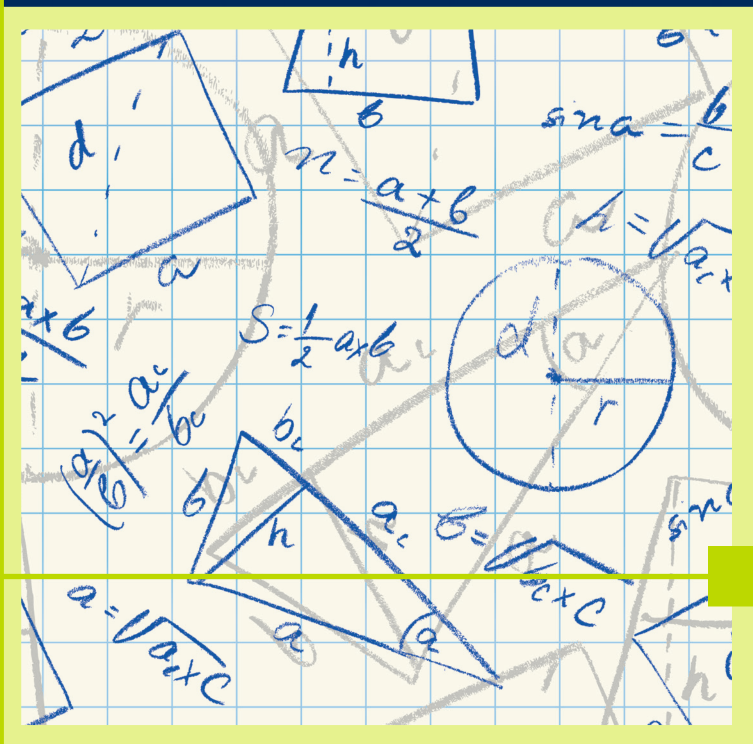
Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik
für das Ingenieurstudium



4., aktualisierte Auflage

HANSER

Koch · Stämpfle

Mathematik für das Ingenieurstudium

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik

für das Ingenieurstudium

4., aktualisierte Auflage

Mit 637 Abbildungen, 507 durchgerechneten Beispielen und 384 Aufgaben
mit ausführlichen Lösungen im Internet unter www.mathematik-fuer-ingenieure.de

HANSER

Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Koch

Hochschule Esslingen, Fakultät Grundlagen
www.hs-esslingen.de/mitarbeiter/Juergen.Koch, juergen.koch@hs-esslingen.de

Prof. Dr. rer. nat. Martin Stämpfle

Hochschule Esslingen, Fakultät Grundlagen
www.hs-esslingen.de/mitarbeiter/Martin.Staempfle, martin.staempfle@hs-esslingen.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-45166-7
E-Book-ISBN 978-3-446-45581-8

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Mirja Werner
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Jürgen Koch, Martin Stämpfle, Esslingen
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza

Printed in Germany

Vorwort

Drei wesentliche Gründe haben uns bewogen, ein Mathematikbuch zu schreiben. Zum einen haben wir unser persönliches didaktisches Konzept umgesetzt. Zum anderen ist dieses Buch so gestaltet, dass es dem Wandel, der durch den Einsatz von Computern entstanden ist, gerecht wird. Schließlich wird durch viele Anwendungsbeispiele die Bedeutung der Mathematik in der Technik sichtbar.

In diesem Mathematikbuch haben wir viel Wert auf eine verständliche Sprache gelegt. Begriffe, Regeln und Sätze sind so formuliert, dass sie möglichst leicht zu lesen, schnell aufzufassen und einfach zu merken sind. Bilder sagen mehr als tausend Worte. Gemäß diesem Grundsatz werden Sätze, Regeln und Beispiele mit farbigen Skizzen illustriert. Diese Abbildungen helfen, den Sachverhalt unmittelbar visuell aufzunehmen. Alle Beispiele enthalten einen ausführlichen Rechenweg. Durch die Angabe von vielen Zwischenschritten sind sie auf das Niveau von Studienanfängern zugeschnitten. Dieses Buch ist nicht nach dem strengen Prinzip Definition-Satz-Beweis aufgebaut. In diesem Sinne ist es kein Mathematikbuch für Mathematiker. Trotzdem sind an vielen Stellen Herleitungen oder Beweisskizzen enthalten. Sie fördern das Verständnis über die Zusammenhänge des mathematischen Gedankengebäudes. Querbezüge zur Geschichte der Mathematik verdeutlichen, wie sich die Mathematik über Jahrhunderte aus Ideen genialer Personen entwickelt hat. Kurzporträts einiger bedeutender Mathematiker befinden sich im Anhang.

Durch den Einsatz von Computern hat sich die Tätigkeit von Ingenieuren stark gewandelt. Berechnungen und Konstruktionen werden überwiegend mit Softwarewerkzeugen durchgeführt. Dadurch steht die Vermittlung von Rechenschemata und Rechentricks bei der Mathematikausbildung in einem Ingenieurstudium heute nicht mehr im Vordergrund. Computer machen Mathematik aber nicht überflüssig, im Gegenteil: Das Kapital der Ingenieurabsolventen liegt im Verständnis der Mathematik. Das Wissen über die Modellierung und die Kenntnis unterschiedlicher Berechnungsverfahren sowie die Fähigkeit zu einer souveränen Interpretation der Ergebnisse zeichnen einen guten Ingenieur aus. Dieses Buch wird diesem geänderten Anspruch gerecht. Die meisten Kapitel enthalten einen Abschnitt über numerische Verfahren und einen Abschnitt über ausgewählte Anwendungen. Bei diesen Anwendungen sind die technischen Skizzen und Bezeichnungen teilweise vereinfacht dargestellt und deshalb nicht immer normgerecht.

Zum Überprüfen des Lernfortschrittes stehen am Ende der Kapitel Aufgaben, unterteilt in die Kategorien Verständnis, Rechentechnik und Anwendungen, zur Verfügung. Durch selbstständiges Üben und mit einer gesunden Portion Hartnäckigkeit beim Bearbeiten der Aufgaben wird sich der gewünschte Studienerfolg einstellen. Lösungen zu den Aufgaben sind über die Internetseiten der Autoren abrufbar: *www.mathematik-fuer-ingenieure.de*. Das Dozentenportal des Carl Hanser Verlags stellt für Mathematikdozenten begleitend zum Buch einen Foliensatz bereit.

Unser Dank richtet sich in erster Linie an unsere Studierenden. Ihre Fragen und Bemerkungen über viele Semester hinweg haben uns angeregt, immer wieder über Verbesserungen der Darstellung des Stoffes zu reflektieren. Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei unseren Kolleginnen und Kollegen der Fakultät Grundlagen an der Hochschule Esslingen. Zahlreiche Hinweise sind an vielen Stellen eingeflossen. Ein herzlicher Dank geht an den Carl Hanser Verlag, speziell an Frau Christine Fritzsch, Frau Renate Roßbach und Frau Katrin Wulst, für die angenehme Zusammenarbeit bei der Entstehung dieses Buches. Schließlich gilt ein besonderer Dank unseren Familien, die uns Freiräume geschaffen und so die Entstehung des Manuskripts ermöglicht haben.

Esslingen, im Juli 2010

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Die positive Resonanz über unser Buch hat uns sehr gefreut und uns dazu motiviert, in die 2. Auflage eine Reihe von Ergänzungen und Verbesserungen aufzunehmen. Bedanken möchten wir uns bei den Studierenden und Kollegen über die Rückmeldungen zu Tippfehlern und kleinen Unstimmigkeiten. In akribischer Kleinarbeit sind wir allen Hinweisen nachgegangen und haben entsprechende Korrekturen vorgenommen. Auch die Lösungen zu den Aufgaben, die nach wie vor im Internet abrufbar sind, haben wir überarbeitet.

Wir haben in der 3. Auflage das Thema Funktionen in drei Kapitel aufgeteilt. Der Einstieg in die Funktionen ist nun etwas allgemeiner gehalten und beinhaltet auch Relationen. Ein eigenes klar strukturiertes Kapitel über die elementaren Funktionen verbessert den Überblick über diese Funktionen. Die zentralen Themen Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit sind nun in einem separaten Kapitel gebündelt. Mit Ergänzungen bei der z-Transformation und den beiden komplett neuen Kapiteln über Differenzengleichungen und elementare Zahlentheorie haben wir weitere Aspekte der diskreten Mathematik hinzugefügt. Einige Aufgaben und Lösungen sind neu hinzugekommen oder wurden überarbeitet.

In der 4. Auflage haben wir Abschnitte über orthogonale Vektoren und Matrizen und die Hauptachsentransformation aufgenommen. Das Kapitel über Zahlentheorie wurde um zwei Anwendungen erweitert. Bei den Kapiteln über Grundlagen, Matrizen und gewöhnliche Differenzialgleichungen wurden etliche Aufgaben ergänzt. Auch für diese Auflage haben wir noch einige kleinere Unstimmigkeiten geglättet.

Esslingen, im Oktober 2017

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Die Mathematik ist aus einzelnen Bausteinen aufgebaut. Neue Erkenntnisse bauen stets auf bereits Bekanntem auf. Dadurch entsteht ein immer mächtigeres Bauwerk. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns, bildlich gesprochen, mit den untersten Etagen der Mathematik. Dabei geht es vor allem um Themen der Schulmathematik. Nun gehört die Schulmathematik nicht immer zu den vorrangigen Interessensgebieten von Studierenden. Man könnte darüber nachdenken, dieses Kapitel zu überblättern. Das geht natürlich nur gut, wenn im Kartenhaus unserer Leser in den untersten Etagen nicht viele Lücken vorhanden sind. Ansonsten drohen die ganzen Bemühungen mit einstürzenden Neubauten zu enden. Auch wenn man den Eindruck hat, über ein tragbares Fundament in Mathematik zu verfügen, sollte man sich mit den Bezeichnungen für logische Operatoren, Mengen, Zahlen, Intervalle, Summen und Produkte in diesem Kapitel vertraut machen.

Die Darstellung der Themen in diesem ersten Kapitel ist sehr komprimiert. Für eine intensive Wiederholung der Schulmathematik sollte man jedoch noch weitere Bücher, die mehr Beispiele und Übungsaufgaben enthalten, in Betracht ziehen. Die wesentlichen Dinge, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden, sind jedoch alle enthalten.

1.1 Logik und Mengen

Wir gehen in diesem Abschnitt kurz auf einige Aspekte der Logik und der Mengenlehre ein. Diese beiden Teilgebiete gehören zum absoluten Fundament der Mathematik. Obwohl sie in diesem Buch nicht im Mittelpunkt stehen, werden wir doch an vielen Stellen immer wieder logische und mengentheoretische Eigenschaften anwenden.

1.1.1 Aussagenlogik

„Das ist doch logisch.“ Dieser Satz wird oft strapaziert, jedoch nicht immer geht dieser Aussage eine wirklich streng logische Herleitung eines Sachverhalts voraus. Die Mathematik bedient sich an vielen Stellen der Logik. Die Hoffnung dabei ist, dass Dinge objektiv beschrieben werden können und Aussagen und Gesetze lange Zeit Gültigkeit haben, da sie für jeden transparent und schlüssig, eben logisch herleitbar sind. Die grundlegende Denkweise der Logik wurde auch unter philosophischen Aspekten bereits in der Antike etwa von *Aristoteles* beschrieben.

Eine spezielle Art der Logik ist die Aussagenlogik. Wie die Bezeichnung schon vermuten lässt, stehen dabei Aussagen im Mittelpunkt. Es stellt sich die Frage, wie man mit

Aussagen, insbesondere natürlich mit mathematischen Aussagen umgehen kann. In der klassischen Aussagenlogik geht man davon aus, dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist. Aussagen, bei denen nicht entscheidbar ist, ob sie wahr oder falsch sind, berücksichtigen wir hier nicht. Betrachtet man nicht nur eine Aussage, sondern mehrere, dann ist interessant, wie diese Aussagen zueinander stehen. Oftmals folgt aus einer Aussage eine andere. Man kann Aussagen miteinander verknüpfen und dadurch zu weiteren Aussagen gelangen. Der formale Apparat dazu heißt Aussagenlogik. Etwas allgemeiner ist die nach dem englischen Mathematiker *George Boole* benannte und von *Giuseppe Peano* und *John Venn* maßgeblich entwickelte Boolesche Algebra. Sie kann auf die Logik und auf Mengen, wie wir sie in *Abschnitt 1.1.2* betrachten, spezialisiert werden. Zunächst definieren wir einige Operationen für Aussagen.

Definition 1.1 (Aussagenlogik)

Für die Aussagen A_1 und A_2 bezeichnet man

- die **Negation** oder das Gegenteil der Aussage A_1 mit $\neg A_1$,
- die **Und-Verknüpfung** der beiden Aussagen mit $A_1 \wedge A_2$,
- die **Oder-Verknüpfung** der beiden Aussagen mit $A_1 \vee A_2$,
- die **Implikation** der beiden Aussagen mit $A_1 \Longrightarrow A_2$,
- die **Äquivalenz** der beiden Aussagen mit $A_1 \Longleftrightarrow A_2$.

Für äquivalente Aussagen verwendet man die Sprechweise

$A_1 \Longleftrightarrow A_2$ „A_1 gilt genau dann, wenn A_2 gilt“

und für die Implikation

$A_1 \Longrightarrow A_2$ „wenn A_1 gilt, dann gilt auch A_2“ oder „aus A_1 folgt A_2“.

Etwas gewöhnungsbedürftig ist die Tatsache, dass für Relationen zwischen Aussagen Folgendes zutrifft:

$A_1 \Longrightarrow A_2$ ist gleichbedeutend mit $\neg A_2 \Longrightarrow \neg A_1$.

Folgt also aus A_1 die Aussage A_2, so ist dies äquivalent zur Tatsache, dass, wenn A_2 falsch ist, die Ausssage A_1 ebenfalls nicht wahr sein kann. Dies wird beispielsweise bei der Durchführung von Widerspruchsbeweisen, siehe *Abschnitt 1.6*, angewandt. Die Oder-Verknüpfung ist kein exklusives Oder. Ist Aussage A_1 oder Aussage A_2 wahr, so können durchaus auch beide Aussagen wahr sein. Möchte man ausdrücken, dass nur genau eine Aussage wahr ist, also entweder A_1 oder A_2, so kann man dies mithilfe der exklusiven Oder-Verknüpfung erreichen:

$$(A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_2 \wedge \neg A_1).$$

Damit wird also ausgedrückt, dass entweder A_1 wahr und A_2 falsch ist oder der umgekehrte Fall gilt.

Beispiel 1.1 (Aussagen)

a) Um im Lotto zu gewinnen, muss man einen Lottoschein ausfüllen. Zwischen den beiden Aussagen

$$A_1 : \text{Ich habe im Lotto gewonnen}, \quad A_2 : \text{Ich habe einen Lottoschein ausgefüllt}$$

besteht also die Implikation $A_1 \Longrightarrow A_2$. Einen Lottoschein auszufüllen bezeichnet man als eine notwendige Bedingung für einen Lottogewinn. Allerdings ist das leider noch keine hinreichende Bedingung für einen Lottogewinn.

b) Wir betrachten die beiden Aussagen

$$A_1 : \text{Die Figur ist ein Dreieck}, \quad A_2 : \text{Die Figur ist ein Polygon}.$$

Da jedes Dreieck ein Polygon ist, gilt $A_1 \Longrightarrow A_2$. Die Umkehrung muss aber nicht zutreffen. Ein Quadrat etwa ist insbesondere ein Polygon, aber eben kein Dreieck. Die beiden Aussagen sind nicht äquivalent.

c) Bei den beiden Aussagen

$$A_1 : x > 5, \quad A_2 : x > -2.$$

gilt $A_1 \Longrightarrow A_2$, denn wenn eine Zahl größer als 5 ist, dann ist sie auch größer als -2. Die Umkehrung trifft nicht zu. Somit sind die beiden Aussagen auch nicht äquivalent.

d) Für die Aussagen

$$A_1 : x^2 = 4, \quad A_2 : x = 2, \quad A_3 : x = -2$$

gelten die folgenden Relationen:

$$A_2 \Longrightarrow A_1, \quad A_3 \Longrightarrow A_1, \quad A_1 \Longleftrightarrow A_2 \vee A_3.$$

An diesem Beispiel wird deutlich, wie die Aussagenlogik die mathematische Lösungsfindung begleitet. Nur bei Äquivalenzumformungen ist sichergestellt, dass keine Lösung verloren geht und auch kein neuer Lösungskandidat hinzu kommt. ■

Die Oder-Verknüpfung und die Und-Verknüpfung sind assoziativ und kommutativ. Man kann also beliebig Klammern setzen und auch die Reihenfolge vertauschen. Treten beide Operatoren gemischt in einem Ausdruck auf, so kann man diesen mithilfe der Regeln des Mathematikers *Augustus de Morgan* umformen.

Satz 1.1 (Regeln von de Morgan)

Für die Aussagen A_1 und A_2 gilt:

- $\neg(A_1 \wedge A_2) = \neg A_1 \vee \neg A_2$
- $\neg(A_1 \vee A_2) = \neg A_1 \wedge \neg A_2$

Nun gibt es allerdings auch eine etwas seltsame Art von Aussagen, bei denen man auch bei näherer Betrachtung nicht so recht weiter kommt. Was ist beispielsweise davon zu halten, wenn ein Mann folgenden Satz spricht:

„Ich spreche jetzt nicht die Wahrheit.“

Wenn er die Wahrheit sagt, so stimmt seine Aussage. Darin ist aber enthalten, dass er nicht die Wahrheit spricht. Dies ist ein Widerspruch. Wenn er lügt, dann ist seine Aussage nicht wahr. Seine Behauptung, dass er nicht die Wahrheit spricht, ist falsch. Er sagt also die Wahrheit. Dies führt ebenfalls zu einem Widerspruch. Es ist folglich nicht entscheidbar, ob diese Aussage wahr ist oder nicht. Wie kommt dieses Paradoxon zustande? Es ist der Selbstbezug, der diese sogenannte Antinomie ungreifbar macht. *Bertrand Russell* publizierte 1903 dieses Paradoxon erstmals.

Als Ausblick sei hier erwähnt, dass eine Erweiterung der Aussagenlogik in der sogenannten Prädikatenlogik besteht. Dieser Formalismus enthält als weitere Strukturelemente sogenannte Prädikate und Quantoren, mit deren Hilfe Existenz und Allgemeingültigkeit von Ausdrücken näher spezifiziert werden können. Die Prädikatenlogik hat viele Anwendungsfelder. Dazu zählen Programmiersprachen und Compilerbau in der Informatik. Pioniere der modernen Logik sind *John von Neumann*, *Paul Bernays* und *Kurt Gödel*.

1.1.2 Mengen

Viele Begriffe in der Mathematik, wie beispielsweise die reellen Zahlen oder der Wertevorrat einer Funktion, werden über Mengen definiert. Eine Menge fasst verschiedene Elemente zusammen. In einer Menge können endlich viele oder unendlich viele Elemente enthalten sein. Bei einer Menge interessiert man sich nicht für die Reihenfolge der Elemente. In diesem Sinn gibt es kein erstes oder letztes Element einer Menge. Man kann lediglich entscheiden, ob ein gewisses Element in einer Menge enthalten ist oder nicht. Ein und dasselbe Element kann auch nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. Mengen kann man durch Aufzählen der Elemente oder durch Angabe bestimmter Eigenschaften der Elemente festlegen.

Definition 1.2 (Mengenschreibweise)

In der **aufzählenden Form** einer Menge M werden alle Elemente a, b, c, $\ldots$ aufgezählt, die zu M gehören:

$$M = \{a, b, c, \ldots\}.$$

In der **beschreibenden Form** einer Menge M besteht M aus allen Elementen x, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen:

$$M = \{x \mid x \text{ hat bestimmte Eigenschaft}\}.$$

Beispiel 1.2 (Mengenschreibweise)

Die Menge, die aus allen Zahlen besteht, deren Quadrat kleiner oder gleich 4 ist und die größer oder gleich -1 sind, definiert man durch

$$M = \left\{x \mid x^2 \leq 4 \text{ und } x \geq -1\right\}.$$

Die Menge M besteht aus den Zahlen zwischen -1 und 2. ■

Definition 1.3 (Leere Menge)
Die **leere Menge** bezeichnet man mit $\emptyset = \{\}$.

Die leere Menge enthält kein Element. Für sie verwendet man die Bezeichnung $\emptyset$. Mit den Symbolen $\in$ und $\notin$ beschreibt man das Enthaltensein von Elementen in einer Menge.

Definition 1.4 (Element einer Menge)
Die Mengenzugehörigkeit beschreibt man für

- ein **Element** einer Menge mit $a \in \{a, b, c\}$,
- kein Element einer Menge mit $d \notin \{a, b, c\}$.

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Wenn die Menge M_2 alle Elemente der Menge M_1 auch enthält, dann nennt man M_1 eine Teilmenge von M_2. In diesem Sinne besteht auch zwischen zwei gleichen Mengen die Teilmengenrelation. An manchen Stellen unterscheidet man zwischen echten und unechten Teilmengen. Bei zwei gleichen Mengen spricht man dann von unechten Teilmengen. Echte Teilmengen müssen sich um mindestens ein Element unterscheiden.

Definition 1.5 (Teilmenge)
Die Menge M_1 ist eine **Teilmenge** der Menge M_2, falls jedes Element x der Menge M_1 auch in der Menge M_2 enthalten ist:

$$M_1 \subset M_2 : \quad x \in M_1 \implies x \in M_2.$$

Die wichtigsten Operationen für Mengen sind Vereinigung, Schnitt und Differenz. Die Vereinigungsmenge zweier Mengen enthält alle Elemente aus den beiden Mengen. Die Schnittmenge zweier Mengen besteht aus den Elementen, die sowohl zu der einen als auch zu der anderen Menge gehören. Bei der Differenzenmenge von zwei Mengen werden alle Elemente der zweiten Menge aus der ersten Menge entfernt. Mithilfe der Aussagenlogik kann man die Mengenoperationen formal definieren.

Definition 1.6 (Mengenoperationen)
Für die Mengen M_1 und M_2 definiert man

- die **Vereinigungsmenge** durch $M_1 \cup M_2 = \{\, x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \}$,
- die **Schnittmenge** durch $M_1 \cap M_2 = \{\, x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \}$,
- die **Differenzenmenge** durch $M_1 \setminus M_2 = \{\, x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2 \}$.

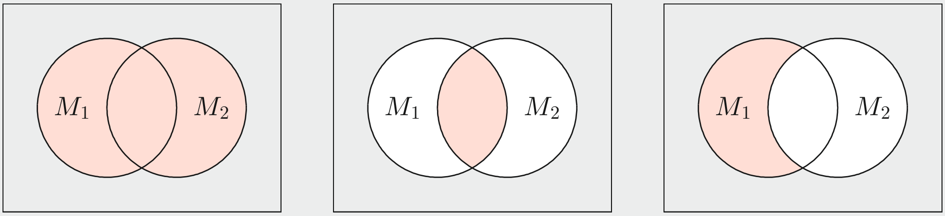
Während bei den ersten beiden Operationen die Mengen vertauschbar sind, ohne dass sich dabei das Ergebnis ändert, ist dies bei der Differenzbildung nicht möglich. Im Allgemeinen ist also $M_1 \setminus M_2$ nicht dasselbe wie $M_2 \setminus M_1$. Die Differenzbildung ist, wie man sagt, nicht kommutativ. Das exklusive Mengen-Oder erhält man mittels der Mengendifferenz folgendermaßen:

$$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1).$$

Deutlich sichtbar ist die Analogie zwischen der logischen Oder-Verknüpfung und der Vereinigungsmenge. Gleiches gilt für die logische Und-Verknüpfung und die Schnittmenge. Auch beim exklusiven Oder ist die Analogie zur Aussagenlogik erkennbar. Sicherlich einprägsamer und leichter zu merken sind diese Definitionen über Mengendiagramme, die man auch als Venn-Diagramme bezeichnet. Sie sind nach dem englischen Mathematiker *John Venn* benannt.

Mengenoperationen

Vereinigung Schnitt Differenz



$M_1 \cup M_2$ $M_1 \cap M_2$ $M_1 \setminus M_2$

Beispiel 1.3 (Mengenoperationen)

a) $\{4, 7, 11\} \cup \{7, 17, 27\} = \{4, 7, 11, 17, 27\}$

b) $\{4, 7, 11\} \cap \{7, 17, 27\} = \{7\}$

c) $\{4, 7, 11\} \setminus \{7, 17, 27\} = \{4, 11\}$ ∎

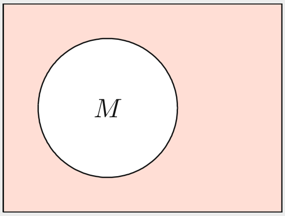
Nun gibt es noch die sogenannte Komplementbildung einer Menge M. Diese ist allerdings nur definiert, falls es eine Grundmenge gibt, aus der M gebildet ist.

Definition 1.7 (Mengenkomplement)

Bezogen auf eine Grundmenge ist das **Komplement** einer Menge definiert durch

$$M^C = \{x \mid x \notin M\}.$$

Kein Element von M ist in der Menge M^C enthalten und umgekehrt.



Viele Beiträge zu unterschiedlichen Aspekten der Mengenlehre stammen von *Bernhard Placius Johann Nepomuk Bolzano*, *Richard Dedekind*, *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor* und *Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo*.

1.2 Zahlen

Der Mathematiker *Richard Dedekind* veröffentlichte 1888 eine Publikation mit dem Titel „Was sind und was sollen Zahlen?“. Für sich betrachtet sind Zahlen rein abstrakte mathematische Objekte. Aus unserem Alltag sind Zahlen jedoch nicht mehr wegzudenken. Sie werden zum Zählen, Ordnen, Messen und zur Angabe von Größenverhältnissen verwendet. Beispielsweise hat die Zahl 11 zunächst keinen Bezug zu unserer täglichen Realität. Wenn wir jedoch wissen, dass eine Fußballmannschaft aus 11 Spielern besteht, dann ist die Größe genau festgelegt. Wenn eine Mannschaft auf dem 11-ten Tabellenplatz steht, dann verwenden wir die Zahlen zum Festlegen einer Reihenfolge.

In dieser Einführung stellen wir gewissermaßen die Entstehungsgeschichte der Zahlen vor. Sie erstreckt sich von den natürlichen und ganzen Zahlen über die rationalen Zahlen bis zu den reellen Zahlen. Die letzte Episode, die sich mit den komplexen Zahlen beschäftigt, ist in *Kapitel 13* enthalten.

1.2.1 Natürliche Zahlen

Die Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

sind uns aus dem Alltag vertraut. Die Mathematiker bezeichnen diese Zahlen deshalb als natürliche Zahlen.

Definition 1.8 (Menge der natürlichen Zahlen)
Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird beschrieben durch

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Viel Diskussion erzeugt die Frage, ob die Null auch eine natürliche Zahl ist. Letztendlich ist es jedoch ohne Bedeutung, ob wir die Null als natürliche Zahl betrachten oder nicht. Über was wir wirklich bei dieser Schreibweise nachdenken sollten, sind die drei Punkte am Ende der Auflistung. Durch die Notation $\ldots$ wird angedeutet, dass es immer weiter geht. Im Sinne der Mathematik gibt es also keine größte natürliche Zahl. Meistens argumentiert man dabei wie folgt: Angenommen es gäbe eine größte natürliche Zahl, dann kann man doch sicherlich eine Eins zu dieser Zahl addieren und erhält dadurch eine noch größere Zahl. Also ist die Annahme, dass es eine größte natürliche Zahl gibt, nicht haltbar.

Definition 1.9 (Unendlich)

In der Mathematik versteht man unter dem Begriff **Unendlichkeit** das Gegenteil von Endlichkeit. Eine Menge hat also genau dann unendlich viele Elemente, wenn die Anzahl der Elemente nicht endlich ist. Zur Bezeichnung der Unendlichkeit verwendet man das Symbol ∞.

Beim Umgang mit dem Symbol ∞ ist Vorsicht geboten. Man darf mit diesem Symbol nicht einfach wie mit Zahlen rechnen. Wenn man Ausdrücke der Art $\infty - \infty$ verwendet, muss man genau erläutern, was darunter zu verstehen ist.

Symbole ∞ und $-\infty$

Die Bezeichnungen ∞ und $-\infty$ sind Symbole und keine Zahlen. Mit den Symbolen ∞ und $-\infty$ darf man nicht einfach rechnen wie mit Zahlen.

Ob sich die mathematische Unendlichkeit tatsächlich auf unsere reale Welt übertragen lässt, ist dem Mathematiker letztendlich egal. Nach Schätzungen von Physikern enthält unser Universum nicht mehr als 10^{78} Atome. Die Größe einer solchen Zahl mit 78 Stellen ist schwer zu erfassen, sie spielt für die mathematische Theorie keine Rolle. In der Mathematik ist das Prinzip der Unendlichkeit durch Axiome fest verankert. *Albert Einstein* soll einmal gesagt haben: „Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.“

1.2.2 Ganze Zahlen

Die Addition und die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ergibt wieder eine natürliche Zahl. Anders sieht es bei der Subtraktion aus. Wenn man von einer natürlichen Zahl eine größere natürliche Zahl abzieht, so ist das Ergebnis negativ. Das Ergebnis ist in diesem Fall also keine natürliche Zahl. Um diesen Makel zu beseitigen, erweitern wir die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.

Definition 1.10 (Menge der ganzen Zahlen)

Die **Menge der ganzen Zahlen** wird beschrieben durch

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Durch die ganzen Zahlen ist die Problematik bei der Subtraktion behoben. Die Addition, die Multiplikation und die Subtraktion zweier ganzer Zahlen ergibt wieder eine ganze Zahl. Mathematiker sprechen von der Abgeschlossenheit der ganzen Zahlen bezüglich Addition, Multiplikation und Subtraktion.

Auf den ersten Blick hat es den Anschein, dass es doppelt so viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen gibt. Bei dieser Betrachtung ist jedoch Vorsicht geboten. Sie geht von einer Rechnung der Art „$\infty + \infty = 2\infty$“ aus. Wie bereits erwähnt, darf man mit dem Symbol ∞ nicht einfach so rechnen, als ob es eine Zahl wäre. Aus Sicht der Mathematik ist die Anzahl der natürlichen und der ganzen Zahlen gleich, nämlich unendlich.

1.2.3 Rationale Zahlen

Über eine Grundrechenart haben wir uns bisher noch keine Gedanken gemacht, nämlich die Division. Was passiert, wenn wir zwei ganze Zahlen durcheinander teilen? Nur in Ausnahmefällen geht die Division zweier ganzer Zahlen ohne Rest auf. Damit wir Ergebnisse von Divisionen beliebiger ganzer Zahlen darstellen können, benötigen wir eine Erweiterung der ganzen Zahlen.

Definition 1.11 (Menge der rationalen Zahlen)
Die **Menge der rationalen Zahlen** besteht aus allen Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ q = \frac{n}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \right\}.$$

Im Hinblick auf die vier Grundrechenarten haben wir unser Ziel erreicht. Die rationalen Zahlen sind bezüglich Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division abgeschlossen. Beim Umgang mit rationalen Zahlen spielt die Darstellung als Dezimalzahl eine wichtige Rolle. Dabei verwenden wir anstelle eines Kommas die international übliche Schreibweise der Dezimalzahlen mit einem Dezimalpunkt.

Definition 1.12 (Dezimalzahl)
Ein Zahl der Form

$$z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0 \,.\, z_{-1} z_{-2} z_{-3} \dots\,, \qquad z_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

bezeichnet man als **Dezimalzahl**. Sie besteht aus endlich vielen Ziffern z_k vor dem Dezimalpunkt und endlich oder unendlich vielen Ziffern z_k nach dem Dezimalpunkt.

Bei Dezimalzahlen werden die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Sie beruhen auf dem Zehnersystem. Historiker sehen die Ursache für die weite Verbreitung des Dezimalsystems vor allem in der menschlichen Anatomie. Das Zählen im Zehnersystem lässt sich durch zehn Finger einfach realisieren.

Trotzdem haben sich auch andere Zahlensysteme etabliert. Unter anderem das Zwölfersystem, das sich durch die einfache Aufteilung in Hälften, Drittel, Viertel, Sechstel und Zwölftel gegenüber dem Dezimalsystem auszeichnet. Bei der Darstellung auf Computern verwendet man das Binärsystem, das nur die beiden Ziffern 0 und 1 kennt. Eine komprimierte Darstellung des Binärsystems bietet das Hexadezimalsystem zur Basis 16.

Beispiel 1.4 (Dezimalzahlen)

a) Die Zahl 1.4142 ist ein typisches Beispiel für eine Dezimalzahl. Sie besitzt eine Stelle vor dem Dezimalpunkt und 4 Nachkommastellen und lässt sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen:

$$1.4142 = \frac{14142}{10000}.$$

Somit ist 1.4142 auch eine rationale Zahl. Zusätzlich wird bei diesem Beispiel eine Problematik deutlich, die wir an dieser Stelle auf keinen Fall verheimlichen wollen. Die Bruchdarstellung einer rationalen Zahl ist nicht eindeutig:

$$1.4142 = \frac{14142}{10000} = \frac{7071}{5000} = \frac{28284}{20000} = \dots$$

b) Unter den rationalen Zahlen gibt es auch Zahlen, die sich nicht als endliche Dezimalzahl darstellen lassen. Ein einfaches Beispiel ist die rationale Zahl $\frac{1}{3}$. Die Darstellung dieser Zahl ist als Dezimalzahl nur dann möglich, wenn man unendlich viele Nachkommastellen zulässt:

$$\frac{1}{3} = 0.333333\ldots = 0.\overline{3}.$$

Man spricht hier von einer periodischen Dezimalzahl. Ein Strich über den sich wiederholenden Ziffern zeigt die Periode an.

c) Durch Brüche mit dem Nenner 9, 99, 999, $\ldots$ kann man aufgrund von

$$\frac{1}{9} = 0.111111\ldots, \quad \frac{1}{99} = 0.010101\ldots, \quad \frac{1}{999} = 0.001001\ldots, \quad \ldots$$

jede periodische Dezimalzahl darstellen. Dadurch sind alle periodischen Dezimalzahlen rationale Zahlen. Man kann den Trick auch bei Zahlen der Art

$$0.815471147114711\ldots = 0.815\overline{4711} = \frac{815}{1000} + \frac{4711}{1000 \cdot 9999}$$

anwenden. Umgekehrt kann man die Dezimalzahl

$$0.999999\ldots = 0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

auch als rationale Zahl darstellen. ■

Dezimalzahlen

Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen und jede periodische Dezimalzahl ist als Bruch darstellbar und somit eine rationale Zahl. Umgekehrt bestehen die rationalen Zahlen genau aus allen Dezimalzahlen, die endlich viele Nachkommastellen haben oder periodisch sind.

1.2.4 Reelle Zahlen

In der griechischen Antike, also vor rund 2500 Jahren, gab es den ersten Nachweis, dass es auch Zahlen gibt, die nicht rational sind. Nicht rational bedeutet, dass sich die Zahl nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt. Solche Zahlen bezeichnet man heute als irrational. Unglücklicherweise assoziiert man umgangsprachlich mit irrational etwas, was gegen die „Ratio“, also gegen die Vernunft gerichtet ist. Der Ausdruck irrationale Zahlen bezieht sich jedoch auf den Begriff „Ratio“ im Sinne vom Verhältnis zweier Zahlen.

Definition 1.13 (Irrationale Zahlen)

Eine Zahl, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, bezeichnet man als **irrationale Zahl**. Irrationale Zahlen besitzen eine Dezimaldarstellung mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen.

Beispiel 1.5 (Irrationale Zahlen)

a) Ein typischer Vertreter der irrationalen Zahlen ist

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097\ldots$$

Zum Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist *Euklid* indirekt vorgegangen, siehe *Beispiel 1.25*.

b) Leonhard Euler konnte im Jahr 1737 beweisen, dass die Zahl

$$\mathrm{e} = 2.7182818284590455348848081484903\ldots$$

auch irrational ist. Weitere Einzelheiten zur Eulerschen Zahl e findet man in *Definition 7.9*.

c) Auch von der Kreiszahl

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795\ldots$$

ist bekannt, dass sie irrational ist. Die Kreiszahl π spielt eine zentrale Rolle bei den trigonometrischen Funktionen, siehe *Definition 1.28*. ▪

Definition 1.14 (Reelle Zahlen)

Die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ besteht aus allen rationalen und irrationalen Zahlen.

Die Beweise, dass die Zahlen e und π irrational sind, sind alles andere als einfach. *Charles Hermite* etwa hat gezeigt, dass e eine sogenannte transzendente Zahl ist. Daraus folgt insbesondere, dass e irrational ist. Es entsteht leicht der Eindruck, dass man irrationale Zahlen wie Stecknadeln im Heuhaufen suchen muss. Doch genau das Gegenteil ist richtig. Es gibt wesentlich mehr irrationale Zahlen als rationale Zahlen. Formal drückt man das in der Mathematik dadurch aus, dass die rationalen Zahlen als abzählbar und die irrationalen Zahlen als überabzählbar bezeichnet werden. Anschaulich kann man sich das folgendermaßen vorstellen: Angenommen, man hätte einen Sack, indem sich alle rationalen und irrationalen Zahlen befinden. Wenn man nun blind eine Zahl aus diesem Sack ziehen würde, dann kann man fast sicher sein, dass es eine irrationale Zahl ist.

Einbettung der Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen sind eine echte Teilmenge der ganzen Zahlen, die ganzen Zahlen sind eine echte Teilmenge der rationalen Zahlen und die rationalen Zahlen sind eine echte Teilmenge der reellen Zahlen : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Möchte man die Zahlenmengen einschränken oder erweitern, so verwendet man zusätzliche Indizes. Ein Index 0 bedeutet, dass die Null zur Menge hinzugehört. So ist üblicherweise $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. Ein Index + bedeutet, dass nur die positiven Zahlen gemeint sind, ein Index – entsprechend, dass nur die negativen Zahlen gemeint sind. Die Menge $\mathbb{Q}^+$ bezeichnet also beispielsweise die positiven rationalen Zahlen. Die Menge $\mathbb{Q}_0^+$ bezeichnet die nicht negativen rationalen Zahlen. Selbst die reellen Zahlen sind noch nicht in jeder Hinsicht ausreichend. So besitzt etwa die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

keine reelle Lösung. Möchte man auch für dieses Problem eine Lösung haben, so muss die Menge der reellen Zahlen abermals erweitert werden. Man gelangt dadurch zur Menge der komplexen Zahlen, die in *Kapitel 13* ausführlich eingeführt und diskutiert wird.

Die Theorie der Zahlen ist ein fundamentales Themengebiet der Mathematik und bis heute alles andere als abgeschlossen. Viele Mathematiker haben sich mit zahlentheoretischen Fragestellungen beschäftigt, darunter *Richard Dedekind*, *Sophie Germain*, *David Hilbert*, *Georg Friedrich Bernhard Riemann* und *Srinivasa Aiyangar Ramanujan*.

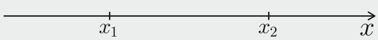
1.2.5 Ordnung

Bei zwei unterschiedlichen reellen Zahlen ist stets klar, welche von beiden die kleinere und welche die größere Zahl ist. Anschaulich kann man sich Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen. Die kleinere Zahl wird dabei immer links von der größeren Zahl eingetragen. Ein Pfeil an der rechten Seite verdeutlicht, dass die Zahlen in dieser Richtung anwachsen. In beiden Richtungen ist der Zahlenstrahl in seiner Ausdehnung nicht beschränkt. Zur Beschreibung der Anordnung verwendet man die Symbole <, > und =.

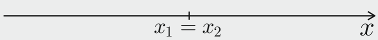
Definition 1.15 (Ordnung der reellen Zahlen)

Für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gilt immer genau eine der folgenden Beziehungen:

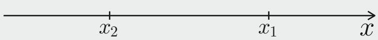
- x_1 **kleiner** x_2, also $x_1 < x_2$



- x_1 **gleich** x_2, also $x_1 = x_2$



- x_1 **größer** x_2, also $x_1 > x_2$



Neben den Symbolen < und > sind auch die Symbole ≤ und ≥ gebräuchlich. Auf den ersten Blick ist die Bedeutung von ≤ und ≥ etwas verwirrend. Verständlich wird diese Schreibweise, wenn man beachtet, dass man unter ≤ eine logische Oder-Verknüpfung von < und = versteht. Eine logische Und-Verknüpfung würde keinen Sinn ergeben, denn es existieren keine Zahlen die gleichzeitig echt kleiner und gleich sind. Entsprechend bezeichnet ≥ eine logische Oder-Verknüpfung von > und =.

Definition 1.16 (Kleiner oder gleich, größer oder gleich)

Für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 verwendet man die Symbole $\leq$ und $\geq$, falls gilt:

- x_1 **kleiner oder gleich** x_2, also $x_1 \leq x_2$
- x_1 **größer oder gleich** x_2, also $x_1 \geq x_2$

Beispiel 1.6 (Ordnung)

a) Um zu entscheiden, welche der beiden Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{7}$ größer ist, bringen wir beide Brüche auf denselben Hauptnenner:

$$\frac{2}{7} = \frac{6}{21} < \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

b) Mit der Schreibweise $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m < 4\}$ bezeichnet man die Menge M der ganzen Zahlen, die kleiner als 4 und größer oder gleich -2 sind. Diese Menge lässt sich auch durch $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ darstellen. ■

1.2.6 Intervalle

Die beiden Symbole $\leq$ und $\geq$ werden in der Mathematik häufig zur Bezeichnung von Mengen von Zahlen verwendet. Zahlenmengen ohne Zwischenräume bezeichnet man dabei als Intervalle. Wenn das begrenzende Element auch zu der Menge dazu gehören soll, verwendet man eckige Klammern. Runde Klammern deuten an, dass das begrenzende Element nicht mehr zur Menge gehört.

Definition 1.17 (Intervalle)

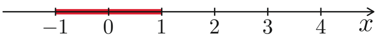
Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen, die sich ohne Zwischenräume von einer Untergrenze a bis zu einer Obergrenze b erstrecken:

- **abgeschlossenes Intervall** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- **offenes Intervall** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- **halboffenes Intervall** $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- **halboffenes Intervall** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Intervalle sind ganz spezielle, einfache Teilmengen der reellen Zahlen. Es gibt auch viel allgemeiner strukturierte Teilmengen. Beispiele dafür sind, die nach *Émile Borel* benannte Borel-Menge oder die nach *Georg Cantor* benannte Cantor-Menge.

Beispiel 1.7 (Intervalle)

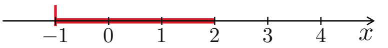
a) Das Intervall $(-1, 1)$ ist auf beiden Seiten offen, die Untergrenze -1 und die Obergrenze 1 gehören nicht zum Intervall.



b) Das Intervall $[1, 3]$ ist auf beiden Seiten abgeschlossen, die Untergrenze 1 und die Obergrenze 3 gehören zum Intervall.

c) Das Intervall $(0, 3]$ ist auf der linken Seite offen und auf der rechten Seite abgeschlossen, die Untergrenze 0 gehört nicht zum Intervall, die Obergrenze 3 gehört zum Intervall.

d) Das Intervall $[-1, 2)$ ist auf der linken Seite abgeschlossen und auf der rechten Seite offen, die Untergrenze -1 gehört zum Intervall, die Obergrenze 2 gehört nicht zum Intervall.



Zur Bezeichnung von Intervallen, die beliebig große Zahlen enthalten, verwendet man das Symbol ∞. Entsprechend benutzt man das Symbol $-\infty$ bei negativen Zahlen.

Definition 1.18 (Unendliche Intervalle)

Bei einem Intervall darf man für die Obergrenze auch das Symbol ∞ und für die Untergrenze das Symbol $-\infty$ verwenden. Man spricht dann von einem **unendlichen Intervall**:

- **halboffenes Intervall** $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$
- **offenes Intervall** $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$
- **halboffenes Intervall** $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$
- **offenes Intervall** $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$

1.2.7 Betrag und Signum

Bei bestimmten Anwendungen in der Technik interessiert man sich für das Vorzeichen einer reellen Zahl. Ein typisches Beispiel ist ein Gleichrichter in der Elektrotechnik. Dabei werden negative Spannungen ausgeblendet oder in positive Spannungen umgewandelt. In der Mathematik verwendet man den sogenannten Betrag, um ein eventuell negatives Vorzeichen einer reellen Zahl zu eliminieren. Diese auch als Absolutwert bezeichnete Zahl ist niemals negativ.

Definition 1.19 (Betrag)

Der **Betrag** einer reellen Zahl x ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Auf den ersten Blick scheint diese Definition des Betrags unter einer gewissen Unsymmetrie zu leiden. Anhänger symmetrischer Formeln würden eine Formulierung der Art

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

bevorzugen. Mathematisch unterscheiden sich die beiden Formulierungen jedoch nicht. Die Formulierung in *Definition 1.19* ist kompakter und wird deshalb üblicherweise verwendet.

Beispiel 1.8 (Betrag)

a) Die Zahl -3 ist negativ, deshalb müssen wir zur Berechnung von $|-3|$ laut *Definition 1.19* den zweiten Fall $x < 0$ betrachten. Es folgt

$$|-3| = -(-3) = 3.$$

b) Wenn wir den Ausdruck $|x-1|$ durch Fallunterscheidung darstellen möchten, dann müssen wir uns zunächst Gedanken darüber machen, wann $x-1$ negativ wird. Dies ist genau für $x < 1$ der Fall. Somit lautet die betragsfreie Darstellung

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{für} \quad x \geq 1 \\ -x+1 & \text{für} \quad x < 1. \end{cases}$$

■

Betrag

Das Betragszeichen lässt sich durch Fallunterscheidungen auflösen.

Der Betrag des Produktes zweier Zahlen ist gleich dem Produkt der einzelnen Beträge. Entsprechendes gilt auch für Quotienten und Potenzen.

Satz 1.2 (Rechenregeln für den Betrag)

Für reelle Zahlen x und y gelten folgende Rechenregeln für den Betrag:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $|x^a| = |x|^a$ für reelle Hochzahlen a

Anschaulich entspricht der Betrag einer Zahl dem Abstand zum Ursprung auf der Zahlengeraden. Die beiden Zahlen x und $-x$ haben denselben Abstand von 0, nämlich $|x|$.

Der Betrag einer Differenz von zwei Zahlen x und y gibt entsprechend den Abstand dieser beiden Zahlen an. Diese geometrische Interpretation des Betrags werden wir in *Abschnitt 13.1.1* bei der Definition des Betrags einer komplexen Zahl wieder aufgreifen.

Betrag und Abstand

Der Betrag lässt sich als Abstand interpretieren:

- Der Abstand der Zahl x zum Ursprung ist $|x|$.
- Der Abstand der beiden Zahlen x und y zueinander ist $|x - y|$.

Beispiel 1.9 (Betrag und Abstand)

a) Den Abstand der beiden Zahlen 3 und 4 kann man mithilfe des Betrags berechnen: $|3 - 4| = 1$.

b) Es gilt sowohl $|3| = 3$ als auch $|-3| = 3$. Somit besteht die Menge aller Zahlen x mit der Eigenschaft $|x| = 3$ aus den beiden Zahlen 3 und -3. Diese beiden Zahlen haben vom Ursprung den Abstand 3.

c) Die Menge aller Zahlen x mit der Eigenschaft $|x| < 3$ besteht aus allen Zahlen x, deren Abstand vom Ursprung kleiner als 3 ist. Diese Menge können wir in Form des offenen Intervalls $(-3, 3)$ angeben.

d) Die Beziehung $|x - 2| \leq 3$ erfüllen alle Zahlen x, deren Abstand von der Zahl 2 kleiner oder gleich 3 beträgt. Diese Zahlen liegen im abgeschlossenen Intervall $[-1, 5]$. ■

Beim Rechnen mit Beträgen von Summen und Differenzen ist Vorsicht geboten. Bei unterschiedlichen Vorzeichen ist der Betrag der Summe zweier Zahlen nicht gleich der Summe der einzelnen Beträge. Die sogenannte Dreiecksungleichung gilt immer. Sie besagt, dass der Betrag einer Summe niemals größer als die Summe der einzelnen Beträge ist.

Satz 1.3 (Dreiecksungleichungen für den Betrag)

Für beliebige reelle Zahlen x und y gelten die Dreiecksungleichungen für den Betrag:

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x \pm y| \geq \Big| |x| - |y| \Big|$

Beispiel 1.10 (Dreiecksungleichung für den Betrag)

a) Nach der Dreiecksungleichung für den Betrag gilt die Abschätzung nach oben:

$$|-3 + 4| \leq |-3| + |4| = 7.$$

Bei unterschiedlichem Vorzeichen der Zahlen gilt also keine Gleichheit.

b) Mit der Dreiecksungleichung für den Betrag ist außerdem

$$|-3 - 4| \geq \Big| |-3| - |-4| \Big| = 1.$$

Haben beide Zahlen das gleiche Vorzeichen, so gilt keine Gleichheit. ■

Definition 1.20 (Signum, Vorzeichen)
Das **Signum** oder **Vorzeichen** einer reellen Zahl x ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

1.2.8 Summe und Produkt

Sollen viele Zahlen aufsummiert werden, ist die explizite Angabe aller Terme in der Form

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

oft sehr unübersichtlich. Deshalb greift man gern zur sogenannten Pünktchenschreibweise, bei der nur der Anfang und das Ende der Summe explizit angegeben wird. Dazwischen werden einfach drei Punkte geschrieben:

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_8.$$

Etwas eleganter besteht alternativ dazu die Möglichkeit, die Summe mit dem Summenzeichen $\sum$, dem griechischen Großbuchstaben Sigma, anzugeben:

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Nach dem Summenzeichen wird nur ein einziger Term geschrieben, der dafür in allgemeiner Form in Abhängigkeit von einem Index formuliert ist. Der Summationsindex k startet dabei mit dem Wert $k = 1$ und wird so oft um eins erhöht, bis der Endwert $k = n$ erreicht ist. Ähnliche Konstrukte treten in vielen Programmiersprachen unter dem Begriff Schleife auf. Dabei übernimmt der Index k die Rolle der Schleifenvariablen.

Definition 1.21 (Summe und Produkt)
Werden die reellen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ zu

- einer **Summe** addiert, so verwendet man die Summenschreibweise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

- einem **Produkt** multipliziert, so verwendet man die Produktschreibweise

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Das Produktzeichen $\prod$ ist vom griechischen Großbuchstaben Pi abgeleitet. In *Definition 1.21* kann man den Index k auch mit anderen Buchstaben bezeichnen. Gebräuchlich ist auch die Verwendung von i oder j. Summen und Produkte müssen nicht notwendigerweise mit dem Index $k = 1$ starten. Im Prinzip kann man für die untere und auch für die obere Grenze jede beliebige ganze Zahl wählen.

Beispiel 1.11 (Summe)

Wir berechnen die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Dazu gehen wir geschickt vor und schreiben die Zahlen zweimal untereinander, einmal vorwärts und einmal rückwärts:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1 & n+1. \end{array}$$

Nun kann man in jeder Spalte die Summe bilden: Sie beträgt $n + 1$. Insgesamt erhalten wir für die doppelte Summe den Wert $(n+1)\,n$ und durch Division mit dem Faktor 2 das Ergebnis

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Es wird behauptet, dass *Carl Friedrich Gauß* diese Formel als junger Schüler aufgestellt hat. ■

1.3 Potenz und Wurzel

Das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln beruht auf wenigen Grundgesetzen. In diesem Abschnitt fassen wir die wichtigsten Regeln zusammen. Die einzelnen Rechengesetze erscheinen den meisten sofort plausibel. Da das Arbeiten mit Potenzen und Wurzeln die Grundlage für viele weiterführende Themen bildet, ist ein souveräner Umgang mit diesen Regeln unerlässlich. Das Ganze verhält sich so ähnlich wie beim Schachspiel. Die Regeln, nach denen die Schachfiguren gezogen werden, lassen sich schnell erklären. Aber allein die Kenntnis der Spielregeln reicht natürlich nicht aus, um ein guter Schachspieler zu sein.

1.3.1 Potenzen

Wiederholtes Multiplizieren mit demselben Faktor nennt man in der Mathematik Potenzieren. Entsprechend bezeichnet man das Ergebnis der Multiplikationen als Potenz.

Definition 1.22 (Potenz)

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man die n-te **Potenz** einer reellen Zahl x mit

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Negative Potenzen entsprechen dem Kehrwert $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Üblicherweise gilt die Festlegung $x^0 = 1$ für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.

Bei der Potenz x^n bezeichnet man x als Basis und n als Hochzahl oder Exponent. Eine Sondersituation liegt bei der Hochzahl $n = 0$ vor. Unabhängig von der Basis x hat x^0 immer den Wert 1. Darin ist auch die Konvention $0^0 = 1$ enthalten, die allerdings bis heute noch bei einigen Mathematikern umstritten ist.

Beispiel 1.12 (Potenzen)

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$

b) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0.01.$ ▪

1.3.2 Potenzgesetze

Die Rechenregeln für Potenzen, die sogenannten Potenzgesetze, lassen sich unmittelbar aus den Rechenregeln der Multiplikation und Division ableiten. Bisher haben wir nur Potenzen mit ganzen Zahlen als Hochzahlen betrachtet. Die Potenzgesetze behalten ihre Gültigkeit jedoch auch für andere Hochzahlen, siehe *Abschnitt 13.3.2*.

Satz 1.4 (Potenzgesetze)

Bei der Multiplikation oder Division von Potenzen mit gemeinsamer Basis kann man die Exponenten zusammenfassen:

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Bei der Multiplikation oder Division von Potenzen mit gemeinsamem Exponenten kann man die Basen zusammenfassen:

- $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$
- $\dfrac{x^a}{y^a} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$

Beim Potenzieren multiplizieren sich die Hochzahlen: ▸ $(x^a)^b = x^{a \cdot b} = (x^b)^a$

Die Potenzgesetze gelten für beliebige Hochzahlen a und b und reelle Zahlen x und y.

Beispiel 1.13 (Potenzgesetze)

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32.$

b) $\dfrac{3^2}{3^4} = 3^{2-4} = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}.$

c) $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216.$

d) $\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64.$ ▪

1.3.3 Wurzeln

Wurzeln stellen eine Art Umkehrung der Potenzen dar. Beispielsweise ergibt das Quadrat der Zahl 5 die Zahl 25. Umgekehrt liefert die Quadratwurzel aus der Zahl 25 die Zahl 5.

Wenn wir also zurückverfolgen können, wie eine Zahl durch Potenzieren entstanden ist, dann sind wir in der Lage, die Wurzel dieser Zahl anzugeben.

Beispiel 1.14 (Wurzel)

a) Aus der Gleichung $2^2 = 4$ folgt unmittelbar $\sqrt{4} = 2$.

b) Die Gleichung $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ impliziert $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

c) Der Ausdruck $\sqrt[4]{-16}$ ist nicht definiert. Es gibt keine Zahl y mit $y^4 = -16$. ▪

Definition 1.23 (Wurzel)

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man die n-te **Wurzel** einer reellen Zahl x mit $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$. Zwischen Potenz und Wurzel gilt der Zusammenhang

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \Longrightarrow \quad y^n = x.$$

Für gerade Zahlen n darf die Zahl unter der Wurzel nicht negativ sein.

Definition 1.23 lässt ein paar Fragen offen. Zur Lösung praktischer Probleme benötigt man Methoden, um Wurzeln zu berechnen. Dabei ist man in der Regel auf Näherungsverfahren angewiesen. Diesen Aspekt werden wir in *Abschnitt 7.1.1* und *Abschnitt 7.5.1* aufgreifen und Methoden zur Berechnung von Wurzeln vorstellen. In *Definition 1.23* sind für ungerade Hochzahlen n auch Wurzeln aus negativen Zahlen zugelassen. Beispielsweise ist $(-3)^3 = -27$, also ist die Festlegung $\sqrt[3]{-27} = -3$ durchaus sinnvoll.

Folgenden Sachverhalt sollte man an dieser Stelle unbedingt beachten: Potenzgleichungen haben in der Regel nicht nur eine Lösung. Beispielsweise hat die Gleichung $y^2 = 4$ zwei verschiedene Lösungen, nämlich $y_1 = 2$ und $y_2 = -2$. Weitere Einzelheiten dazu betrachten wir in *Abschnitt 1.5.2*. Wurzeln sind Potenzen mit rationalen Hochzahlen. Die Potenzgesetze aus *Satz 1.4* gelten somit auch für Wurzeln.

1.3.4 Binomischer Satz

Ausdrücke der Form $(a+b)$ oder $(a-b)$ bezeichnet man als Binome. Der binomische Satz vereinfacht die Berechnung der Potenzen von Binomen. Dazu benötigen wir zwei wichtige Begriffe: Die Fakultät einer natürlichen Zahl und der Binomialkoeffizient zweier natürlicher Zahlen.

Definition 1.24 (Fakultät)

Die **Fakultät** einer natürlichen Zahl n ist das Produkt aus den Faktoren 1 bis n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Außerdem definiert man $0! = 1$.

Beispiel 1.15 (Fakultät)

a) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

b) $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5! \cdot 6 \cdot 7 = 120 \cdot 42 = 5040.$

Aus *Beispiel 1.15* erkennen wir, dass Fakultäten sehr schnell große Zahlenwerte liefern. Außerdem ist es günstig, Fakultäten rekursiv zu berechnen.

Definition 1.25 (Binomialkoeffizient)

Der **Binomialkoeffizient** der beiden natürlichen Zahl $m \geq n$ ist definiert durch

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Fakultäten und Binomialkoeffizienten sind in der Kombinatorik von großer Bedeutung. In der Kombinatorik werden Fragestellungen zur Anzahl unterschiedlicher Anordnungen und Auswahlmöglichkeiten untersucht. Die Kombinatorik ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Für natürliche Zahlen m ist der Binomialkoeffizient in folgendem Sinn symmetrisch:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-(m-n))!} = \binom{m}{m-n}.$$

Mit wachsendem n nehmen die Koeffizienten zunächst zu und ab der Stelle $n = \frac{m}{2}$ wieder ab. Man kann zeigen, dass Binomialkoeffizienten eine rekursive Beziehung erfüllen. Deshalb bietet sich eine rekursive Berechnung in Form eines Dreieckschemas an. Der Name dieses Schemas geht auf den französischen Mathematiker *Blaise Pascal* zurück.

Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck ergeben sich jeweils aus der Summe der beiden darüber stehenden Koeffizienten:

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

Durch Ausmultiplizieren des Ausdrucks

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2\,a\,b + b^2)(a+b) = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

erkennt man, dass Potenzen von Binomen eine rekursive Struktur mit Binomialkoeffizienten besitzen. Für eine allgemeine Hochzahl n bezeichnet man diesen Zusammenhang als binomischen Satz.

Satz 1.5 (Binomischer Satz)

Für jede natürliche Hochzahl n und beliebige Zahlen a und b gilt die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Beispiel 1.16 (Binomischer Satz)

a) $(x-1)^3 = x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1.$

b) $(x+2)^4 = x^4 + 4 \cdot 2\,x^3 + 6 \cdot 2^2\,x^2 + 4 \cdot 2^3\,x + 2^4.$ ■

Binomische Formeln

Für beliebige Zahlen a und b gelten die binomischen Formeln:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.4 Trigonometrie

Die Trigonometrie ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Dreiecken beschäftigt. Wir werden in diesem Abschnitt Zusammenhänge zwischen den Längen der Kanten und den Winkeln eines Dreiecks aufzeigen.

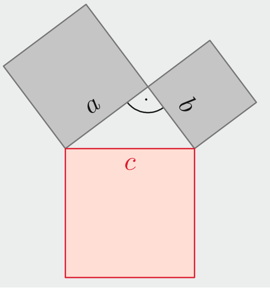
1.4.1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck besteht ein Zusammenhang zwischen den Längen der einzelnen Dreiecksseiten. Dieser Zusammenhang wurde bereits in der Antike erkannt und ist heute unter dem, nach dem griechischen Mathematiker und Philosophen *Pythagoras* benannten Satz bekannt. Es gibt viele verschiedene Varianten, diesen Satz zu beweisen. Wir verzichten an dieser Stelle aber auf eine Herleitung.

Satz 1.6 (Satz des Pythagoras)

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Zwischen der Länge der Hypotenuse c und den Längen der beiden Katheten a und b gilt die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

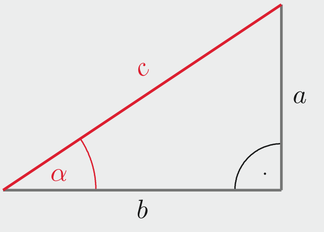


Zur Unterscheidung bezeichnet man in einem Dreieck diejenige Kathete, die dem Winkel α gegenüberliegt, als Gegenkathete und die andere Kathete als Ankathete. Legt man in einem rechtwinkligen Dreieck einen Winkel α fest, dann ist damit auch das Verhältnis der Länge der Ankathete und der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse festgelegt. Die Verhältnisse der Längen definiert man als Sinus und Kosinus des Winkels α. Diese trigonometrischen Werte sind von fundamentaler Bedeutung in der Anwendung der Mathematik.

Definition 1.26 (Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck)

Sinus und **Kosinus** eines Winkels α sind im rechtwinkligen Dreieck durch die Verhältnisse der Längen der drei Seiten Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse definiert:

- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$



Offensichtlich ist die längste Seite in einem rechtwinkligen Dreieck immer die Hypotenuse. Somit sind die Werte von Sinus und Kosinus sicherlich niemals größer als 1. *Definition 1.26* stellt eine rein geometrische Definition von Sinus und Kosinus dar. Wenn wir nach dieser Definition die Werte von Sinus und Kosinus eines Winkels α ermitteln wollten, dann müssten wir ein entsprechendes Dreieck zeichnen, die Längen der Dreiecksseiten messen und die Verhältnisse berechnen. Heutzutage sind wir auf diese geometrische Art der Berechnung aber nicht mehr angewiesen. Wir werden in *Kapitel 10* Methoden vorstellen, mit denen man Näherungswerte für Sinus und Kosinus für beliebige Winkel berechnen kann.

Sinus und Kosinus sind über ein rechtwinkliges Dreieck definiert. Wählt man ein Dreieck mit Winkel α so, dass die Hypotenuse die Länge 1 hat, dann entspricht der Sinus des Winkels α der Länge der Gegenkathete und der Kosinus der Länge der Ankathete. In diesem Fall erhält man mit dem Satz von Pythagoras eine Beziehung zwischen Sinus und Kosinus.

Satz 1.7 (Pythagoras für Sinus und Kosinus, Kreisgleichung)

Zwischen dem Sinus und Kosinus eines Winkels α gilt die Beziehung

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Manche Problemstellungen, wie beispielsweise die Berechnung von Steigungen, lassen sich mit dem Verhältnis von Sinus und Kosinus beschreiben. Zu diesem Zweck definiert man den Tangens und Kotangens eines Winkels.

Definition 1.27 (Tangens und Kotangens im rechtwinkligen Dreieck)
Tangens und **Kotangens** eines Winkels α sind im rechtwinkligen Dreieck durch die Verhältnisse der Längen der Ankathete und der Gegenkathete definiert:

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

1.4.2 Winkel im Grad- und Bogenmaß

Bisher haben wir Winkel nur als Innenwinkel eines Dreiecks betrachtet. In einem Dreieck ist kein Winkel größer als $180°$. Einige Anwendungen in der Technik erfordern jedoch eine allgemeinere Festlegung. Dazu betrachtet man Winkel am Kreis. Dadurch kann man Winkel zwischen $0°$ und $360°$ festlegen. Am Einheitskreis, also an einem Kreis mit Radius 1, kann man jedem Winkel einen entsprechenden Bogen auf dem Kreisumfang zuordnen. Beispielsweise wird einem $180°$-Winkel ein Halbkreisbogen zugeordnet. Die Länge dieses Halbkreisbogens ist eine Art mathematische Naturkonstante. Man bezeichnet sie mit π, sprich „Pi“.

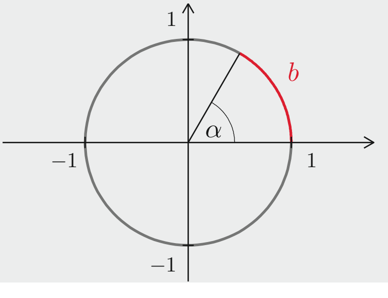
Definition 1.28 (Zahl π)
Die **Zahl** π entspricht der Länge eines Halbkreisbogens mit Radius 1.

Die Angabe eines Winkels in Form der Länge eines entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis bezeichnet man als Bogenmaß. In der Mathematik werden Winkel üblicherweise nicht im Winkelmaß, sondern nur im Bogenmaß angegeben. Die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmaß ist jedoch nicht schwierig.

Definition 1.29 (Bogenmaß)
Das **Bogenmaß** b eines Winkels α im Gradmaß ist die Länge des Kreisbogens im Einheitskreis. Die Umrechnung zwischen dem Bogenmaß und dem Gradmaß erfolgt durch

$$b = \frac{2\pi}{360°}\,\alpha, \qquad \alpha = \frac{360°}{2\pi}\,b.$$

Insbesondere entspricht 2π dem Winkel $360°$.



Für die Winkel $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ und $90°$ haben Sinus und Kosinus ausschließlich Werte, die sich mit den Wurzeln aus den Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4 darstellen lassen.

Spezielle Werte des Sinus und Kosinus

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

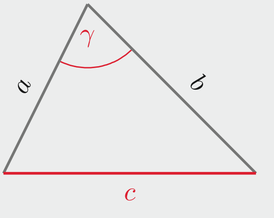
1.4.3 Sinus- und Kosinussatz

Bisher haben wir nur Dreiecke mit einem rechten Winkel betrachtet. Der Kosinussatz ist die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für beliebige, also nicht zwingend rechtwinklige Dreiecke.

Satz 1.8 (Kosinussatz)
Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und γ der gegenüber der Seite c liegende Winkel, so gilt die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Phythagoras auf nicht rechtwinklige Dreiecke.

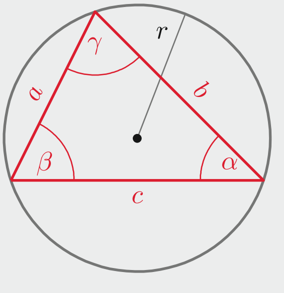


Der Sinussatz, den wir der Vollständigkeit halber hier auch erwähnen, und der Kosinussatz haben an praktischer Bedeutung eingebüßt. Berechnungen in nicht rechtwinkligen Dreiecken werden heute typischerweise mithilfe von Vektoren durchgeführt, siehe *Kapitel 3*.

Satz 1.9 (Sinusssatz)
Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und α, β und γ die jeweils gegenüber liegenden Winkel, so gilt die Beziehung

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,r.$$

Dabei ist r der Umkreisradius des Dreiecks.



1.5 Gleichungen und Ungleichungen

Aus Sicht vieler Naturwissenschaftler und Techniker besteht die Hauptaufgabe der Mathematik darin, geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen zu entwickeln. Auch wenn diese Sichtweise für die moderne Mathematik zu kurz gegriffen ist, ist das Lösen von Gleichungen ein wichtiger Aspekt der Mathematik. Eine sehr populäre Gleichung wurde Mitte des 17. Jahrhunderts von *Pierre de Fermat* aufgestellt:

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{mit einer gegebenen natürlichen Zahl } n > 2.$$

Gesucht sind dabei ganzzahlige Lösungen x, y und z. Über viele Jahrzehnte hinweg wurde intensiv an einer Lösung geforscht. Viele Mathematiker sind an diesem Problem gescheitert. Erst vor wenigen Jahren konnte bewiesen werden, dass es für diese Gleichung keine einzige Lösung gibt. Bei vielen Problemstellungen aus der Praxis ist man zur Lösung von Gleichungen auf numerische Näherungsverfahren angewiesen. Es gibt jedoch eine ganze Reihe von Problemen, die auf Gleichungen führen, die man durch mathematische Methoden exakt lösen kann. Dabei lassen sich komplizierte Gleichungen oft auf einfachere Gleichungen zurückführen. In diesem Abschnitt betrachten wir Lösungsverfahren für die wichtigsten elementaren Gleichungstypen.

Entscheidend ist zunächst, dass man sich klar macht, nach welcher Größe man eine Gleichung auflösen möchte. Diese Größe bezeichnet man als Unbekannte der Gleichung. Wir betrachten zunächst nur Gleichungen, die eine Unbekannte enthalten. Wie in der Mathematik üblich, verwenden wir für die Unbekannte die Bezeichnung x. Oftmals ist ein eindeutiges Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten gar nicht möglich. Unter Umständen gibt es mehrere Werte für die Unbekannte, sodass die Gleichung erfüllt ist. Manchmal gibt es überhaupt keine Werte, die die Gleichung erfüllen. Wenn wir uns mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigen, dann wollen wir zunächst mit Gewissheit klären, ob es eine Lösung gibt oder nicht. Falls es Lösungen gibt, dann klären wir, wie viele Lösungen es gibt. Anschließend möchten wir natürlich auch alle konkreten Werte, für die die Gleichung erfüllt ist, berechnen.

Lösung einer Gleichung

Beim Lösen einer Gleichung versucht man folgende Fragen zu beantworten:

- Besitzt die Gleichung überhaupt eine Lösung (**Existenz**)?
- Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung (**Eindeutigkeit**)?
- Welche Werte darf man für die Unbekannte einsetzen, damit die Gleichung erfüllt ist (**Lösungsmenge**)?

Beim Lösen von Gleichungen gibt es kein generelles Kochrezept, nach dem man immer auf die gleiche Art und Weise vorgehen kann. Es gibt ein paar grundlegende Typen von Gleichungen, für die wir in den folgenden Abschnitten Lösungsstrategien angeben. Allerdings erfordert das Lösen von Gleichungen in vielen Fällen eine intuitive und kreative

Vorgehensweise. Man versucht durch geeignete Umformungen die Gleichung in eine Form zu bringen, in der die Lösungen einfacher zu berechnen sind. Von zentraler Bedeutung sind Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert lassen. Solche Umformungen bezeichnet man als Äquivalenzumformungen.

Äquivalenzumformung

Mithilfe von Umformungen versucht man eine Gleichung so zu verändern, dass man die Lösungen schließlich bestimmen kann. Eine **Äquivalenzumformung** verändert die Lösungsmenge einer Gleichung nicht. Äquivalenzumformungen lassen sich problemlos wieder rückgängig machen.

Eine typische Äquivalenzumformung ist die Addition oder Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten einer Gleichung. Auch die Multiplikation oder Division mit demselben Faktor auf beiden Seiten einer Gleichung ist in der Regel eine Äquivalenzumformung. Dabei muss man aber sicherstellen, dass man nicht mit null multipliziert oder durch null teilt. Somit ist insbesondere das Multiplizieren oder Dividieren einer Gleichung auf beiden Seiten mit der Unbekannten x in der Regel keine Äquivalenzumformung. Durch Multiplikation mit x erzeugt man unter Umständen die zusätzliche Lösung $x = 0$, und durch Division mit x verliert man unter Umständen die Lösung $x = 0$.

Leider lassen sich nicht alle Gleichungen ausschließlich durch Äquivalenzumformungen lösen. Beispielsweise löst man Wurzelgleichungen dadurch, dass man die Gleichungen quadriert, was in aller Regel keine Äquivalenzumformung ist, siehe *Abschnitt 1.5.4*.

1.5.1 Lineare Gleichungen

Der einfachste Gleichungstyp ist die sogenannte lineare Gleichung. Die Unbekannte x steht bei einer linearen Gleichung ausschließlich in der ersten Potenz, also x^1. Andere Ausdrücke in der Unbekannten x, wie etwa x^2, $\sqrt{x}$ oder $\sin x$ sind nicht erlaubt.

Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $a\,x = b$ darstellen kann, bezeichnet man als **lineare Gleichung** für die Unbekannte x. Die Koeffizienten a und b sind dabei beliebige reelle Zahlen. Eine lineare Gleichung besitzt für $a \neq 0$ die eindeutige Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Wenn der Koeffizient a nicht null ist, dann besitzt eine lineare Gleichung eine eindeutige Lösung. Der Fall, dass a null ist, ist bei einer einzigen linearen Gleichung uninteressant. Im Hinblick auf die Untersuchung linearer Gleichungssysteme in *Kapitel 2* betrachten wir diesen Fall hier trotzdem. Wenn a null ist und b auch null ist, dann können wir für x jeden beliebigen Wert in die Gleichung einsetzen. In diesem Fall gibt es also unendlich viele Lösungen. Wenn a null ist, aber b nicht null ist, dann hat die Gleichung gar keine Lösung.

Beispiel 1.17 (Lineare Gleichung)

Bei der Gleichung $47\,x - 11 = 8\,x + 15$ handelt es sich um eine lineare Gleichung, denn wir können sie in der Form $39\,x = 26$ darstellen. Die eindeutige Lösung ist $x = \frac{2}{3}$. ■

1.5.2 Potenzgleichungen

Potenzgleichungen lassen sich mithilfe von Wurzeln lösen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass Potenzen mit geraden Hochzahlen keine negativen Werte erzeugen können. Bei ungeraden Hochzahlen ist die Wurzel aus einer negativen Zahl sinnvoll definiert, siehe *Abschnitt 13.3.2*.

Potenzgleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $x^n = a$ mit einer natürlichen Hochzahl n darstellen kann, bezeichnet man als **Potenzgleichung** für die Unbekannte x. Diese Gleichung hat

- für eine gerade Hochzahl n und $a > 0$ genau zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a}$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a = 0$ genau eine Lösung: $x = 0$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a < 0$ keine Lösung,
- für eine ungerade Hochzahl n genau eine Lösung: $x = \sqrt[n]{a}$.

Beispiel 1.18 (Potenzgleichungen)

a) Die Gleichung $x^4 = 81$ hat die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$.

b) Die Gleichung $x^4 = -81$ hat keine reelle Lösung.

c) Die Gleichung $x^3 = 8$ hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = \sqrt[3]{8} = 2$.

d) Die Gleichung $x^3 = -8$ hat auch genau eine reelle Lösung, nämlich $x = \sqrt[3]{-8} = -2$. ■

1.5.3 Quadratische Gleichungen

Gleichungen, die außer der Unbekannten x auch noch x^2 enthalten, bezeichnet man als quadratische Gleichungen. Solche Gleichungen kann man immer in der Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

darstellen. Dabei sind die Koeffizienten a, b und c beliebige reelle Zahlen, wobei allerdings der Koeffizient a nicht null sein darf. Ansonsten läge lediglich eine lineare Gleichung vor. Zur Herleitung einer Lösungsformel isolieren wir die Terme mit x und teilen durch den Koeffizienten a:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\frac{c}{a}.$$

Der entscheidende Trick ist nun das Ergänzen eines geeigneten Terms auf beiden Seiten. Addiert man das Quadrat des halben Faktors vor dem x auf beiden Seiten, dann ergibt sich ein Ausdruck, den man als vollständiges Quadrat darstellen kann:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} = \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}.$$

Falls nun der Ausdruck auf der rechten Seite nicht negativ ist, ergeben sich die Lösungen der quadratischen Gleichung durch Wurzelziehen:

$$x + \frac{b}{2\,a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}.$$

Alles in allem fassen wir die Ergebnisse folgendermaßen zusammen:

Quadratische Gleichung

Eine Gleichung, die man in der Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \qquad a, b, c, \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0$$

darstellen kann, bezeichnet man als **quadratische Gleichung** für die Unbekannte x. Durch **quadratische Ergänzung** ergibt sich die äquivalente Darstellung

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\,.$$

Falls die **Diskriminante** $D = b^2 - 4\,a\,c$ nicht negativ ist, hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen hängt von der Diskriminante ab. Eine positive Diskriminante $D > 0$ erzeugt zwei verschiedene Lösungen, bei negativer Diskriminante $D < 0$, gibt es keine Lösungen, und falls die Diskriminante null ist, also $D = 0$, gibt es nur eine einzige Lösung.

Beispiel 1.19 (Quadratische Gleichungen)

a) Die quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

hat die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Bei der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4\,x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

ist die Diskriminante null. Es gibt nur eine Lösung $x_1 = 2$, die doppelt gezählt wird.

c) Die Lösungen der Gleichung $x^3 + x^2 + 2x = 0$ kann man mithilfe einer quadratischen Gleichung berechnen. Dazu klammert man den Faktor x aus:

$$x\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}.$$

In diesem Fall ist die Diskriminante negativ und somit $x_1 = 0$ die einzige Lösung.

d) Die Gleichung $x^4 - x^2 - 12 = 0$ ist keine quadratische Gleichung. Man kann sie aber durch die Substitution $x^2 = u$ in eine quadratische Gleichung überführen:

$$u^2 - u - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = 4,\ u_2 = -3.$$

Aus der ersten Lösung $u_1 = 4$ ergeben sich wegen $x^2 = 4$ die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$. Aus der zweiten Lösung $u_2 = -3$ erhalten wir wegen $x^2 = -3$ keine weiteren Lösungen. ■

Liegt eine quadratische Gleichung in der Form $x^2 + px + q = 0$ vor, so gilt nach dem Wurzelsatz von Vieta, benannt nach *François Viète*, der Zusammenhang

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1\, x_2$$

zwischen den Koeffizienten p und q und den Lösungen x_1 und x_2.

1.5.4 Wurzelgleichungen

Gleichungen, bei denen die Unbekannte unter einer Wurzel vorkommt, versucht man durch Potenzieren zu lösen. Bereits die einfache Gleichung

$$\sqrt{x} = -1 \quad \Big|^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

zeigt, dass das Potenzieren einer Gleichung keine Äquivalenzumformung darstellt. Die Gleichung $\sqrt{x} = -1$ hat keine Lösung. Durch Quadrieren der Gleichung auf beiden Seiten erhalten wir die neue Gleichung $x = 1$. Wenn wir jedoch $x = 1$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, erkennen wir, dass $x = 1$ keine Lösung ist. Wenn wir also eine Gleichung potenzieren, müssen wir unbedingt kontrollieren, ob die Lösungen der neuen Gleichung auch tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Dieses Prinzip bezeichnet man auch als „Probe“.

Wurzelgleichung

Gleichungen, bei denen die Unbekannte unter einer Wurzel vorkommt, versucht man durch Potenzieren zu lösen. Dabei ist Folgendes zu beachten:

(1) Vor dem Potenzieren isoliert man eine Wurzel.

(2) Wenn in der Gleichung mehrere Wurzelausdrücke vorkommen, muss man die Vorgehensweise wiederholen.

(3) Bei den durch Potenzieren berechneten Lösungen muss man unbedingt kontrollieren, ob sie tatsächlich die ursprüngliche Wurzelgleichung erfüllen.

Beispiel 1.20 (Wurzelgleichung)
Durch Quadrieren der Wurzelgleichung

$$\sqrt{8-2x} = 1 + \sqrt{5-x}\,\Big|^2 \implies 8-2x = \left(1+\sqrt{5-x}\right)^2 \implies 8-2x = 1+2\sqrt{5-x}+5-x$$

können wir eine der beiden Wurzeln beseitigen. Die verbleibende Wurzel isolieren wir nun und quadrieren nochmals:

$$2-x = 2\sqrt{5-x}\,\Big|^2 \implies (2-x)^2 = 4\,(5-x) \implies 4-4x+x^2 = 20-4x \implies x^2 = 16.$$

Der Test von $x_1 = 4$ in der ursprünglichen Wurzelgleichung

$$\underbrace{\sqrt{8-2\cdot 4}}_{0} = \underbrace{1+\sqrt{5-4}}_{2}$$

zeigt, dass $x_1 = 4$ keine Lösung ist. Beim zweiten Wert $x_2 = -4$ ergibt der Test

$$\underbrace{\sqrt{8-2\cdot(-4)}}_{4} = \underbrace{1+\sqrt{5-(-4)}}_{4}.$$

Somit ist $x_2 = -4$ die einzige Lösung. ■

1.5.5 Ungleichungen

Wenn Terme mit der Unbekannten x durch eines der Relationszeichen $<$, $\leq$, $>$ oder $\geq$ in Beziehung gesetzt werden, spricht man von einer Ungleichung. Die Bestimmung der Lösungen einer Ungleichung ist in der Regel aufwendiger und gestaltet sich unangenehmer als das Lösen von Gleichungen. Dafür gibt es zwei Gründe: Zum einen besteht die Lösungsmenge bei Ungleichungen im Allgemeinen nicht aus einzelnen Zahlenwerten, sondern aus ganzen Zahlenbereichen. Zum andern verändert die Multiplikation einer Ungleichung mit einem negativen Faktor das Relationszeichen.

Beispiel 1.21 (Multiplikation einer Ungleichung mit einem negativen Faktor)
Multiplikation der Ungleichung $2 < 3$ mit dem Faktor -1 ergibt $-2 > -3$:

$$2 < 3 \quad |\cdot(-1) \quad \implies \quad -2 > -3.$$

■

Multiplikation bei Ungleichungen

Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so dreht sich das Relationszeichen um:

- Aus $<$ wird $>$ und umgekehrt.
- Aus $\leq$ wird $\geq$ und umgekehrt.

Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einem Faktor, dessen Vorzeichen man nicht kennt, benötigt man eine Fallunterscheidung.

Es gibt eine zweite Umformung für Ungleichungen, bei der man aufpassen muss. Bildet man den Kehrwert einer Ungleichung, so kann sich das Relationszeichen umdrehen.

Kehrwert bei Ungleichungen

Wird der Kehrwert einer Ungleichung gebildet, bei der beide Seiten das gleiche Vorzeichen haben, so dreht sich das Relationszeichen um:

- Aus $<$ wird $>$ und umgekehrt.
- Aus $\leq$ wird $\geq$ und umgekehrt.

Haben beide Seiten der Ungleichung unterschiedliches Vorzeichen, so ändert die Kehrwertbildung das Relationszeichen nicht.

Beispiel 1.22 (Umformung von Ungleichungen)

a) Durch Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ ändert sich das Relationszeichen in folgender Ungleichung:

$$-2\,x < 8 \quad \Longrightarrow \quad x > -4.$$

b) Bei der Kehrwertbildung kommt es auf die Vorzeichen der linken und rechten Seite an:

$$2 < 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \quad -10 < -1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{10} > -1, \quad -4 < 3 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{4} < \frac{1}{3}.$$

■

Es gibt verschiedene Methoden, um Ungleichungen zu lösen. Wird die Lösungsmenge mithilfe von algebraischen Umformungen bestimmt, dann sind meistens Fallunterscheidungen notwendig. Es gibt auch grafische Methoden, bei denen die Lösungsmenge aus Schaubildern entsprechender Funktionen abgelesen wird. Wir präsentieren hier eine Methode, wie sie üblicherweise von Computeralgebrasystemen verwendet wird. Die Idee dabei besteht darin, anstelle der Ungleichung die entsprechende Gleichung zu lösen und die Lösungsbereiche durch gezieltes Testen einzelner Werte zu ermitteln.

Lösen einer Ungleichung

Zur Bestimmung der Lösung einer Ungleichung kann man folgendermaßen vorgehen:

(1) Bestimme diejenigen Werte, für welche die Ungleichung nicht definiert ist.

(2) Bestimme alle Lösungen der entsprechenden Gleichung.

(3) Identifiziere durch Testen geeigneter Werte diejenigen Bereiche, die zur Lösungsmenge gehören.

Beispiel 1.23 (Ungleichungen)

a) Die Ungleichung

$$-2\,x^2 + 4\,x < -6$$

ist für alle x-Werte definiert. Zur Bestimmung der Lösungsmenge berechnen wir zunächst die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$-2\,x^2 + 4\,x + 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{-4} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Jetzt testen wir die Bereiche für x-Werte, die kleiner als -1 sind, für x-Werte zwischen -1 und 3 und für x-Werte, die größer als 3 sind. Wir können beispielweise die Kandidaten $x = -2$, $x = 0$ und $x = 4$ testen:

$$\underbrace{-2\,(-2)^2 + 4\,(-2)}_{-16} < -6, \quad \underbrace{-2\,(0)^2 + 4\,(0)}_{0} < -6, \quad \underbrace{-2\,(4)^2 + 4\,(4)}_{-16} < -6.$$

Nur die beiden Kandidaten $x = -2$ und $x = 4$ haben den Test bestanden. Somit besteht die Lösungsmenge aus den beiden Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(3, \infty)$.

b) Die Ungleichung

$$\frac{2}{x-4} \leq \frac{1}{x+2}$$

ist für $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$ nicht definiert. Die entsprechende Gleichung hat genau eine Lösung:

$$\frac{2}{x-4} = \frac{1}{x+2} \quad\Longrightarrow\quad 2\,x + 4 = x - 4 \quad\Longrightarrow\quad x_3 = -8.$$

Für den Bereich kleiner als -8 wählen wir den Testkandidaten $x = -10$, zwischen -8 und -2 wählen wir $x = -4$, zwischen -2 und 4 wählen wir $x = 0$ und für den Bereich größer als 4 wählen wir $x = 6$. Durch Testen dieser Werte

$$\frac{2}{-10-4} \leq \frac{1}{-10+2}, \quad \frac{2}{-4-4} \leq \frac{1}{-4+2}, \quad \frac{2}{0-4} \leq \frac{1}{0+2}, \quad \frac{2}{6-4} \leq \frac{1}{6+2}$$

ergeben sich die beiden Lösungsintervalle $(-\infty, -8]$ und $(-2, 4)$. Dabei ist zu beachten, dass der Wert -8 zur Lösungsmenge gehört, die beiden Werte -2 und 4 jedoch nicht. ■

1.6 Beweise

Beweise bilden die Substanz der Mathematik. Jede neue Formel, jeder neue Satz wird aus bereits bekannten Aussagen hergeleitet. Diese Herleitungsprozesse nennt man auch Beweise. Dabei wird auch die Aussagenlogik eingesetzt, wie wir sie in *Abschnitt 1.1.1* kennengelernt haben. Die oftmals gefürchtete Strenge der Mathematik ergibt sich wesentlich daraus, dass jede Behauptung zunächst bewiesen werden muss, ehe sie den Status einer Regel oder eines Satzes bekommt. *David Hilbert* war ein Vertreter des strengen Formalismus in der Mathematik. Alle Aussagen sollen widerspruchsfrei bewiesen oder widerlegt werden können. Prinzipiell gibt es verschiedene Varianten der Beweisführung.

Die folgenden Ausführungen sind im Vergleich mit den bisherigen Abschnitten etwas anspruchsvoller. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die Beweistechnik hier im Wesentlichen zur Illustration des mathematischen Denkens vorgestellt wird. Wir werden im weiteren Verlauf nicht alle Sätze streng beweisen, sondern oftmals nur anschaulich plausibel machen.

1.6.1 Direkter Beweis

Am einfachsten ist der direkte Beweis. Aus mehreren bekannten Aussagen A_1 bis A_m wird eine neue Aussage B direkt durch Implikation abgeleitet:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \quad \Longrightarrow \quad B.$$

Hier wird nochmals deutlich, dass insbesondere die Aussagenlogik eine zentrale Rolle in der Mathematik spielt.

Beispiel 1.24 (Direkter Beweis)
Wir betrachten die Behauptung

„Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade.“

Ist n eine ungerade Zahl, so hat sie die Form $n = 2m + 1$, wobei m eine ganze Zahl ist. Für das Quadrat gilt dann

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1.$$

Also ist n^2 wegen dieser Darstellung ebenfalls ungerade. Wir haben die Behauptung direkt aus bekannten Tatsachen, hier der Binomischen Formel, hergeleitet. ■

1.6.2 Indirekter Beweis

Beim indirekten Beweis nimmt man zunächst das Gegenteil der Behauptung B, also $\neg B$ an. Daraus stellt man einen Widerspruch $\neg A_k$ zu bekannten Aussagen A_1 bis A_m her:

$$\neg B \quad \Longrightarrow \quad \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_m.$$

Somit kann die Annahme, also das Gegenteil der Behauptung $\neg B$ nicht richtig sein. Folglich ist die Behauptung B selbst wahr.

Beispiel 1.25 (Indirekter Beweis)
Wir wollen die Behauptung

„Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.“

beweisen. Dazu nehmen wir zunächst das Gegenteil der Behauptung an. Falls also $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann lässt sie sich als Bruch $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ darstellen. Diese Darstellung kann so gewählt werden, dass sie gekürzt ist. Das heißt, n und m haben abgesehen von der Zahl 1 keine weiteren gemeinsamen Teiler mehr. Durch Quadrieren entsteht

$$2 = \frac{n^2}{m^2} \qquad \Longrightarrow \qquad n^2 = 2m^2.$$

Das bedeutet, dass n^2 eine gerade Zahl ist. Nun ist aber laut *Beispiel 1.24* das Quadrat einer ungeraden Zahl stets ungerade. Somit ist n selbst ebenfalls gerade, also etwa $n = 2p$. Daraus folgt

$$n^2 = 4p^2, \quad n^2 = 2m^2 \qquad \Longrightarrow \qquad m^2 = 2p^2.$$

Wie eben können wir schließen, dass m^2 und damit auch m selbst gerade sein muss. Nun haben wir die Aussagen, dass sowohl n als auch m eine gerade Zahl ist. Dann kann man aber den Bruch $\frac{n}{m}$ mit 2 kürzen. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\frac{n}{m}$ gekürzt ist. Damit ist die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, nicht wahr. Die Zahl $\sqrt{2}$ muss irrational sein. ■

1.6.3 Konstruktiver Beweis

Eine spezielle Form des direkten Beweises ist der konstruktive Beweis. Hier wird nicht nur die Existenz und Wahrheit einer neuen Aussage B bewiesen, sondern Schritt für Schritt gezeigt, wie man aus den bekannten Aussagen A_1 bis A_m zur Aussage B kommt. Die neue Aussage B ist also zu Beginn des Beweises nicht bekannt. Sie kann zur Beweisführung nicht eingesetzt werden. Sie wird erst im Lauf des Beweises konstruiert.

Beispiel 1.26 (Konstruktiver Beweis)

Wir betrachten die Behauptung

„Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar."

Ganz allgemein heißt eine Menge abzählbar, wenn man ihre Elemente derart anordnen kann, dass jeder natürlichen Zahl genau ein Element entspricht. Wie müssen also zeigen, dass alle Brüche in eine abzählbare Reihenfolge gebracht werden können. Wie kann eine solche Reihenfolge aussehen? Wir betrachten zunächst nur die positiven Brüche, also $\mathbb{Q}^+$.

In einer Tabelle schreiben wir den Zähler n nach rechts und den Nenner m nach unten. In dieser Tabelle mit unendlich vielen Zeilen und Spalten sind alle positiven Brüche enthalten. Man beginnt links oben und durchläuft anschließend in diagonaler Richtung von rechts oben nach links unten und umgekehrt. Dabei kommt man an jedem Bruch vorbei. Es kommen zwar auch Brüche vor, die dieselbe Zahl darstellen, wie etwa $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$. Trotzdem kann man auf diese Weise alle Brüche in einer Reihe anordnen. Diese Idee der Diagonalisierung geht auf *Georg Cantor* zurück.

$m \backslash n$	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\cdots$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\cdots$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Möchte man die negativen Brüche auch einbauen, so fügt man unmittelbar nach jedem positiven Bruch den entsprechenden negativen ein. Damit kann ganz $\mathbb{Q}$ angeordnet werden. Die Menge ist also abzählbar. Wohl gemerkt: Abzählbar heißt nicht endlich. Es dürfen schon unendlich viele Zahlen sein. Sie müssen nur in eine Reihenfolge gebracht werden können. Mit der Menge $\mathbb{R}$ gelingt dies nicht mehr. Sie ist überabzählbar. ■

1.6.4 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion kann nur bei speziellen Behauptungen eingesetzt werden, nämlich bei Behauptungen der Art

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \quad \Longrightarrow \quad B_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Die rechte Seite der Behauptung B besteht also aus einer ganzen Folge von Teilbehauptungen B_n. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ muss die Aussage B_n bewiesen werden. Dazu startet man beim sogenannten Induktionsanfang B_0. Die Aussage B_0 wird direkt gezeigt. Anschließend zeigt man in einem Induktionsschritt, dass B_{n+1} immer dann gilt, wenn B_n wahr ist. Auf diese Art und Weise hangelt man sich von n zu $n+1$. Wesentlich dabei ist, dass der Induktionsschritt nur einmal, dafür aber mit allgemeinem Index n, durchgeführt wird.

Auf den ersten Blick kommt einem das Induktionsprinzip wie eine Art Mogelpackung nach Art von Baron Münchhausen vor, bei dem er sich selbst am Schopf aus dem Sumpf zieht. Genauer betrachtet täuscht dieser erste Eindruck. Das Induktionsprinzip ist eine in der Mathematik anerkannte Beweismethode, die sich treffender mit dem Domino-Effekt vergleichen lässt. Man stößt den ersten Stein $n = 0$ um und mit jedem fallenden Stein n wird auch der Stein $n+1$ umgestoßen.

Das Induktionsprinzip mit Induktionsanfang und Induktionsschritt ist erstmals 1654 bei *Blaise Pascal* und 1659 bei *Pierre de Fermat* zu finden. *August De Morgan* und *Richard Dedekind* prägten den Begriff der vollständigen Induktion. Für die geschichtliche Entwicklung der Mathematik ist das Induktionsprinzip von großer Bedeutung. Es inspirierte *Giuseppe Peano* Ende des 19. Jahrhunderts zum Axiomensystem der natürlichen Zahlen.

Beispiel 1.27 (Summenformel von Maurolicus)

Wenn man die Summen der ungeraden Zahlen betrachtet

$$1+3=4, \quad 1+3+5=9, \quad 1+3+5+7=16, \quad 1+3+5+7+9=25,$$

dann fällt auf, dass die Ergebnisse Quadratzahlen sind. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Prinzip generell gilt. Man könnte zur Überprüfung der Vermutung noch ein paar weitere Tests für die Summe der ersten sechs, sieben, acht oder sogar hundert ungeraden Zahlen durchführen. Aus mathematischer Sicht klärt das die Frage aber nicht endgültig. Der italienische Mathematiker *Franciscus Maurolicus* hat bereits vor über 500 Jahren einen Beweis dieser Vermutung veröffentlicht und gilt damit als Wegbereiter für das Prinzip der vollständigen Induktion. Die Behauptung B, die wir beweisen möchten, lautet:

$$B: \text{Für alle natürlichen Zahlen } n \text{ ergibt die Summe der ersten } n \text{ ungeraden Zahlen } n^2.$$

Diese Behauptung passt zum Prinzip der vollständigen Induktion, denn sie besteht aus einer Folge von Teilbehauptungen:

$$B_n: \text{Die Summe der ersten } n \text{ ungeraden Zahlen ergibt } n^2.$$

Mathematisch formuliert sieht das dann so aus:

$$B_n: 1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

Zum Beweis durch vollständige Induktion beginnt man mit dem Induktionsanfang:

$$B_0 : 0 = 0^2,$$

der natürlich richtig ist. Beim Induktionsschritt betrachten wir die Behauptung für $n+1$:

$$B_{n+1} : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2.$$

Die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen zerlegen wir in zwei Teile:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1)}_{\text{erste } n \text{ ungerade Zahlen}} \quad + \quad \underbrace{2n+1.}_{\text{letzte ungerade Zahl}}$$

Da wir beim Induktionsschritt davon ausgehen, dass die Behauptung B_n richtig ist, können wir die ersten n ungeraden Zahlen zu n^2 zusammenfassen:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1)}_{n^2} + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Somit ist die Behauptung auch für $n+1$ richtig und der Beweis nach dem Prinzip der vollständigen Induktion abgeschlossen. ∎

Beispiel 1.28 (Ungleichung von Oresme)

Wir weisen die Ungleichung

$$B_n : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

mittels vollständiger Induktion nach. Diese Ungleichung findet man bereits in Arbeiten von *Nikolaus von Oresme* aus dem 14. Jahrhundert. Der Induktionsanfang, also die Behauptung für $n = 0$, ist leicht gezeigt. Die Summe auf der linken Seite besteht dann nur aus einer Zahl:

$$B_0 : \frac{1}{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2}.$$

Nun müssen wir im Induktionsschritt zeigen, dass aus der Ungleichung für n die Ungleichung für $n+1$ folgt. Typischerweise setzt man dazu die Behauptung für $n+1$ an und formt so um, dass man die sogenannte Induktionshypothese, also die Aussage für n, einsetzen kann:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 1 + \frac{n}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1}}_{\geq \frac{1}{2^n + 2^n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^n+2^n}}_{\geq \frac{1}{2^n + 2^n}}.$$

Dabei benutzen wir $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n$. Jetzt setzen wir die Induktionshypothese ein und verkleinern die zweite Hälfte der Terme auf der rechten Seite, indem wir ihre Nenner vergrößern:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n + 2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n + 2^n}.$$

Dadurch entsteht insgesamt 2^n mal der gleiche Bruch. Diese Brüche lassen sich zusammenfassen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^n + 2^n} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Damit ist ausgehend von der Behauptung für n auch die Behauptung für $n+1$ gezeigt. Diese Ungleichung werden wir bei der harmonischen Reihe in *Abschnitt 10.1* anwenden. ∎

1.7 Aufgaben

Verständnisaufgaben

Aufgabe 1.1

Welche der Zahlen 0, -2, 0.815, $\sqrt{2}$, $\frac{51}{17}$, $-\frac{47}{11}$ gehören zu folgenden Mengen?

a) reelle Zahlen b) rationale Zahlen c) ganze Zahlen d) natürliche Zahlen

Aufgabe 1.2

Stellen Sie die rationalen Zahlen $\frac{1}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{4711}{9999}$ als Dezimalzahlen dar. Verwenden Sie dabei keinen Taschenrechner.

Aufgabe 1.3

Ordnen Sie die Zahlen $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{23}{70}$, $\frac{34}{105}$ der Größe nach, und zwar ohne Taschenrechner.

Aufgabe 1.4

Geben Sie die Zahlenmenge mit folgender Beschreibung in Intervallschreibweise an.

a) Alle reellen Zahlen außer der 7.

b) Alle reellen Zahlen, aber nicht die Zahlen zwischen -3 und 2 einschließlich.

c) Alle reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 6 oder größer als 8 sind.

d) Alle reellen Zahlen größer gleich -3, aber nicht zwischen 3 und 4 ausschließlich.

Aufgabe 1.5

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke.

a) $2 \cdot (-3)$ b) $-2 \cdot (-3)$ c) $(-2) \cdot (-3)$

d) $3 - 5 \cdot (-3)$ e) $(-2) + (-5) \cdot (-1)$ f) $3 \cdot (-5) - 6 \cdot (-4)$

g) -3^2 h) $(-3)^2 - (-2)^3$ i) $(-5)^2 - 2^3 + (-2)^3 + 12$

Aufgabe 1.6

Richtig oder falsch? Der Wurzelausdruck $\sqrt{a^2 - b^2}$

a) ist nicht definiert, b) kann zu $a - b$ vereinfacht werden,

c) kann zu $|a - b|$ vereinfacht werden, d) kann zu $|a| - |b|$ vereinfacht werden,

e) kann zu $\pm|a - b|$ vereinfacht werden, f) wird niemals negativ.

Aufgabe 1.7

Richtig oder falsch? Die Gleichung $\sqrt{(-x)^2} = 2$

a) ist nicht definiert, b) besitzt keine reelle Lösung,

c) hat die Lösung $x = -2$, d) hat nur eine Lösung, nämlich $x = -2$,

e) besitzt die Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$, f) ist nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe 1.8

Welche Steigung hat die Gerade, die die Normalparabel $y = x^2$ für $x = -3$ und $x = 1$ schneidet?

Rechenaufgaben

Aufgabe 1.9

Gegeben sind die folgenden Zahlenmengen:

$$A = (-2, 1], \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}, \quad C = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}.$$

Bestimmen Sie die folgenden zusammengesetzten Mengen.

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cap C$ c) $A \cup D$

Aufgabe 1.10

Klammern Sie möglichst viele gemeinsame Faktoren aus.

a) $8\,x - 4\,z$
b) $6\,x + 12\,y - 3\,z$
c) $10\,x^2\,y + 5\,x\,y^2$
d) $12\,x^3\,y^4 - 3\,x\,y^2$
e) $9\,x^3\,y\,z^2 - 12\,x^2\,y^3\,z + 3\,x\,y^2\,z^3$
f) $6\,x^5\,z^4 - 12\,x^2\,y^2\,z^3 + 72\,x^2\,y^2\,z^2$

Aufgabe 1.11

Multiplizieren Sie folgende Terme mithilfe der binomischen Formeln aus und fassen Sie anschließend zusammen.

a) $\left(x - y^3\right)^2$
b) $\left(x^2 + 2\,y\right)^2$
c) $(x + y)^2 - (x - y)^2$
d) $(4\,x + 2\,y)^2 - (4\,x - 2\,y)^2$
e) $\left(2\,y - x^2\right)^2 - \left(x^2 + y\right)^2$
f) $\left(x^3 - y^2\right)^2 + \left(x^2 - 2\,y^3\right)^2$

Aufgabe 1.12

Formen Sie die Terme mithilfe der binomischen Formeln um.

a) $x^2 + 2\,x + 1$
b) $9\,y^2 + 6\,y + 1$
c) $4\,x^2 - 8\,x + 4$
d) $9\,x^2 - 24\,x\,y + 16\,y^2$
e) $16\,x^2 - 4\,y^2$
f) $-\left(x^2 - 1\right)\left(4\,x - 9\,x^3\right)$

Aufgabe 1.13

Welche natürlichen Zahlen werden durch die folgenden Terme dargestellt?

a) $2^5 \cdot 4 \cdot 2^{-3}$ b) $5 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{13}$ c) $3 \cdot 3^{-2} \cdot 9 \cdot 3^3$

Aufgabe 1.14

Welche rationalen Zahlen werden durch die folgenden Terme dargestellt?

a) $(2^2)^3$ b) $(-2^2)^3$ c) $((-2)^2)^3$
d) $(2^{-2})^3$ e) $(-2^{-2})^3$ f) $(2^2)^{-3}$

Aufgabe 1.15

Vereinfachen Sie folgende Brüche mit Potenzen.

a) $\dfrac{x^5}{x^2}$ b) $\dfrac{x^5}{x^{-2}}$ c) $\dfrac{x^{-5}}{x^2}$
d) $\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)}$ e) $\dfrac{(a+b)}{(a+b)^3}$ f) $\dfrac{(a+b)^{-2}}{(a+b)}$
g) $\dfrac{x^{n+2}}{x^{n-2}}$ h) $\dfrac{x^{2n}}{x^n}$ i) $\dfrac{x^n}{x^{3n-3}}$

Aufgabe 1.16

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Ausklammern und Anwenden der Potenzgesetze.

a) $\dfrac{26\cdot 5^n - 5^n}{5^{n+2}}$ b) $\dfrac{x^n + 2x^{n-1}}{x^{n-2} + 2x^{n-3}}$ c) $\left(\dfrac{a^2\,b}{c\,d^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{c^2\,d^2}{a\,b^2}\right)^4$

Aufgabe 1.17

Berechnen Sie folgende Wurzeln.

a) $\sqrt{7^2}$ b) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$ c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

Aufgabe 1.18

Vereinfachen Sie folgende Wurzelterme durch teilweises Wurzelziehen.

a) $\sqrt{4\,x^2\,y}$ b) $\sqrt{\dfrac{2x^2}{36}}$ c) $\sqrt{x(4x^2-4x+1)y}$

Aufgabe 1.19

Berechnen Sie aus den folgenden Längen der Katheten a und b jeweils die Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck.

a) $a = 3,\ b = 4$ b) $a = 5,\ b = 12$ c) $a = 6,\ b = 8$

Aufgabe 1.20

Rechnen Sie folgende Winkel vom Gradmaß in das Bogenmaß um.

a) $\alpha = 30\,^\circ$ b) $\alpha = -150\,^\circ$ c) $\alpha = 270\,^\circ$

Aufgabe 1.21

Bestimmen Sie die Werte der trigonometrischen Ausdrücke für die gegebenen Winkel.

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(\dfrac{5\,\pi}{6}\right)$ d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ g) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ h) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Aufgabe 1.22

Bestimmen Sie die Winkel α zwischen $0\,^\circ$ und $90\,^\circ$ für die gegebenen trigonometrischen Werte.

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ c) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\tan\alpha = \sqrt{3}$

e) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ f) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Aufgabe 1.23

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $2\,x^2 - 12\,x + 18 = 0$ c) $-3\,x^2 + 12\,x - 15 = 0$

Aufgabe 1.24

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden biquadratischen Gleichungen.

a) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$ b) $-2\,x^4 - 6\,x^2 + 8 = 0$ c) $3\,x^4 - 24\,x^2 + 48 = 0$

Aufgabe 1.25
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Wurzelgleichungen.

a) $1 - \sqrt{2\,x+3} = x$ b) $\sqrt{3\,x\;(x-2)} + 2 = x$ c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-3\,x} = 2$

Aufgabe 1.26
Berechnen Sie die folgenden Beträge.

a) $|4-8|$ b) $|-6+2|$ c) $|3-5+(-8)|$
d) $\left|2^2-3^2\right|$ e) $\left|(-4)^2-20\right|$ f) $\left|2-(-3)^2+(-2)^3\right|$

Aufgabe 1.27
Stellen Sie den Ausdruck $\left|-3x^2+3x+6\right|$ durch Fallunterscheidung ohne Betragszeichen dar.

Aufgabe 1.28
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $|2-5\,x| = 3$ b) $|2+x| = 4\,x-1$ c) $|x^2-4| = 5$

Aufgabe 1.29
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Ungleichungen.

a) $3x < 5$ b) $-4x > 2x - 2$ c) $8(x-2) > -3(x+1)$

Aufgabe 1.30
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Ungleichungen.

a) $3x^2 < 12$ b) $-4x^2 \geq 2x-2$ c) $8(x-2) > -2(x+1)^2$
d) $x^2 - x < 20$ e) $x^2+8x \leq -16$ f) $10x^2+21 < 41x$

Aufgabe 1.31
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\big||x|-1\big| < x$.

Aufgabe 1.32
Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum\limits_{k=1}^{5} k^2$ b) $\sum\limits_{k=-1}^{3} 2^{k-1}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k+1}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{(k+1)}{k^2}$

Aufgabe 1.33
Wir betrachten die Summen der geraden Zahlen

$$2+4=6,\quad 2+4+6=12,\quad 2+4+6+8=20,\quad 2+4+6+8+10=30,\quad \ldots$$

Ermitteln Sie eine einfache Formel für die Summe der geraden Zahlen und beweisen Sie diese Formel auf möglichst viele unterschiedliche Arten.

Aufgabe 1.34
Wenn man eine natürliche Zahl hoch drei nimmt und davon diese natürliche Zahl abzieht,

$$2^3-2=6,\quad 3^3-3=24,\quad 4^3-4=60,\quad 5^3-5=120,\quad \ldots$$

dann fällt auf, dass das Ergebnis durch 3 teilbar ist. Beweisen Sie auf möglichst viele unterschiedliche Arten, dass das für alle natürlichen Zahlen richtig ist.

Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1.35

Bei der Parallelschaltung der beiden Widerstände R_1 und R_2 gilt für den Gesamtwiderstand R_{ges}

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Lösen Sie die Formel nach R_{ges} auf. Welchen Gesamtwiderstand erzeugt eine Parallelschaltung mit den beiden Widerständen $R_1 = 2\,\Omega$ und $R_2 = 3\,\Omega$?

Aufgabe 1.36

Der elektrische Widerstand R eines Leiters hängt von der Temperatur T ab. Näherungsweise gilt der Zusammenhang $R = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$. Dabei ist R_0 der Widerstand bei der Temperatur T_0 und α der sogenannte Temperaturkoeffizient. Lösen Sie die Formel nach T auf.

Aufgabe 1.37

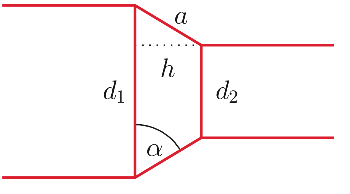
Drei Oldtimerfans fahren bei einer Ausfahrt hintereinander. Der hintere sieht die beiden vorderen, der mittlere sieht nur den vorderen und der vordere sieht niemanden. Alle drei wissen, dass sie ein bestimmtes Oldtimermodell fahren, von dem noch genau 5 Fahrzeuge existieren: Zwei mit einer silbernen und drei mit einer schwarzen Heckklappe. Nun wird der hintere Fahrer gefragt, ob er die Farbe seiner Heckklappe kenne. Er antwortet „Nein“. Dann wird der mittlere Fahrer dasselbe gefragt. Auch er sagt „Nein“. Schließlich wird der vordere Fahrer gefragt. Was antwortet er?

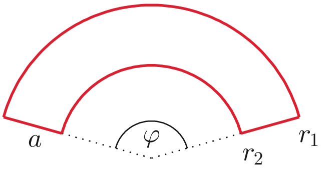
Aufgabe 1.38

Ein Parkassistenzsystem eines Fahrzeugs besteht aus zwei Ultraschallsensoren im vorderen Stoßfänger, die einen Abstand d zueinander haben. Ultraschallsensoren bestimmen aufgrund ihres Messprinzips nur den radialen Abstand, also die Entfernung zu einem Hindernis, nicht aber die Richtung. Wie groß ist der Abstand a zwischen einem punktförmigen Hindernis, das sich vor dem Fahrzeug befindet und dem vorderen Stoßfänger, wenn die beiden Sensoren die radialen Abstände a_1 und a_2 messen?

Aufgabe 1.39

Zwischen zwei zylindrische Rohre mit den Durchmessern $d_1 = 30\,\text{cm}$ und $d_2 = 20\,\text{cm}$ soll ein Reduzierstück in Form einer Kegelstumpfoberfläche mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ eingesetzt werden. Das Reduzierstück soll aus einem ebenen Stück Blech geschnitten und anschließend geformt werden. Der Blechzuschnitt hat die Form eines Kreisringsegments. Die Blechdicke wird für den Zuschnitt vernachlässigt.





a) Bestimmen Sie den äußeren Radius r_1, den inneren Radius r_2, die Höhe a und den Winkel φ des Kreisringsegments.

b) Bestimmen Sie den Winkel α, der die Steigung des Reduzierstücks beschreibt.

c) Für welchen Grenzwinkel α_0 hat das Kreisringsegment gerade den Öffnungswinkel $\varphi_0 = \pi$?

d) Welche Oberfläche hat das Reduzierstück?

2 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme haben sich zum Lieblingsspielzeug der Mathematiker entwickelt. Viele wesentliche theoretische Fragestellungen, die lineare Gleichungssysteme betreffen, sind gelöst. In den letzten Jahrzehnten wurden Verfahren entwickelt, mit denen man selbst lineare Gleichungssysteme mit weit über einer Million Unbekannten mit Computerprogrammen stabil und effizient lösen kann. Das Lösen linearer Gleichungssysteme bildet die Basis für viele Berechnungsverfahren, wie beispielsweise Crash-Simulation oder Strömungssimulation. Auch die Finite-Elemente-Methode führt die Problemstellung auf das Lösen linearer Gleichungssysteme zurück. Ströme in elektrischen Netzwerken und Kräfte in mechanischen Konstruktionen werden durch lineare Gleichungssysteme berechnet. Verfahren zur Bewertung von Internetseiten durch Internetsuchmaschinen und die Wettervorhersage basieren ebenfalls auf linearen Gleichungssystemen. Nichtlineare Gleichungen werden oftmals dadurch gelöst, dass man sie iterativ durch lineare Gleichungssysteme annähert.

In Computerprogrammen werden lineare Gleichungssysteme in der Regel durch Matrizen dargestellt. In diesem Kapitel betrachten wir lineare Gleichungssysteme jedoch ohne dabei auf die Darstellung mit Matrizen zurückzugreifen. Den Zusammenhang zwischen linearen Gleichungssystemen und Matrizen stellen wir in *Kapitel 4* her.

2.1 Einführung

In *Abschnitt 1.5* haben wir Problemstellungen betrachtet, bei denen eine einzige Unbekannte x in einer einzigen Gleichung oder Ungleichung vorkommt. Jetzt betrachten wir Probleme mit mehreren Unbekannten und mehreren Gleichungen. Dabei beschränken wir uns aber auf ganz spezielle Typen von Gleichungen, nämlich lineare Gleichungen.

Beispiel 2.1 (Lineares Gleichungssystem)

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 \\ 3\,x_1 & - & 8\,x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & - & 2\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

besteht aus 3 Gleichungen mit den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3. Jede Gleichung wird durch drei Koeffizienten vor den Unbekannten und durch einen Koeffizient auf der rechten Seite dargestellt. Insgesamt enthält das System $3 \cdot 3 = 9$ Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichheitszeichen und 3 Koeffizienten auf der rechten Seite. ■

Bei einem linearen Gleichungssystem kommen die Unbekannten jeweils nur in der ersten Potenz vor. Somit lassen sich lineare Gleichungssysteme immer auf dieselbe Art strukturiert darstellen. Wir betrachten lineare Gleichungssysteme immer in der Form, dass alle Unbekannten auf der linken Seite der Gleichheitszeichen stehen. In jeder einzelnen Gleichung stellen wir die Unbekannten in derselben Reihenfolge dar. Auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen steht jeweils nur ein einziger Koeffizient, der auch null sein kann. Die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten muss nicht übereinstimmen.

Definition 2.1 (Lineares Gleichungssystem)

Ein System aus m Gleichungen mit n Unbekannten x_1, x_2, ..., x_n in der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

nennt man ein **lineares Gleichungssystem** (LGS). Die Zahlen a_{ij} sind die **Koeffizienten**, b_1, b_2, ..., b_m bezeichnet man als **Absolutglieder** oder rechte Seite.

Die Koeffizienten a_{ij} eines linearen Gleichungssystems bilden eine Tabellenstruktur mit m Zeilen und n Spalten. Üblicherweise bezeichnet der erste Index i die Zeile und der zweite Index j die Spalte. Insgesamt wird ein lineares Gleichungssystem durch $m \cdot n$ Koeffizienten und m Absolutglieder beschrieben.

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht aus allen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n, bei denen alle m Gleichungen erfüllt sind.

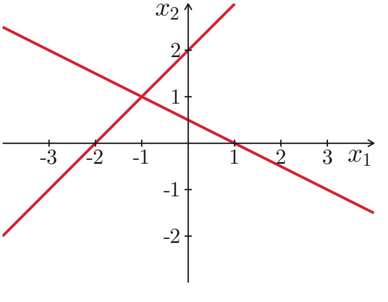
Ohne genaue Untersuchung eines linearen Gleichungssystems kann man nicht entscheiden, ob es überhaupt eine Lösung gibt. Die speziellen Situationen, die beim Lösen linearer Gleichungssysteme auftreten können, zeigen sich bereits bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Bei zwei Unbekannten kann man jede Gleichung als Gleichung einer Geraden interpretieren. Anschaulich besteht die Lösungsmenge aus allen Punkten, die auf beiden Geraden liegen. Einzelheiten zu Punkten und Geraden findet man in *Abschnitt 3.4*.

Beispiel 2.2 (Grafische Lösung eines linearen Gleichungssystems)

a) Die beiden Gleichungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & -2 \end{array}$$

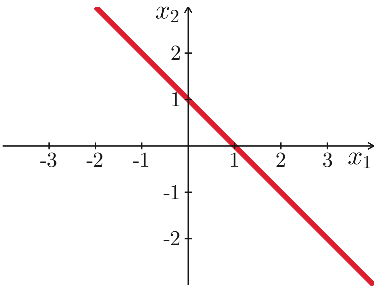
stellen jeweils eine Geradengleichung dar. Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt mit den Koordinaten $(-1\,|\,1)$. Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.



b) Bei dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{array}$$

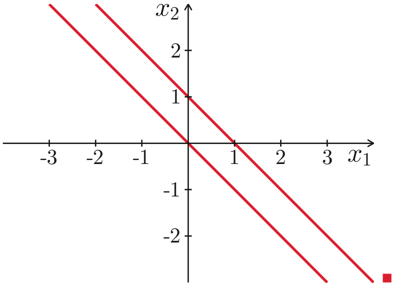
liegt eine Sondersituation vor. Anschaulich handelt es sich um zwei identische Geraden. Es gibt also unendlich viele Lösungen, die wir in der Form $x_1 = t$ und $x_2 = 1 - t$ mit einem reellen Parameter t darstellen können.



c) Eine weitere Sondersituation ergibt sich für das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}$$

Die entsprechenden Geraden sind unterschiedlich, verlaufen aber parallel. Dieses lineare Gleichungssystem hat überhaupt keine Lösung.



Satz 2.1 (Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems)
Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems sind grundsätzlich nur drei verschiedene Fälle möglich. Das lineare Gleichungssystem hat entweder

- gar keine Lösung,
- eine eindeutige Lösung oder
- unendlich viele Lösungen.

Auf den ersten Blick wird gar nicht richtig klar, worin die eigentliche Aussage von *Satz 2.1* besteht. Eine zentrale Eigenschaft von linearen Gleichungssystemen besteht darin, dass es keine, eine einzige oder ansonsten gleich unendlich viele Lösungen gibt. Es gibt also kein lineares Gleichungssystem, das beispielsweise genau zwei oder genau drei Lösungen besitzt. Kennt man von einem Gleichungssystem zwei unterschiedliche Lösungen, dann kann man sicher sein, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

2.2 Gauß-Algorithmus

Aufgrund von Überlieferungen gehen Historiker davon aus, dass chinesische Gelehrte zu Zeiten von Lao-Tse, also bereits im sechsten Jahrhundert vor Christus, in der Lage waren, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Heute kennt man eine ganze Reihe unterschiedlicher Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Ein Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist nach dem deutschen Mathematiker *Johann Carl Friedrich Gauß* benannt. Das Gaußsche Eliminationsverfahren funktioniert für beliebige lineare Gleichungssysteme. Mit ihm kann man alle Lösungen systematisch berechnen. Außerdem ist das Verfahren in der Lage zu erkennen, ob es keine Lösung gibt oder ob es unendlich viele Lösungen gibt.

2.2.1 Äquivalenzumformungen

Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist ein sogenanntes direktes Lösungsverfahren. Bei einem direkten Verfahren wird das ursprüngliche Gleichungssystem Schritt für Schritt so lang umgeformt, bis die gesuchten Größen einfach berechnet werden können. Bei den Umformungen muss sichergestellt sein, dass man weder Lösungen verliert noch zusätzliche Lösungen generiert. Mit anderen Worten: Jedes umgeformte lineare Gleichungssystem muss dieselbe Lösungsmenge wie das ursprüngliche System besitzen. Genau wie bei Gleichungen mit einer Unbekannten bezeichnet man solche Umformungen als Äquivalenzumformungen, siehe *Abschnitt 1.5*.

Äquivalenzumformungen für lineare Gleichungssysteme

Algebraische Umformungen, die die Lösungsmenge unverändert lassen, bezeichnet man als **Äquivalenzumformungen**. Bei linearen Gleichungssystemen sind folgende Operationen Äquivalenzumformungen:

- Zwei Gleichungen dürfen miteinander vertauscht werden.
- Jede Gleichung darf mit einem beliebigen Faktor ungleich null multipliziert werden.
- Zu jeder Gleichung darf eine beliebige andere Gleichung addiert werden.

Beispiel 2.3 (Äquivalenzumformungen)

Wenn wir beim linearen Gleichungssystem aus *Beispiel 2.1* die erste Zeile mit dem Faktor (-3) multiplizieren und das Ergebnis zu der zweiten Zeile addieren

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 & |\cdot(-3) \\ 3\,x_1 & - & 8\,x_2 & - & x_3 & = & 9 & \longleftarrow \\ 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & - & 2\,x_3 & = & 1 & \end{array}$$

erhalten wir das neue Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 \\ & - & 5\,x_2 & - & 16\,x_3 & = & -27 \\ 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & - & 2\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

Das ursprüngliche lineare Gleichungssystem und das neue lineare Gleichungssystem besitzen dieselben Lösungen. ■

2.2.2 Vorwärtselimination

Die Krux bei linearen Gleichungssystemen besteht darin, dass in der Regel jede einzelne Gleichung eine Beziehung zwischen allen Unbekannten darstellt. Wenn es uns gelingt, diese Koppelung zu entzerren, dann sind wir in der Lage, das System Stück für Stück zu lösen. Beim Gaußschen Eliminationsverfahren versucht man deshalb im ersten Schritt, die erste Unbekannte x_1 aus der zweiten bis zur letzten Gleichung zu eliminieren. Im zweiten Schritt versucht man das System so zu staffeln, dass die erste Unbekannte x_1 nur in der ersten Gleichung vorkommt und die zweite Unbekannte x_2 nur in der ersten und in der zweiten Gleichung vorkommt. Bei einem System mit n Gleichungen und n Unbekannten ist das Ziel ein System, bei dem die letzte Zeile schließlich nur noch von der letzten Unbekannten x_n abhängt.

Lineares Gleichungssystem in Dreiecksform

Die wesentliche Idee beim Gaußschen Eliminationsverfahren besteht darin, das lineare Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen in Dreiecksform zu bringen. In Dreiecksform enthält das Gleichungssystem unterhalb der Diagonalen keine Einträge.

Den Begriff „Diagonale“ müssen wir bei Gleichungssystemen, bei denen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten nicht übereinstimmen, großzügig interpretieren. Die Diagonale besteht aus allen Koeffizienten a_{ij}, bei denen der Zeilenindex i mit dem Spaltenindex j übereinstimmt. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Anzahl der Gleichungen kleiner, gleich oder größer der Anzahl der Unbekannten ist.

Die Gauß-Elimination transformiert ein lineares Gleichungssystem normalerweise auf die sogenannte obere Dreiecksform, bei der unterhalb der Diagonalen keine Einträge stehen. Prinzipiell genauso denkbar, aber wenig verbreitet ist eine Transformation auf die untere Dreiecksform, bei der entsprechend oberhalb der Diagonalen alle Einträge null sind.

Für das Ergebnis nach der Gauß-Elimination ist auch der Begriff Zeilenstufenform gebräuchlich. Er deutet an, dass die Zeilen von oben nach unten betrachtet immer mehr führende Nullen enthalten. Anschaulich entsteht eine gestufte Form des Gleichungssystems. Dabei kann es durchaus auch vorkommen, dass eine Stufe breiter als nur ein Element ist. Wir werden diesen Spezialfall nochmals in *Abschnitt 2.3* diskutieren.

Beispiel 2.4 (Vorwärtselimination)

Beim linearen Gleichungssystem aus *Beispiel 2.1* wählen wir die erste Zeile als sogenannte Pivotzeile. Der Begriff „Pivot“ steht hier für Dreh- oder Angelpunkt. Wenn wir die Pivotzeile mit -3 multiplizieren und zur zweiten Zeile addieren, wird x_1 aus der zweiten Zeile eliminiert. Um x_1 aus der dritten Zeile zu eliminieren, multiplizieren wir die Pivotzeile mit -10 und addieren sie zur dritten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcrll}
x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 & |\cdot(-3) & |\cdot(-10) \\
3\,x_1 & - & 8\,x_2 & - & x_3 & = & 9 & \longleftarrow & \\
10\,x_1 & + & 5\,x_2 & - & 2\,x_3 & = & 1 & & \longleftarrow
\end{array}$$

Nun wählen wir die zweite Zeile als Pivotzeile. Die Pivotzeile mit 3 multipliziert eliminiert x_2 aus der letzten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 & \\ & - & 5\,x_2 & - & 16\,x_3 & = & -27 & |\cdot(3) \\ & & 15\,x_2 & - & 52\,x_3 & = & -119 & \longleftarrow \end{array}$$

Alle Elemente unterhalb der Diagonale sind nun eliminiert. Das Gleichungssystem besitzt die gewünschte Dreiecksform:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 \\ & - & 5\,x_2 & - & 16\,x_3 & = & -27 \\ & & & - & 100\,x_3 & = & -200 \end{array}$$

■

Die in *Beispiel 2.4* verwendete Strategie mit Pivotzeilen führt in aller Regel zum gewünschten Ziel. Man kann aber nicht garantieren, dass man ausschließlich mit dieser Vorgehensweise immer eine Dreiecksform erzielt. Teilweise ist eine trickreiche Variante erforderlich, bei der man unter Umständen die Reihenfolge der Unbekannten vertauschen muss. Einzelheiten dazu findet man beispielsweise bei [Golub].

2.2.3 Rückwärtseinsetzen

Bei einem Gleichungssystem in Dreiecksform kann man die Unbekannten Schritt für Schritt bestimmen. Zu ihrer Berechnung betrachtet man zunächst die letzte Zeile und bestimmt daraus die Unbekannte x_n. Im zweiten Schritt betrachtet man die zweitletzte Zeile. Dabei wird der bereits ermittelte Wert für x_n eingesetzt. Dadurch kann man aus der zweitletzten Zeile die Unbekannte x_{n-1} bestimmen. Nach dieser Strategie werden alle Unbekannten rückwärts bestimmt. Zum Schluss bestimmt man x_1 aus der ersten Zeile.

Beispiel 2.5 (Rückwärtseinsetzen)

Beim Gleichungssystem in Dreiecksform aus *Beispiel 2.4*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 5\,x_3 & = & 12 \\ & - & 5\,x_2 & - & 16\,x_3 & = & -27 \\ & & & - & 100\,x_3 & = & -200 \end{array}$$

können wir aus der letzten Zeile $x_3 = 2$ bestimmen. Wenn wir nun $x_3 = 2$ in die zweitletzte Zeile einsetzen, können wir nach x_2 auflösen:

$$-5\,x_2 - 32 = -27 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = -1.$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir mit $x_3 = 2$ und $x_2 = -1$

$$x_1 + 1 + 10 = 12 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 1.$$

Das lineare Gleichungssystem hat also die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$. ■

Aus *Beispiel 2.5* erkennen wir, unter welchen Umständen das Rückwärtseinsetzen problemlos funktioniert. Wir gehen zunächst von dem Spezialfall aus, bei dem die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten gleich ist. Gleichungssysteme, bei denen die Anzahl der Gleichungen kleiner oder größer als die Anzahl der Unbekannten ist, betrachten wir in den folgenden Abschnitten. Eine weitere Einschränkung betrifft die Diagonalelemente. Da wir in jedem Schritt durch ein Diagonalelement teilen, dürfen die Diagonalelemente nicht null sein. Konstellationen, bei denen Diagonalelemente null sind, analysieren wir ebenfalls in den folgenden Abschnitten genauer. Die generelle Vorgehensweise ist jedoch in allen Fällen ähnlich.

Rückwärtseinsetzen

Ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform, bei dem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist,

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{nn}\,x_n & = & b_n
\end{array}$$

kann man rückwärts lösen. Dabei bestimmt man zuerst x_n aus der letzten Gleichung, dann x_{n-1} aus der zweitletzten, usw. und zum Schluss x_1 aus der ersten Gleichung. Es gibt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn alle Diagonalelemente a_{ii} ungleich null sind.

2.2.4 Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Kombination von Vorwärtselimination und Rückwärtseinsetzen bezeichnet man als Grundversion des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Definition 2.2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichnungssystems kann man mit dem **Gaußschen Eliminationsverfahren** durch folgende Schritte berechnen:

(1) Mithilfe von Äquivalenzumformungen erzeugt man durch Vorwärtselimination eine Dreiecksform.

(2) Aus der Dreiecksform erhält man durch Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Beispiel 2.6 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Bei dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrll}
x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & -10 & |\cdot(-1) & |\cdot(-2) \\
x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 5 & \longleftarrow & \\
2\,x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & -7 & & \longleftarrow \\
 & & 3\,x_2 & + & x_3 & - & 4\,x_4 & = & 7 & &
\end{array}$$

wählen wir die erste Zeile als Pivotzeile.

Um die Unbekannte x_1 aus der zweiten und dritten Zeile zu eliminieren, wählen wir die Faktoren -1 und -2. Bei der letzten Zeile besteht kein Handlungsbedarf, denn diese Zeile enthält die Unbekannte x_1 nicht:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & -10 \\
 & - & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & 15 \\
 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 13 \\
 & & 3\,x_2 & + & x_3 & - & 4\,x_4 & = & 7
\end{array}$$

Um das Rechnen mit Brüchen zu vermeiden, ist es nun geschickt, die dritte Zeile als Pivotzeile zu verwenden. Mehr Übersichtlichkeit erhalten wir durch Vertauschen der zweiten und dritten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrll}
x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & -10 & & \\
 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 13 & |\cdot(-3) & |\cdot(3) \\
 & - & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & 15 & \longleftarrow & \\
 & & 3\,x_2 & + & x_3 & - & 4\,x_4 & = & 7 & & \longleftarrow
\end{array}$$

Durch Multiplikation der zweiten Zeile mit den Faktoren -3 und 3 eliminiert man bei der dritten und vierten Zeile jeweils x_2:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & -10 & \\
 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 13 & \\
 & & & - & 5\,x_3 & + & 7\,x_4 & = & -24 & |\cdot(2) \\
 & & & & 10\,x_3 & - & 13\,x_4 & = & 46 & \longleftarrow
\end{array}$$

Schließlich multiplizieren wir die dritte Zeile mit dem Faktor 2 und addieren das Ergebnis zur letzten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & -10 \\
 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 13 \\
 & & & - & 5\,x_3 & + & 7\,x_4 & = & -24 \\
 & & & & & & x_4 & = & -2
\end{array}$$

Aus diesem Dreiecksschema erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen die gesuchte Lösung $x_4 = -2$, $x_3 = 2$, $x_2 = -1$ und $x_1 = 1$. ■

Der Algorithmus von Gauß ist ein universelles Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen. Leider lassen sich nicht alle linearen Gleichungssysteme „straight forward“ nach diesem Schema lösen. Manchmal ist geschicktes Vertauschen von Zeilen oder Spalten erforderlich oder zumindest hilfreich. In *Abschnitt 2.3* werden wir wie angekündigt auf ein paar Spezialfälle genauer eingehen.

2.2.5 Rechenschema

Zur Reduzierung des Schreibaufwandes kann man beim Lösen linearer Gleichungssysteme ein vereinfachtes Schema verwenden. Auch für die Erstellung von Computerprogrammen ist ein Rechenschema für lineare Gleichungssysteme vorteilhaft. In diesem Rechenschema sind nur die Koeffizienten und Absolutglieder enthalten. Die Unbekannten kommen in diesem Schema nicht explizit vor. Die Koeffizienten in der i-ten Spalte gehören zur

Unbekannten x_i. Die Gleichheitszeichen werden durch einen senkrechten Strich ersetzt. Dadurch werden die Absolutglieder visuell von den Koeffizienten getrennt.

Beispiel 2.7 (Rechenschema beim Gaußschen Eliminationsverfahren)
Das lineare Gleichungssystem aus *Beispiel 2.6*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & -10 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & -7 \\ & & 3\,x_2 & + & x_3 & - & 4\,x_4 & = & 7 \end{array}$$

schreiben wir als Rechenschema folgendermaßen:

$$\begin{array}{rrrr|rll} 1 & 1 & -3 & 2 & -10 & |\cdot(-1) & |\cdot(-2) \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 & \longleftarrow & \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -7 & & \longleftarrow \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 7 & & \end{array}$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit den Faktoren -1 bzw. -2 erzeugt man in der ersten Spalte der zweiten bzw. dritten Zeile jeweils eine Null. Die letzte Zeile besitzt bereits eine Null in der ersten Spalte. Nun ist es geschickt, die dritte Zeile als Pivotzeile zu verwenden:

$$\begin{array}{rrrr|rll} 1 & 1 & -3 & 2 & -10 & & \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 15 & \longleftarrow & \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 13 & |\cdot(-3) & |\cdot(3) \\ 0 & 3 & 1 & -4 & 7 & & \longleftarrow \end{array}$$

Durch Multiplikation der dritten Zeile mit den Faktoren -3 bzw. 3 erzeugt man in der zweiten Spalte der zweiten bzw. vierten Zeile jeweils eine Null. Mehr Übersichtlichkeit erhalten wir durch Vertauschen der zweiten und dritten Zeile:

$$\begin{array}{rrrr|rl} 1 & 1 & -3 & 2 & -10 & \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 13 & \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -24 & |\cdot(2) \\ 0 & 0 & 10 & -13 & 46 & \longleftarrow \end{array}$$

Die dritte Zeile mit dem Faktor 2 zur letzten Zeile addiert, erzeugt das gewünschte Dreiecksschema:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt die gesuchte Lösung $x_4 = -2$, $x_3 = 2$, $x_2 = -1$ und $x_1 = 1$. ■

Aus den Äquivalenzumformungen ergeben sich Regeln für unser Rechenschema. Die Reihenfolge der Zeilen darf jederzeit beliebig vertauscht werden. Jede Zeile darf mit einem beliebigen Faktor ungleich null multipliziert werden. Zu einer Zeile darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile addiert werden.

2.3 Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme

Bei den linearen Gleichungssystemen in den bisher betrachteten Beispielen ist die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten gleich. Alle diese Gleichungssysteme haben außerdem eine eindeutige Lösung. Bei praktischen Problemstellungen ist dieser Gleichungstyp weit verbreitet. Trotzdem sind Gleichungssysteme, die diese Einschränkung nicht erfüllen, von praktischer Bedeutung. In diesem Abschnitt betrachten wir auch Gleichungssysteme, bei denen die Anzahl der Gleichungen größer oder kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist. Außerdem analysieren wir Gleichungssysteme, die keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Schließlich gehen wir noch auf lineare Gleichungssysteme ein, die einen oder mehrere Parameter enthalten.

2.3.1 Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Wenn durch Äquivalenzumformungen eine einzelne Gleichung entsteht, die für beliebige Werte der Unbekannten nicht lösbar ist, dann besitzt das komplette lineare Gleichungssystem keine Lösung. In diesem Fall sind die einzelnen Gleichungen widersprüchlich formuliert.

Beispiel 2.8 (Unlösbares lineares Gleichungssystem)

Bei dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & |\cdot(-3) & |\cdot(-2) \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 10 & \longleftarrow & \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 2 & & \longleftarrow \end{array}$$

wählen wir die erste Zeile als Pivotzeile und multiplizieren mit den Faktoren -3 und -2:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & \\ & - & x_2 & - & 2\,x_3 & = & -8 & |\cdot(1) \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & -10 & \longleftarrow \end{array}$$

Nun addieren wir die zweite zur dritten Zeile. Dadurch wird in der letzten Zeile nicht nur x_2, sondern auch x_3 eliminiert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & x_2 & - & 2\,x_3 & = & -8 \\ & & & & 0 & = & -18 \end{array}$$

Vollständig ausgeschrieben lautet die letzte Zeile

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -18.$$

Gleichgültig welchen Wert man für die Unbekannten wählt, die linke Seite ergibt immer null. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar. ■

Keine Lösung beim Gaußschen Eliminationsverfahren

Entsteht im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, \quad b \neq 0,$$

wobei b eine beliebige Zahl ungleich null ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

2.3.2 Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

Entsteht bei der Gauß-Elimination eine Dreiecksform, bei der eine Stufe breiter als ein Element ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem in der Regel unendlich viele Lösungen. Alle Unbekannte, die zu Zeilenstufen der Breite 2 oder größer gehören, können beliebige Werte annehmen.

Beispiel 2.9 (Lineares Gleichungssystem mit zweidimensionaler Lösungsschar)

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ & & & & 2\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & 8 \end{array}$$

ist bereits in Zeilenstufenform. Die erste Stufe hat die Breite 2, denn in der zweiten Gleichung fehlen die Unbekannten x_1 und x_2. Die zweite Stufe hat ebenfalls die Breite 2, denn sie enthält die Unbekannten x_3 und x_4 und ist die letzte Gleichung. Beide Stufen haben also die Breite 2. Somit können x_2 und x_4 beliebig gewählt werden, denn diese beiden Unbekannten erzeugen bei den beiden Stufen die Breite größer 1. Wir beginnen mit dem Rückwärtseinsetzen und setzen $x_4 = t$. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$2\,x_3 - 4\,t = 8 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 4 + 2\,t.$$

Weiter setzen wir $x_2 = s$ und erhalten aus der ersten Gleichung

$$x_1 + 2\,s + 3(4 + 2\,t) + t = 6 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -6 - 2\,s - 7\,t.$$

Jede Kombination aus einem s-Wert und einem t-Wert erzeugt eine Lösung. Die Lösungsmenge ist also eine zweidimensionale Schar. Beispielsweise ergibt sich für $s = 0$ und $t = 0$ die Lösung $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$ und $x_4 = 0$ und für $s = 1$ und $t = -1$ die Lösung $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ und $x_4 = -1$. ■

Unendlich viele Lösungen beim Gaußschen Eliminationsverfahren

Entstehen im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens zwei aufeinander folgende Zeilen i und $i+1$ mit einer Zeilenstufe der Breite $p+1$ in der Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{i,k}\,x_k & + & \ldots & + & a_{i,k+p}\,x_{k+p} & + & a_{i,k+p+1}\,x_{k+p+1} & + & \ldots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ & & & & & & a_{i+1,k+p+1}\,x_{k+p+1} & + & \ldots & + & a_{i+1,n}\,x_n & = & b_{i+1} \end{array}$$

so kann man die p Unbekannten x_{k+1} bis x_{k+p} beliebig wählen.

2.3.3 Systeme mit redundanten Gleichungen

In jeder einzelnen Gleichung ist eine Bedingung für die Unbekannten formuliert. Wenn man beim Formulieren der Bedingungen nicht sorgfältig vorgeht, dann wird ein und derselbe Aspekt mehrfach berücksichtigt. Überflüssige Bedingungen erzeugen sogenannte redundante Gleichungen. Ein Spezialfall redundanter Gleichungen sind zwei Gleichungen, die sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. In diesem Fall ist also eine Gleichung ein Vielfaches einer anderen Gleichung. Es gibt jedoch auch Konstellationen, bei denen Redundanzen auftreten, die nicht offensichtlich sind, siehe *Beispiel 2.10*. Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren sind wir in der Lage, alle Redundanzen zu erkennen.

Beispiel 2.10 (Lineares Gleichungssystem mit redundanten Gleichungen)
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & |\cdot(-3) & |\cdot(-2) \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 10 & \longleftarrow & \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 20 & & \longleftarrow \end{array}$$

stimmt bis auf den letzten Eintrag auf der rechten Seite mit dem Gleichungssystem aus *Beispiel 2.8* überein. Wieder wählen wir die erste Zeile als Pivotzeile und multiplizieren mit den Faktoren -3 und -2

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & \\ & - & x_2 & - & 2\,x_3 & = & -8 & |\cdot(1) \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 8 & \longleftarrow \end{array}$$

und fassen die zweite und die dritte Zeile zusammen. Dadurch wird in der letzten Zeile nicht nur x_2, sondern auch x_3 eliminiert. Im Gegensatz zu *Beispiel 2.8* steht nun aber in der letzten Zeile auch auf der rechten Seite null:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & x_2 & - & 2\,x_3 & = & -8 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Die letzte Gleichung stellt keine Bedingung für die Unbekannten dar. Diese Zeile ist überflüssig, man kann sie einfach weglassen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & x_2 & - & 2\,x_3 & = & -8 \end{array}$$

Dadurch haben wir nun aber beim Rückwärtseinsetzen ein Problem. Insgesamt bleiben nur zwei Gleichungen zur Bestimmung von drei Unbekannten. Das Problem lässt sich dadurch lösen, dass wir für die Unbekannte x_3 einen beliebigen Wert t wählen, $x_3 = t$. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich dann aus der zweiten Gleichung

$$-x_2 - 2\,t = -8 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 8 - 2\,t$$

und aus der ersten Gleichung

$$x_1 + (8 - 2\,t) + t = 6 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -2 + t.$$

Jeder t-Wert erzeugt eine Lösung. Beispielsweise ergibt sich für $t = 0$ die Lösung $x_1 = -2$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 0$ und für $t = 1$ die Lösung $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 1$. ■

Redundante Gleichungen

Entsteht im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

dann kann man diese redundante Gleichung einfach weglassen.

2.3.4 Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Wenn es zu wenig Bedingungen gibt, um die Unbekannten eindeutig festzulegen, dann hat das lineare Gleichungssystem keine eindeutige Lösung. Weniger Bedingungen als Unbekannte ergeben sich, wenn die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist. Dabei sind zwei unterschiedliche Fälle möglich. Entweder das Gleichungssystem hat schon zu Beginn weniger Gleichungen als Unbekannte, oder Gleichungen erweisen sich im Verlauf des Eliminationsverfahrens als redundant, siehe *Abschnitt 2.3.3*.

Definition 2.3 (Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem)

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist, nennt man **unterbestimmt**.

Beispiel 2.11 (Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem)

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & \mid \cdot (-3) \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 10 & \longleftarrow \end{array}$$

ist unterbestimmt. Es besitzt drei Unbekannte, aber nur zwei Gleichungen. Die erste Zeile multipliziert mit dem Faktor -3 ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & - & x_2 & - & 2\,x_3 & = & -8 \end{array}$$

Wir können x_3 beliebig wählen und x_1 und x_2 abhängig von x_3 ausdrücken. Mathematisch formuliert man das, indem man einen reellen Parameter t einführt, also $x_3 = t$. Aus der zweiten Zeile erhält man dann

$$-x_2 - 2\,t = -8 \Longrightarrow x_2 = 8 - 2t$$

und aus der ersten Zeile

$$x_1 + (8 - 2t) + t = 6 \Longrightarrow x_1 = -2 + t.$$

Das lineare Gleichungssystem hat zwar unendlich viele Lösungen, trotzdem ist nicht jede Kombination aus x_1, x_2 und x_3 eine Lösung. Beispielsweise erhält man für $t = 2$ die Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$. Die Kombination $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$ ist jedoch keine Lösung, da es kein passendes t für diese Kombination gibt. ■

Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

In der Regel besitzt ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Die Lösungen erhält man durch Rückwärtseinsetzen, indem man für die unbestimmten Unbekannten geeignete Parameter einführt. In Ausnahmefällen kann ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem jedoch auch unlösbar sein. Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem ist niemals eindeutig lösbar.

2.3.5 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme

Das entsprechende Pendant zu unterbestimmten Systemen sind überbestimmte Systeme, also Systeme mit mehr Gleichungen als Unbekannte.

Definition 2.4 (Überbestimmtes lineares Gleichungssystem)

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist, nennt man **überbestimmt**.

Beispiel 2.12 (Überbestimmtes lineares Gleichungssystem)

Bei dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrlll}
2\,x_1 & - & x_2 & = & 5 & & & \longleftarrow \\
x_1 & - & 3\,x_2 & = & -5 & & \longleftarrow & \\
6\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & 10 & \longleftarrow & & \\
x_1 & + & x_2 & = & 7 & |\cdot(-6) & |\cdot(-1) & |\cdot(-2)
\end{array}$$

wählen wir die letzte Zeile als Pivotzeile und multiplizieren mit den Faktoren -6,-1 und -2:

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & x_2 & = & 7 \\
 & - & 3\,x_2 & = & -9 \\
 & - & 4\,x_2 & = & -12 \\
 & - & 8\,x_2 & = & -32
\end{array}$$

Die zweite und dritte Zeile ergeben jeweils $x_2 = 3$. Die vierte Zeile fordert jedoch $x_2 = 4$. Somit ist dieses lineare Gleichungssystem nicht lösbar. ■

Auf den ersten Blick vermutet man, dass alle überbestimmten linearen Gleichungssysteme nicht lösbar sind. Schließlich gibt es mehr Bedingungen als Freiheitsgrade. Tatsächlich sind überbestimmte lineare Gleichungssysteme in der Regel nicht lösbar. Trotzdem können überbestimmte Systeme unter Umständen redundante Gleichungen enthalten und somit auch lösbar sein.