Steffen Timmann

Repetitorium der Funktionentheorie

HANSER

REPETITORIUM

DER

FUNKTIONENTHEORIE

Steffen Timmann, Hannover

1. Auflage, Ebook

Binomi Verlag , Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon	05105 6624000
E–Mail	verlag@binomi.de
Internet	www.binomi.de

Zu beziehen beim Verlag, www.binomi.de

ISBN **978–3–923 923–79–3**

Hannover 04/21

Vorwort

Das vorliegende *Repetitorium der Funktionentheorie* ist für Physik-, Mathematik- und Ingenieur-Studenten gedacht zum Gebrauch während des Studiums und zur Prüfungsvorbereitung. Es deckt in etwa den Stoff einer Einführungsvorlesung in die Funktionentheorie einer Veränderlicher ab.

Auf den ersten 130 Seiten findet man eine Zusammenstellung der wichtigsten Definitionen und Sätze. Sie werden ergänzt durch Methoden, Kochrezepte und Beispiele. Es wurde versucht, das Buch so unabhängig wie möglich zu schreiben, ohne seinen Umfang zu sprengen. Ca 400 Aufgaben mit Lösungen füllen die restlichen 200 Seiten.

Das Funktionentheorie Repetitorium schliesst sich in Gestaltung und Inhalt an die Repetitorien der Analysis und der Differentialgleichungen an, die seit 1991 vom gleichen Verfasser und im gleichen Verlag erscheinen. Die dort im Vorwort gemachten Bemerkungen gelten auch für dies Repetitorium, insbesondere der Hinweis, dass ein Repetitorium keine systematische Einführung in das betreffende Teilgebiet der Mathematik ist, sondern eine komprimierte Zusammenfassung von Ergebnissen und Definitionen. Für Beweise verweise ich auf die Lehrbücher des Literaturverzeichnisses im Anhang, manche finden sich auch unter den Übungsaufgaben.

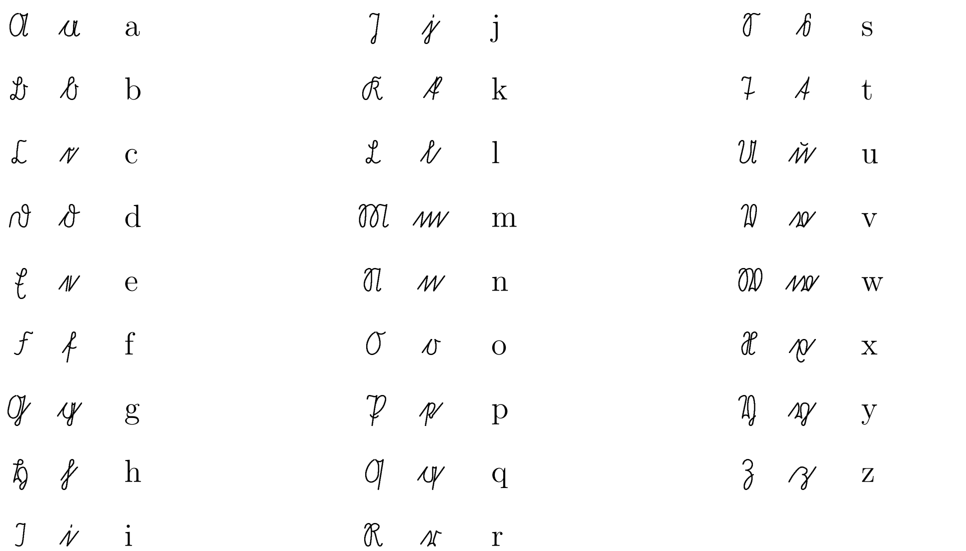
Hannover, den 1.8.2007

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet



Teil I
Theorie

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition

Das Standardmodell der komplexen Zahlen

Reelle Zahlen kann man sich als Punkte einer Geraden, komplexe Zahlen als Punkte einer Ebene vorstellen. Genauer:

Definition:
Die Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen x, y bilden zusammen mit den durch

$$(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v) \tag{1}$$
$$(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu) \tag{2}$$

definierten Operationen einen (kommutativen) Körper. Er heißt der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

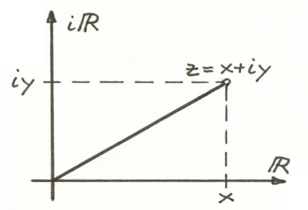
Üblicherweise identifiziert man die reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit den Punkten $(x, 0)$ auf der x-Achse. In diesem Sinne ist $\mathbb{C}$ ein *Oberkörper* von $\mathbb{R}$.

Genauer: Die Abbildung $\varphi\colon x \mapsto (x, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. Insbesondere gilt $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$ und $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$. Man sagt "$\mathbb{R}$ *wird durch* φ *in* $\mathbb{C}$ *eingebettet*" und schreibt meist $\mathbb{R}$ statt $\varphi(\mathbb{R})$ und x statt $(x, 0)$.

Für $i := (0,1)$ gilt $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig in der Form $z = (x,y) = x + iy$ mit reellem x und y schreiben (sog. *cartesische Darstellung*). *Realteil* $x =: \mathsf{Re}\, z$ und *Imaginärteil* $y =: \mathsf{Im}\, z$ heißen die *cartesischen Koordinaten* von z.
Auch der Imaginärteil ist eine reelle Zahl!
Es ist $z = \mathsf{Re}\, z + i\, \mathsf{Im}\, z$ und es gilt:

$$z = w \iff \mathsf{Re}\, z = \mathsf{Re}\, w \text{ und } \mathsf{Im}\, z = \mathsf{Im}\, w.$$



Das multiplikativ Inverse von $z = x + iy \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \,. \tag{3}$$

Die x-Achse heißt *reelle Achse* $\mathbb{R}$, die y-Achse die *imaginäre Achse* $i\mathbb{R}$ von $\mathbb{C}$.

Algebraische Charakterisierung

Satz:
Es gibt bis auf Isomorphie nur einen algebraischen Erweiterungskörper zweiten Grades von $\mathbb{R}$, nämlich den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Algebraisch ist $\mathbb{C}$ nur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In Aufgabe 7.1.A finden Sie einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper von Matrizen.

Tieferliegender ist der

Satz von Frobenius:
Es gibt bis auf Isomorphie nur einen endlich dimensionalen echten kommutativen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, nämlich $\mathbb{C}$.

D.h.: Ist $\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ ein kommutativer Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \neq \mathbb{K}$ und $\dim[\mathbb{K} : \mathbb{R}] < \infty$, so ist $\dim[\mathbb{K} : \mathbb{R}] = 2$ und $\mathbb{K}$ ist isomorph zu $\mathbb{C}$. Die Quaternionen bilden einen nichtkommutativen Erweiterungskörper der Dimension 4 über $\mathbb{R}$. Die rationalen Funktionen oder die meromorphen Funktionen bilden unendlich dimensionale kommutative Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$.

1.2 Rechnen in $\mathbb{C}$

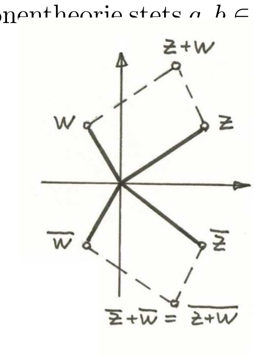
In $\mathbb{C}$ kann man (mit '+' und '$\cdot$') rechnen wie in jedem anderen Körper. Insbesondere gelten alle Regeln, die direkt aus den Körperaxiomen folgen, wie z.B. die Binomialformel und die Formel für die endliche geometrische Reihe. Eine Liste der Körperaxiome finden Sie z.B. in [RA1] Abschnitt 1.1.4.

Dagegen kann $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden, d.h. es gibt keine lineare Ordnung '$<$' auf $\mathbb{C}$ derart, dass die Monotonieaxiome

$$x < y \implies x + z < y + z \quad \text{und} \quad x < y,\ z > 0 \implies xz < yz \tag{1}$$

für Addition und Multiplikation erfüllt sind. In angeordneten Körpern gilt nämlich $1 > 0$, $-1 < 0$ und $x^2 := x \cdot x \geq 0$ für alle x. Also kann $\mathbb{C}$ wegen $i \cdot i = -1 < 0$ nicht angeordnet werden.

Aus Ungleichungen wie z.B. '$a < b$' folgt in der Funktionentheorie stets $a, b \in \mathbb{R}$



1.2.1 Komplexe Konjugierung

Ist $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, so heißt $\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe* Zahl.
Geometrisch entspricht die Konjugierung der Spiegelung an der x-Achse.
Die Konjugierung $\{z \mapsto \overline{z}\}$ ist ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$, d.h. es gilt
$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Der Körper der reellen Zahlen besitzt außer der Identität keinen Automorphismus. $\mathbb{C}$ besitzt unendlich viele Körperautomorphismen. Die komplexe Konjugierung ist nur einer davon. Allerdings gilt: Ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ punktweise fest lässt, ist notwendig die Identität oder die komplexe Konjugierung. Siehe dazu Aufgabe 7.1.C.

Rechenregeln: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\overline{z \pm w} & = & \overline{z} \pm \overline{w} & \overline{z \cdot w} & = & \overline{z} \cdot \overline{w} \\
\overline{z/w} & = & \overline{z}/\overline{w} \quad (w \neq 0) & \overline{(\overline{z})} & = & z \\
z + \overline{z} & = & 2\,\mathsf{Re}\,z & z - \overline{z} & = & 2i\,\mathsf{Im}\,z \\
\overline{z} = z & \Longleftrightarrow & z \in \mathbb{R} & \overline{z} = -z & \Longleftrightarrow & z \in i\mathbb{R}
\end{array}$$

1.2.2 Betrag und Argument, Polarkoordinaten

Definition:
Der *Betrag* $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ist der gewöhnliche euklidische Betrag des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, also der Abstand von z zum Ursprung 0 :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \quad |z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \overline{z}\ .$$

Rechenregeln: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{array}{l@{\qquad\qquad}l}
|z| \geq 0 & |z| = 0 \iff z = 0 \\
|z \cdot w| = |z| \cdot |w| & |z| = |\overline{z}| \\
\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} & \dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0) \\
\big||z| - |w|\big| \leq |z + w| \leq |z| + |w| & |z| \geq |w| - |z - w| \\
|\mathsf{Re}\,z| \leq |z| & |\mathsf{Im}\,z| \leq |z| \\
|z/\overline{z}| = |\overline{z}/z| = 1 \quad (z \neq 0) &
\end{array}$$

Mit Hilfe des Betrages $r := |z|$ lässt sich jede komplexe Zahl $z = x + iy$ in der Form

$$z \;=\; r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \;=\; r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

mit $r, \varphi \in \mathbb{R},\ r \geq 0$ darstellen *(Eulersche Formel)*. Zur komplexen Exponentialfunktion siehe 2.6.1.

Jede derartige reelle Zahl φ heißt ein *Argument* von z, geschrieben $\varphi = \arg z$. Betrag und Argument heißen die *Polarkoordinaten* von z.

Im Gegensatz zum Betrag ist das Argument einer komplexen Zahl nicht eindeutig definiert. Für $z \neq 0$ ist es nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Für $r, s > 0,\ \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt

$$r\,\mathrm{e}^{i\varphi} = s\,\mathrm{e}^{i\psi} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s \ \text{ und } \ \varphi = \psi + 2k\pi \ \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\ . \tag{2}$$

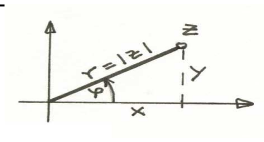
$z = 0$ besitzt jede reelle Zahl als Argument. In manchen Büchern wird allerdings für die komplexe Zahl 0 kein Argument definiert.

Für $z = x + iy = r\,\mathrm{e}^{i\varphi},\ x, y, r, \varphi \in \mathbb{R},\ r > 0$ gelten die

Umrechnungsformeln:

$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = y/x \quad (*)$



Achtung ! Gleichung $(*)$ ist mit Vorsicht zu genießen. Einmal ist sie für $x = 0$ sinnlos. Zum anderen ergibt sich der richtige Winkel immer erst durch Überprüfen des Quadranten, in dem der betrachtete Punkt liegt. Die Winkel φ und $\varphi + \pi$ haben denselben Tangens. Das Vorzeichen von x oder y liefert den richtigen von den beiden.

Für $z \neq 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Argument ϕ mit $-\pi < \phi \leq \pi$. Dieser Winkel $\phi =: \operatorname{Arg} z$ heißt auch *Hauptwert des Arguments* von z.

Als *Winkel zwischen zwei komplexen Zahlen* $z = x+iy, w = u+iv \neq 0$ definiert man

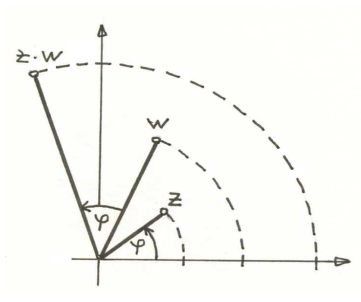
$$\sphericalangle(z, w) \ :=\ |\operatorname{Arg}(z/w)| \ =\ \arccos\frac{xu + yv}{|z|\cdot|w|}\ . \tag{3}$$

Aus den Additionstheoremen von sin und cos folgt

$$\begin{aligned} r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\cdot s\,\mathrm{e}^{i\psi} &= \big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]\cdot\big[s(\cos\psi + i\sin\psi)\big] \\ &= rs\,\big[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big] \\ &= rs\,\mathrm{e}^{i(\varphi+\psi)}\ . \end{aligned} \tag{4}$$

D.h. geometrisch bewirkt die Multiplikation mit der komplexen Zahl $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ eine Streckung um den Faktor $s = |w|$ und eine Drehung um den Winkel $\psi = \arg w$.
Für Quotienten und Konjugierte komplexer Zahlen gelten die Rechenregeln:

$$\frac{r\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{s\,\mathrm{e}^{i\psi}} \ =\ \frac{r}{s}\,\mathrm{e}^{i(\varphi-\psi)} \qquad ; \qquad \overline{r\,\mathrm{e}^{i\varphi}} \ =\ r\,\mathrm{e}^{-i\varphi}$$



Auf Grund dieser einfachen Regeln sind Polarkoordinaten für die Multiplikation komplexer Zahlen besser geeignet als cartesische.

1.2.3 Potenzen und Wurzeln

Potenzen:

Komplexe Zahlen werden zweckmäßig in der Polarkoordinatendarstellung potenziert. Für $z = r\,e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gilt *(Formel von Moivre)* :

$$z^n \;=\; \left(r\,e^{i\varphi}\right)^n \;=\; r^n\,e^{in\varphi} \;=\; r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\ . \tag{5}$$

Natürlich kann man z^n auch in cartesischen Koordinaten mit Hilfe der in jedem Körper gültigen Binomialformel berechnen (deutlich ungünstiger).

Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten werden mit Hilfe von Exponentialfunktion und Logarithmus definiert (siehe 2.6.4). Man setzt

$$z^w \;:=\; e^{w\log z} \quad \text{für } z \neq 0\ . \tag{6}$$

Wurzeln:

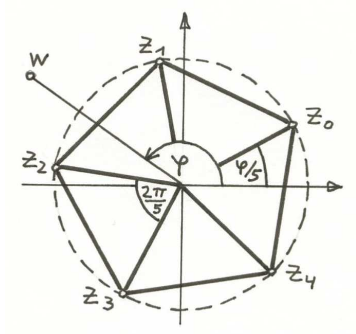
Zu jeder komplexen Zahl $w = r\,e^{i\varphi} \neq 0,\ r,\varphi \in \mathbb{R},\ r > 0$ gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^n = w$, die sog. n-ten *Wurzeln* von w. Und zwar sind dies die Zahlen

$$z_k := \sqrt[n]{r}\ e^{i(\varphi+2k\pi)/n)} = r^{1/n}\left[\cos\left(\tfrac{\varphi}{n} + k\tfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{n} + k\tfrac{2\pi}{n}\right)\right] \tag{7}$$

mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *(Formel von Moivre).*

Dabei ist $r^{1/n} = \sqrt[n]{r}$ die eindeutig bestimmte positive reelle n-te Wurzel von $r > 0$.

$w = 0$ besitzt natürlich nur $z = 0$ als einzige n-te Wurzel. Für $w \neq 0$ bilden die n verschiedenen n-ten Wurzeln die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Sie haben alle den gleichen Betrag $r^{1/n}$ und gehen durch Drehung um $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ineinander über.



$\sqrt{w}$ ist im Komplexen nicht wie im Reellen eindeutig definiert. In $\mathbb{C}$ bezeichnet $\sqrt{w}$ irgendeine der beiden Quadratwurzeln von w.

Die n-ten Wurzeln von $w = 1$ heißen die n-ten *Einheitswurzeln*:

$$\varepsilon_{n,k} := e^{i2k\pi/n} = \cos\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\tfrac{2\pi}{n}\right)\ ,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{8}$$

Die n-ten Einheitswurzeln bilden eine zyklische Gruppe der Ordnung n.
Ihre erzeugenden Elemente heißen *primitive* n-te Einheitswurzel.

Primitive n-te Einheitswurzeln sind also solche, deren Potenzen alle n-ten Einheitswurzeln durchlaufen. $\varepsilon_{n,k}$ ist genau dann primitiv, wenn $\mathrm{ggT}(n,k) = 1$. Sicher ist $\varepsilon_{n,1} = e^{2\pi i/n}$ primitiv.

Quadratwurzeln in cartesischen Koordinaten:

Die beiden Quadratwurzeln von $w := u + iv \neq 0,\ u, v \in \mathbb{R}$, sind

$$z_{1,2} = \pm \begin{cases} \sqrt{\tfrac{1}{2}(u + |w|)} + i\tfrac{v}{|v|}\sqrt{\tfrac{1}{2}(-u + |w|)} & \text{für } v \neq 0 \\ \sqrt{|w|} = \sqrt{u} & \text{für } v = 0,\ u > 0 \\ i\sqrt{|w|} = i\sqrt{-u} & \text{für } v = 0,\ u < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Für $p, q \in \mathbb{C}$ gilt wie im Reellen die Formel:

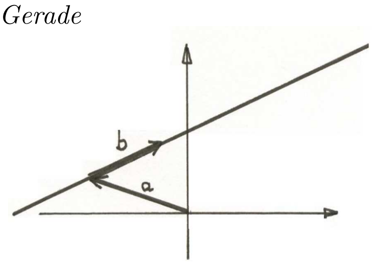
$$z^2 + pz + q = 0 \iff z = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}\ . \tag{10}$$

Dabei ist $\sqrt{p^2 - 4q}$ eine der beiden Quadratwurzeln von $p^2 - 4q$.

1.3 Geometrisches

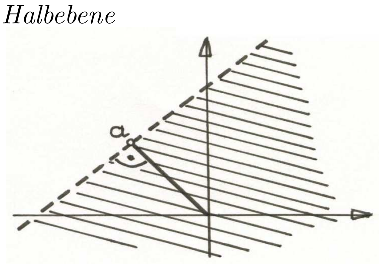
Die komplexen Zahlen sind Punkte der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$. Ebene Punktmengen lassen sich daher mit komplexen Zahlen beschreiben. Wir geben ein paar Beispiele, weitere siehe Aufgabe 7.2.B.

Gerade



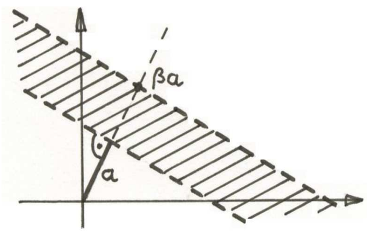
$g = \{\, z = a + tb\,;\ t \in \mathbb{R} \,\}$

Halbebene



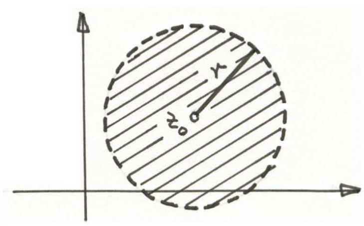
$H = \{\, z\,;\ \mathsf{Re}\,(z/a) < 1 \,\}$

Parallelstreifen



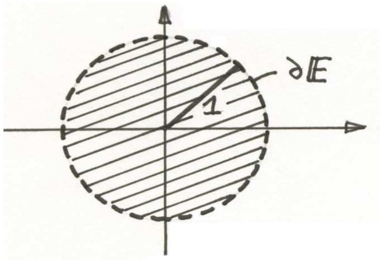
$S = \{\, z\,;\ 1 < \mathsf{Re}\,(z/a) < \beta \,\}$

Kreis



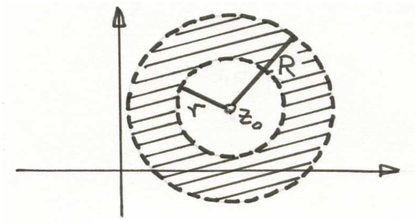
$B_r(z_0) := \{\, z\,;\ |z - z_0| < r \,\}$

Einheitskreis



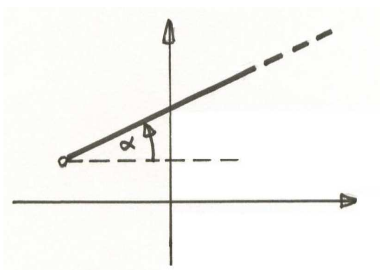
$\mathbb{E} := \{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1 \,\}$
$\partial\mathbb{E} := \{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1 \,\}$

Kreisring



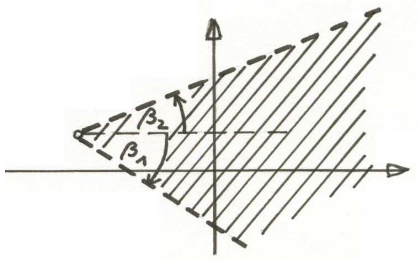
$A(z_0, r, R) := \{\, z\,;\, r < |z - z_0| < R \,\}$
$(\ 0 \le r < R \le \infty\ )$

Strahl



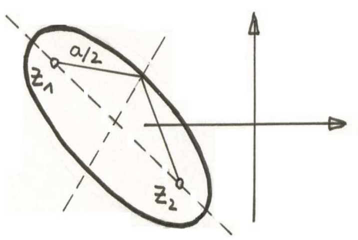
$s := \{\, z\,;\, \arg(z - z_0) = \alpha \,\}$

Winkelraum



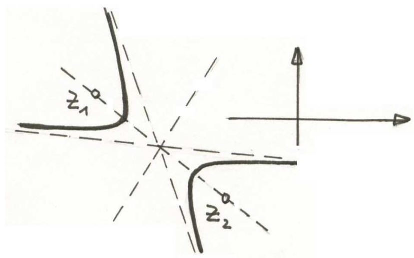
$W := \{\, z\,;\, \beta_1 < \arg(z - z_0) < \beta_2 \,\}$

Ellipse



$E = \{\, z\,;\, |z - z_1| + |z - z_2| = a \,\}$
$(\ 0 < |z_1 - z_2| < a\ )$

Hyperbel



$H = \big\{\, z\,;\, \big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = a \,\big\}$
$(\ 0 < a < |z_1 - z_2|\ )$

1.4 Die komplexe Zahlenkugel

1.4.1 Erweiterte Ebene $\widehat{\mathbb{C}}$

Es ist zweckmäßig, die Zahlenebene $\mathbb{C}$ um einen zusätzlichen Punkt $\infty \notin \mathbb{C}$ zu erweitern.

Definition:
$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *erweiterte Zahlenebene*.
$\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt auch *erweiterte reelle Gerade*.
Eine Teilmenge $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *Umgebung* von ∞, wenn U den Punkt ∞ und das Äußere $\{|z| > r\}$ einer Kreisscheibe enthält.

Dadurch wird (zusammen mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{C}$) eine Topologie $\widehat{\mathfrak{T}}$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ definiert. $\widehat{\mathbb{C}}$ ist mit dieser Topologie ein zusammenhängender, kompakter Hausdorff-Raum (die sog. *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von $\mathbb{C}$).

Die Topologie $\widehat{\mathfrak{T}}$ ist eine metrische Topologie. Sie wird durch die chordale Metrik χ (siehe Abschnitt 1.4.3) erzeugt.

Zu metrischen Räumen siehe Abschnitt 1.5.1, zur Definition von Topologien siehe auch [RA2 6.1.1].

∞ ist keine komplexe Zahl. $\widehat{\mathbb{C}}$ ist kein Körper. Es ist aber sinnvoll, die Rechenoperationen zumindest teilweise auf $\widehat{\mathbb{C}}$ fortzusetzen. Man definiert:

1) $\infty + z \ := \ z + \infty \ := \ \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$
2) $\infty \cdot z \ := \ z \cdot \infty \ := \ \infty$ für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$
3) $\dfrac{z}{\infty} \ := \ 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
4) $\dfrac{z}{0} \ := \ \infty$ für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

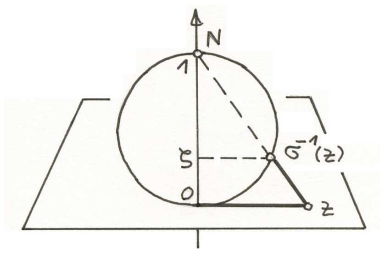
<u>Nicht</u> definiert werden Ausdrücke der Form $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

1.4.2 Stereographische Projektion

Ein geometrisches Modell der erweiterten Ebene erhält man durch die *stereographische Projektion*. Sei

$$S := \Big\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \xi^2 + \eta^2 + \big(\zeta - \tfrac{1}{2}\big)^2 = \tfrac{1}{4} \Big\} \tag{1}$$

die Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $\big(0, 0, \frac{1}{2}\big)$ und Radius $\frac{1}{2}$.
S heißt auch *(Riemannsche) Zahlenkugel*.



Vom *Nordpol* $N := (0,0,1)$ der Zahlenkugel S wird $S\backslash\{N\}$ bijektiv auf die Ebene $E := \{\,(x,y,0)\,;\,x,y\in\mathbb{R}\,\}$ projiziert. Identifiziert man E mit $\mathbb{C}$, $(x,y,0)$ mit $x+iy$, so entspricht dieser geometrischen Projektion die Abbildung

$$\sigma \;:=\; \begin{cases} S\backslash\{N\} \to \mathbb{C} \\ (\xi,\eta,\zeta) \mapsto \dfrac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \end{cases} \tag{2}$$

Durch $\sigma(N) := \infty$ wird σ zu einer bijektiven Abbildung der ganzen Zahlenkugel S auf die erweiterte Zahlenebene $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ fortgesetzt.

Für die Umkehrabbildung σ^{-1} gilt:

$$\sigma^{-1}(\infty) \;=\; (0,0,1) \quad , \quad \sigma^{-1}(z) \;=\; \frac{1}{1+|z|^2}\Big(\mathsf{Re}\,z, \mathsf{Im}\,z, |z|^2\Big) \ . \tag{3}$$

Wir werden häufig die erweiterte Ebene mit der Zahlenkugel identifizieren und beide mit dem Symbol $\widehat{\mathbb{C}}$ bezeichnen.

Achtung: In vielen Lehrbüchern wählt man als Modell der Zahlenkugel die Einheitssphäre $\big\{\,(\xi,\eta,\zeta)\,;\,\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\,\big\}\subset\mathbb{R}^3$ und projiziert diese vom Nordpol $(0,0,1)$ auf die Ebene. Die Transformationsformeln sind dann:

$$\widetilde{\sigma}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}\ ; \quad \widetilde{\sigma}^{-1}(z) \;=\; \frac{1}{|z|^2+1}\Big(2\,\mathsf{Re}\,z, 2\,\mathsf{Im}\,z, |z|^2-1\Big) \ .$$

Eigenschaften der stereographischen Projektion

1. Die stereographische Projektion $\sigma\colon S\to\widehat{\mathbb{C}}$ ist bijektiv. Sie bildet die im Nordpol gelochte Zahlenkugel $S\backslash\{(0,0,1)\}$ bijektiv auf die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ ab.

   Insbesondere wird der Kugeläquator auf den Einheitskreisrand $\partial\mathbb{E}$ abgebildet.

2. σ und σ^{-1} sind Isometrien bzgl der chordalen Metrik χ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und der euklidischen Metrik auf der Kugel $S\subset\mathbb{R}^3$, d.h. für $z,w\in\widehat{\mathbb{C}}$ gilt

   $$\chi(z,w) \;=\; \big\|\,\sigma^{-1}(z)-\sigma^{-1}(w)\,\big\| \ . \tag{4}$$

   σ und σ^{-1} sind daher stetig (und damit Homöomorphismen) bzgl der entsprechenden Topologie $\widehat{\mathfrak{T}}$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und der durch die euklidische Topologie erzeugten Relativtopologie auf $S\subset\mathbb{R}^3$.

3. σ und σ^{-1} sind winkeltreu, d.h. σ und σ^{-1} erhalten die Winkel zwischen differenzierbaren Kurven bzw ihren Tangenten. Beweis siehe Aufgabe 7.4.A.

4. σ und σ^{-1} sind *kreisverwandt*, d.h. sie bilden Kreise auf Kreise ab. Beweis siehe Aufgabe 7.4.B.

   Dabei sind *Kreise in* $\widehat{\mathbb{C}}$ definiert als Kreise in $\mathbb{C}$ oder Geraden in $\mathbb{C}$ zusammen mit dem Punkt ∞. Die letzteren 'entarteten' Kreise heißen auch *Geraden in* $\widehat{\mathbb{C}}$. Kreise in S sind nicht-triviale Schnitte von Ebenen mit der Kugelfläche S.

   Unter der stereographischen Projektion entsprechen die Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ bijektiv den Kreisen in S durch den Nordpol $N = (0,0,1)$.

1.4.3 Chordale Metrik

Der euklidische Abstand $d(\vec{x},\vec{y}) := \|\vec{x}-\vec{y}\| = \left(\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ auf der Zahlenkugel S induziert mit der stereographischen Projektion die sog. *chordale Metrik* $\chi(z,w)$ in $\widehat{\mathbb{C}}$. Man definiert

$$\chi(z,w) := \left\| \sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w) \right\| \qquad \text{für } z,w \in \widehat{\mathbb{C}} \tag{5}$$

und erhält

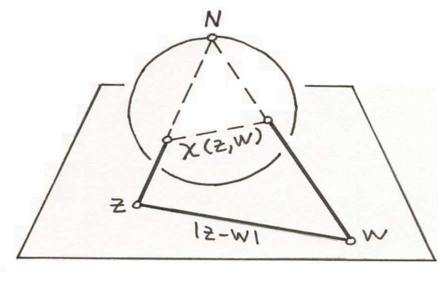
$$\chi(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\,\sqrt{1+|w|^2}} \qquad \text{für } z,w \in \mathbb{C} \quad \text{und} \tag{6}$$

$$\chi(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}\ . \tag{7}$$

Auch die Formeln (6) und (7) ändern sich natürlich, wenn man ein anderes Modell der Zahlenkugel wählt.

Die chordale Metrik χ ist eine Metrik auf $\widehat{\mathbb{C}}$. Sie erzeugt auf $\mathbb{C}$ die gleiche Topologie wie die euklidische Metrik $d(z,w) := |z-w|$.

Zu metrischen Räumen siehe Abschnitt 1.5.1. Für Aufgaben zur stereographischen Projektion siehe Abschnitt 7.4.



1.5 Topologisches

Zur Definition der topologischen Grundbegriffe siehe z.B. Kapitel 6 aus [RA2]. Hier werden nur die wichtigsten wiederholt.

$\mathbb{C}$ ist mit der euklidischen Norm $|z| := \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ ein zweidimensionaler normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Insbesondere ist er ein metrischer Raum mit der sog. *euklidischen* Metrik $d(z,w) := |z-w|$ und damit ein topologischer Raum.

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist mit der *chordalen Metrik* $\chi(z,w)$ (siehe Abschnitt 1.4.3) ein kompakter metrischer Raum.

Auf $\mathbb{C}$ sind die Metriken d und χ äquivalent, d.h. sie erzeugen dort die gleiche Topologie.

Wenn nichts anderes gesagt ist, arbeiten wir in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stets mit der euklidischen, in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit der chordalen Metrik bzw Topologie.

1.5.1 Metrische Räume

Definition:
Sei X eine nicht leere Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* oder *Abstand* auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(1)	*Positivität*	$d(x,y) \ \geq\ 0$
(2)	*Definitheit*	$d(x,y) = 0 \iff x = y$
(3)	*Symmetrie*	$d(x,y) \ =\ d(y,x)$
(4)	*Dreiecksungleichung*	$d(x,z) \ \leq\ d(x,y) + d(y,z)$

Ein *metrischer Raum* (X,d) ist eine nicht-leere Menge X zusammen mit einer *Metrik* d auf X.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq M \subset X$. Dann ist auch M mit der Einschränkung $d\big|_{M\times M}$ ein metrischer Raum (sog *Relativraum*).

$$\operatorname{diam} M \ :=\ \sup\{\, d(x,y)\,;\, x,y \in M \,\} \tag{1}$$

heißt der *Durchmesser* von M. Evt ist $\operatorname{diam} M = \infty$. Meist definiert man $\operatorname{diam}\emptyset := 0$.

Ist $\operatorname{diam} M < \infty$, so heißt M *beschränkt*, andernfalls *unbeschränkt.*

Der Abstand zweier nicht-leerer Teilmengen A, B eines metrischen Raumes (X,d) und der Abstand eines Punktes a zu einer Menge $B \neq \emptyset$ sind

$$d(A,B) := \inf\{\, d(a,b)\,;\, a \in A,\ b \in B \,\}\ ,\quad d(a,B) := d(\{a\},B)\ . \tag{2}$$

Es ist $d(A, B) = d(B, A)$ und $d(A, B) = 0$ falls $A \cap B \neq \emptyset$.
Der Abstand zweier disjunkter, auch zweier abgeschlossener disjunkter Mengen kann Null sein. Dagegen ist der Abstand einer kompakten und einer dazu disjunkten abgeschlossenen Menge stets positiv (siehe z.B. [RA2] 6.4.1.B).

Offene Mengen, innere Punkte, Umgebungen

Sei weiterhin (X, d) ein metrischer Raum. Man definiert

1. *ε-Umgebungen:*
   Ist $\varepsilon > 0$ und $x \in X$, so heißt $B_\varepsilon(x) := \{\, y \in X \,;\, d(x, y) < \varepsilon \,\}$ *ε-Umgebung* von x.

2. *Umgebungen, innere Punkte:*
   Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x und x heißt *innerer Punkt* von U, wenn U eine ε-Umgebung von x enthält.

3. *Inneres:*
   $M^0 := \{\, x \,;\, x \text{ ist innerer Punkt von } M \,\}$ heißt *Inneres* oder *innerer Kern* von M.

4. *Offene Mengen:*
   Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *offen*, wenn sie nur innere Punkte enthält, also wenn sie mit jedem $x \in M$ auch eine ε-Umgebung von x enthält.

   $\emptyset$ und X sind stets offen.

   Offene Punktmengen $D \subset \mathbb{C}$ heißen auch *Bereiche*.

   $M \subset X$ ist genau dann offen, wenn $X \setminus M$ abgeschlossen ist.

5. *Erzeugte Topologie:*
   Das System der offenen Mengen eines metrischen Raumes (X, d) bildet eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X. D.h. beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen und die leere Menge und der ganze Raum gehören zu $\mathcal{T}_d$. Man nennt $\mathcal{T}_d$ die von der Metrik *d erzeugte Topologie*. Topologische Begriffe in metrischen Räumen beziehen sich immer auf diese Toplogie.

6. *Umgebungen von Mengen:*
   $U \subset X$ heißt *Umgebung* einer Teilmenge $M \subset X$, wenn U eine offene Obermenge von M enthält.

   Ist M nicht leer und $\varepsilon > 0$, so heißt $B_\varepsilon(M) := \{\, x \in X \,;\, d(x, M) < \varepsilon \,\}$ eine *ε-Umgebung* von M.

   Eine Umgebung einer Menge M muss nicht notwendig eine ε-Umgebung von M enthalten. Z.B. ist $\left\{ x + iy \in \mathbb{C} \,;\, |y| < \frac{1}{1+x^2} \right\}$ eine (offene) Umgebung der reellen Achse $\mathbb{R}$, die keine ε-Umgebung von $\mathbb{R}$ enthält.

Häufungspunkte, isolierte Punkte, diskrete Mengen

Häufungspunkte einer Menge:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.
Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von M, wenn jede ε-Umgebung von x einen von x verschiedenen Punkt aus M enthält.

Ist x Häufungspunkt von M, so enthält jede ε-Umgebung von x auch unendlich viele Elemente vom M und x ist Häufungswert (sogar Grenzwert) einer Folge von Elementen aus $M \setminus \{x\}$.

Die Menge der Häufungspunkte von M wird oft mit M' bezeichnet. M' ist stets abgeschlossen. Natürlich kann M' leer sein.

Isolierte Punkte:
Ein Punkt $x \in M$ heißt *isolierter Punkt* von M, wenn es eine ε-Umgebung von x gibt, die außer x keinen Punkt aus M enthält. Also
x ist isolierter Punkt von $M \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 \ : \ M \cap B_\varepsilon(x) = \{x\}$.

Die abgeschlossene Hülle einer Menge M ist die disjunkte Vereinigung der Häufungspunkte und der isolierten Punkte von M.

Diskrete Mengen:
Eine Menge $M \subset X$ heißt *diskret* in X, wenn sie keine Häufungspunkte in X besitzt.

Z.B. ist $\{\, 1 - 1/n\, ;\, n \in \mathbb{N} \}$ diskret in $\mathbb{E} = \{|z| < 1\}$, aber nicht in $\mathbb{C}$.
Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ liegen diskret in $\mathbb{C}$, aber nicht in $\widehat{\mathbb{C}}$, da $\mathbb{N}' = \{\infty\}$.

Ist M diskret in X, so enthält M nur isolierte Punkte.
Die Umkehrung ist falsch! Beispiel: $\{\, 1/n\, ;\, n \in \mathbb{N}\, \} \subset X := \mathbb{C}$.

Abgeschlossene Mengen, Hülle

Sei weiterhin (X, d) ein metrischer Raum.

Abgeschlossene Mengen:
$M \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus M$ offen ist.
$\overline{M} := M \cup M'$ heißt *abgeschlossene Hülle* von M.

M ist genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ ist.

Die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum X sind sowohl offen, als auch abgeschlossen. In $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\widehat{\mathbb{C}}$ sind dies die einzigen offen-und-abgeschlossenen Mengen. Natürlich gibt es Mengen, die weder offen, noch abgeschlossen sind.

Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.

Die abgeschlossene Hülle von M ist die disjunkte Vereinigung der inneren und der Randpunkte von M : $\quad \overline{M} = M^0 \cup \partial M \ , \quad M^0 \cap \partial M = \emptyset$.

Die Hülle $\overline{M}$ ist auch disjunkte Vereinigung der isolierten und der Häufungspunkte von M .

$\overline{M}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M:

$$\overline{M} \;=\; \bigcap \{\, F \subset X \,;\; M \subset F,\;\; F \text{ abgeschlossen} \,\} \;. \tag{3}$$

Sei $M \subset D \subset X$. Man sagt, M liegt *dicht* in D, wenn $D \subset \overline{M}$.
Z.B. liegen die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ (bzgl. der Betragsmetrik).
Trivialerweise liegt eine Menge stets dicht in ihrer abgeschlossenen Hülle, aber i.a. liegt der innere Kern M^0 einer Menge nicht dicht in M.

Randpunkte

Sei weiterhin (X,d) ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X.

Randpunkte:
Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von M, wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus M als auch einen aus $X \setminus M$ enthält:

$$\begin{aligned} &x \text{ ist Randpunkt von } M \\ &\qquad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;:\; M \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \;\text{ und }\; (X \setminus M) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \;. \end{aligned}$$

$\partial M := \{\, x \,;\, x \text{ ist Randpunkt von } M \,\}$ heißt *Rand* von M.

Der Rand einer Menge M ist stets abgeschlossen und enthält keine inneren Punkte von M. Jedoch kann $(\partial M)^0 \neq \emptyset$ sein. Z.B. gilt für $M := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ in der üblichen Metrik $(\partial M)^0 = \mathbb{C} = \partial M$.

Allgemein gilt $\partial M = \partial(X \setminus M) = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$.

1.5.2 Folgen, Konvergenz

Zu Folgen komplexer Zahlen siehe auch Abschnitt 1.6.1.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kurz (x_n) , eine Folge aus X (also eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in den metrischen Raum X).

(x_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder x_n beschränkt ist, also innerhalb einer festen Kugel liegt:

$$(x_n) \text{ beschränkt} \iff \exists\, x \in X \;\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; \{\, x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \,\} \subset B_\varepsilon(x) \tag{4}$$

Häufungswert einer Folge:
Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum (X, d).

$$\begin{aligned} &\xi \in X \text{ ist } \textit{Häufungswert} \text{ von } (x_n) \\ &\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq n_0\ :\ d(x_n, \xi) < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{5}$$

In metrischen Räumen ist ein Punkt ξ genau dann Häufungswert einer Folge (x_n), wenn es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) gibt mit $x_{n_k} \to \xi$.

Grenzwert einer Folge:
Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum (X, d).

$$\xi \in X \text{ ist } \textit{Grenzwert} \text{ von } (x_n) \ :\Longleftrightarrow\ \xi = \lim_{n\to\infty} x_n \ :\Longleftrightarrow\ x_n \to \xi \text{ für } n \to \infty$$

$$\begin{aligned} &:\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ :\ d(x_n, \xi) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } d(x_n, \xi) < \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } d(x_n, \xi) > \varepsilon \text{ für höchstens endlich viele } n\,. \end{aligned}$$

(x_n) heißt *konvergent* in X, wenn sie einen Grenzwert in X besitzt.

In metrischen Räumen hat eine Folge höchstens einen Grenzwert. Sie heißt *divergent*, wenn sie keinen besitzt.

Konvergente Folgen sind beschränkt, unbeschränkte Folgen sind divergent.

Cauchy-Folgen:
Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum (X, d).

$$\begin{aligned} &(x_n) \text{ ist } \textit{Cauchy-Folge} \\ &\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq n_0\ :\ d(x_n, x_m) < \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. Die Umkehrung gilt nur in vollständigen Räumen. Insbesondere ist eine Folge in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\widehat{\mathbb{C}}$ genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Vollständigkeit

Vollständige metrische Räume:
Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\widehat{\mathbb{C}}$ sind vollständig. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist mit der Betragsmetrik nicht vollständig.

Ein Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Kompakte Teilräume beliebiger metrischer Räume sind vollständig.

1.5.3 Kompaktheit

Seien (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ und J eine beliebige Indexmenge.

Ein System $\mathfrak{U} = \{ U_j \,;\, j \in J \}$ von offenen Mengen U_j heißt *offene Überdeckung* von M, wenn $M \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Überdeckungskompaktheit: M heißt *kompakt (überdeckungskompakt)*, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie *folgenkompakt* ist, d.h. wenn jede Folge aus M einen Häufungswert in M, bzw eine in M konvergente Teilfolge besitzt.

Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt, abgeschlossen und vollständig.

In $\mathbb{C}$ gilt wie in jedem endlich dimensionalen normierten Raum auch die Umkehrung. Dies ist der Satz von Heine-Borel:

Satz von Heine-Borel: Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen sind.

Dieser Satz wird für unendlich dimensionale normierte Vektorräume falsch.

Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge M sind kompakt. Da $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, sind in $\widehat{\mathbb{C}}$ die kompakten Mengen genau die abgeschlossenen.

Bolzano-Weierstraß für Mengen: Jede unendliche beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Jede unendliche Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ besitzt einen Häufungspunkt in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.

Man sagt, eine Menge M liegt *relativ kompakt* in $D \subset X$, in Zeichen $M \Subset D$, wenn $\overline{M}$ kompakt ist und $\overline{M} \subset D$.

Häufig braucht man folgende *Ausschöpfungseigenschaft* offener Mengen in $\mathbb{C}$ (zum Beweis siehe Aufgabe 7.5.G) :

Satz: Zu jeder offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ gibt es eine Folge offener Mengen D_n mit $D_1 \Subset D_2 \Subset \ldots \Subset D$ und $\bigcup D_n = D$.

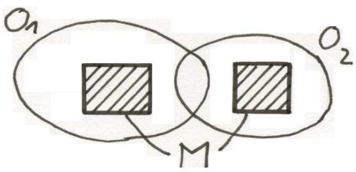
Man sagt, die offene Menge D wird durch die Folge (D_n) von relativ kompakten offenen Mengen *ausgeschöpft*.

1.5.4 Zusammenhang, Gebiete

Sei weiterhin (X, d) ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X.

> *Zusammenhängende Mengen:*
> $M \subset X$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen Mengen $O_1, O_2 \subset X$ gibt mit:
> $M \subset O_1 \cup O_2$; $\quad M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$; $\quad M \cap O_1 \neq \emptyset \quad$ und $\quad M \cap O_2 \neq \emptyset$.

Insbesondere ist der ganze Raum X genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind.
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\widehat{\mathbb{C}}$ sind zusammenhängend, $\mathbb{Q}$ nicht.
Zusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}$ (bzgl. der Betragsmetrik) sind genau die Intervalle.



(unzusammenhängend)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend (polygonal zusammenhängend)*, wenn sich je zwei Punkte $x, y \in M$ in M durch einen Weg bzw einen Streckenzug in M verbinden lassen. Es gilt

$$\begin{aligned} M \text{ polygonal zusammenhängend} &\Longrightarrow M \text{ wegzusammenhängend} \\ &\Longrightarrow M \text{ zusammenhängend} . \end{aligned} \tag{7}$$

Konvexe und sternförmige Mengen sind polygonal zusammenhängend.

In Aufgabe 6.4.2.E aus [RA2] finden Sie ein Beispiel einer zusammenhängenden Menge $M \subset \mathbb{R}^2$, die nicht wegzusammenhängend ist.

Sind $M, L \subset X$ zusammenhängend und $M \cap L \neq \emptyset$, so ist auch $M \cup L$ zusammenhängend.

Mit M ist auch die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ und jede Menge L mit $M \subset L \subset \overline{M}$ zusammenhängend. Das Innere einer zusammenhängenden Menge ist i.a. nicht zusammenhängend.

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

> *Zusammenhangskomponenten:*
> Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann heißt
> $$Z(x) \;:=\; \bigcup \{\, M \subset X \,;\, x \in M,\; M \text{ zusammenhängend} \,\}$$
> die *Zusammenhangskomponente* von x in X. $Z(x)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält.
> Die Zusammenhangskomponenten einer Teilmenge $M \subset X$ sind die Zusammenhangskomponenten des Relativraumes (M, d).

Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes X sind zusammenhängend und abgeschlossen in X. Sie können einelementig sein. Z.B. ist dies in den rationalen Zahlen mit der üblichen Metrik der Fall.

Gebiete

In diesem Abschnitt betrachten wir offene Mengen in $\mathbb{C}$. Viele der folgenden Definitionen und Aussagen kann man verallgemeinern.

Gebiete: $G \subset \mathbb{C}$ heißt *Gebiet*, wenn G nicht-leer, offen und zusammenhängend ist.

Offene Mengen $D \subset \mathbb{C}$ sind genau dann zusammenhängend - also Gebiete, wenn sich je zwei Punkte aus D durch einen Weg, sogar durch einen Streckenzug in D verbinden lassen (siehe Aufgabe [RA2, Aufgabe 6.2.4.B]). Man sagt, sie sind *weg-* bzw *polygonal zusammenhängend*.

Die Zusammenhangskomponenten offener Teilmengen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ sind offen, also Gebiete. Jede offene Teilmenge $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ ist Vereinigung von höchstens abzählbar vielen paarweise disjunkten Gebieten.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *konvex*, wenn G mit zwei Punkten $z, w \in G$ auch die *Verbindungsstrecke* $\overline{z,w}$ enthält. Dabei ist

$$\overline{z,w} \ := \ \{\, \alpha z + \beta w\,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1\,\}\ . \tag{8}$$

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $z_0 \in G$ derart gibt, dass mit jedem $w \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{w, z_0}$ in G liegt. Ein derartiger Punkt z_0 heißt dann *Sternzentrum* von G.

Kreisscheiben und Halbebenen sind konvex und sternförmig. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ ist sternförmig, z.B. mit Sternzentrum 1, aber nicht konvex.

Ein Gebiet G heißt *Jordangebiet*, wenn es von einer Jordankurve berandet wird, d.h. wenn sein Rand ∂G Träger eines einfach geschlossenen Weges ist.

Zu *einfach zusammenhängenden* Gebieten siehe Abschnitt 1.5.7.

1.5.5 Wege und Zykeln

Zu Kurven und Wegen siehe z.B. auch [RA2 8.2.1].

Wege: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Ein *Weg* in D ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to D$ eines *Parameterintervalls* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach D.

Man sagt, der Weg $\gamma : [a, b] \to D$ läuft in D vom *Anfangspunkt* $\gamma(a)$ zum *Endpunkt* $\gamma(b)$. Er heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \to D$ heißt *einfach geschlossen*, wenn γ auf dem halboffenen Intervall $[a, b[$ injektiv ist.

Die Bildmenge $|\gamma| := \gamma([a, b])$ heißt *Träger* (*Spur*) von γ.

Eine *Jordankurve* ist der Träger eines einfach geschlossenen Weges bzw das topologische Bild der Kreislinie $\{|z| = 1\}$. Es gilt der

Jordansche Kurvensatz:
Jede Jordankurve $|\gamma|$ in $\mathbb{C}$ zerlegt $\mathbb{C}$ in zwei Gebiete. Genau eins dieser Gebiete ist beschränkt. Dies heißt das *Innere* oder *Innengebiet* $\operatorname{Int}\gamma$, das andere heißt *Außengebiet.* $|\gamma|$ ist der gemeinsame Rand von Innen- und Außengebiet.

Die Summe $\gamma_1 + \gamma_2$ von Wegen und der *umgekehrte Weg* $-\gamma$ werden wie üblich definiert.

Definition:
Integrationswege sind stückweise stetig differenzierbare Wege.

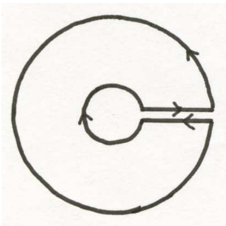
Ränder von Gebieten sind oft aus mehreren Wegen zusammengesetzt. Der entsprechende mathematische Begriff ist der einer *Kette.*

Ketten:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine *Kette* Γ in D ist eine formale Linearkombination $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$ von endlich vielen Integrationswegen γ_j mit ganzzahligen Koeffizienten $n_j \in \mathbb{Z}$.

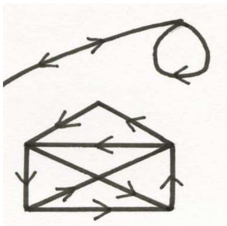
Anders formuliert: Eine *Kette* Γ ist eine Abbildung der Menge aller Integrationswege in die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ derart, dass $\Gamma(\gamma) \neq 0$ für höchstens endlich viele Integrationswege γ ist.

Eine Kette $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$ heißt *geschlossen*, wenn jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten n_j genauso oft als Anfangspunkt eines γ_j vorkommt, wie als Endpunkt. Ein *Zyklus* ist eine geschlossene Kette.

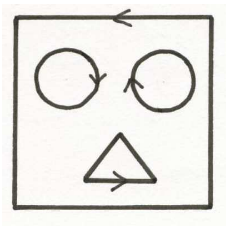
Der Träger $|\Gamma|$ einer Kette $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$ ist die Vereinigung der Träger $|\gamma_j|$ mit $n_j \neq 0$.



Integrationsweg



Kette



Zyklus

1.5.6 Umlaufzahl, Homologie

Umlaufzahl:
Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$, $|\Gamma|$ sein Träger und $z \notin |\Gamma|$. Dann ist die *Umlaufzahl* von Γ bzgl z definiert als

$$n(\Gamma, z) \ := \ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \ . \tag{9}$$

Das rechtstehende Integral summiert den Zuwachs von $\mathsf{Im}\,\log(\zeta - z)$, also des Arguments von $\zeta - z$. Siehe auch Abschnitt 6.5.1.

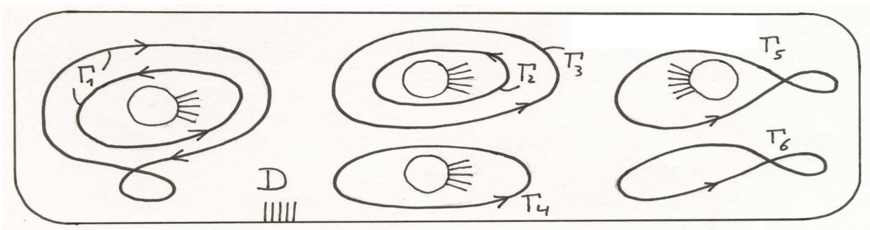
Die Umlaufzahl von Γ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ konstant und gleich Null auf der unbeschränkten Komponente.

Wechselt man von einer Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ zu einer anderen und überquert dabei einen einfach durchlaufenen (d.h. $n_j = 1$) Teilweg γ_j von rechts nach links bzgl der Orientierung von γ_j, so wächst die Umlaufzahl um 1.

Das Innere eines geschlossenen Integrationsweges γ bzw eines Zyklus Γ ist die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die die Umlaufzahl $n(\Gamma, z) \neq 0$ ist:

$$\operatorname{Int}\Gamma \ := \ \left\{ z \in \mathbb{C}\, ;\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \neq 0 \right\} \ . \tag{10}$$

Homologie:
Ein Zyklus Γ in $D \subset \mathbb{C}$ heißt *nullhomolog in* D, wenn für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ die Umlaufzahl $n(\Gamma, z) = 0$ ist, also wenn $\operatorname{Int}\Gamma \subset D$.
Zwei Zyklen Γ_1 und Γ_2 aus D heißen *homolog in* D, wenn ihre Differenz $\Gamma_1 - \Gamma_2$ in D nullhomolog ist.



Γ_1 *nullhomolog* Γ_4 *nicht nullhomolog*
Γ_2, Γ_3 *homolog* Γ_5, Γ_6 *nicht homolog*

Ein Zyklus Γ in D heißt *Randzyklus* eines relativ kompakten Bereichs $B \Subset D$, wenn gilt

$$\partial B = |\Gamma| \ , \quad n(\Gamma, z) = 1 \text{ für } z \in B \text{ und } n(\Gamma, z) = 0 \text{ für } z \notin \overline{B} \ . \tag{11}$$

Randzyklen von Bereichen $B \Subset D$ sind nullhomolog in D.

1.5.7 Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition:
Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder Zyklus in G nullhomolog ist.

Anschaulich: *'Einfach zusammenhängende Gebiete haben keine Löcher.'*

Äquivalente Bedingungen sind:

$G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn

1. das Komplement $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ auf der Zahlenkugel zusammenhängend ist.
2. das Komplement $\mathbb{C} \setminus G$ in der Ebene keine beschränkte Zusammenhangskomponente hat.
3. mit jedem geschlossenen Integrationsweg γ in G auch sein Innengebiet $\operatorname{Int} \gamma$ in G liegt, also wenn jeder geschlossene Integrationsweg γ in G nullhomolog ist.
4. sich jeder geschlossene Weg in G innerhalb von G stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt, d.h. wenn jeder geschlossene Weg in G *nullhomotop* ist.
5. jede in G holomorphe Funktion eine Stammfunktion in G besitzt.
6. jede in G nullstellenfreie holomorphe Funktion einen Logarithmus in G besitzt.
7. jede in G nullstellenfreie holomorphe Funktion eine Quadratwurzel in G besitzt.

n-fach zusammenhängende Gebiete:
Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *n-fach zusammenhängend*, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus G$ genau $n-1$ beschränkte Zusammenhangskomponenten besitzt, bzw wenn das Komplement $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ auf der Zahlenkugel n Zusammenhangskomponenten besitzt.

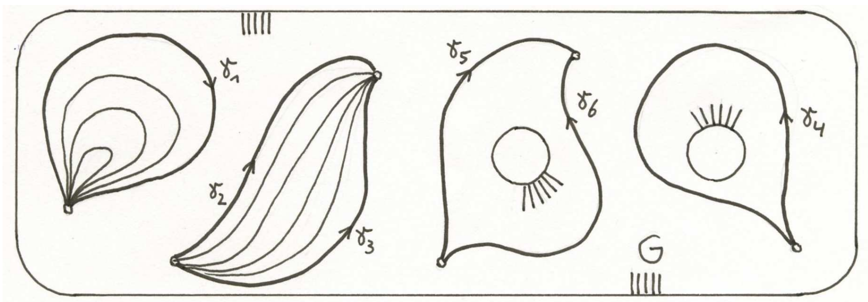
1.5.8 Homotopie

Zwei Wege in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ (allgemeiner in einem metrischen oder topologischen Raum X) heißen homotop, wenn man sie bei festen Endpunkten stetig ineinander deformieren kann. Genauer:

Homotopie:
Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \to G$ zwei Wege in G mit gleichem Anfangspunkt $a := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und Endpunkt $b := \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.
γ_1 und γ_2 heißen *homotop in* G (bei festen Endpunkten), wenn es eine stetige Abbildung $\Phi \colon [0,1] \times [0,1] \to G$ gibt derart, dass für alle $s, t \in [0,1]$ gilt:

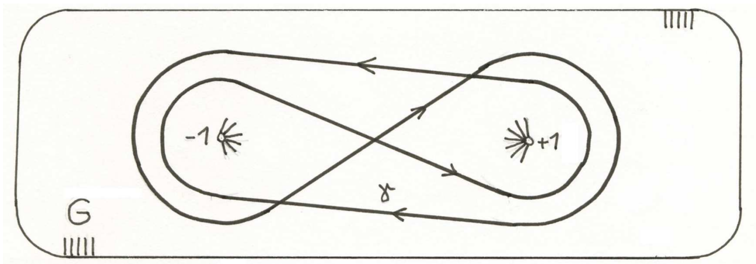
$$\Phi(0,t) = \gamma_1(t) \ ; \quad \Phi(1,t) = \gamma_2(t) \ ; \quad \Phi(s,0) = a \ ; \quad \Phi(s,1) = b \ .$$

Ein geschlossener Weg $\gamma \colon [0,1] \to G$ heißt *nullhomotop* in G, wenn er in G zum Punktweg $\{t \mapsto \gamma(0)\}$ homotop ist.



γ_1 *nullhomotop* γ_4 *nicht nullhomotop*
γ_2, γ_3 *homotop* γ_5, γ_6 *nicht homotop*

Jeder nullhomotope Weg ist nullhomolog, aber nicht notwendig umgekehrt. Z.B. ist der unten skizzierte Weg γ in $G := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ nullhomolog, aber nicht nullhomotop.



1.6 Folgen, Reihen und Produkte

1.6.1 Folgen

$\mathbb{C}$ ist mit dem euklidischen Abstand $d(z,w) := |w-z|$ ein vollständiger metrischer Raum. Die Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen wurde bereits in Abschnitt 1.5.2 definiert:

Konvergente Folgen:
Eine komplexe Folge (z_n) konvergiert gegen ein $\zeta \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass $|z_n - \zeta| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Es gilt: $z_n \to \zeta \iff \mathsf{Re}\, z_n \to \mathsf{Re}\, \zeta$ <u>und</u> $\mathsf{Im}\, z_n \to \mathsf{Im}\, \zeta$.

Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, sind komplexe Folgen genau dann konvergent, wenn sie *Cauchy-Folgen* sind.

Eine komplexe Folge (z_n) ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn die Folge der Realteile <u>und</u> die der Imaginärteile eine Cauchy-Folge ist.

Rechenregeln

1. Die konvergenten komplexen Folgen bilden mit den üblichen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und die Abbildung $\{(z_n) \mapsto \lim z_n\}$ ist $\mathbb{C}$-linear.
2. Konvergieren $z_n \to \zeta,\ w_n \to \omega$, so konvergieren auch $|z_n| \to |\zeta|$; $z_n w_n \to \zeta\omega$ und $\dfrac{z_n}{w_n} \to \frac{\zeta}{\omega}$ falls $w_n, \omega \neq 0$.
3. $z_n \to \zeta \iff \overline{z_n} \to \overline{\zeta}$.
4. $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.
5. Das Produkt einer beschränkten und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.
6. Arithmetische *Mittelbildung* ändert nichts an der Konvergenz. Genauer:
$$z_n \to \zeta \quad \Longrightarrow \quad \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} \to \zeta \ . \tag{1}$$
Zum Beweis siehe Aufgabe 7.6.B oder auch [RA1 2.2.8.A].

1.6.2 Teilfolgen und Häufungswerte

Sei (z_n) eine komplexe Folge und (n_k) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (z_n).

Z.B. ist $(1/2k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\big((-1)^n/n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn jede ihrer Teilfolgen konvergiert. In diesem Fall konvergiert jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert.
Besitzt eine Folge eine divergente Teilfolge oder zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten, so ist sie divergent.

Häufungswert einer Folge:
$\zeta \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungswert* einer komplexen Folge (z_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Index n_0 ein $n > n_0$ gibt, so dass $|z_n - \zeta| < \varepsilon$.
Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Teilfolge (z_{n_k}) gibt, die gegen ζ konvergiert.

Achtung: Man unterscheide gut zwischen dem *Häufungswert der Zahlenfolge* (z_n) und dem *Häufungspunkt der Menge* $\{ z_n \,;\, n \in \mathbb{N} \}$.

Ist ζ Häufungspunkt der Menge $\{ z_n \,;\, n \in \mathbb{N} \}$, so ist ζ auch Häufungswert der Folge (z_n) .
Die Umkehrung ist falsch! Triviales Beispiel: Ist $z_n = \zeta$ für alle n, so ist ζ Häufungswert der konstanten Folge (z_n), aber nicht Häufungspunkt der einelementigen Menge $\{ z_n \,;\, n \in \mathbb{N} \} = \{\zeta\}$.

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ gilt

Bolzano-Weierstraß für Folgen in $\mathbb{C}$:
Jede beschränkte komplexe Folge besitzt einen Häufungswert in $\mathbb{C}$.

1.6.3 Konvergenz in $\widehat{\mathbb{C}}$

Die Konvergenz von Folgen in $\widehat{\mathbb{C}}$ wird bzgl der chordalen Metrik definiert. Also konvergiert eine Folge (z_n) aus $\widehat{\mathbb{C}}$ genau dann gegen $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$, wenn der chordale Abstand $\chi(z_n, \zeta) \to 0$ konvergiert.

Da die chordale Metrik χ auf $\mathbb{C}$ dieselbe Topologie erzeugt wie die euklidische, ist diese Definition mit der in 1.6.1 gegebenen Definition konvergenter Folgen in $\mathbb{C}$ verträglich.

Für Folgen (z_n) aus $\mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} z_n \to \infty \iff & \chi(z_n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}} \to 0 \\ \iff & \forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \ge n_0 \; : \; |z_n| > K \\ \iff & |z_n| \to \infty \end{aligned} \tag{2}$$

∞ heißt *uneigentlicher Häufungswert* einer komplexen Folge (z_n), wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ und jedem Index n_0 ein $n > n_0$ gibt, so dass $|z_n| > K$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Teilfolge (z_{n_k}) gibt, die gegen ∞ konvergiert.

$\widehat{\mathbb{C}}$ ist kompakt. Infolgedessen gilt

Bolzano-Weierstraß für Folgen in $\widehat{\mathbb{C}}$:
Jede Folge in $\widehat{\mathbb{C}}$ besitzt einen Häufungswert in $\widehat{\mathbb{C}}$.