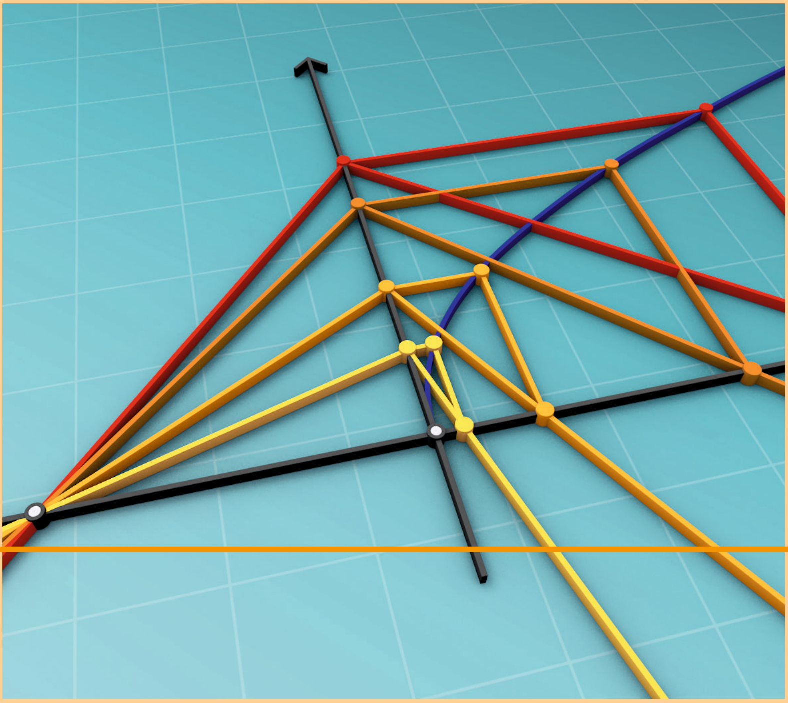
Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik

Band 1: Grundbegriffe



2., aktualisierte Auflage

HANSER

Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik Band 1

Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik

Band 1: Grundbegriffe

2., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor:
Prof. Dr. Rudolf Taschner
Technische Universität Wien

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47186-3
E-Book-ISBN 978-3-446-47200-6

Vorwort

Der Titel „anwendungsorientierte Mathematik“ ist zugleich Programm: „Anwendungsorientiert“ ist die im vorliegenden Lehrbuch dargebotene Mathematik in gleicher Weise, wie Bernard Friedman, Professor in Berkeley und Autor der glanzvollen „Lectures on Applications-Oriented Mathematics“, Mathematik verstanden hat. Als jene ganz besondere Geisteswissenschaft, die für alle unverzichtbar ist, die sich dem rationalen Erfassen der Welt und ihrer von der Vernunft geleiteten Gestaltung verschrieben haben. Sich an diese Personen zu wenden und eben diesen umfassenden Charakter der Mathematik vorzustellen, ist das vorrangige Ziel dieses auf drei Bände konzipierten Lehrbuchs.

Es handelt sich hierbei um eine Einführung in die Mathematik, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es handelt sich ferner hierbei um eine Einführung in die Mathematik, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es handelt sich hierbei um eine Einführung in die Mathematik, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind. Unnötige Abstraktheit wird vermieden. Hingegen wird die Betonung auf verständliche Anschaulichkeit, auf eingängige, vor allem historisch belegte Motivation der Begriffsbildungen, auf die Behandlung interessanter Themen und auf nachvollziehbare Beweisführungen gelegt.

Vorbilder für dieses Buch waren die bestechenden Vorlesungen und Seminare von Edmund Hlawka und Johann Cigler, sowie der Einblick in das mathematische Denken, der in der Zusammenarbeit mit Peter Gruber, Hans-Dominik Schwabl und Roman Schnabl gewonnen werden konnte. Diese eindrucksvollen Persönlichkeiten haben neben vielen anderen den Autor in seiner Sicht der Mathematik geprägt. Anlass, dieses Buch zu schreiben, ist die vom Autor an der Technischen Universität Wien zu verantwortende dreisemestrige Vorlesung „Mathematik für Studentinnen und Studenten der Elektrotechnik und Informationstechnik“. Der beeindruckend positive Zuspruch, der vonseiten der Hörerinnen und Hörer dieser Lehrveranstaltung erfolgt, bestärkt in der Zuversicht, dass die vorliegende Einführung in die Mathematik eine gute Aufnahme findet. Und dies trotz ihrer unkonventionellen Stoffanordnung und trotz ihrer zuweilen den gewohnten Rahmen verlassenden Präsentation von Definitionen und Denkmodellen. Kenner der Materie werden feststellen, dass – um nur ein paar Beispiele zu erwähnen – der Begriff der Konvergenz zwar schon von Anfang an im Zentrum steht, aber erst bei der Behandlung der unendlichen Reihen seine endgültige Fassung findet, dass die integrierbaren Funktionen keineswegs für alle Punkte eines Intervalls, sondern nur auf einer dichten Teilmenge des Intervalls definiert sein müssen, dass die gleichmäßige Stetigkeit einer über einem kompakten Intervall stetigen Funktion (wohl hier zum ersten Mal in der Lehrbuchliteratur) nach dem schönen Beweis von Brouwer auf direkte Weise begründet wird. Unkonventionelle Zugänge wie diese rechtfertigen es, die fast uferlos scheinende Lehrbuchliteratur von Einführungen in die Mathematik um ein weiteres Werk zu bereichern.

Wie der Vorlesung möge es auch dem vorliegenden, vom Verlag Hanser unter professioneller Betreuung von Christine Fritzsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegebenen Buch gelingen, einerseits im Sinne der leider unvollendet gebliebenen „Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode“ von Otto Toeplitz und andererseits im Geiste des von Luitzen Egbertus Jan Brouwer und Hermann Weyl favorisierten intuitionistischen Zugangs zur Mathematik den Leserinnen und Lesern die Faszination, die Weite und die Tragfähigkeit der Mathematik zu vermitteln. Dann darf man, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler dem Autor hoffentlich als lässliche Sünden nachsehen.

Innigst möchte ich meiner Frau Bianca und meinen Kindern Laura und Alexander danken: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, Januar 2014 *Rudolf Taschner*

Inhalt

1 Zahlen

1.1 Babylonisches Wurzelziehen

Mathematik – das Wort ist sprachverwandt mit dem deutschen Begriff „munter" – leitet sich aus dem griechischen máthema her, das „die Kenntnis" oder „das Gelernte" bedeutet. Hermann Weyl, der geistreichste Mathematiker der 20. Jahrhunderts, definierte Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen". Wir werden bald erfahren, wie recht er damit hat.

Mathematik lässt sich weit in die Vorgeschichte, bis auf Kerbzeichen urzeitlicher Nomadenstämme zurückverfolgen. Das Wort „Zahl" stammt nämlich von der indogermanischen Sprachwurzel del, die „Kerbe" bedeutet; unser Wort Delle rührt ebenfalls davon her, wie auch das englische Verb „to tell", das sowohl „erzählen" wie auch ursprünglich „zählen" bedeutet. Ein „teller" ist ein Bankkassier.

Und sobald Menschen sesshaft wurden, lernten sie sehr schnell die elementarsten Begriffe der Geometrie. Sie wollten wissen, wie groß der Grund ist, den sie bebauen. Ein Bauer sieht vor sich eine Strecke. Um sie messen zu können, vergleicht er sie mit einer Längeneinheit, zum Beispiel einem Klafter, der bei ausgestreckten Armen von der einen Spitze der Hand zur anderen reicht. Wenn die Strecke ein bestimmtes Vielfaches, zum Beispiel das Fünffache des Klafters, lang ist, nennt der Bauer – und auch wir wollen uns an diese Sprechweise halten – dieses Vielfache, in unserem Beispiel die Zahl 5, die Seitenlänge der Strecke. Denn er bezieht sich dabei auf die ein für allemal festgelegte Einheitsstrecke eines Klafters.

Wir nehmen an, der Bauer misst sein rechteckiges Feld ab und stellt fest: Es ist 7 lang und 1 breit. Sein Nachbar bewirtschaftet ein rechteckiges Feld, das 6 lang und 2 breit ist. Und dessen Nachbar ein quadratisches Feld, dessen Länge und Breite jeweils 4 beträgt. Dem Umfange nach sind die drei Felder gleich groß. Aber der Nachbar des Bauern erntet mehr als er, und dessen Nachbar sogar mehr als doppelt so viel wie er. Weil es nicht auf den Umfang, sondern auf den Flächeninhalt der Felder ankommt. Diesen Flächeninhalt gilt es zu berechnen.

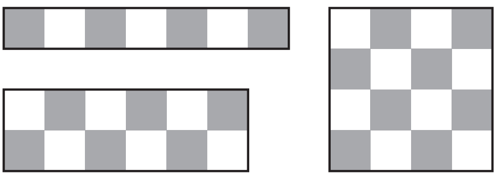


Bild 1.1 Drei rechteckige Felder: Alle drei besitzen gleichen Umfang, aber verschiedene Flächeninhalte.

Das über der Einheitsstrecke errichtete Quadrat definiert zugleich die Flächeneinheit. Wenn der Bauer sagt, dass eine bestimmte Zahl den Flächeninhalt seines rechteckigen Feldes bezeichnet, meint er, dass exakt so viele Einheitsquadrate in das Rechteck passen, wie diese Zahl angibt. So teilen Zahlen der Grund und Boden bearbeitenden Bevölkerung mit, wie groß ein Acker ist, den sie bewirtschaftet.

Ihre eigentliche Geburtsstunde erlebte die Mathematik in den Hochkulturen des alten Ägypten und des Zweistromlandes. Bereits Babylonier beherrschten ein höchst anspruchsvolles Verfahren, aus Zahlen Wurzeln zu ziehen. Sie gingen dabei folgendermaßen vor:

Wenn man die Seitenlänge eines Quadrates kennt, sei sie 1, 2, 3, 4 oder irgendeine andere Zahl, erhält man den Inhalt der Quadratfläche, indem man diese Seitenlänge mit sich selbst multipliziert: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, und so fort. Wie aber geht man vor, so fragten die babylonischen Gelehrten, wenn man den Inhalt der Quadratfläche kennt? Wie lässt sich daraus die Seitenlänge des Quadrates zurückermitteln? Wenn a den Inhalt der Quadratfläche symbolisiert, schreibt man, in moderner Notation, für die zugehörige Seitenlänge $\sqrt{a}$ und nennt dies die *Wurzel* von a. Das eigenartige, sich über das Symbol a erstreckende Wurzelzeichen ist ein stilisierter Kleinbuchstabe r, der das lateinische Wort radix, das „Wurzel" bedeutet, abkürzt.

Es ist klar, dass man von Quadratzahlen sofort die Wurzel „ziehen" kann: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, und so weiter. Wie aber berechnet man zum Beispiel $\sqrt{10}$, also die Seitenlänge jenes Quadrates, dessen Fläche den Inhalt 10 besitzt?

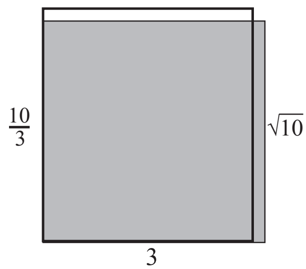


Bild 1.2 Das graue Quadrat hat 10 als Flächeninhalt und $\sqrt{10}$ als Seitenlänge. Das Rechteck mit 3 und mit 10/3 als Länge und Breite besitzt den gleichen Flächeninhalt.

Offensichtlich symbolisiert $x = 3$ die Seitenlänge eines etwas zu kleinen Quadrates, denn es ist $x^2 = 9$, eine kleinere Zahl als 10. Doch allzu weit entfernt von der wahren Lösung ist man damit nicht: Die Rechnung $4^2 = 16$ zeigt, dass $\sqrt{10}$ wohl näher bei 3 als bei 4 zu vermuten ist. Zwar hat, so der nächste Gedanke, nicht das Quadrat mit $x = 3$ als Seitenlänge den Flächeninhalt 10, wohl aber jenes Rechteck, das $x = 3$ als die eine und das $y = 10/3$ als die andere Seite besitzt. Denn in der Tat ist mit diesen Setzungen $x \cdot y = 10$. Die kürzere Rechteckseite mit der Länge $x = 3$ ist kleiner als $\sqrt{10}$, hingegen ist die längere Rechteckseite mit der Länge $y = 10/3$ größer als $\sqrt{10}$. Den wahren Wert, so vermuteten die babylonischen Gelehrten voreilig, bekommt man wohl, wenn man das arithmetische Mittel von x und y bildet, also

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6} \, .$$

Tatsächlich zeigt die Rechnung

$$\left(\frac{19}{6}\right)^2 = \frac{19^2}{6^2} = \frac{361}{36} = 10 + \frac{1}{36} \, ,$$

dass das Quadrat dieses Mittels den gewünschten Wert 10 – wenn auch nur knapp, so aber doch – verfehlt.

An dieser Stelle entwickelt ein uns namentlich nicht bekannter babylonischer Mathematiker einen sehr raffinierten Gedanken. Das gleiche Verfahren, das uns von 3 über 10/3 zu 19/6 geführt hat, kann man noch einmal zur Anwendung bringen. Das Quadrat mit $x_1 = 19/6$ als Seitenlänge hat eine geringfügig zu große Fläche. Aber jenes Rechteck, das

$$x_1 = \frac{19}{6}$$

als die eine und das

$$y_1 = \frac{10}{\frac{19}{6}} = \frac{60}{19}$$

als die andere Seite besitzt, stimmt in seiner Fläche mit dem Flächeninhalt des Quadrates überein. Denn in der Tat ist mit diesen Setzungen $x_1 \cdot y_1 = 10$. Die längere Rechteckseite mit der Länge $x_1 = 19/6$ ist ein wenig größer als $\sqrt{10}$, hingegen ist die kürzere Rechteckseite mit der Länge $y_1 = 60/19$ ein wenig kleiner als $\sqrt{10}$. Wieder liegt es nahe, das arithmetische Mittel, diesmal von x_1 und y_1, zu bilden:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{60}{19}\right) = \frac{721}{228}.$$

Nun scheint der wahre Wert für $\sqrt{10}$ gefunden zu sein. Allerdings wieder nur scheinbar. Denn es zeigt die Rechnung

$$\left(\frac{721}{228}\right)^2 = \frac{721^2}{228^2} = \frac{519\,841}{51\,984} = 10 + \frac{1}{51\,984}\ ,$$

dass auch diesmal der gesuchte Wert 10 – wenn auch nur haarscharf – verfehlt wurde.

Wer besessen davon ist, dem wahren Wert auf die Spur zu kommen, wird das Verfahren noch einmal anzuwenden versuchen: Wir wissen, dass

$$x_2 = \frac{721}{228}$$

nur hauchdünn größer als $\sqrt{10}$ ist, dementsprechend wird

$$y_2 = \frac{10}{\frac{721}{228}} = \frac{2280}{721}$$

nur um Haaresbreite kleiner als $\sqrt{10}$ sein. Wie ist es dann mit

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{721}{228} + \frac{2280}{721}\right) = \frac{1\,039\,681}{328\,776}$$

bestellt? Auch hier ist $\sqrt{10}$ nicht völlig präzise erfasst, aber wegen

$$\left(\frac{1\,039\,681}{328\,776}\right)^2 = \frac{1\,039\,681^2}{328\,776^2} = \frac{1\,080\,936\,581\,761}{108\,093\,658\,176} = 10 + \frac{1}{108\,093\,658\,176}$$

ist der Abstand zum wahren Wert $\sqrt{10}$ geradezu lächerlich gering.

Aber auch wenn man das Verfahren noch einmal, diesmal mit

$$x_3 = \frac{1\,039\,681}{328\,776}$$

als einen nur hauchdünn zu großen und mit

$$y_3 = \frac{10}{\dfrac{1\,039\,681}{328\,776}} = \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681}$$

als einen nur hauchdünn zu kleinen Wert anwendet, auch der bereits dick angeschwollene Bruch

$$\frac{x_3 + y_3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\,039\,681}{328\,776} + \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681}\right) = \frac{2\,161\,873\,163\,521}{683\,644\,320\,912}$$

verfehlt – wenn auch nur extrem knapp – den wahren Wert von $\sqrt{10}$.

Um die hohe Qualität des babylonischen Wurzelziehens würdigen zu können, empfiehlt es sich, die hier erhaltenen Näherungen an $\sqrt{10}$ in der modernen Schreibweise mit Dezimalpunkt und Nachkommastellen anzugeben. (Wir schreiben das „Komma“ als Dezimalpunkt, um den Beistrich für Aufzählungen zur Verfügung zu haben. Trotzdem sprechen wir von „Nachkommastellen“, wenn wir Stellen rechts vom Dezimalpunkt meinen.) Wir begannen mit $x = 3$ und $y = 10/3 = 3.333\ldots$ Danach erhielten wir als erstes Paar

$$x_1 = \frac{19}{6} = \mathbf{3.1}66\,666\,666\,666 \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{60}{19} = \mathbf{3.1}57\,894\,736\,842\,.$$

Wir einigen uns dabei darauf, dass die genannten Dezimalbrüche auf zwölf Stellen nach dem Dezimalpunkt angegeben werden. Die fett gedruckten Ziffern sind jene, welche bei beiden Näherungen übereinstimmen, sodass wir bereits jetzt von $\sqrt{10} = 3.1\ldots$ ausgehen können. Das nächste Paar von Näherungen liefert

$$x_2 = \frac{721}{228} = \mathbf{3.162\,2}80\,701\,754 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{2280}{721} = \mathbf{3.162\,2}74\,618\,585\,,$$

woraus man $\sqrt{10} = 3.1622\ldots$ ersieht. Das nächste Paar von Näherungen liefert schließlich

$$x_3 = \frac{1\,039\,681}{328\,776} = \mathbf{3.162\,277\,660\,16}9 \quad \text{und} \quad y_3 = \frac{3\,287\,760}{1\,039\,681} = \mathbf{3.162\,277\,660\,16}7\,,$$

worin bis auf die letzte alle angegebenen Nachkommastellen übereinstimmen und man mit Fug und Recht

$$\sqrt{10} = 3.162\,277\,660\,16\ldots$$

schreiben kann. Die drei Punkte nach der zuletzt angeschriebenen Nachkommastelle bedeuten: Alle vor ihnen genannten Stellen stimmen so, wie sie angeschrieben sind; danach könnte man – wenn man wollte – noch beliebig viele weitere und genauso richtige Nachkommastellen anheften, würde man das Verfahren des babylonischen Wurzelziehens nur genügend lange vorantreiben.

Die Babylonier selbst kannten noch keine Dezimalbrüche. Sie teilten die Einheit in 60 gleich große Teile ein, die man als *Minuten* bezeichnet und mit einem Minutenstrich $'$ abkürzt. Die

Minuten selbst teilten sie ebenso in 60 gleich lange *Sekunden* ein, die man mit einem Sekundendoppelstrich $''$ bezeichnet. Um zum Beispiel einen Bruch wie 19/6 in Minuten und Sekunden umrechnen zu können, geht man folgendermaßen vor:

$$\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3 + \frac{60'}{6} = 3 + 10' .$$

Ein wenig mühsamer ist es, den Bruch 60/19 in Minuten und Sekunden umzurechnen:

$$\frac{60}{19} = 3 + \frac{3}{19} = 3 + \frac{180'}{19} = 3 + 9' + \frac{9'}{19} = 3 + 9' + \frac{540''}{19} \approx 3 + 9' + 28'' ,$$

wobei in der babylonischen Schreibweise der noch verbliebene Rest von 8/19 Sekunden generös weggerundet wurde. Trennt man, wie bei den Dezimalbrüchen, den ganzzahligen Teil und die Minuten mit einem tiefgestellten Punkt, kann man die Pluszeichen weglassen und bekommt so im babylonischen Sechziger- oder Hexagesimalsystem das Paar von Näherungen

$$x_1 = \frac{19}{6} = 3.10' \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{60}{19} = 3.09'28'' .$$

Die Brüche $x_2 = 721/228$ und $y_2 = 2280/721$ ergeben im Hexagesimalsystem umgerechnet (und auf Sekunden gerundet)

$$\frac{721}{228} = 3 + \frac{37}{228} = 3 + \frac{185'}{19} = 3.09' + \frac{14'}{19} = 3.09' + \frac{840''}{19} \approx 3.09'44''$$

und

$$\frac{2280}{721} = 3 + \frac{117}{721} = 3 + \frac{7020'}{721} = 3.09' + \frac{531'}{721} = 3.09' + \frac{31\,860''}{721} \approx 3.09'44'' .$$

Somit war aus babylonischer Sicht klar, dass $\sqrt{10} = 3.09'44''$ ist. Eine Fortführung des Verfahrens erübrigt sich aus dieser Sicht der Dinge.

Weitaus eingehender und kritischer betrachteten erst die Mathematiker des antiken Griechenland diese Berechnungen. Doch bevor wir darauf zu sprechen kommen, sei erörtert, wozu man das Wurzelziehen eigentlich benötigt.

1.2 Satz des Pythagoras

Hermann und Dorothea – die Namen der beiden sind Goethes Epos geschuldet – gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt in Richtung Osten. Hermann legt drei, Dorothea vier Kilometer zurück. Es ist klar, dass sie danach einen Kilometer voneinander entfernt sind.

Hermann und Dorothea gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg, diesmal Hermann nach Osten und Dorothea nach Westen. Hermann legt wieder drei, Dorothea wieder vier Kilometer zurück. Auch in diesem Fall ist klar, dass sie danach sieben Kilometer voneinander entfernt sind.

Hermann und Dorothea gehen von einem gemeinsamen Ausgangspunkt weg, diesmal Hermann nach Norden und Dorothea nach Osten. Hermann legt wieder drei, Dorothea wieder vier Kilometer zurück. Wie weit die beiden nun voneinander entfernt sind, ist keineswegs so unmittelbar zu erkennen wie in den beiden zuvor genannten Beispielen. Selbstverständlich könnte man auf dem Plan die Entfernung abmessen und – mögliche Messfehler dabei in Kauf nehmend – auf eine Entfernung von fünf Kilometern schließen. Aber dies hat nichts mit den simplen Rechnungen $4-3=1$ und $4+3=7$ der beiden obigen Beispiele gemein.

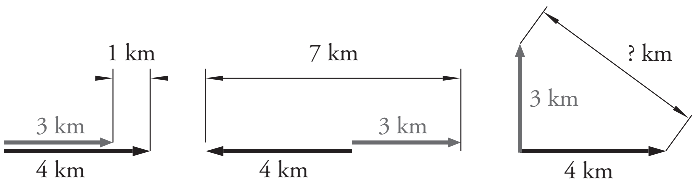


Bild 1.3 Die Wanderungen von Hermann und Dorothea an den drei Tagen. Wie weit die beiden nach Erreichen ihrer Ziele voneinander entfernt sind, teilt bei den beiden ersten Tagen die Skizze unmittelbar mit.

Offenkundig beruht der qualitative Unterschied des dritten zu den beiden zuvor genannten Beispielen darin, dass in diesem dritten Beispiel der geradlinige, von West nach Ost verlaufende, eindimensionale Weg verlassen wurde. Hermann und Dorothea „erobern" im dritten Beispiel gleichsam die zweidimensionale Ebene. Und es war wohl eine der beeindruckendsten Erkenntnisse, die möglicherweise schon ägyptische, sicher aber babylonische Gelehrte gewonnen haben, dass man aus der Tatsache, dass die West-Ost-Richtung zur Süd-Nord-Richtung einen rechten Winkel einschließt, folgern kann: Die Entfernung von fünf Kilometern, welche Hermann und Dorothea im dritten Beispiel nach ihrer Wanderung besitzen, lässt sich ebenso durch eine Rechnung bestimmen, wie die beiden zuvor genannten Entfernungen von einem und von sieben Kilometer.

Ausgangspunkt, um diese Erkenntnis gewinnen zu können, war die Einsicht, dass eine Multiplikation, wie zum Beispiel drei mal vier, mehr bedeutet als eine vereinfachte Darstellung einer mehrfach durchzuführenden Addition mit dem gleichen Summanden. Drei mal vier ist nicht nur ein dreifaches Addieren der Zahl vier, drei mal vier stellt zugleich den Flächeninhalt eines Rechtecks dar, dessen eine Seite drei und dessen andere Seite vier Längeneinheiten lang sind.

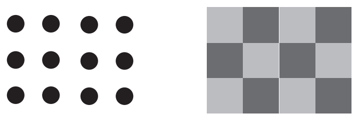


Bild 1.4 Das Produkt von drei mit vier ist einerseits als Punktmuster erfassbar, andererseits als Flächeninhalt eines Rechtecks.

Dass man im Produkt $a \cdot b$, einfacher oft ohne Multiplikationspunkt als ab geschrieben, den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b erkennen kann, erlaubt ein unmittelbares Verstehen von Rechengesetzen: Des *kommutativen* Rechengesetzes $ab = ba$, weil man das Rechteck um einen rechten Winkel drehen kann, ohne dass es dabei seinen Flächeninhalt ändert. Des *distributiven* Rechengesetzes $a(b+c) = ab + ac$, weil man auf der rechten Seite der Formel zwei Rechtecke mit den Längen b und c sieht, welche die gleiche Höhe a besitzen, und sich auf der linken Seite der Formel diese beiden Rechtecke zu einem Rechteck mit der Länge $b+c$ zusammengeschoben vorstellt. Und des *assoziativen* Rechengesetzes

$a \cdot bc = ab \cdot c = abc$, weil das Produkt dreier Zahlen dem Rauminhalt eines Quaders mit diesen drei Zahlen als Längen seiner Kanten entspricht.

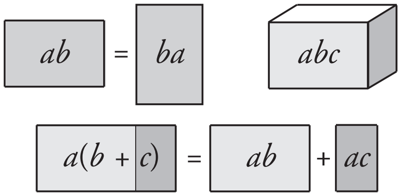


Bild 1.5 Das kommutative Rechengesetz links oben, das assoziative Rechengesetz rechts oben und das distributive Rechengesetz unten anschaulich verdeutlicht

Ein Wort zur Bezeichnung der Multiplikation sei noch verloren: Wenn man konkrete Zahlen miteinander multipliziert, kann man sowohl den Multiplikationspunkt wie auch das Multiplikationskreuz schreiben: $3 \cdot 4 = 3 \times 4 = 12$. Insbesondere im anglosächsischen Bereich ist das Multiplikationskreuz noch gang und gäbe, und dies aus zwei Gründen: Erstens weil eine Verwechslung mit dem Dezimalpunkt dadurch ausgeschlossen wird, und zweitens – wobei dieser Grund der wirklich triftige sein dürfte – weil der Multiplikationspunkt eine Erfindung des deutschen Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz ist, den Englands höchst bewundertes Genie Sir Isaac Newton mit unstillbarem Ingrimm bekämpfte: Newton vermutete – wie wir heute wissen: zu Unrecht –, Leibniz hätte ihm die Erfindung der Differential- und Integralrechnung gestohlen. Doch zurück zur Bezeichnung der Multiplikation: Denkt man sich Buchstaben, welche Zahlen symbolisieren, miteinander multipliziert, ist vom Gebrauch des Multiplikationskreuzes abzuraten, denn eine Verwechslung mit dem häufig verwendeten Symbol x ist zu befürchten. Bei Buchstaben eignet sich der Multiplikationspunkt besser, oder man fügt die Buchstaben gleich eng aneinander. Diese Schreibweise erinnert überdies an die Konvention, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Unvoreingenommen weiß man bei einer Rechnung wie $a + bc + d$ (gar wenn man sie als $a + b \cdot c + d$ oder als $a + b \times c + d$ schreibt) nicht, in welcher Reihenfolge sie auszuführen sei. Würde man sie von links nach rechts lesen, müsste man zuerst a und b addieren, danach die Summe mit c multiplizieren und schließlich zu diesem Produkt d addieren. Aber man hat sich von alters her darauf geeinigt, zuerst das Produkt bc zu berechnen und danach zu diesem sowohl a als auch d zu addieren. Bekanntlich kann man mithilfe von Klammern jede andere Vorgangsweise regeln, zum Beispiel die oben genannte (und der Konvention widersprechende) als $(a + b)\,c + d$. Allein aufgrund dieser Konvention brauchen wir das distributive Rechengesetz nicht schwerfällig als $a\,(b + c) = (ab) + (ac)$ zu schreiben, sondern mit zwei Klammern weniger. Wie man überhaupt im Formelumgang Geübte daran erkennt, dass sie unnötige Klammern vermeiden. So haben wir zum Beispiel durch die Schreibweise $a \cdot bc = ab \cdot c$ beim assoziativen Rechengesetz elegant ohne Klammern zum Ausdruck gebracht, dass wir eigentlich $a\,(bc) = (ab)\,c$ meinten.

Wenden wir uns wieder der geometrischen Bedeutung der Multiplikation als Flächeninhalt zu: Wenn sich die Länge eines Quadrates aus der Summe zweier mit a und b symbolisierten Zahlen zusammensetzt, beträgt sein Flächeninhalt $(a + b)^2$. Aus der linken Skizze in Bild 1.6, in der das Quadrat in zwei kleinere Quadrate mit den Seitenlängen a und b sowie in zwei gleich große Rechtecke mit a und b als Länge und Breite zerfällt, erkennt man unmittelbar die Gültigkeit der berühmten Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

In der mittleren Skizze von Bild 1.6 denken wir uns beide Rechtecke jeweils entlang einer Diagonale aufgeschnitten; sie zerfallen in vier rechtwinklige Dreiecke, welche die Kathetenlängen a und b besitzen. (Die Katheten – das griechische Wort káthetos bedeutet „das Herabgelassene", „das Senkblei" – sind die beiden Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen. Die dritte und längste Dreiecksseite heißt die Hypotenuse, hergeleitet aus den griechischen Wörtern hypó, das „unten" bedeutet, und teínein, das „sich erstrecken" bedeutet. Die Länge der Hypotenuse bezeichnen wir mit c.) Wir bemerken, dass die beiden Dreieckswinkel, welche die Katheten mit der Hypotenuse einschließen, einander zu einem rechten Winkel ergänzen. Nun verschieben wir die vier Dreiecke in dem großen Quadrat so, dass ihre Hypotenusen im Inneren des großen Quadrates ein dazu schräg gedrehtes, kleineres Quadrat aufspannen, wie es die rechte Skizze von Bild 1.6 zeigt. Dessen Flächeninhalt beträgt c^2.

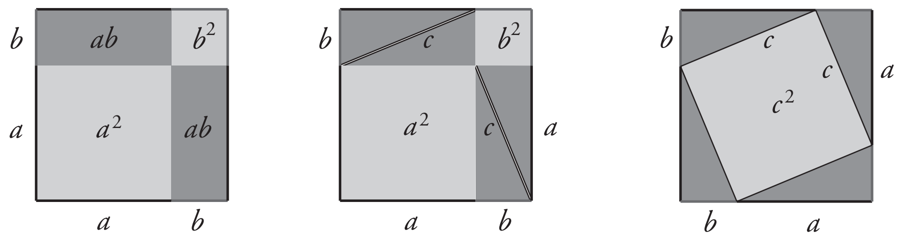


Bild 1.6 Links der Beweis der Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, in der Mitte die beiden Rechtecke in vier rechtwinklige Dreiecke aufgeschnitten und rechts die Dreiecke so versetzt, dass sich daraus der Satz des Pythagoras ergibt

Wenn man bedenkt, dass die Gleichheit

$$c^2 + 2ab = (a+b)^2$$

besteht, und wenn man von der daraus folgenden Formel

$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

von beiden Seiten die zwei Rechtecksflächeninhalte $2ab$ subtrahiert, gewinnt man

$$c^2 = a^2 + b^2 \ ,$$

den sogenannten

Lehrsatz des Pythagoras: Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks besitzt den gleichen Flächeninhalt wie die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.

Hieraus ergibt sich die Antwort auf die Frage, wie weit Hermann von Dorothea entfernt ist, wenn die beiden von einem gemeinsamen Ausgangspunkt gestartet sind, Hermann drei Kilometer nach Norden und Dorothea vier Kilometer nach Osten: Die Rechnung $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ belegt, dass sie tatsächlich exakt fünf Kilometer voneinander entfernt sein müssen.

Wahrscheinlich hatten schon ägyptische Vermessungsbeamte in grauer Vorzeit gewusst, dass ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 dazu dient, einen rechten Winkel zu schlagen.

Diesen benötigten sie, um nach den jährlichen Überflutungen des Landes durch den Nil rechteckige Felder abgrenzen und den Bauern zuteilen zu können. Wahrscheinlich spannten sie zu diesem Zweck eine geschlossene Schnur, auf der sie in gleichen Abständen zwölf Knoten geknüpft hatten, so zu einem Dreieck, dass die drei Seiten jeweils 3, 4 und 5 Strecken von einem Knoten zum nächsten lang sind. Wenn man dies durchführt, ist jener Winkel, welcher der längsten Dreiecksseite gegenüberliegt, ein exakt rechter Winkel.

Es ist uns nicht bekannt, ob die Ägypter wirklich begriffen, dass es sich bei dieser Konstruktion um einen genauen rechten Winkel handelt, oder ob sie dies bloß vermuteten, oder ob sie sich mit der Erfahrung begnügten, dass mit dieser Konstruktion ein rechter Winkel für ihre Feldvermessungen hinreichend präzise zur Verfügung steht. Es ist aber gewiss, dass sowohl babylonische Mathematiker wie auch Gelehrte anderer sehr früher Hochkulturen, lange vor bzw. unabhängig von Pythagoras, *beweisen* konnten, dass ein Dreieck mit Seitenlängen, die mit a, b, c symbolisiert werden, genau dann ein rechtwinkliges Dreieck ist, wenn $c^2 = a^2 + b^2$ zutrifft. Eine typische Aufgabe aus einem babylonischen Rechenbuch lautet: „Ein ursprünglich an einer senkrechten Wand gelehnter 30 Fuß langer Balken ist von oben 6 Fuß herabgerutscht. Wie weit hat er sich dabei waagrecht am Boden von der Wand entfernt?“

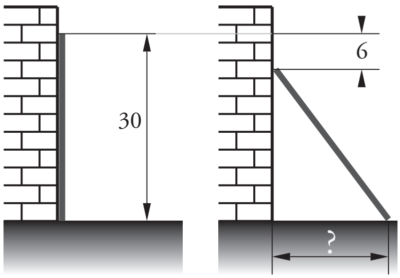


Bild 1.7 Illustration der Aufgabe aus dem babylonischen Lehrbuch: Links lehnt der Balken senkrecht an der Wand, rechts ist er um 6 Fuß von oben herabgerutscht.

Gleich darauf wird die Antwort gegeben: „6 von 30 abgezogen: 24 siehst du.“ Der Autor der Aufgabe weist damit auf das rechtwinklige Dreieck hin, welches 30 Fuß – die Länge des Balkens – als längste Seite und 24 Fuß – der senkrechte Abstand des Balkens vom Boden – als eine weitere Seite besitzt. Wir sehen ein rechtwinkliges Dreieck mit $c = 30$ als Länge der Hypotenuse und mit $b = 24$ als Länge einer Kathete. Bezeichnet a die Länge der noch unbekannten Kathete, ergibt sich aus $30^2 = a^2 + 24^2$, also aus $900 = a^2 + 576$ zunächst $a^2 = 900 - 576 = 324$. Die mit Tabellen der Quadratzahlen ausgestatteten babylonischen Schulkinder finden sofort $18^2 = 324$ heraus. Genau diese Lösung steht auch im Rechenbuch: „18 Fuß am Boden hat er sich entfernt.“ Die Kinder werden sogar noch zu einer Kontrollrechnung gezwungen, denn der pedantische Rechenbuchverfasser fragt im Anschluss: „Wenn sich der Balken 18 Fuß am Boden entfernt hat, wie viel ist er herabgekommen?“

Dass den babylonischen Gelehrten ein Beweis des pythagoreischen Satzes zur Verfügung gestanden sein muss, erkennt man aus der Tatsache, dass sie wussten: Ein Dreieck, bei dem die Seiten 12709, 13500 und 18541 Längeneinheiten lang sind, stellt ein rechtwinkliges Dreieck dar. Selbst wenn man sich auf die Längeneinheit Millimeter einigt, hätte dieses Dreieck bei einer Zeichnung die gewaltigen Ausmaße von fast 20 Meter – es ist völlig undenkbar, dass dieses Wissen der Babylonier aus experimenteller Überprüfung gewonnen wurde. So genau kann kein Mensch zeichnen.

Und die babylonischen Gelehrten erkannten zugleich, dass man zur Längenberechnung der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks oft die Methode des Wurzelziehens benötigt: Das rechtwinklige Dreieck zum Beispiel, dessen Katheten eine und drei Längeneinheiten lang sind, besitzt wegen $1^2+3^2=1+9=10$ eine Hypotenuse, die $\sqrt{10}$ Längeneinheiten lang sein müsste.

Diese letzte Bemerkung führt uns zu Pythagoras und jenen Rechnungen, die aus seiner Feder stammen.

1.3 Zahlen und Irrationalität

Pythagoras von Samos gehört jenen Denkern an, welche die griechische Philosophie begründeten, lange vor dem großen attischen Philosophen Sokrates, und die man deshalb „Vorsokratiker“ nennt. Zur Zeit des Pythagoras, etwa 500 v. Chr., konnten diese ersten Denker ohne Rücksicht auf Vorbilder oder Autoritäten ungehindert kühne Thesen verkünden. Es waren allesamt Thesen gegen den Aberglauben. Denn einer Sache waren sich alle Vorsokratiker sicher: Die von Homer und von Hesiod geschilderte Götterwelt ist Illusion. Es gibt sie nicht: den nach allem was weiblich ist gierenden Göttervater Zeus, die ihn eifersüchtig verfolgende Hera, die aus dem Schaum des Meeres geborene Aphrodite, die aus dem Kopf des Zeus entsprungene, ewig jungfräuliche Athene, den dunklen, die Unterwelt beherrschenden Hades und seine in seinem Schattenreich verzweifelt hausende Persephone, all diese und noch viele andere Gottheiten und Halbgötter, sie alle sind Produkte überspannter Phantasien. Sie sind glatter Schwindel. Modern gesprochen: Homer und Hesiod haben in den Augen der Vorsokratiker das erfunden, was man heute Soap-Operas nennt. Am Olymp, jenem Berg, auf dem die Götter hausen, spielen sich Intrigen, Tragödien und Komödien sonder Zahl ab, die – wie bei Soap-Operas üblich – kein Ende finden. Denn der einzige Unterschied, so hören wir von den einfallsreichen Dichtern, zwischen Menschen und Göttern ist, dass jene sterblich sind, diese aber nicht sterben können.

Die Soap-Opera von Zeus und seiner Sippe ist Lug und Trug. Wer den Olymp besteigt, entdeckt am Gipfel keine unsterblichen Götter, nur tote Steine. So fanden sich die ersten Philosophen in einem von Göttern entleerten, dunklen und riesigen Kosmos wieder, den sie nicht mit Mythen zu füllen, sondern mit ihrem Denken zu erfassen trachteten. In diesem Sinne können wir das Wort des Vorsokratikers Heraklit von Ephesos verstehen, der seine Schüler zu sich lockte, indem er ihnen stolz auf sich zeigend von der Spitze eines Hügels aus zurief: „Kommt her, auch hier wohnen die Götter!“

Was ist das Fundament des Kosmos? Auf diese Frage gab jeder der Vorsokratiker eine jeweils andere, aber gerade ihm und seinen Getreuen überzeugend klingende Antwort: Für Heraklit war es das Feuer, das Symbol des ewigen Wandels, dem der Kosmos unterworfen ist. Aus der Sicht der modernen Physik gar nicht so naiv gedacht, wenn man das Wort „Feuer“ durch den ihm verwandten Begriff „Energie“ ersetzt. Für Anaximenes von Milet war es die Luft, die manchmal ätherisch dünn, manchmal komprimiert sein kann, zuweilen sogar so verdichtet, dass wir sie als flüssig, gar als fest empfinden. Für Thales von Milet war es das Wasser – verständlich, wenn man bedenkt, dass man in Griechenland von vielen Anhöhen aus das Meer am Horizont sieht und erspäht, wie es sich dort mit dem helleren Blau des Himmels trifft. Auch der Himmel scheint für Thales aus Wasser zu bestehen, das zuweilen als Regen aus den Wolken auf die Erde fällt. An den Quellen erkennt man, dass auch aus der Erde Wasser hervorsprudelt, und sogar der Körper des Menschen besteht zum Großteil aus Wasser.

Seine Zeitgenossen hatte Thales dadurch beeindruckt, dass er erfolgreich eine Sonnenfinsternis, der Legende nach jene Sonnenfinsternis, die sich am 28. Mai 585 v. Chr. ereignete, voraussagte. Dies gelang ihm durch Rechnungen, die er von Astronomen im Zweistromland gelernt haben dürfte. Er muss mit seiner Prognose einen ungeheuren Eindruck erzielt haben. Man stelle sich vor: Thales verkündet feierlich am 27. Mai dieses Jahres, dass am nächsten Tag für ein paar Minuten sich der Himmel verfinstern, Dämmerung hereinbrechen und die Sonnenscheibe verschwinden werde – und tatsächlich sehen zur angekündigten Stunde die, zum Teil noch dem Aberglauben an die griechischen Götter verfallenen Leute, dass die Prophezeiung des Thales zutrifft. Dieser Mann, so werden die meisten überzeugt gewesen sein, besitzt übernatürliche Geisteskräfte.

Pythagoras von Samos, der Thales als Lehrer hatte, wusste hingegen, dass es nicht übernatürliche Geisteskräfte, sondern bloße Rechnungen waren, die diese sichere Vorhersage erlaubten. Wie alle anderen Vorsokratiker ist er von der Gewissheit getragen, dass wir nicht dem irrationalen Gutdünken der homerischen Götter ausgeliefert sind, dass das Universum keine Bühne einer Soap-Opera, kein wildes Chaos ist, sondern ein geordneter Kosmos, den man verstehen kann. Nun – so können wir vermuten – stellt Pythagoras die naheliegende und zugleich alles entscheidende Frage: *Wie gelingt es überhaupt, zu verstehen?* Was sind gleichsam die „Atome des Verstehens“? Wo setzt Verstehen an? Was ist so einfach und klar, dass sich jede weitere Erläuterung erübrigt? Wie lauten die *Axiome,* die zu bezweifeln sinnlos ist, weil es an ihnen nichts mehr zu zweifeln gibt?

Pythagoras meint, diese Frage beantworten zu können: Nichts, so glaubt er zu erkennen, ist elementarer als das Zählen. Denn wenn man einmal das Zählen begriffen hat, das mit 1 anhebt und durch ständiges Hinzufügen von 1 von jeder Zahl zur nächsten gelangt, ist es einfach unvorstellbar, anders zu zählen als auf diese Weise. Zählen ist eine Tätigkeit, bei der Menschen über alle denkbaren Verschiedenheiten hinweg in völlig gleichartiger Weise vorgehen. Ja man ist sich sogar einig, dass – sollte der extrem unwahrscheinliche Fall eines Funkkontaktes mit intelligenten Wesen eines fremden Planetensystems zustande kommen – dieser Kontakt über das allen denkenden Wesen gemeinsame Zählen erfolgen müsste. Nur wenn wir erkennen, welche Zahlen einem Sachverhalt zugrunde liegen, haben wir ihn völlig begriffen. Etwas wirklich zu verstehen bedeutet: es so gut zu begreifen, wie man das Zählen begreift.

Man kann das Zählen mit dem Erklimmen einer bis in den Himmel reichenden Jakobsleiter vergleichen. Das erste Buch der Bibel, übersetzt in der Sprache Luthers, erzählt davon: „Jakob zog aus von Beer-Seba und reiste gen Haran und kam an einen Ort, da blieb er über Nacht. Denn die Sonne war untergegangen. Und er nahm einen Stein des Orts und legte ihn zu seinen Häupten und legte sich an dem Ort schlafen. Und ihm träumte. Und siehe, eine Leiter stand auf der Erde, die rührte mit der Spitze an den Himmel. Und siehe, die Engel Gottes stiegen daran auf und nieder.“

Wenn ein Engel weiß, dass er auf die erste Sprosse der Leiter steigen kann, und wenn der Engel weiß, dass er von jeder Sprosse auf die nächste steigen kann, dann kann der Engel beliebig hoch Richtung Himmel klettern. Der französische Universalgelehrte Blaise Pascal dürfte dieses Bild der Himmelsleiter vor seinen Augen gehabt haben, als er feststellte: Weiß man von einem Sachverhalt, dass er für die Zahl 1 zutrifft, und ist von diesem Sachverhalt gesichert, dass er, sobald er für eine Zahl zutrifft, auch für die ihr nachfolgende, um 1 größere Zahl zutrifft, dann stimmt dieser Sachverhalt für jede Zahl. Man nennt diese Einsicht Pascals das *Prinzip* *der vollständigen Induktion.* Das lateinische inducere bedeutet „einführen“ oder „veranlassen“. Tatsächlich stellt Pascal bildhaft den von ihm betrachteten Sachverhalt zuerst auf die erste Sprosse seiner Leiter und hebt ihn danach von jeder Sprosse zur nächsthöheren. Dann wird jede Sprosse der Leiter von ihm erklommen. Eigentlich nutzten bereits die Vorsokratiker das Prinzip der vollständigen Induktion, ohne es als solches zu benennen. Denn es spiegelt nichts anderes als das Zählen wider.

Die Philosophie der Vorsokratiker macht uns glauben, dass man die Welt verstehen kann. Dann muss sie nach der Ansicht des Pythagoras aus Zahlen bestehen, weil nur die Rückführung auf sie uns endgültig zu verstehen erlaubt. Nicht Feuer, nicht Luft, nicht Wasser sind das Fundament des Kosmos, sondern die Zahlen. „Alles ist Zahl“ ist das einzige aus dem Munde des Pythagoras verbürgte Zitat.

Einer uralten Tradition folgend, sucht Pythagoras in den Zahlen geometrische Muster. Er betrachtet die *Dreieckszahlen*

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1+2 = 3, \quad \Delta_3 = 1+2+3 = 6, \quad \Delta_4 = 1+2+3+4 = 10$$

und so weiter. Vor allem die Dreieckszahl $\Delta_4 = 10$ hatte es ihm angetan, denn in ihr erkannte er jene Zahlenverhältnisse, die man beim Abgreifen einer Saite als konsonante Intervalle hören kann: das Verhältnis 1 : 2, das für die Oktav steht, das Verhältnis 2 : 3, das für die Quint steht, und das Verhältnis 3 : 4, das für die Quart steht. Aus diesen drei Zahlenverhältnissen entspringt, so glaubt Pythagoras, der Zauber der Musik.

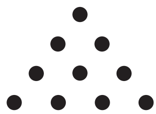


Bild 1.8 Die vierte Dreieckszahl 10 ist Pythagoras zufolge die Zahl der Allvollkommenheit.

Wenn n irgendeine Zahl bezeichnet, erkennt man, dass

$$\Delta_n = 1+2+3+\ldots+n$$

die n-te Dreieckszahl darstellt. Oft symbolisiert man wie in der linken Skizze von Bild 1.9 diese Dreieckszahl als gleichschenkliges Dreieck. Bei ihm wird an der Spitze mittig ein Punkt gezeichnet, und die jeweils nachfolgende Zeile entsteht, indem man die um einen Punkt vermehrte vorhergehende Zeile „zentriert“ kopiert. Man kann wie in der rechten Skizze von Bild 1.9 die Dreieckszahl auch als „linksbündiges“ rechtwinkliges Dreieck zeichnen. Bei ihm wird als Spitze oben links ein Punkt gezeichnet, und die jeweils nachfolgende Zeile entsteht, indem man die ihr vorhergehende Zeile kopiert und rechts einen weiteren Punkt anheftet. Dieses zweite Bild verdeutlicht, dass die Dreieckszahl Δ_n zugleich eine halbe Rechteckszahl ist: Wenn man sie kopiert, um 180 Grad dreht und von rechts kommend an das Original anheftet, erhält man ein Rechtecksmuster, das auf der Längsseite aus $n+1$ und auf der Breitseite aus n Punkten besteht. Hieraus folgert man sofort $2\Delta_n = n\,(n+1)$, und erhält die bemerkenswerte Formel

$$\Delta_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

die für beliebig große Zahlen n die schnelle Berechnung der n-ten Dreieckszahl Δ_n erlaubt.

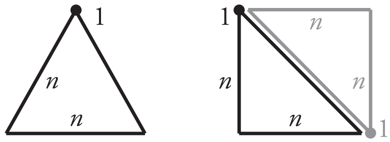


Bild 1.9 Beweis der Formel zur Berechnung der Größe der n-ten Dreieckszahl

Neben den Dreieckszahlen betrachtet Pythagoras die *Quadratzahlen*

$$\square_1 = 1, \quad \square_2 = 1+3 = 4, \quad \square_3 = 1+3+5 = 9, \quad \square_4 = 1+3+5+7 = 16$$

und so weiter. Wie man sieht, errechnet sich die n-te Quadratzahl als $\square_n = n^2$. Und die darauffolgende $(n+1)$-te Quadratzahl $\square_{n+1}$ ergibt sich aus ihr, indem man wie in Bild 1.10 oberhalb ihrer „Oberkante“ n Punkte zeichnet, rechts von ihrer rechten „Kante“ ebenfalls n Punkte zeichnet und die danach rechts oben entstandene Lücke mit einem zusätzlichen Punkt füllt. In einer Formel ausgedrückt: $\square_{n+1} = \square_n + 2n + 1$, was auf die ohnehin schon bekannte Formel $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ führt.

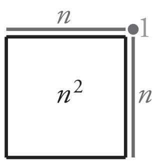


Bild 1.10 Beweis der Formel zur Berechnung der Größe der $(n+1)$-ten Quadratzahl aus der n-ten Quadratzahl

Zweierlei folgerte Pythagoras daraus: Erstens ergeben die jeweils mit 1 beginnenden Summen aufeinanderfolgender ungerader Zahlen der Reihe nach die Quadratzahlen:

$$\boxed{\square_n = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2}$$

Zweitens – und dies ist noch interessanter – betrachtete Pythagoras eine ungerade Quadratzahl, zum Beispiel $a^2 = 9$. Symbolisiert man sie als $9 = 2b+1$, ergibt sich hieraus $2b = 8$, also $b = 4$. Wie oben gezeigt wurde, ergänzt $9 = 2 \cdot 4 + 1$ die Quadratzahl $b^2 = 4^2$ zur Quadratzahl $c^2 = 5^2$. Und da $a^2 = 9 = 3^2$ selbst eine Quadratzahl ist, hat Pythagoras mit $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ eine Dreiergruppe von Zahlen, ein sogenanntes *pythagoreisches Tripel* a, b, c, gefunden, für das $a^2 + b^2 = c^2$ zutrifft. Statt mit $9 = 3^2$ kann man mit jeder größeren ungeraden Quadratzahl dieselbe Überlegung vollziehen: Geht man von $25 = 5^2$ aus, jener ungeraden Zahl, welche die Quadratzahl 12^2 zur Quadratzahl 13^2 ergänzt, gelangt man zum pythagoreischen Tripel 5, 12, 13; geht man von $49 = 7^2$ aus, gelangt man zum pythagoreischen Tripel 7, 24, 25; geht man von $81 = 9^2$ aus, gelangt man zum pythagoreischen Tripel 9, 40, 41; und so weiter. Mit dieser Methode schuf Pythagoras unendlich viele rechtwinklige Dreiecke, deren mit a und b bezeichneten Kathetenlängen und mit c symbolisierter Hypotenusenlänge ganzzahlige Vielfache einer Längeneinheit sind, weil a, b, c pythagoreische Tripel darstellen.

Mit Garantie ist 1, 3, $\sqrt{10}$ kein pythagoreisches Tripel, denn $\sqrt{10}$ ist keine Zahl. Dabei haben wir, wenn wir von „Zahlen“ sprechen, immer nur die von Pythagoras betrachteten Geschöpfe

1, 2, 3, … des menschlichen Geistes vor Augen, die mit 1 beginnen und bei denen man von jeder Zahl durch Hinzufügung von 1 zur nächsten gelangt.

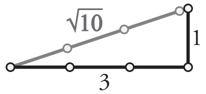


Bild 1.11 1, 3, $\sqrt{10}$ bildet kein pythagoreisches Tripel, denn $\sqrt{10}$ ist keine Zahl.

Was jedoch in der Schule des Pythagoras tatsächlich Verwunderung ausgelöst hat, war die folgende Erkenntnis:

> Das rechtwinklige Dreieck, bei dem die längere Kathete dreimal so lang wie die kürzere ist, kann nicht aus zwei Katheten und einer Hypotenuse bestehen, die ganzzahlige Vielfache einer Längeneinheit sind, mag diese auch noch so klein gewählt sein.

Nehmen wir nämlich an, die kürzere der beiden Katheten sei eine mit n bezeichnete Zahl von Längeneinheiten lang. Dann ist die zweite, dreimal so lange Kathete $3n$ Längeneinheiten lang, und die Hypotenuse ist $\sqrt{10} \cdot n$ Längeneinheiten lang. Zwar symbolisieren n und $3n$ zwei Zahlen, niemals aber, so erkannten die Pythagoreer, $\sqrt{10} \cdot n$. Denn wäre $\sqrt{10} \cdot n = p$ eine Zahl, müsste $10n^2 = p^2$ stimmen. Nun bezeichnet p^2 eine Quadratzahl, und als solche hat sie am rechten Ende ihrer Zifferndarstellung entweder keine Null, oder aber zwei Nullen, oder aber vier Nullen, jedenfalls stets eine *gerade* Anzahl von Nullen. Dies liegt daran, dass die Quadrate der von Null verschiedenen Ziffern niemals rechts mit einer Null enden; die Anzahl der Nullen am rechten Ende der von p symbolisierten Zahl wird daher bei der Bildung von p^2 genau verdoppelt und ist deshalb eine gerade Zahl. Also endet die Zifferndarstellung von p^2 mit einer geraden Anzahl von Nullen. Auch die Zifferndarstellung von n^2 endet mit einer geraden Anzahl von Nullen. Bei der Bildung von $10n^2$ kommt eine weitere Null ans rechte Ende hinzu, die Zifferndarstellung von $10n^2$ endet mit einer *ungeraden* Anzahl von Nullen. Dies ergibt einen eklatanten Widerspruch. In der Gleichung $10n^2 = p^2$ sehen wir auf der linken Seite eine Zahl, die mit einer ungeraden Anzahl von Nullen endet, und auf der rechten Seite eine Zahl, die mit einer geraden Anzahl von Nullen endet.

Es sei an dieser Stelle betont, dass die Pythagoreer den Beweis sicher nicht so wie hier geführt hatten. Dies liegt zum einen daran, dass die Null unter den Pythagoreern unbekannt war. Mag sein, dass Kaufleute auch in der Antike schon die Null und negative Zahlen kannten; für Bilanzen sind diese ja unerlässlich. Aber in der von Pythagoras betriebenen Mathematik hatte die Null nichts zu suchen, zerstört sie doch bei der Multiplikation jeden anderen Faktor: Jede Zahl mit Null multipliziert wird zu Null. Und eine Zahl durch Null dividieren zu wollen, ist überhaupt absurd. Zum anderen ist zu bedenken, dass in der antiken griechischen Mathematik die Zahlen nicht in unserem von Indien über Arabien übernommenen Ziffern- und Dezimalsystem geschrieben wurden, sondern dass die griechischen Buchstaben α, β, γ, δ, … (damals nur als Großbuchstaben A, B, Γ, Δ, … geschrieben) zugleich als Bezeichnungen für die Zahlen 1, 2, 3, 4, … verwendet wurden. Ab dem Buchstaben ι, der für 10 steht, zählten die Griechen in Zehnerbündeln, später in Hunderterbündeln weiter: Die auf ι folgenden Buchstaben κ, λ, μ, … standen für 20, 30, 40, …. Wenn man damals zum Beispiel von „der Zahl π" sprach, meinte man die Zahl 80, und keine andere. Wenn hingegen im oben geführten Beweis von einer

Zahl gesprochen wird, welche durch den Buchstaben p symbolisiert wird, kann damit *jede* der Zahlen 1, 2, 3, 4, … gemeint sein. Gerade deshalb, weil in der modernen Zahlenschreibweise – im Gegensatz zur griechischen – Buchstaben *keine* Zahlen *sind,* kann man sie dazu heranziehen, *irgendwelche* Zahlen zu *bezeichnen.* Dem antiken Griechenland war die Idee, nicht konkret fassbare Zahlen mit Buchstaben zu symbolisieren, durch ihre Zahlenbenennung verwehrt. Erst am Beginn der Renaissance wurde sie von François Viète und anderen Mathematikern des 16. Jahrhunderts in die Mathematik eingeführt.

Die Bezeichnung von nicht konkret fassbaren Zahlen durch Buchstaben ist seither in der Mathematik derart gang und gäbe, dass man zum Beispiel gerne sagt: „Wir betrachten eine Zahl n“, so als ob n tatsächlich eine Zahl *sei.* Das ist genau genommen purer Unfug. n ist ein Buchstabe und als solcher alles andere als eine Zahl. Richtig wäre stattdessen der Satz: „Wir betrachten eine Zahl, die wir mit dem Symbol n bezeichnen.“ Aber diese überkorrekte Sprechweise erweist sich doch als ziemlich mühsam, und man gewöhnt sich schnell daran, von „der Zahl n“, von „der Quadratzahl p^2“ zu sprechen, ohne dabei Gewissensbisse aufkommen zu lassen. Und in dieser etwas lässigen Diktion, die wir von nun an zulassen wollen, fühlt man sich bereits geborgen, wenn man den folgenden Satz versteht: „Wir sehen, dass am rechten Ende der Quadratzahl p^2 genau doppelt so viele Nullen auftauchen, wie die Zahl p an ihrem rechten Ende besitzt.“

Schließlich sei einbekannt, dass die Pythagoreer vorrangig nicht das rechtwinklige Dreieck betrachteten, bei dem die längere Kathete dreimal so lang ist wie die kürzere, sondern das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck. Für dieses gilt ein gleichartiger Satz:

Beim gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck, bei dem die gleich langen Katheten ein ganzzahliges Vielfaches einer Längeneinheit lang sind, ist die Hypotenuse kein ganzzahliges Vielfaches dieser Längeneinheit lang.

Man sagt dazu kurz: Die Katheten und die Hypotenuse des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks sind *inkommensurabel.* Damit meint man, dass es kein „gemeinsames Maß“ dieser beiden Seiten gibt, also keine Längeneinheit, welche – wie klein man sich diese auch vorstellen mag – sowohl mit einer Zahl multipliziert exakt die Kathetenlänge, als auch mit einer Zahl multipliziert exakt die Länge der Hypotenuse ergibt.

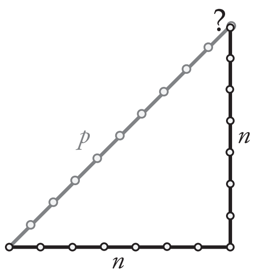


Bild 1.12 Es gibt kein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten das n-Fache und dessen Hypotenuse das p-Fache einer Längeneinheit lang sind, wenn n und p Zahlen bezeichnen.

Aristoteles zufolge führte Hippasos von Metapont, ein Schüler des Pythagoras, den Beweis dafür folgendermaßen: Angenommen, sowohl die beiden gleich langen Katheten wie auch die

Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks besäßen Längen, die man jeweils als ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Längeneinheit schreiben könnte. Wären diese beiden ganzzahligen Faktoren gerade, könnte man die Längeneinheit durch eine neue ersetzen, die doppelt so groß ist; die beiden Faktoren würden dadurch halbiert und blieben Zahlen. Wären auch diese wieder zwei gerade Zahlen, könnte man dasselbe noch einmal durchführen, und dies so lange, bis endlich die beiden Katheten das n-Fache und die Hypotenuse das p-Fache einer Längeneinheit lang wären, wobei mindestens eine der beiden Zahlen n oder p eine *ungerade* Zahl sein müsste. Weil mit n, n, p ein pythagoreisches Tripel vorläge, würde $n^2 + n^2 = p^2$, also $2n^2 = p^2$ zutreffen. Diese Gleichung zeigt, dass jedenfalls p eine *gerade* Zahl sein müsste, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl bleibt ungerade. Und p^2 müsste als Quadrat einer geraden Zahl sogar durch 4 teilbar sein. Daraus folgern wir, dass n nicht ungerade sein kann, denn in diesem Fall wäre auch n^2 eine ungerade Zahl, und daher $2n^2$ eine nur durch 2, aber nicht durch 4 teilbare Zahl, im Widerspruch zur Gleichung $2n^2 = p^2$. Also müsste auch n eine *gerade* Zahl sein. Doch eben dies, dass sowohl n wie auch p zwei gerade Zahlen seien, wurde oben ausgeschlossen. Deshalb ist die zu Beginn getroffene Annahme, sowohl die beiden gleich langen Katheten wie auch die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks besäßen Längen, die man jeweils als ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Längeneinheit schreiben könnte, absurd.

Rein auf Zahlen bezogen, zieht Hippasos die Folgerung: Das Doppelte einer Quadratzahl kann niemals selbst wieder Quadratzahl sein. Es gibt keine Zahlen n und p, für die $2n^2 = p^2$ zutrifft.

Weil für keine Zahlen n und p die Gleichung $2n^2 = p^2$ stimmt, ist auch

$$2 = \frac{p^2}{n^2} = \left(\frac{p}{n}\right)^2$$

und somit

$$\sqrt{2} = \frac{p}{n}$$

absurd. Somit wissen wir, dass $\sqrt{2}$ kein Bruch, kein Zahlenverhältnis sein kann. Also wissen wir, was $\sqrt{2}$ sicher *nicht* ist. Umso rätselhafter bleibt die Frage, was $\sqrt{2}$ eigentlich *ist.*

1.4 Dezimalzahlen und reelle Größen

Um $\sqrt{2}$ fassen zu können, bedienen wir uns einer anschaulichen Sprechweise: Wir betrachten eine Gerade, auf der zwei voneinander verschiedene Punkte eingetragen sind. Es ist üblich, die Gerade waagrecht zu zeichnen und dafür zu sorgen, dass der die Null symbolisierende Nullpunkt 0 links von dem die Zahl Eins symbolisierenden Einheitspunkt 1 zu liegen kommt. (Zeichnet man die Gerade senkrecht, soll sich der Nullpunkt unterhalb des Einheitspunktes befinden, aber dies spielt im jetzigen Zusammenhang keine Rolle.) Nimmt man die vom Nullpunkt zum Einheitspunkt reichende Strecke in den Zirkel, kann man diese Strecke vom Nullpunkt aus beliebig oft von einem erhaltenen Punkt zum nächsten nach rechts abtragen und bekommt so das geometrische Bild der Zahlen 1, 2, 3, …. Sie werden anschaulich zu Punkten auf dieser Geraden, die man deshalb eine „Zahlengerade“ oder besser eine *Skala* nennt. Wir wollen erst im Laufe der Erörterungen die geometrischen Einzelheiten ansprechen und lassen uns zunächst vom sinnlichen Eindruck leiten. Statt zu sagen, ein Punkt der Skala *veranschauliche* eine mit dem Symbol a bezeichnete Größe, sprechen wir lässig einfach nur „vom Punkt a auf der Skala" und nennen Punkte auf der Skala einfach *Skalare*. In diesem Sinn sind Null und die Zahlen 1, 2, 3, … zugleich Skalare.

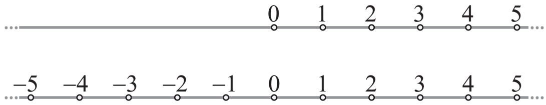


Bild 1.13 Das anschauliche Bild der natürlichen Zahlen (oben) und der ganzen Zahlen (unten) auf der Skala

Wir können die vom Nullpunkt zum Einheitspunkt reichende Strecke in den Zirkel nehmen und vom Nullpunkt aus beliebig oft von einem erhaltenen Punkt zum nächsten auch nach links abtragen. Auf diese Weise erhalten wir das geometrische Bild der sogenannten *negativen ganzen Zahlen* −1, −2, −3, … Sie sind ebenfalls Skalare dieser Skala. Allgemein spricht man von einer *ganzen Zahl,* wenn man 0 oder eine der *positiven ganzen Zahlen* 1, 2, 3, …, oder aber eine der negativen ganzen Zahlen −1, −2, −3, … vor Augen hat. Wie so oft spielt auch an dieser Stelle die Mathematik der Sprache ein Schnippchen.

Denn genau genommen macht es keinen Unterschied, ob man von „positiven ganzen Zahlen" oder nur von „Zahlen" spricht. Doch Null und die negativen ganzen Zahlen sind im strengen Sinn des Wortes gar keine Zahlen. Null ist vielmehr ein Symbol eigener Art, das man in der Skala als Punkt verwirklicht sieht. Und eine negative ganze Zahl ist eine mit dem Minuszeichen versehene Zahl, also eigentlich das Symbolpaar eines Vorzeichens zusammen mit einer Zahl. In der Sprache ist man gewohnt, dass ein Eigenschaftswort, das einem Hauptwort beigestellt wird, den ursprünglichen Begriffsumfang des Hauptwortes einschränkt. Wird dem Hauptwort „Lebewesen" das Eigenschaftswort „vernunftbegabt" zugesellt, betrachtet man nicht mehr die Fülle aller Lebewesen, sondern nur mehr die kleinere Gesamtheit der vernunftbegabten Lebewesen, vulgo der Menschen. Rosen, die auch Lebewesen sind, werden dadurch ausgeschlossen. Das Gleiche trifft zu, wenn man unter den Zahlen einerseits die „geraden Zahlen", die durch 2 teilbaren Zahlen, oder die „ungeraden Zahlen", die nicht durch 2 teilbaren Zahlen, in den Blick nimmt. Wenn wir hingegen von „ganzen Zahlen" sprechen, ist es gerade umgekehrt: Hier nimmt man nicht einen *Teilbereich* der Zahlen, sondern *mehr* als nur die Zahlen 1, 2, 3, … in den Blick: Man betrachtet zusätzlich noch die Null und die mit dem Minuszeichen als Vorzeichen versehenen Zahlen.

Ähnlich ist es mit den sogenannten *Dezimalzahlen* bestellt. Auch mit dem Begriff „Dezimalzahl" beschreibt man viel mehr als nur Zahlen. Doch sehr weit vom Begriff der ganzen Zahl sind sie nicht entfernt: Wenn man nämlich die Skala in Zehntel-, Hundertstel-, Tausendstel-, … und noch feineren Unterteilungen vorliegen hat, sich gleichsam den Meterstab in Dezimeter, in Zentimeter, in Millimeter, … unterteilt denkt, verwandeln sich Dezimalzahlen zu ganzen Zahlen. So kann man zum Beispiel 3.14159 als 314 159 Hunderttausendstel lesen und dies in der Form $3.14159 = 314\,159 \times 10^{-5}$ schreiben. Die mit negativen ganzen Zahlen als Exponenten versehenen Zehnerpotenzen 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, … stehen nämlich für Zehntel, Hundertstel, Tausendstel und so weiter. Eine Dezimalzahl ist demnach eine ganze Zahl, die zusätzlich mit einer geeigneten Zehnerpotenz multipliziert wird. Diese Zehnerpotenz kann auch $10^0 = 1$ lauten, d.h. auch die ganzen Zahlen sind Dezimalzahlen.

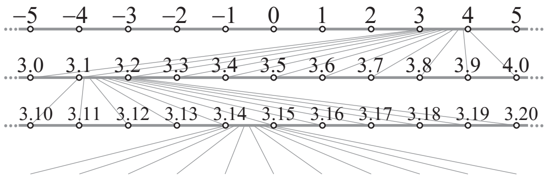


Bild 1.14 Das anschauliche Bild der Dezimalzahlen auf der Skala

Um Übersicht gewinnen zu können, sind die folgenden in der Mathematik gebräuchlichen Abkürzungen hilfreich: In dem Symbol $\mathbb{N}$ versammelt man 0 und die Zahlen 1, 2, 3, ...; man spricht in diesem Zusammenhang von den *natürlichen Zahlen*. Nimmt man allein die Zahlen 1, 2, 3, ... ins Blickfeld, schließt man also die Null aus der Betrachtung aus, schreibt man für diese Gesamtheit $\mathbb{N}^*$. Das System aller ganzen Zahlen 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ... nennt man $\mathbb{Z}$, und das noch weitaus umfassendere System der Dezimalzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{D}$. Wir können symbolisch $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ schreiben, wenn wir vereinbaren, dass rechts von dem Zeichen $\subset$ ein Symbol steht, das eine umfassendere Gesamtheit bezeichnet als jene, die links vom Zeichen $\subset$ symbolisiert wird.

Die Ähnlichkeit der Dezimalzahlen mit den ganzen Zahlen wird noch deutlicher, wenn man das System $\mathbb{D}$ in Schichten einteilt. Mit $\mathbb{D}_1$ symbolisieren wir die Menge jener Dezimalzahlen wie zum Beispiel $3.1 = 31 \times 10^{-1}$ oder $-2.7 = -27 \times 10^{-1}$, die nur eine einzige Nachkommastelle besitzen. Auch die ganzen Zahlen selbst zählen dazu, denn man kann zum Beispiel 5 oder −13 als $5.0 = 50 \times 10^{-1}$ oder $-13.0 = -130 \times 10^{-1}$ schreiben. Mit $\mathbb{D}_2$ symbolisieren wir die Menge jener Dezimalzahlen wie zum Beispiel $3.14 = 314 \times 10^{-2}$ oder $-2.71 = -271 \times 10^{-2}$, die höchstens zwei Nachkommastellen besitzen. Ganze Zahlen und Dezimalzahlen aus $\mathbb{D}_1$ gehören natürlich auch dazu, denn es sind zum Beispiel $5 = 5.00 = 500 \times 10^{-2}$ oder $-13.7 = -13.70 = -1370 \times 10^{-2}$. Und wir schreiben allgemein $\mathbb{D}_n$ für das System aller Dezimalzahlen, die n Nachkommastellen haben. So ist zum Beispiel $3.14159 = 314\,159 \times 10^{-5}$ in $\mathbb{D}_5$, aber natürlich zugleich in $\mathbb{D}_7$, denn für diese Dezimalzahl gilt auch $3.14159 = 3.1415900 = 31\,415\,900 \times 10^{-7}$.

Es ist klar, dass $\mathbb{D}_1$ konstruiert werden kann, indem man vom Nullpunkt 0 aus nicht, wie vorher, einmal, sondern zehnmal eine bestimmte Strecke, die Zehntelstrecke, nach rechts abträgt und den nach dem zehnfachen Abtragen erhaltenen Punkt als Einheitspunkt 1 tauft. Die dazwischen abgetragenen Skalare stehen für die Dezimalzahlen 0.1, 0.2, 0.3, ..., 0.9. Und auch alle weiteren Dezimalzahlen aus $\mathbb{D}_1$ stehen somit klar vor Augen. Und wenn man eine Strecke vom Nullpunkt 0 aus nicht einmal, nicht zehnmal, sondern sogar hundertmal, allgemein sogar 10^n-mal, nach rechts abträgt und erst den dann erhaltenen Punkt den Einheitspunkt 1 nennt, hat man ein anschauliches Bild entwickelt, wie man die Dezimalzahlen aus $\mathbb{D}_2$, allgemein aus $\mathbb{D}_n$, erhält.

In jedem Maßstab, in dem ein Meter als Einheitsstrecke gewählt wird, ist dies in Ansätzen verwirklicht. $\mathbb{Z}$ steht für die ganzzahligen Meter, $\mathbb{D}_1$ für die ganzzahligen Dezimeter, $\mathbb{D}_2$ für die ganzzahligen Zentimeter und $\mathbb{D}_3$ für die ganzzahligen Millimeter. Man kann auch sagen, dass $\mathbb{D}_n$ aus $\mathbb{D}_{n-1}$ dadurch entsteht, dass man auf der Skala eine Vergrößerung um den Faktor 10 durchführt: der Einheitspunkt in $\mathbb{D}_{n-1}$ wird zehnmal weiter nach rechts gerückt. Und dies stimmt auch für $n = 1$, wenn man für $\mathbb{Z}$ zugleich $\mathbb{D}_0$ schreibt.

Mit dem Einschließungszeichen $\subset$, bei dem links eine Teilmenge der rechts angeschriebenen Menge steht, kann man eine Kette von Einschließungen notieren:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2 \subset \ldots \subset \mathbb{D}_{n-1} \subset \mathbb{D}_n \subset \ldots .$$

Und die Gesamtheit $\mathbb{D}$ aller Dezimalzahlen besteht aus all jenen Objekten, die ab einer bestimmten Zahl n in $\mathbb{D}_n$ (und damit für jede Zahl $m > n$ zugleich in $\mathbb{D}_m$) auftauchen.

Die Skala lehrt uns aber auch, dass zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{D}$ ein bemerkenswerter Unterschied besteht. Es liegt im Wesen der ganzen Zahlen, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen eine stets gleich große Lücke klafft. Sie ist ebenso groß wie die Spanne des Zirkels, mit dem die Einheitsstrecke abgetragen worden ist. Anders ausgedrückt: Wenn man von einer ganzen Zahl a weiß, dass $a > 0$ ist, dann weiß man sogar, dass $a \geq 1$ stimmt. Diese Aussage mutet zwar höchst banal an, ist aber in ihrer Bedeutung nicht zu verachten.

Die Dezimalzahlen hingegen liegen – so legt es zumindest die Anschauung nahe – auf der Skala *dicht*. Damit ist Folgendes gemeint: Betrachten wir auf der Skala irgendzwei mit x und mit y bezeichnete Skalare, wobei y links von x liegen soll, also $y < x$ stimmt. Dann wird es wohl immer gelingen, eine Dezimalzahl z zu finden, die zwischen diese beiden Skalare eingeschoben werden kann: $y < z < x$. Jedenfalls stimmt diese Aussage sicher, wenn es sich bei x und y um Dezimalzahlen handelt. Denn deren arithmetisches Mittel $z = \left(x + y\right)/2$ ist auch eine Dezimalzahl (sie besitzt höchstens eine Nachkommastelle mehr, als x oder y als Anzahl von Nachkommastellen haben), und z liegt genau in der Mitte zwischen x und y.

Damit sind wir wieder bei der Berechnung von $\sqrt{2}$ mit der Methode des babylonischen Wurzelziehens angelangt.

Wie geht man vor, wenn von einem positiven Skalar a, der keine Quadratzahl ist, die Wurzel gezogen, also die Größe $\sqrt{a}$ berechnet werden soll? Zuerst sucht man unter den Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, … jene Quadratzahl x^2, die dem Skalar a am nächsten kommt. Dies bedeutet, dass die Wurzel dieser Quadratzahl, also die Zahl x unter allen Zahlen die beste Annäherung an $\sqrt{a}$ darstellt. Dann bildet man den Bruch $y = a/x$. Für ihn trifft $xy = a$ zu, deshalb können wir den folgenden Schluss ziehen: Falls x ein wenig größer als $\sqrt{a}$ sein sollte, muss y ein wenig kleiner als $\sqrt{a}$ sein, und falls x ein wenig kleiner als $\sqrt{a}$ sein sollte, muss y ein wenig größer als $\sqrt{a}$ sein. Mit anderen Worten: $\sqrt{a}$ liegt sicher zwischen x und y. Außerdem stellen wir fest: Je näher x auf der einen Seite an $\sqrt{a}$ herankommt, umso besser ist auch die Näherung $y = a/x$ an $\sqrt{a}$ von der anderen Seite.

Der nächste Schritt im babylonischen Wurzelziehen besteht darin, das arithmetische Mittel von x und y, also den Bruch $x_1 = \left(x + y\right)/2$ zu bilden und danach $y_1 = a/x_1$ zu berechnen. Auch für diese beiden Größen trifft wieder $x_1 y_1 = a$ zu, also gilt der gleiche Schluss wie oben. $\sqrt{a}$ liegt zwischen x_1 und y_1. Doch wir können aus der Tatsache, dass $x_1 = \left(x + y\right)/2$ das arithmetische Mittel von x und y ist und $y_1 = a/x_1$ gilt, noch mehr folgern: Nicht nur x_1 liegt zwischen x und y, auch y_1 befindet sich zwischen x und y. Und der Abstand der beiden Skalare x_1 und y_1 voneinander ist, weil x_1 sogar genau die Mitte zwischen x und y bildet, höchstens halb so groß, wie der Abstand der beiden Skalare x und y voneinander beträgt.

In diesem Zusammenhang ist eine Bezeichnung hilfreich: Wenn x und y zwei Skalare bezeichnen, soll $\left|x - y\right|$ deren Abstand voneinander darstellen. Mit anderen Worten: Sollte $x \geq y$ sein, dann ist $\left|x - y\right| = x - y$. Und sollte $x \leq y$ sein, dann ist $\left|x - y\right| = y - x$. Man nennt $\left|x - y\right|$ auch die *absolute Differenz* zwischen x und y, den *Unterschied* zwischen x und y oder den *Betrag der Differenz* von x und y.