : M_D = 3F \cdot (4/3) \cdot a - Fa \cdot a = 3 \cdot Fa \quad (3)$$

Völlig falsch wäre es, bereits hier a) **innere** Kräfte in die GG-Bedingungen aufzunehmen und b) zudem gegen das Wechselwirkungsgesetz zu verstößen.

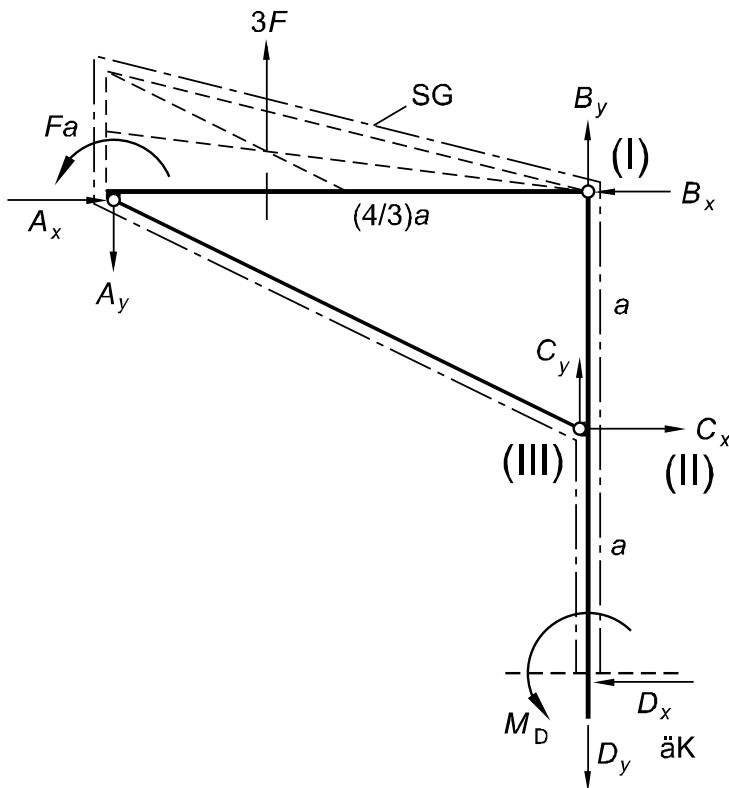


Bild 2.3 Häufige Fehler beim Abgrenzen und Freischneiden

Die gröbsten Fehler beim Abgrenzen und Freischneiden seien anhand des Beispiels erklärt. (I, II): in den Gelenken wurde nicht getrennt; (II): actio = actio, A_x und C_x des Gelenkstabs AC zeigen nach rechts; (III): für den Gelenkstab wurden zusätzlich zu A_x , A_y nochmals zwei neue Stabkraftkomponenten (Unbekannte) mit anderer Bezeichnung (C_x , C_y) eingeführt, damit wird das LGS unlösbar. Wir fahren mit der Lösung von **Ba_51** fort.

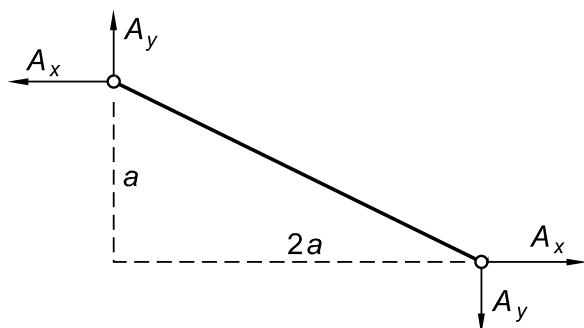


Bild 2.4
Analyse des Gelenksstabs AC

Aus der Einbaubemaßung (Kathetenverhältnis) können wir nun die Stabkraftkomponenten der Pendelstütze AC ermitteln (PSA). Wir legen die Komponentenbezeichnung mit A_x und A_y fest. Beide Komponenten ziehen an beiden Gelenken. Die Sternchengleichung lautet:

$$A_x/A_y = 2a/a = 2/1 \quad (\otimes)$$

Wir trennen im nächsten Schritt den Träger AB aus dem Gesamtsystem heraus, grenzen ihn ab und schneiden ihn frei. Bauteil BCD wird weggelassen, Stab AC durch die Stabkraftkomponenten A_x und A_y ersetzt. Aus den bisher inneren Gelenkkräften A_x , A_y , B_x und B_y werden nun durch Verlegen der Systemgrenze bilanzierbare äußere Kräfte für unsere Gleichgewichtsbedingungen. Äußere Ersatzkraft $3F$ und äußeres Moment Fa wirken nach wie vor auf den Träger AB und werden deshalb weiterhin eingezeichnet und berücksichtigt.

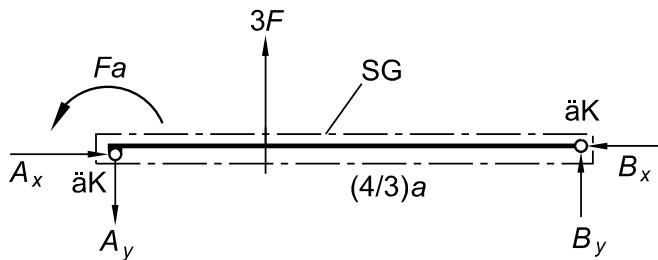


Bild 2.5 Freischneiden des Trägers AB

Für die Berechnung der vier Unbekannten A_x , A_y , B_x und B_y können wir drei Gleichgewichtsbedingungen formulieren und die Sternchengleichung (\otimes) aus der PSA nutzen:

$$\rightarrow : A_x = B_x \quad (4)$$

$$\uparrow : A_y = B_y + 3F \quad (5)$$

$$\widehat{B} : 3F \cdot (4/3) \cdot a = A_y \cdot 2a + Fa \quad (6)$$

Nach dem Lösen der drei Gleichungen erhalten wir mit (\otimes): $A_x = B_x = 3F$ und $A_y = B_y = (3/2) \cdot F$. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Stabkraft $A = 3,35 \cdot F$ berechnen. Wir haben A als Zugstab angenommen, die Stabkraftkomponenten A_x und A_y liefern positive Vorzeichen, also ist die Annahme eines Zugstabs damit bestätigt.

- **Verlust des Rechenziels:** insbesondere bei Schwerpunkttaufgaben fällt gelegentlich auf, dass während des Lösens der Aufgabe das Rechenziel aus den Augen verloren geht (siehe SP_44, SP_48). Gesucht ist die Schwerpunktllage h als Funktion von r , dabei ist r gegeben. Zu Beginn wird die Summenformel für h aufgestellt, beim Lö-

sen aber das Ziel aus den Augen verloren. Im Lösungsgang wird auf r umgestellt und zum Schluss nicht erkannt, dass r ja von Anfang an gegeben und h das Ziel war.

Abhilfe: Nach dem Durchlesen der Aufgabe das Rechenziel groß an den Rand des Lösungsblattes schreiben, idealerweise in dessen Mitte oder am Ende des Blattes.

- **Weniger Gleichungen als Unbekannte** im LGS: Gelegentlich in TM1, recht häufig in TM2 erkennen die Studierenden nicht, dass Sie zum Lösen des LGS zu wenige Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt und dadurch zur Verfügung haben. Die Kraftkomponenten von schräg eingebauten Pendelstützen, Seilen und Federn zählen als **eine** Unbekannte. Ist bei Reibaufgaben der Reibwert μ bzw. μ_0 gegeben, lässt sich nach *Coulomb* die Reibkraft aus der Normalkraft berechnen. Somit steht bei Gleitreibung die Reibgleichung $R = \mu \cdot N$ ebenfalls nur für eine Unbekannte. Bei Haftreibung ist dies nur an der Haftgrenze der Fall, hier gilt $R = \mu_0 \cdot N$. Unterhalb der Haftgrenze ist die *Coulomb'sche* Ungleichung zu respektieren, diese lautet $R \leq \mu_0 \cdot N$. In diesem Fall stehen R und N für zwei Unbekannte. **Abhilfe:** Nach dem Aufstellen der Gleichungen überprüft man deren Anzahl und die Zahl der Unbekannten. Nur bei Gleichheit ist das LGS lösbar (notwendiges Kriterium).
- **Fehlende Lösungsstrategie:** Bereits bei drei Gleichgewichtsbedingungen haben viele Studierende häufig Probleme, das LGS zu lösen. Das Problem nimmt mit der Anzahl an Gleichungen zu, bei 3D-Aufgaben sind es üblicherweise sechs, in TM2 bei mehrteiligen Systemen teilweise acht oder neun. **Abhilfe:** Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen untereinander und nummerieren Sie diese durch. Tragen Sie (mit einer anderen Farbe) hinter jede Gleichung die darin enthaltenden Unbekannten ein. Vorteilhaft ist dabei eine Spaltendarstellung, jede Unbekannte hat ihre eigene Spalte. Entwickeln Sie eine Lösungsstrategie (LöStra) und finden Sie den kürzesten und einfachsten Lösungsweg. Bevorzugen Sie zunächst die „einfachen“ Lösungsmethoden wie das Gleichsetzungs- und das Einsetzverfahren.
- Verstoß gegen **elementare Rechenregeln** wie z.B. a) Punkt vor Strich, b) Differenzen und Summen kürzen nur die D...! c) Gelegentlich führen zwei falsche Zwischenergebnisse erstaunlicherweise trotzdem zum richtigen Lösungswert. Das kann nicht sein.

3

Ebene Fachwerke

Hinweise zu den Fachwerkaufgaben

- Alle hier gezeigten Fachwerke sind „einfach“, massefrei und eben (2D).
- Überprüfen Sie stets zu Beginn der Aufgabe die **statische Bestimmtheit** des Fachwerks mit der Formel $\Sigma w + \Sigma St = 2 \cdot \Sigma Kn$ und zusätzlich die statische Bestimmtheit für das erstarrte Gesamtsystem (EMGS). Dabei gilt $n = 1$ und $\Sigma w = 3 \cdot n$. Dadurch
 - a. erhalten Sie Gewissheit über die äußeren Lagerwertigkeiten,
 - b. können entscheiden, ob Sie die EMGS anwenden und
 - c. sich derweil eine Lösungsstrategie überlegen.

Manche Fachwerke sind erstarrt ($n = 1$) einfach überbestimmt, als Fachwerk betrachtet aber bestimmt (**FW_02, FW_16, FW_18, FW_19**).

- Fachwerkstäbe sind Pendelstützen (Gelenkstäbe) und somit **einwertig, ideal starr und massefrei**. Sie nehmen nur Kräfte in Längsrichtung und nur in den Gelenken auf, niemals dazwischen. Die Wirklinie liegt auf der Verbindungsgeraden Gelenk-Gelenk.

Bei Fachwerkstäben ist kein Kraftangriff zwischen den Gelenken erlaubt. Knoten sind zweiwertige feste Gelenke. Sie sind stets reibungs- und spielfrei und nehmen kein Moment auf.

- Fachwerkkonstruktionen sind nur **in den Knoten stabil**. Der Stab an sich ist empfindlich gegen *Euler*'sches Knicken (elastisch/plastische Verbiegung bei Druckbelastung). Bemaßt sind stets die Knotenabstände. Sie dienen später zur Ermittlung der Stabkraftkomponenten schräg eingebauter Stäbe (Pendelstützenanalyse = PSA).
- Üblicherweise werden zu Beginn jeder Aufgabe die äußeren Lagerkraftkomponenten berechnet. Scheuen Sie sich nicht, die **Erstarrungsmethode Gesamtsystem (EMGS)** auch bei Fachwerken zu nutzen. Wenden Sie diese auch bei äußerlich sta-

tisch über-bestimmten Systemen an (siehe FW_16, FW_18). Alle Lagerkraftkomponenten und Stabkräfte werden üblicherweise als Vielfache der Last F berechnet.

- Gesamtlagerkräfte, also z.B. eine resultierende Lagerkraft A aus A_x und A_y , werden nur selten gesucht und daher üblicherweise nicht berechnet. Für die Stabkraftberechnung reichen die Lagerkraftkomponenten A_x und A_y vollkommen aus.
- **Koordinatensystem:** Da grob geschätzt 50 % aller Fachwerkstäbe horizontal bzw. vertikal ausgerichtet sind, wird bevorzugt das x-y-Koordinatensystem in Normallage verwendet.
- Stehen Fachwerkstäbe schräg zu den Achsen, wird die Gesamtstabkraft aus den Stabkraftkomponenten mit dem Satz des *Pythagoras* berechnet.
- Anzahl aufstellbarer Gleichgewichtsbedingungen: pro **Knotenschnitt** (Rundumschnitt) können Sie zwei Kraftgleichgewichtsbedingungen aufstellen. Schneiden Sie einen **Dreistabknoten** frei, muss dafür **eine** Stabkraft (bzw. deren Stabkraftkomponenten) bekannt sein. Bei **Vierstabknoten** sind es **zwei** Stabkräfte (bzw. deren Komponenten). **Merke:** Nach der Berechnung werden aus Stabkräften Last.

Zerlegen Sie zu Beginn eines Knotenschnitts schräge Stabkräfte in Kraftkomponenten entsprechend der bemaßten Einbaurlage (Knotenbemaßung). Knotenschnitte wendet man bei „kleinen“ Fachwerken mit maximal 10 bis 20 Stäben an oder wenn man am Rand des Fachwerks bzw. an den äußeren Lagern arbeitet. Beginnen Sie stets mit den Zweistabknoten und gehen Sie dann über die Dreistab- zu den Vierstabknoten. Bei einem Knoten handelt es sich statisch betrachtet um einen lokalen zentralen Punkt, d.h., alle Stabwirklinien und äußeren Kräfte schneiden sich in diesem Knoten. Daher macht bei einem solch zentralen Punkt ein Momentengleichgewicht keinerlei Sinn. Keine der o. g. Kräfte hat einen Hebelarm. Somit stehen nur die beiden Kraftgleichgewichtsbedingungen zur Verfügung:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad (2)$$

- Für Schnitte im Inneren des Fachwerkes und bei „größeren“ Fachwerken nutzen wir den *Ritter*-Schnitt. Beachten Sie seine **beiden Ausschlusskriterien**:
 - a. Verlaufen die drei geschnittenen Stäbe **parallel**,
 - entfällt eine der beiden Kraftgleichgewichtsbedingungen und es gibt
 - keinen Schnittpunkt von zwei Stabwirklinien für die Momentengleichung.
 - b. Schneiden sich alle drei geschnittenen Stäbe in einem **Ursprungsknoten**, entfällt der Momentenbezugspunkt, d.h., das Momentengleichgewicht liefert Null.