Rüdiger Götte

Chaos an den Finanzmärkten?

Finanzmarkttheorien auf dem Prüfstand

Rüdiger Götte

CHAOS AN DEN FINANZMÄRKTEN?

Finanzmarkttheorien auf dem Prüfstand

ibidem-Verlag
Stuttgart

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Coverabbildung: © Eisenhans - Fotolia.com

Dieser Titel ist als Printversion im Buchhandel
oder direkt bei ***ibidem*** (www.ibidem-verlag.de) zu beziehen unter der

ISBN 978-3-8382-0189-4.

∞

ISBN-13: 978-3-8382-6189-8

© ***ibidem***-Verlag
Stuttgart 2012

Alle Rechte vorbehalten

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und elektronische Speicherformen sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in or introduced into a retrieval system, or transmitted, in any form, or by any means (electronical, mechanical, photocopying, recording or otherwise) without the prior written permission of the publisher. Any person who does any unauthorized act in relation to this publication may be liable to criminal prosecution and civil claims for damages.

Vorwort

Manchmal schreibt das Leben verrückte Geschichten. Zum Beispiel die des als Literaturstudent gescheiterten Japaners Takafumie Horie. Horie fiel in der Vergangenheit durch allerhand verrückte Ideen auf. So versuchte er erfolglos, ein Baseball-Team zu kaufen. Ebenso scheiterte er 2005 mit dem Versuch, den Radiosender *Nippon Broadcasting* zu übernehmen. Auch sein vorerst letzter Coup, sich ins japanische Unterhaus wählen zu lassen, war nicht von Erfolg gekrönt. Im Hauptberuf ist Takafumie Horie Chef der in Japan sehr bekannten Internetfirma *Livedoor.* Er galt wegen des stürmischen Wachstums seines Unternehmens als steinreich, bis im Januar 2006 Gerüchte über Kursmanipulationen und Bilanzfälschungen die Runde machten. Die Folge waren Panikverkäufe vor allem von *Livedoor*-Aktien, später griff die Panik jedoch auf den gesamten Markt über. Dies löste an der Tokioter Börse ein ziemliches Chaos aus, und am Ende musste die Aufsicht sogar den Aktienhandel aussetzen (als Grund wurden technische Probleme angegeben). Die Weltbörsen zogen nach. Verstärkt wurde der Kursdruck durch Hiobsbotschaften aus den USA. So gaben *Intel* und *Yahoo* schlechte Quartalszahlen bekannt und fielen postwendend innerhalb eines Tages um mehr als 12 %. Auch der deutsche Aktienindex DAX konnte sich dem negativen Trend nicht entziehen. Weltweit kam es zu einem mehr oder weniger großen Kursrutsch.

Wie lassen sich solche Kursschwankungen erklären? Die herkömmlichen Finanzmarkttheorien bieten eigentlich keine rechte Erklärung. Im umfangreichen ‚Portfolio der Theorien' bin ich auf der Suche nach einer geeigneten Erklärung auf die Chaostheorie[1] gestoßen. Um sie für diese Theorie zu ‚erwärmen', sollten wir einen Blick in die jüngste Vergangenheit werfen. Im Jahr 2007 sah alles nach einer ‚heilen' Börsenwelt aus, mit einem stabilen weltweiten Wirtschaftswachstum von 5 % – getrieben durch die aufstrebenden Staaten in Asien und ein erstarkendes Konsumklima auf dem alten Kontinent, welches den Export anheizte. Ganz leise konnte man aber schon die ersten

[1] Im Wissenschaftsdiskurs wird die Chaostheorie auch als ‚Dynamik nichtlinearer Systeme' oder ‚Komplexitätstheorie' bezeichnet.

‚fiesen' Schmetterlinge[2] mit ihren Flügen schlagen hören. Sie hießen: Subprime-Problematik, Immobilienkrise oder Private-Equity-Überhitzung. Die derivative Durchdringung der ökonomischen Welt sorgt dafür, dass vermeintlich kleine Ereignisse an einer Stelle erhebliche Auswirkungen an einer anderen Stelle haben können. Die ersten Ausläufer trafen uns mit dem Fall der deutschen IKB. Sie konnte nur durch das Eingreifen der KfW *(Kreditanstalt für Wiederaufbau)* gerettet werden. Wer noch etwas weiter zurück schaut, erinnert sich sicherlich noch an das 1998er-Desaster des amerikanischen LTCM-Hedgefonds. Damals konnte nur durch eine konzertierte Rettungsaktion eine Kettenreaktion verhindert werden. All diese Rettungsaktionen führten jedoch dazu, dass die Risikobereitschaft in der ökonomischen Welt immens zunahm, weil man aus der Vergangenheit wusste, dass im Zweifelsfall auf Hilfe von außerhalb gesetzt werden kann. Diese Mentalität ist sehr gefährlich für die Märkte und führte uns letztlich in die 2008 beginnende Finanzkrise. In dieser Finanzkrise zeigte sich, dass viele der ‚klassischen' ökonomischen Theorien nicht mehr zutreffen. So erlebten auch diejenigen Anleger herbe Verluste, die ihre Depots nach Markowitz optimiert hatten. Denn alle Assetklassen verloren in der Krise massiv. Dieses Buch geht nun der Frage nach, warum die ‚klassischen' Finanzmarkttheorien in der Krise nicht griffen, und ob es alternative Strategien gibt. Dazu wird die Chaostheorie vorgestellt.

Im Alltag finden sich überall chaotische Phänomene, die sich mathematisch nur schwer beschreiben lassen, wie z.B. der tropfende Wasserhahn. Es lässt sich nicht vorhersagen, nach wie vielen Sekunden der nächste Tropfen fallen wird. Der eigentliche Charme der Chaostheorie besteht darin, dass gleichwohl bestimmte Aussagen und Vorhersagen in chaotischen Systemen möglich sind – streng genommen müsste es heißen in Systemen mit deterministischen Chaos[3]. Denn jenseits des Chaos lassen sich in solchen chaotischen Systemen versteckte Eigenschaften erkennen. Lässt sich das Chaos an den Börsen vielleicht doch beherrschen und die Börsenkurse vorhersagen? Liegt hier der Schüssel zu einem verbesserten Verständnis der Finanzmärkte? Mit

---

[2] Eine plakative Vereinfachung geht davon aus, dass z. B. ein Schmetterling in Tokio mit seinen Flügeln wackeln kann und dadurch einen Wirbelsturm in New York auslöst.

[3] Heute versteht man unter deterministischem Chaos die Entwicklung eines Systems nach bestimmten Regeln, dessen Erscheinungsbild jedoch einem Zufallsprozess ähnelt.

diesen spannenden Fragen beschäftigt sich dieses Buch. Leider findet die Chaostheorie derzeit noch wenig Interesse bei den Anlegern. Möglicherweise schreckt viele die doch etwas anspruchsvolle Mathematik ab. Mit diesem Buch sollen Sie die Grundidee dieser Theorie verstehen. Sie werden sehen, dass die Lektüre Ihr Verständnis der Märkte auf den Kopf stellen wird.

Für die freundliche Unterstützung bei dieser Arbeit möchte ich Diplom-Ingenieur Hans-Jürgen Götte danken.

In diesem Buch wurden teilweise Bezeichnungen verwendet, die eingetragene Warenzeichen sind; diese unterliegen als solche den gesetzlichen Bestimmungen. Sämtliche Daten, Formeln und Ausführungen in dem vorliegenden Buch wurden mit größter Sorgfalt recherchiert und zusammengestellt. Dennoch können weder Verlag noch Autor sich für deren Richtigkeit verbürgen; jegliche Haftung seitens Verlag oder Autor für die Richtigkeit der in diesem Buch gemachten Angaben ist daher ausgeschlossen.

Inhalt

1. Einleitung 1

2. Sind die Märkte chaotisch oder zufallsbestimmt? 7

2.1. Das Gebäude der ‚modernen' Finanzmarkttheorie – Effiziente Märkte und Brownsche Bewegung 7

2.1.1. Die Gaußsche Normalverteilung – die milde Form des Zufalls 8

2.2. Ist die Normalverteilung ein Börsenmärchen? 28

2.2.1. Resümee 44

2.2.1.1. Auswirkungen 50

2.3. Was ist Chaos? 69

3. Was hat der Nil mit den Aktienmärkten gemeinsam? – Der Hurst-Exponent 79

3.1. Definition der Schwankungsbreite 80

3.2. Skalierungsgesetze 83

3.3. Art der Abhängigkeiten einer Börsenreihe 93

3.4. Zyklen 99

3.5. Resümee 106

4. Chaostheoretische Erklärungsansätze 113

4.1. Entwicklung der Chaosforschung 114

4.2. Die Wege ins Chaos mit der logistischen Gleichung 120

4.2.1. Logistische Gleichung 121

4.2.2. Hinterm Horizont? 149

4.2.3. Was sind Attraktoren? 160

4.2.4. Der Lyapunov-Exponent 172

4.2.5. Die Korrelationsdimension 178

4.2.6. Sind die ökonomischen Zeitreihen chaotisch? 184

4.2.7. Sind die Aktienkurse selbstähnlich? 185

4.2.8. Schätzung der Korrelationsdimension 193

4.2.9. Die Schätzung des Lyapunov-Exponenten 200

4.2.10. Resümee 203

4.2.10.1. Prognosen – Ein Ding der Unmöglichkeit? 212
4.4. Iterierte Funktionssysteme (IFS) – Eine kleine Formelsammlung 230
4.1.1. Autoregressive Prozesse (AR-Prozesse) 232
4.1.1.1. (G)ARCH-Modell 234
4.4.2. Moving-Average-Prozesse (MA-Prozesse) 237
4.4.3. Logistische Gleichung, Differentialgleichungen und Mackey-Glass 238
4.5. Resümee 241
5. Reise in die Welt der fraktalen Geometrie 243
5.1. Was ist die fraktale Geometrie? 244
5.2. Der Bauplan der Fraktale 247
5.2.1. Die fraktale Dimension 252
5.2.1.1. Grenzfall der fraktalen Dimension 254
5.3. Was hat die fraktale Geometrie mit Aktienkursen gemeinsam? 258
5.3.1. Die fraktale Market-Hypothese 262
6. Das Chaosspiel – Zufall und Vorausbestimmung in Eintracht nebeneinander 265
6.1. Die Brownsche Bewegung im Lichte der fraktalen Geometrie 272
6.2. Was die fraktale Geometrie leisten kann 281
6.3. Resümee 286
7. Was man mitnehmen sollte 291
8. Literaturverzeichnis 303
9. Stichwortverzeichnis 311

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Simulierte Börsenkurse durch Würfeln mit Gaußschen Zufallszahlen 9

Abbildung 2: Endpositionen der Aktie ausgezählt nach Häufigkeiten nach ca. 1.000 Durchläufen 9

Abbildung 3: Simulierter Kursverlauf mithilfe von Zufallszahlen für den DAX 21

Abbildung 4: Tägliche DAX-Renditen vom 26.11.1990 bis 26.11.2009 29

Abbildung 5: Verteilung der monatlichen DAX-Renditen von Dezember 1987 bis Oktober 2009 32

Abbildung 6: Häufigkeitsverteilung der *fat tails* 33

Abbildung 7: Wölbungen der Renditeverteilungen 36

Abbildung 8: Beispiel für eine links- und rechtsschiefe Verteilung 36

Abbildung 9: VDAX-New 41

Abbildung 10: Häufigkeitsverteilung der 10-Jahresrenditen für den Versuchszeitraum vom 26.11.1990 bis 26.11.2009, bei einem Einstieg in den DAX zu einem bestimmten Zeitpunkt (in Tagesabschnitten) nach einer Haltedauer von genau 10 Jahren. .. 42

Abbildung 11: Häufigkeitsverteilung der täglichen DAX-Renditen für den Zeitraum vom 01.10.2008 bis 01.10.2009 51

Abbildung 12: Koch-Kurve 71

Abbildung 13: Logistische Gleichung 72

Abbildung 14: DAX-Selbstähnlichkeit 75

Abbildung 15: Potenzfunktion mit verschiedenen Exponenten 86

Abbildung 16: Geradengleichung vor und nach Umformung 88

Abbildung 17: Ermittlung des Hurst-Exponenten für den DAX 89

Abbildung 18: Doppeltlogarithmische Darstellung der kumulierten Häufigkeitsverteilung der DAX-Tagesrenditen für den Zeitraum 30.09.1959 bis 07.05.2009 für die 250 schlechtesten Tage 92

Abbildung 19: Würfelexperiment mit Joker 94

Abbildung 20: Würfelexperiment mit einem Joker und Streichung aller Zahlen einer Seite 96

Abbildung 21: Würfelexperiment mit einem Joker im log/log-Diagramm aus Abbildung 19 100

Abbildung 22: Durchschnittlicher Jahresverlauf des DAX seit 1965 normiert auf den Oktober eines Jahres gleich 100 107

Abbildung 23: Verschiedene Kausalitäten 116

Abbildung 24: Unterschied zwischen Ordnung, Chaos und Unordnung 119

Abbildung 25: Verhulst-Gleichung als Rückkopplungs-System 122

Abbildung 26: Rückkopplungsmaschine 126

Abbildung 27: Logistische Gleichung für a = 0,9 und x_0 = 0,2 131

Abbildung 28: Logistische Gleichung für a = 2 und x_0 = 0,2 132

Abbildung 29: Logistische Gleichung für a = 2,75 und x_0 = 0,2 133

Abbildung 30: Logistische Gleichung für a = 3,4 und x_0 = 0,2 134

Abbildung 31: Graph der zweiten Ableitung der logistischen Gleichung 135

Abbildung 32: Feigenbaum-Diagramm im Bereich a=0 bis a=4 mit Kennzeichnung der ersten beiden Bifurkationen bei a=3 und a=3,449 137

Abbildung 33: Feigenbaum-Konstante 138

Abbildung 34: Schematische Darstellung der Periodenverdopplung 139

Abbildung 35: Logistische Gleichung für a = 3,6 und x_0 = 0,2 142

Abbildung 36: Instabiles Verhalten der logistischen Gleichung für a = 3,6 bei unterschiedlicher Anzahl von Iterationsschritten 142

Abbildung 37: Unterschiedliche Entwicklung zweier Orbits für a = 4 144

Abbildung 38: Streck- und Falteigenschaft der logistischen Gleichung 145

Abbildung 39: Die logistische Funktion bei a=3,84 147

Abbildung 40: Zoom eines Feigenbaum-Diagramms, Kasten enthält das Bild des Zooms 148

Abbildung 41: Logistische Gleichung für a = 5,0 und x_0 = 0,2 151

Abbildung 42: Mandelbrot-Menge 157

Abbildung 43: Zusammenhang zwischen Julia-Menge und Mandelbrot-Menge . 159

Abbildung 44: Fixpunkt-Attraktor 162

Abbildung 45: Raubtier-Beute-Zyklus am Beispiel von Füchsen und Hasen 165

Abbildung 46: Allgemeine Form des Grenzzyklus-Attraktors 166

Abbildung 47: Torus-Attraktor 166

Abbildung 48: Lorenz-Attraktor 168

Abbildung 49: Zwei Trajektorien, dargestellt als ein Kreis und Quadrat, die im Prozess des Streckens und Falten ihre Positionen im Phasenraum ändern 170

Abbildung 50: Lyapunov-Exponent der logistischen Gleichung. Die obere Abbildung zeigt das Feigenbaum-Diagramm und die untere den Lyapunov-Exponenten 177

Abbildung 51: Korrelationsintegrale für verschiedene Einbettungen (n=2 bis n = 10) des Lorenz-Attraktors 181

Abbildung 52: Lorenz-Attraktor für verschiedene dimensionale Einbettungen (n=2 bis n=10) 182

Abbildung 53: Links: Natürlicher Logarithmus der täglichen Schlusskurse des DAX; Rechts: unterschiedliche Skalen 186

Abbildung 54: Reskalierte Verteilung des DAX 188

Abbildung 55: Doppeltlogarithmisches Diagramm, in welchem die Häufigkeit als Funktion der Größe der Schwankungen angegeben ist. 190

Abbildung 56: Graphische Ermittlung der Korrelationsdimension des DAX 194

Abbildung 57: Börsengeschehen dargestellt als verschachtelte Lorenz-Attraktoren 198

Abbildung 58: Möglicher Attraktor für den DAX 199

Abbildung 59: Algorithmus zur Berechnung des Lyapunov-Exponenten 200

Abbildung 60: Lyapunov-Exponent für den DAX 202

Abbildung 61: Fraktaler Gruppenaufbau 209

Abbildung 62: Das Verhalten benachbarter Trajektorien in Abhängigkeit von der Zeit 214

Abbildung 63: Faktoren, die die Vorhersagegenauigkeit der Prognosen beeinflussen 220

Abbildung 64: Mackey-Glass-Zeitreihe 240

Abbildung 65: Blumenkohl 244

Abbildung 66: Konstruktion der Teufelstreppe 254

Abbildung 67: Lichtenberg-Muster 256

Abbildung 68: Minutencharts des DAX von 2003 bis 2005 260

Abbildung 69: R/S-Analyse des Minutencharts des DAX von 2003 bis 2005 260

Abbildung 70: Startaufstellung und Spielfeld des Chaosspiels 265

Abbildung 71: Einige Spielzüge des Chaosspiels 266

Abbildung 72: Der Endzustand des Chaosspiels – das Sierpinski-Dreieck und dessen Vorstufen 267

Abbildung 73: Erstellen eines Aktienkursverlaufes mit der fraktalen Geometrie 270

Abbildung 74: 1.000 Stichproben der regelmäßigen Zeitabstände der Verschiebungen der Brownschen Bewegung 274

Abbildung 75: Gaußsche Zufallszahlen (linke Kurve) ergeben aufsummiert ein grobes Modell der Brownschen Bewegung (rechte Kurve) 276

Abbildung 76: Der Spur einer Brownschen Bewegung 277

Abbildung 77: Skalierung der Brownschen Bewegung. 278

Abbildung 78: South Sea Company Sept. 1719 – Dez. 1720 in britischen Pfund (£) 297

Abbildung 79: Verhältnis Kurs zu Dividende für den S&P 500 von 1910-2004 ... 298

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Kurtosis und Schiefe für den DAX auf Basis der täglichen Rendite 37

Tabelle 2: Wie wahrscheinlich ist ein Tagesverlust im Dow-Jones-Index? 40

Tabelle 3: Einfluss der Volatilität auf das Anlageergebnis 52

Tabelle 4: Unterschiedliche Durchschnittsrendite und Volatilität 53

Tabelle 5: Ausgewählte Hurst-Exponenten 90

Tabelle 6: Die wichtigsten Kapitalmarktanomalien 110

Tabelle 7: Iteration des Teilintervalls I_2 143

Tabelle 8: Berechnung des Lyapunov-Exponenten für verschiedene Startwerte der logistischen Gleichung 175

Tabelle 9: Zusammenhang zwischen Attraktor und Lyapunov-Exponent 176

Tabelle 10: DAX-Prognosen zum 31.12.2007 224

Tabelle 11: DAX-Prognosen zum 31.12.2008 225

1. Einleitung

Ökonomen und Spekulanten versuchen schon seit langem, das Geheimnis des Geldes zu ergründen. Wie erfasst man die Kaskaden der Spekulation? Auf den Anleger prasseln eine Vielzahl von Analyse- und Prognosemethoden ein. Die Auseinandersetzung zwischen ihren Vertretern trägt nicht selten ideologische Züge. Ob Random-Walk-Hypothese, effizienter Markt, Fibonacci-Zahlen, Elliott-Waves, technische oder fundamentale Analyse – all diese Verfahren haben ihre besten Resultate in vergleichsweise ruhigen Marktphasen. In solchen Marktphasen können die Anleger leicht davon überzeugt werden, den Schlüssel zum Verständnis der Märkte gefunden zu haben. Aber was passiert, wenn die Kurse plötzlich ganz andere Bewegungsmuster zeigen? In der Entwicklung der Finanzmärkte liegt etwas Überraschendes und Unvorhersehbares. Wie bringt man etwas Ordnung in das System?

Vielleicht mit den Gesetzen der Physik. Aus dieser Idee heraus entwickelte sich die nicht einmal 20 Jahre alte Mischwissenschaft *Econophysics* (aus Ökonomie und Physik). Das ist durchaus sinnvoll, weil sich die Naturwissenschaften mit komplexen Systemen schon lange auseinandersetzen, die Wirtschaftswissenschaften dies aber lange vernachlässigt haben. Die *Econophysics* begreift die Wirtschaft als ein komplexes System. Laut dem Physikprofessor Dietrich Stauffer finden sich Massenphänomene in der Physik genauso wie an den Finanzmärkten. Man beobachtet auf dem Börsenparkett ein komplexes Miteinander von Börsenhändlern und Investoren, das schwer zu verstehen ist. Ein physikalisches Phänomen ist beispielsweise, dass sich kleine Eisenspäne zu einem Elementarmagneten parallel zu einem äußeren Feld ausrichten. Erhöht man die Temperatur, bricht die Ordnung plötzlich zusammen. Dies erinnert an den plötzlichen Wechsel von einer Hausse zu einem Crash. Um die Zusammenhänge zu entschlüsseln, greifen Vertreter der *Econophysics* auf Erkenntnisse der Erdbebenforschung, Thermodynamik, Festkörperphysik, des Magnetismus oder der Chaostheorie zurück. Dieses Buch beschäftigt sich mit der Börse und konzentriert sich auf die Chaostheorie. Die Chaostheorie ist im Wesentlichen eine Disziplin, die sich bemüht, die verborgene Ordnung hinter chaotischem Verhalten aufzuspüren. Daher werden wir versuchen, mithilfe der Chaostheorie Regeln zu finden, um die Börse besser

zu verstehen.

Kann man den Volkszorn in einer Zahl ausdrücken? Man kann: Repräsentative Umfragen stellten fest, dass ein Benzinpreis von 2,39 € zu einem Aufschrei der Empörung im Lande führen würde[4]. Früher war es der Getreidepreis, der die Massen auf die Barrikaden trieb, wie etwa bei der Französischen Revolution. Zur damaligen Zeit begannen die ersten Philosophen, systematisch das Auf und Ab an der Börse zu untersuchen. Dies mündete in den Ausspruch des französischen Wirtschaftstheoretikers Victor Riquetti Marquis de Mirabeau: „*Ohne Berechnung würde die Ökonomie immer eine unbestimmte Wissenschaft bleiben, überall verwirrt von Irrtum und Vorurteil.*"

Was lag näher, als sich von der Leitwissenschaft der Neuzeit – der Physik – inspirieren zu lassen. Mit deren eleganten mathematischen Werkzeugen konnte die Realität offenbar leichter nachgezeichnet werden. So schwärmte der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace: „*Mit der richtigen Formel würde nichts für den Verstand ungewiss sein, die Zukunft ebenso wie die Vergangenheit läge vor seinen Augen.*"

Besonders angetan hatte es den Ökonomen das Konzept der Energie. Welch geheimnisvolle Macht mag hinter der Bewegung von Körpern stecken? Gibt es womöglich etwas Ähnliches in der Sphäre der wirtschaftlichen Güter? Schließlich werden wirtschaftliche Güter auf dem Markt permanent getauscht und sind daher gewissermaßen in Bewegung. Als Pendant zur Energie lobten die Ökonomen den ‚Wert' aus, der in allen Gütern, Aktien, Rohstoffen usw. steckt. Er motiviert zum Handel und bleibt dennoch erhalten, ganz so wie die Energie in einem physikalischen System. Diese Vorstellung entwickelte u. a. der Schotte Adam Smith in seinem Werk *Der Wohlstand der Nationen* von 1776.

Im selben Zeitraum marschierte die Physik in Siebenmeilenstiefeln weiter. Die Lehre von Elektrizität und Magnetismus veränderte die Welt fundamental. In den Jahren zwischen 1861 und 1864 vereinheitlichte der Engländer James Clark Maxwell Optik und Elektromagnetismus in seinen berühmten Gleichungen und etablierte dabei eine ganz neue Vorstellung von Energie – die eines

---

[4] Vgl. Boeing, N.: Kaskaden der Spekulation – Warum die Ökonomie von der Eleganz physikalischer Formeln fasziniert wird, Die Woche, 21. Dezember 2001, S. 26

mathematischen Feldes im Raum. Dies blieb natürlich den Ökonomen nicht verborgen. So entwickelten zeitgleich der Engländer William Stanley Jevons, der Österreicher Carl Menger und der Schweizer Leon Walras um 1870 eine neue Wirtschaftslehre, die Neoklassik. Diese geht davon aus, dass die komplizierten Erscheinungen der Wirtschaft auf ihre einfachsten, der sicheren Beobachtungen noch zugänglichen Elemente zurückgeführt werden können und dass sich diese Elemente streng an Gesetze halten, gleich jenen der Natur. Die Neoklassik ist bis heute in ihren diversen Ausprägungen Grundlage der Wissenschaft vom Wirtschaften. In der Neoklassik sind zwei Annahmen essenziell:

1. Der Konsument ist mit einer sogenannten Nutzenfunktion vollständig beschrieben. Zudem spielen psychologische Phänomene oder soziale Kontexte keine Rolle.
2. Ferner lässt sich der Nutzen in Analogie zur Energie in der Physik als Feld beschreiben.

Vilfredo Pareto, ein Anhänger der Neoklassik, sagte begeistert: „*Die Theorie der Ökonomie bekommt so die Strenge der rationalen Mechanik.*“ Dazu übertrugen die Neoklassiker den Formalismus der Mechanik eins zu eins auf die Wirtschaft. Hierzu wurde die Energie durch Nutzen, Kraft durch Grenznutzen und kinetische Energie durch Ausgaben ersetzt. Auf diesem Konzept fußt auch die moderne Finanzmathematik, deren Geburtsstunde das Jahr 1900 war. Zu dieser Zeit behauptete Louis Bachelier, dass die Aktienkurse rein zufällig verlaufen, wie ein Betrunkener, dessen Schritte zufällig nach rechts oder nach links vom Weg abweichen. Folgerichtig bewegen sich die Aktienkurse in einem unvorhersehbaren Zick-Zack-Kurs. Bachelier griff auf Erkenntnisse von Robert Brown[5] zurück, der zeigte, dass sich Blütenstaubkörner, die in Wasser gelegt werden, unregelmäßig in alle Richtungen hin und her bewegen. Diese *Brownsche Bewegung* wird durch zufällige Zusammenstöße der Blütenstaubkörner mit Wassermolekülen ausgelöst. Bachelier übertrug dies auf die Finanzwirtschaft, indem er voraussetzte, dass die Kursentwicklungen durch in-

[5] Dieser bekannte Prozess wird in der Stochastik auch als *Wiener-Prozess* bezeichnet. Genauer gesagt versteht man unter einem *Wiener-Prozess* einen zeitstetigen stochastischen Prozess, der normalverteilte und unabhängige Zuwächse ausweist.

formative Zusammenstöße induziert werden – demnach führen beispielsweise gute Unternehmensmeldungen zu Kurssteigerungen und vice versa.

Falls nun keine neuen Marktinformationen auftreten, so die Theorie Bacheliers, welche die Kurse in die eine oder andere Richtung treiben, schwanke der Kurs im Durchschnitt um seinen Ausgangspunkt. Somit wäre der heutige Kurs die beste Vorhersage für den folgenden. Außerdem hänge keine Kursbewegung von der vorherigen ab. Deshalb wäre die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs morgen steigt, genauso groß wie die, dass er fällt.

Bachelier zeichnete alle Änderungen der Kurse über ein Jahr auf und kam zu dem Ergebnis, dass die Kursveränderungen die Form der Gaußschen Glockenkurve aufwiesen, d. h. dass kleine Änderungen sich im Zentrum häuften und die wenigen großen Änderungen an den Rändern der Glocke lagen. Diese Beobachtungen wurden zur Theorie der effizienten Märkte weiter entwickelt. Vereinfacht ausgedrückt sagt diese Theorie aus, dass alle gehandelten Wertpapiere jederzeit so viel kosten, wie sie wert sind. Folglich gibt es keine zu tief oder zu hoch bewerteten Wertpapiere. Auf dieses Konzept beziehen sich viele berühmte ökonomische Werkzeuge, mit denen der Anleger heute arbeitet, wie die Portfoliotheorie von Markowitz oder die Sharpe-Ratio. Im ersten Teil dieses Buches werden wir deshalb untersuchen, ob die Annahmen der Theorie der effizienten Märkte zutreffen.

Ein Kritiker der Neoklassik, Philip Mirowski, benennt zwei fatale Folgen der Übertragung des Energiekonzeptes auf die Wirtschaft. Erstens folge aus der Energieerhaltung in der Physik, dass die Summe aus Nutzen und Ausgaben in der Wirtschaft stets konstant bleiben müsse. Zweitens spiele die reale Zeit in diesem Konzept keine Rolle. Welchen Nutzen Menschen von einem Apfel, Auto oder Computer haben mögen, ist der Neoklassik zufolge völlig unabhängig von ihren Erlebnissen und ihrem Lebensumfeld.

Darüber hinaus vollzog die Neoklassik die radikalen Veränderungen der Physik im 20. Jahrhundert nicht mehr mit. Dabei warfen gerade die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie die alten Vorstellungen von der Energie über den Haufen. Philip Mirowski sagte dazu: „…*In einem solchen kulturellen Klima muss die neoklassische Wirtschaftslehre atavistisch, ja sogar irrelevant erscheinen.*“ Erst in den letzten 20 Jahren begannen die Ökonomen zaghaft, sich mit den neusten Erkenntnissen der Physik auseinanderzusetzen. Sie

adaptierten die Chaostheorie, die Unbestimmtheit komplexer Systeme, zu denen zweifellos auch die Wirtschaft gehört. Nach dieser Ansicht liegt wirtschaftlichen Systemen eine dynamische, dissipative (=gleichgewichtsferne) Selbstorganisation zugrunde. Darunter wird die Wechselwirkung, die die Elemente (Anleger) eines Systems zu gemeinsamen, synergetischen Verhalten zwingt, verstanden, womit das Ganze mehr ist als die Summe seiner Einzelteile. Als Richtschnur dient dabei die Selektion der im nächsten Augenblick am günstigsten erscheinenden Variante. Hinter Entscheidungen dieser Art steht an den Börsen meistens ein komplexes Gebilde aus rationalen Überlegungen, aber auch Gier und Angst spielen hier mit hinein. Der zweite Teil dieses Buches wird sich deshalb mit der Chaostheorie und ihren Auswirkungen auf die Börse befassen. Vielleicht wird die Chaostheorie in einigen Jahrzehnten sogar die bestimmende neue Wirtschaftslehre sein, oder es erwächst aus ihren Erkenntnissen eine neue Lehre, die wir heute noch gar nicht auf der Rechnung haben.

Abschließend werfen wir noch einen Blick auf die fraktale Geometrie. Sie ist eng mit der Chaostheorie verwoben. Die fraktale Geometrie hat schon die Sicht auf die Natur verändert. Jeder Naturwissenschaftler kennt die drei Zustandsformen der Materie – fest, flüssig und gasförmig. Eine ähnliche Unterscheidung gibt es nach Ansicht der fraktalen Geometrie bei der Zufälligkeit – mild, langsam und wild. Dabei setzen die konventionellen Finanztheorien auf milde Formen des Zufalls, als wäre jede Zacke im Aktienchart nach oben oder unten durch einen Münzwurf bestimmt. Allerdings zeigt die fraktale Geometrie, dass die realen Aktienkurse sich eher wild verhalten. Die zentrale Aussage der fraktalen Geometrie ist daher, dass die Märkte wesentlich riskanter sind, als uns die ‚alten' Modelle glauben machen wollen.

Nur wer alle Seiten der Börse kennt, wird auf Dauer zu den Gewinnern zählen. Je genauer die statistischen Gesetzmäßigkeiten hinter den Kursveränderungen verstanden werden, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, extreme Schwankungen, wie Haussen oder Crashs, richtig einzuschätzen und auszunutzen.

Dieses Buch wird Sie wahrscheinlich nicht reicher machen. Es ist mehr ein Grundlagenbuch als ein Ratgeber. Doch es wird Sie davor bewahren, durch ‚dumme' Fehler gerade in Krisenzeiten ärmer zu werden.

2. Sind die Märkte chaotisch oder zufallsbestimmt?

„Wenn schon die physikalische Welt ungewiss und so schwer genau zu erkennen ist, um wie viel unsicherer und unerkennbarer muss dann erst die Welt des Geldes sein? Die Finanzwelt ist eine mit einem Schleier verhüllte Blackbox. Nicht nur die inneren Funktionszusammenhänge sind verborgen, auch die Eingaben werden verdunkelt …“[6]

Um den Schleier, der die Blackbox Finanzwelt umhüllt, zu lüften, müssen wir zunächst der allgemein akzeptierten ökonomischen Finanzmarkttheorie mit ihrem Grundsatz der effizienten Märkte auf den Zahn fühlen. Danach werden wir untersuchen, ob die Aktienmärkte Tendenzen von chaotischem Verhalten zeigen.

2.1. Das Gebäude der ‚modernen‘ Finanzmarkttheorie – Effiziente Märkte und Brownsche Bewegung

Als der Botaniker Robert Brown im 19. Jahrhundert durch sein Mikroskop blickte, sah er, dass sich kleine Blütenstaubpartikel im Wasser unregelmäßig in alle Richtungen hin und her bewegten. Waren sie lebendig geworden? Nein, die Bewegung kam dadurch zustande, dass die winzigen Pollen jedes Mal, wenn ein Wassermolekül[7] gegen sie stieß, einen kleinen Schubs bekamen. Die Pollenkörner wurden von den Wassermolekülen gleichzeitig von mehreren Seiten getroffen, allerdings nicht regelmäßig von allen Seiten. So wurden sie mal hierhin, mal dorthin gestoßen und folgten so dem Zufall. Diese Bewegung wurde nach ihrem Entdecker Brownsche Bewegung genannt.

Erst 1905 entwickelte Albert Einstein Gleichungen, um die Brownsche Bewegung mathematisch erfassen zu können. Im Jahr 1908 führte der Physiker Jean Perrin einen Großversuch durch und konnte bestätigen, dass die Teil-

---

[6] Mandelbrot, B. und Hudson, R. L.: Fraktale und Finanzen. Märkte zwischen Risiko, Rendite und Ruin, Piper-Verlag GmbH, München, 2. Aufl., 2005, S. 57

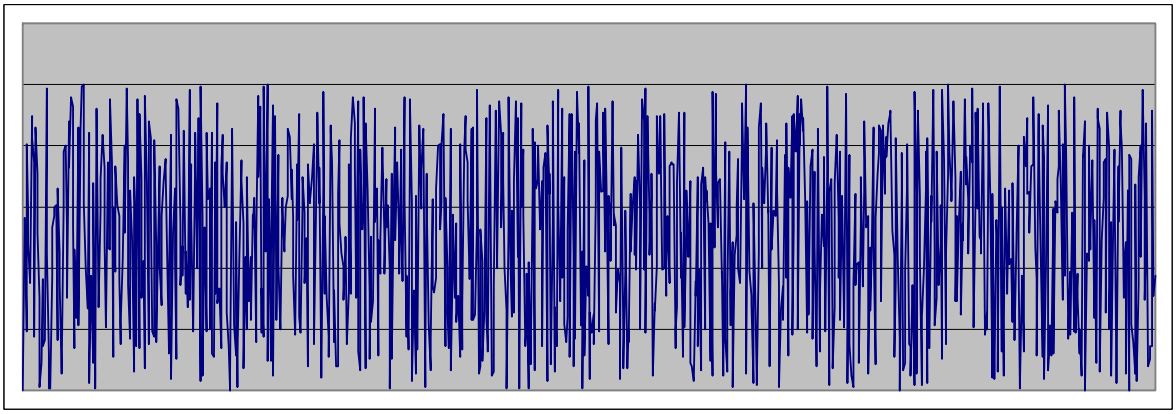
[7] Unter dem Mikroskop sieht man nur die Pollenkörner, aber nicht die um etliche hundert Mal kleineren Wassermoleküle.

chenbewegungen der berühmten Gaußschen Normalverteilung gehorchen. Was darunter zu verstehen ist, sehen wir uns im folgenden Abschnitt an.

2.1.1. Die Gaußsche Normalverteilung – die milde Form des Zufalls

„*Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.*“ So soll es einmal Galileo Galilei ausgedrückt haben. Ich glaube, treffender lässt sich die Bedeutung der Mathematik kaum zum Ausdruck bringen. Sie werden in diesem und den folgenden Abschnitten sehen, dass die Mathematik in ihren vielen Facetten ein unverzichtbares Hilfsmittel ist.

Stellen Sie sich Folgendes vor: Der Kurs Ihrer Aktie (aktuell 100 €) wird am nächsten Handelstag nicht durch den Börsenhandel bestimmt, sondern durch einfaches Würfeln[8]. Dazu nehmen wir an, dass der Aktienkurs um einen Euro steigt, wenn der Würfel die Zahlen 1 bis 3 zeigt, wohingegen die Zahlen 4 bis 6 für fallende Kurse stehen. Wird z. B. beim ersten Wurf eine 2 gewürfelt, so steigt der Kurs auf 101 €. Ist Fortuna dem Würfler nicht mehr hold, und es wird eine 6 gewürfelt, so erniedrigt sich der Aktienkurs um einen Euro auf wiederum 100 €. Wenn man dieses Spiel einige tausend Mal spielt und das Ergebnis in ein Diagramm einträgt, so erhält man folgendes Bild.



Dieser wild oszillierende Graph zeigt die einzelnen Würfe, der untere Graph zeigt die daraus resultierende Kursentwicklung.

[8] Vgl. Beta, T.: Chaostheorie, Wirtschaft und Börse, R. Oldenbourg Verlag, München, 2. Aufl., 1997, S. 12ff.

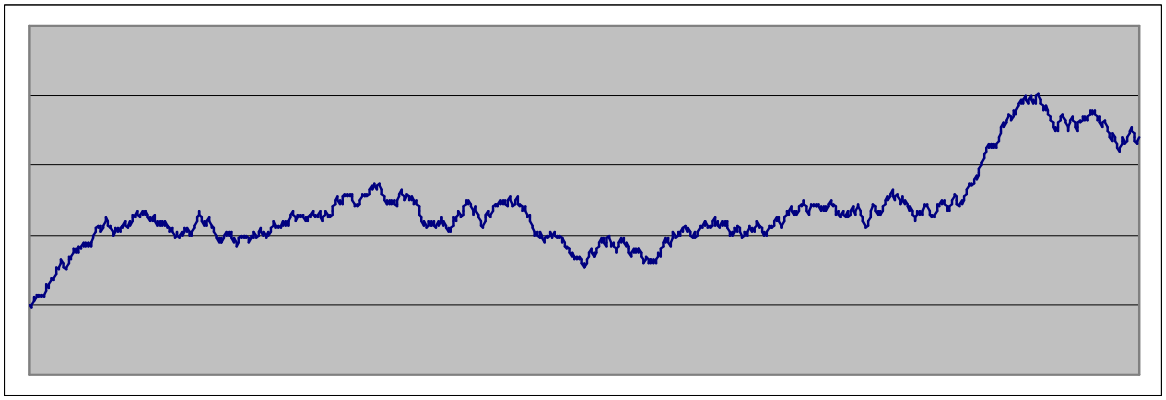


Abbildung 1: Simulierte Börsenkurse durch Würfeln mit Gaußschen Zufallszahlen

Tatsächlich sieht der simulierte Börsenverlauf aus Abbildung 1 doch ganz ähnlich aus, wie bei einer tatsächlich gehandelten Aktie (s. z. B. Abbildung 14, S. 75). Wie bei der Brownschen Bewegung wird die Aktie hin- und hergeschickt. Führt man jetzt dieses Experiment mehrmals (einige tausend Mal) durch und notiert sich am Ende jeweils den Endstand der Aktie, und zählt man dann, wie häufig die Aktie den Endwert von 100 € erreicht hat, wie oft sie bei 99 bzw. 101 € oder bei 98 bzw. 102 € schloss, und trägt man das Ergebnis dann in ein Diagramm ein, wobei auf der x-Achse die Abweichung vom Startwert (z. B. hat 102 € eine Abweichung vom Startwert 100 von 2 %) notiert wird und auf der y-Achse die Häufigkeit, so erhält man folgendes Ergebnis.

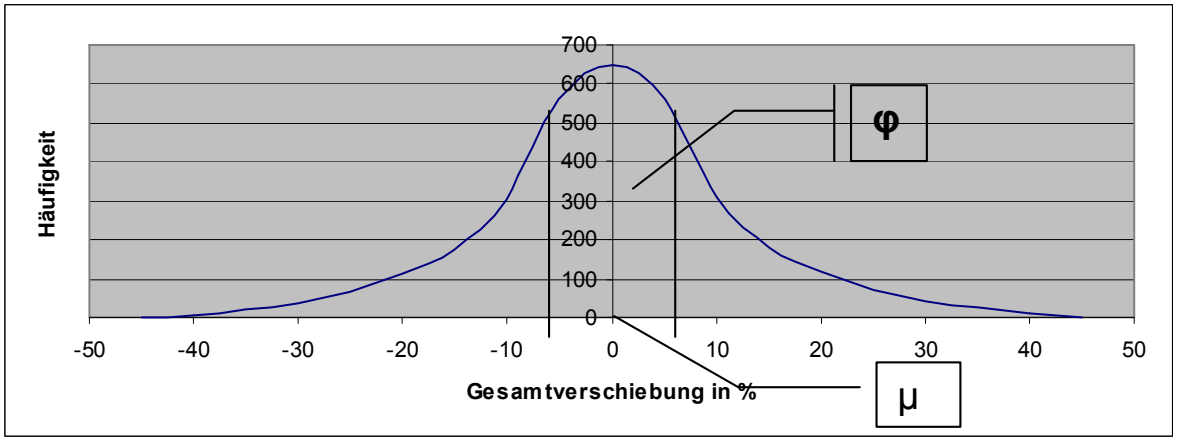


Abbildung 2: Endpositionen der Aktie ausgezählt nach Häufigkeiten nach ca. 1.000 Durchläufen

Abbildung 2 zeigt, dass bei einer Abweichung von null die größte Häufigkeit vorkommt, während größere Abweichungen immer seltener werden. Das heißt, der Aktienkurs pendelt immer um seinen Startkurs.

Einschub: In der Praxis beobachtet man tatsächlich, dass Aktienkurse langfristig ihrem Mittel (= arithmetisches Mittel) entgegenstreben. Dabei schwanken die Kurse in einer bestimmten Bandbreite um das arithmetische Mittel (Mean-Reversion-Effekt). Diese Schwankungen können aufwärts, abwärts oder seitwärts verlaufen. Aus dieser Beobachtung leitet sich die Börsenweisheit „*What goes up, must come down and vice versa*“ ab.

Der Graph aus Abbildung 2 erinnert schon stark an die berühmte Gaußsche Glockenkurve. Würde man das Würfelexperiment nicht nur tausend Mal durchführen, sondern eine Million Mal, und würde man jeweils die Endpositionen der Aktie notieren, dann würde sich der Graph immer genauer der Gaußschen Glockenkurve annähern (zentraler Grenzwertsatz). Deswegen streben die ausgezählten Häufigkeiten gegen die Normalverteilung[9].

Die Normalverteilung ist dadurch gekennzeichnet, dass sich alle Werte symmetrisch um den Wert μ (siehe Abbildung 2) verteilen. μ definiert die größte Häufung, die von diesem Wert aus in beiden Richtungen (also zu größeren und kleineren Werten) gleichmäßig abnimmt[10]. Aber ebenso hat die Fläche unterhalb der Kurve eine wichtige Bedeutung. Sie kann als Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden. Den Begriff Wahrscheinlichkeit kann man am besten mit einem Fall aus einer der beliebten Gerichtsshows im Fernsehen erklären. Innerhalb eines fiktiven Gerichtsverfahrens um einen Raubüberfall wird als einziges Indiz gegen den Angeklagten eine DNA-Spur vom Tatort angeführt. Dabei sagt der Gutachter aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte DNA-Probe mit der Probe vom Tatort übereinstimmt, nur 0,0001 % beträgt. Wenn jemand nun dieses DNA-Profil hat, dann ist es so

---

[9] Unter Normalverteilung versteht man eine Häufigkeitsverteilung, welche die Form der Gaußschen Glockenkurve hat. Weiterhin gilt, dass bei der Gaußschen Glockenkurve kleine Abweichungen vom Mittelwert häufig sind und große immer unwahrscheinlicher (seltener) werden.

[10] Damit ist der Wert μ als Ergebnis am wahrscheinlichsten. Diesen wahrscheinlichsten Wert einer Zufallsvariablen X bezeichnet man auch als Erwartungswert. Sind aus der Vergangenheit bereits Werte der Zufallsvariablen bekannt, lässt sich der Erwartungswert durch ihren Mittelwert annähern.

gut wie sicher, dass ein entsprechender DNA-Test einen Treffer zeigt. Schließlich beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der DNA-Test bei einer Probe einen Treffer anzeigt, obwohl sie nicht übereinstimmt, lediglich 0,001 %. Würden Sie den Angeklagten aufgrund dieser DNA-Probe verurteilen? Die meisten würden dies sicher tun. Ist das aber richtig? Könnte der Angeklagte nicht unschuldig sein, auch wenn die DNA-Probe ihn mit dem Tatort in Verbindung zu bringen scheint?

Rechnen wir das Beispiel doch einmal mit ‚echten' Zahlen gegen. So haben von 10 Millionen Menschen immerhin 10 (0,0001 %) ein DNA-Profil, welches mit der Probe übereinstimmt – egal ob sie am Tatort waren oder nicht. Von den übrigen 9.999.990 Menschen zeigt der DNA-Test in immerhin 0,001 % der Fälle, d. h. bei 100 Menschen, fälschlicherweise ein positives Ergebnis an. Das bedeutet, dass bei einer Stichprobe von 10 Millionen Menschen der DNA-Test insgesamt 110 Treffer liefern würde. Von diesen 110 Menschen haben tatsächlich aber nur 10 Menschen dasselbe DNA-Profil, das am Tatort sichergestellt werden konnte. Ein Schuldspruch nur aufgrund dieses DNA-Testes würde bedeuten, einen Menschen aus diesen 110 herauszugreifen, und ihn der Tat zu beschuldigen[11].

Nach diesem kleinen Ausflug, sollten wir uns jetzt wieder der Normalverteilung zuwenden. Die Gesamtfläche unter der Kurve (in Abbildung 2) ist definitionsgemäß gleich 1, d. h. die Wahrscheinlichkeit, einen Aktienkurs (aus unserem Beispiel) unter der Kurve zu finden, muss gleich 1, also 100 %, sein. Mathematisch wird dies so formuliert:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

In Worten: Wenn X eine beliebige (zufällige) Größe (z. B. Aktie) ist, so ist die Wahrscheinlichkeit (P), dass X zwischen den Werten a und b liegt, durch die Fläche unterhalb der Kurve zwischen diesen beiden Punkten zu verstehen. Zudem sei f(x) gleich die Funktion, welche die Normalverteilung beschreibt. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig ausgewählter Wert unseres Beispiels (siehe Abbildung 2) in dem eingezeichneten Bereich $\mu \pm \phi$

[11] Vgl. Quarks & Co – Die Wissenschaft vom Zufall. Sendung vom 12.11.2002, www.quarks.de

bewegt, gleich der Fläche unterhalb der Kurve zwischen (μ-φ) und (μ+φ). Für diesen Fall bekommt man einen Wert von 0,6827 (oder 68 %). Das heißt, mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % liegt der Aktienkurs in dem eingezeichneten Bereich $\mu \pm \phi$.

Einschub: Funktion der Gaußschen Glockenkurve

$$\Phi_X(x|\mu;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \Pi \cdot \sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \text{ für } x \in \Re \text{ wobei } E(X) = \mu \text{ und } varX = \sigma^2 \text{ (Varianz)}$$

ist.

Man sagt, X ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2, in Symbolschreibweise $X \sim \Phi_x\left(x|\mu;\sigma^2\right)$ oder $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$. Das Problem ist, dass das Integral der Dichtefunktion nicht einfach analytisch berechnet werden kann. Um dieses Problem zu umgehen, wird aus X die standardisierte Zufallsvariable Z mit den Parametern 0 und 1. Mithilfe der standardisierten Zufallsvariablen wird dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit ermittelt. Die Zufallsvariable Z ist wie folgt definiert:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{var\,X}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Anhand der so bestimmten Zufallsvariablen Z kann man die Wahrscheinlichkeit durch Ablesen in der Normalverteilungstabelle[12] ermitteln. Zur Verdeutlichung gehen wir von einem Beispiel aus.

„Auf einer Hühnerfarm mit sehr vielen Hühnern werden eine Woche lang die einzelnen Eier gewogen. Als Zufallsvariable X definieren wird das Gewicht eines Eies in Gramm. Es stellt sich heraus, dass ein Ei im Durchschnitt 50 g wiegt. Der Erwartungswert E(X) ist daher 50. Außerdem ist bekannt, dass die Varianz varX = 25 g^2 beträgt. … . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei höchstens 55 g wiegt? Hierzu berechnet man zunächst die Zufallsvariable Z.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{55 - 50}{\sqrt{25}} = 1$$

Nun schaut man in der Normalverteilungstabelle nach und erhält den Wert 0,8413.

[12] In der ersten Spalte einer Normalverteilungstabelle sind die ersten zwei signifikanten Stellen der Ausprägung der Zufallsvariablen Z angegeben, in der ersten Tabellenzeile die zweite Nachkommastelle. So setzt sich Z = 1,00 zusammen aus 1,0 +0,00. Wo sich die Zeile und die Spalte des jeweiligen Z-Wertes kreuzen, steht die gewünschte Wahrscheinlichkeit. Eine Tabelle befindet sich z. B. unter http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Statistik:_Normalverteilungstabelle.

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei höchstens 55 g wiegt, bei 0,8413 oder 84,13 % liegt."[13]

Aus der Normalverteilung wird auch einer der am häufigsten genutzten statistischen Parameter abgeleitet, der Mittelwert. Er ist der zentrale Punkt, das Maximum der Gaußschen Glockenkurve. Mathematisch berechnet wird er, indem alle Werte addiert und mit der Anzahl der Werte dividiert werden.

$$\mu = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n}{N}$$

wobei μ = Mittelwert, N =Anzahl der Messwerte, x_n = einzelne Messwerte

Zudem muss zwischen dem Mittelwert einer Sichtprobe $(\bar{x})$ und der Grundgesamtheit einer Stichprobe (μ) unterschieden werden. Diese Unterscheidung ist wichtig, weil beide Mittelwerte üblicherweise einen anderen Wert haben, wobei sich $(\bar{x})$ umso mehr (μ) annähert, je größer der Umfang der Stichprobe wird.

Einschub: Diskrete Rendite und stetige Rendite

Die Rendite ist für Anleger eine wichtige Entscheidungsgröße zur Auswahl einer Anlage. Dabei ist zu unterscheiden zwischen der diskreten und der stetigen Rendite.
Die diskrete, einperiodische Rendite kann als prozentuale Änderungsrate eines Kurses K_{t-1} nach K_t im Zeitablauf t-1 $\rightarrow$ t definiert werden.

$$R_t = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}$$

mit R_t = diskrete Rendite, K_t = Kurs am Ende der Betrachtungsperiode und K_{t-1} = Kurs am Anfang der Betrachtungsperiode.

Dagegen geht das zweite Renditemaß, die logarithmierte bzw. stetige Rendite, von einer kontinuierlichen Verzinsung aus.

$$r_t = \ln\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right) \text{ mit } r_t = \text{stetige Rendite}$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt die wesentlichen Unterschiede beider Renditebegriffe.

[13] Beispiel aus: http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Statistik:_Normalverteilung (Stand 08.10.2009)

	R_t	r_t
Mehrperiodische Rendite	$\prod_{t=1}^{T}(R_t+1)-1$	$\sum_{t=1}^{T} r_t$
Durchschnittsrendite	$\sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}(R_t+1)}-1$	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$
Zusammenhang zwischen beiden Renditen	$R_t = e^{r_t}-1$	$r_t = \ln(R_t+1)$

Normalerweise kann bei Tagesdaten, bei denen die Kurse von Tag zu Tag relativ wenig schwanken, der Unterschied zwischen den beiden Renditen beinahe vernachlässigt werden. Dagegen wird die Differenz immer größer, je größer der Untersuchungszeitraum ist.

Leider ist der Mittelwert einer Serie von Messdaten alleine nicht immer aussagekräftig, da es einen Unterschied macht, ob bei gleichen Mittelwerten die Streuung der Daten (um den Mittelwert) groß oder klein ist. Dies lässt sich aus dem Mittelwert nicht erkennen.

Dazu eignet sich die Standardabweichung vom Mittelwert. Für die Standardabweichung der Grundgesamtheit wird das Symbol φ verwendet, für die Standardabweichung einer Stichprobe *s*. Es gilt wieder: Die Standardabweichung einer Stichprobe nähert sich mit zunehmender Größe der Stichprobe der Standardabweichung der Grundgesamtheit an. Die Größen werden nach folgenden Gleichungen berechnet.

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}} \qquad \text{und} \qquad \phi = \sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{n}}$$

Diese Rechnung sieht viel komplizierter aus, als sie ist. Zunächst wird ein Mittelwert aller Daten berechnet und dann jeweils das Quadrat der Differenz jedes einzelnen Wertes zu diesem Mittelwert aufsummiert. Zum Schluss wird durch die Anzahl der Daten dividiert und die Wurzel gezogen. Die Quadratierung der Differenzen ist notwendig, weil sich sonst positive und negative Differenzen aufheben würden und man stets wenig aussagekräftige Werte um null errechnete. Es ist selbstverständlich, dass stark auseinanderliegende Werte auch größere Differenzen zum Mittelwert erzeugen, welche durch das Quadrieren nochmals vergrößert werden Damit wächst auch die Summe dieser Differenzquadrate an. Deshalb gilt: je größer die Schwankungsbreite ist,

desto größer ist die Standardabweichung (oder Volatilität). Damit sind zwar auch höhere Renditechancen verbunden, diese sind aber gleichzeitig verknüpft mit dem Risiko auf einen entsprechend höheren Verlust. Diese doch sehr banale Aussage kann mithilfe der Zweidrittelregel der Wahrscheinlichkeitstheorie (s. S. 11) spezifiziert werden. Diese Regel sagt aus, dass die Rendite einer Anlageform mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 zwischen dem Erwartungswert abzüglich der Volatilität (anderer Begriff für die Standardabweichung) und dem Erwartungswert zuzüglich der Volatilität, d. h. im Intervall [μ-σ; μ+σ], liegt:

In $\mu \pm 1\varphi$ liegen 68,27 %,

in $\mu \pm 2\varphi$ liegen 95,45 % und

in $\mu \pm 3\varphi$ liegen 99,73 % aller Messwerte (Beispiel Aktienkurse)

Überdies ist die Volatilität einer Aktie keine feststehende Größe, sondern sie kann sich innerhalb kurzer Zeit ändern. Deshalb werden für die Volatilitätsberechnung meistens kurze Zeiträume verwendet. Allerdings werden in der Regel alle berechneten Volatilitäten auf ein Jahr bezogen.

Tagesrenditen: $\sigma_{annualisierte} = \sigma \cdot \sqrt{250}$

Monatsrenditen: $\sigma_{annualisierte} = \sigma \cdot \sqrt{12 \cdot \frac{250}{365}}$

Jahresrenditen: $\sigma_{annualisierte} = \sigma$

Hin und wieder ist auch von der Varianz die Rede. Die Varianz[14] (v oder var) ist eine mit der Standardabweichung vergleichbare Größe, weil sie das Quadrat der Standardabweichung darstellt. Zwischen den beiden Größen besteht also kein fundamentaler Unterschied.

$$v = s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Wichtig zu wissen ist allerdings, dass sich Standardabweichung und Varianz von einem Tag auf ein Jahr ganz einfach übertragen lassen, weil sie sich mit

[14] Die Varianz drückt vereinfacht gesagt aus, mit welcher Abweichung vom Erwartungswert bzw. Mittelwert durchschnittlich zu rechnen ist. Da es hier egal sein soll, ob die Abweichung nach oben oder unten auftritt, wird das Quadrat der Abweichung genutzt.

der Zeit linear ändern. Geht man von einem Handelsjahr von 252 Handelstagen aus, so gilt:

$$\sigma^2_{\text{Jahr}} = 252 \cdot \sigma^2_{\text{Tag}}$$

Damit die Normalverteilung angewendet werden darf, muss die Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse gewährleistet sein. So darf bei unserem Würfelexperiment (s. S. 8) der erste Wurf keinen Einfluss auf den zweiten und der zweite keinen Einfluss auf den dritten usw. haben. Folglich haben Informationen aus der Vergangenheit keinen Einfluss auf die weitere Entwicklung. Würden wir z. B. bei unserem Würfelexperiment die soeben gewürfelte Zahl auf dem Würfel markieren und beim folgenden Wurf nur die verbleibenden Zahlen berücksichtigen, so hätte hier plötzlich die Vergangenheit einem Einfluss auf die Zukunft und eine Normalverteilung läge nicht mehr vor.

Einschub: Die Weltformel der Börsen – die Normalverteilung

An allen Börsen der Welt kalkuliert man mithilfe der Normalverteilung das Risiko oder die Rendite. Wie geht das eigentlich?
Nehmen wir an, Sie möchten 10.000 € investieren. Das Geld steht Ihnen zwei Jahre uneingeschränkt zur Verfügung. Sollten Sie es nun sicher in Anleihen investieren oder auf einem Tagesgeldkonto parken oder vielleicht etwas riskanter in Aktien anlegen? Ein gewiefter Börsianer würde nun die Formel der Gaußschen Normalverteilung zu Rate ziehen. Dabei berücksichtigt er, dass derjenige, der sich für Aktien entscheidet, auch Verluste ertragen muss.
Für die Investmententscheidung muss eine zweite Fragestellung berücksichtigt werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktienanlage nach zwei Jahren noch mindestens 8.000 € wert ist? Der Börsianer legt also seine Verlustgrenze fest.
Um diese Verlustwahrscheinlichkeit berechnen zu können, muss man zunächst die Annahme treffen, dass die Verteilungsfunktion der Renditen des DAX lognormalverteilt ist.

$$\text{Annahme } \ln\left(\frac{\text{DAX}_T}{\text{DAX}_0}\right) \text{ ist normalverteilt.}$$

DAX_T drückt dabei die Verteilung des DAX-Standes in zwei Jahren aus, DAX_0 den aktuellen DAX-Stand.
Im folgenden Schritt müssen der Erwartungswert und die Varianz des DAX bestimmt werden. Wie schon angesprochen, ist die Varianz ein Streuungsmaß, das die Abwei-

chung der DAX-Stände von ihrem Erwartungswert misst. Der Erwartungswert spiegelt die zu erwartende DAX-Rendite (r_{DAX}) wider. Sie wird aus der Vergangenheit gebildet. Hierzu verwenden wir die Periode 30.12.1987 (DAX-Stand 1.000) bis 30.12.2009 (DAX-Stand 5.957). Aus diesen Daten schätzen wir die zu erwartende DAX-Rendite.

$$1000 \cdot (1+r)^{22} = 5957$$

$$1 + r = \sqrt[22]{\frac{5957}{1000}} = \sqrt[22]{5,957} = 1,0845 \Rightarrow r = 8,45\ \%$$

Die erwartete DAX-Rendite beträgt also 8,45 %. Als nächster Schritt muss die Varianz geschätzt werden. Dazu kann entweder auf die historische Schwankung des DAX oder aber auf die aktuelle gesetzt werden. Dazu veröffentlicht die *Deutsche Börse* den Index VDAX-New, der allerdings die Volatilität angibt. Die Volatilität wird dann zur Bestimmung der Varianz verwendet. Ich verwende in der Regel den Mittelwert für ein paar Jahre, umso Phasen hoher und niedriger Volatilität berücksichtigen zu können. Für den Zeitraum vom 06.10.2006 bis zum 28.05.2010 betrug der Mittelwert des VDAX-New 26,69 %. Das heißt, die erwartete Schwankung des DAX für die folgende Zeit ist 26,69 % pro Jahr. Der entscheidende Nachteil der Varianz ist, dass sie keine Einheit besitzt. Deshalb ist es besser, die Standardabweichung bzw. Volatilität zu verwenden. Die Verteilungsfunktion der log-normalverteilten DAX-Renditen in zwei Jahren sieht wie folgt aus:

$$\ln\left(\frac{DAX_T}{DAX_0}\right)$$

Daraus folgt für die Varianz:

$$\sigma^2 = 2 \cdot \upsilon^2 = 2 \cdot (0,2669)^2 = 0,1424 \quad \text{mit } \sigma = \text{Varianz und } \upsilon = \text{Volatilität}$$
$$\sigma = 0,3774$$

Als Zwischenergebnis halten wir fest, dass der Mittelwert der DAX-Renditen 8,45 % und die Standardabweichung 37,74 % beträgt.
Kommen wir jetzt zu unseren eingangs gestellten Fragen. Wie hoch ist also die Wahrscheinlichkeit (Ws) bei einer Vollinvestition in den DAX (z.B. über einen ETF) nach zwei Jahren noch mindestens 8.000 € zu besitzen?

Nebenrechnung: $\frac{8000}{10000} = 0,8$

Das heißt, es muss gelten Ws ($DAX_T \geq DAX_0 \cdot 0,8$) $\rightarrow Ws\left(\frac{DAX_T}{DAX_0}\right) \geq 0,8$. Zur Lösung die-