

Heribert Stroppe

PHYSIK

für Studierende der Natur-
und Ingenieurwissenschaften



HANSER

Physikalische Konstanten (2014 CODATA recommended values)

Atomare Masseneinheit	u	$= 1,660\,539\,040(20) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atomare Masseneinheit (Energieäquivalent)	$u c_0^2$	$= 931,494\,0954(57) \text{ MeV}$
AVOGADRO-Konstante	N_A	$= 6,022\,140\,857(74) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
BOHRscher Radius	a_H	$= 0,529\,177\,210\,67(12) \cdot 10^{-10} \text{ m}$
BOHRsches Magneton	μ_B	$= 9,274\,009\,994(57) \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
BOLTZMANN-Konstante	k	$= 1,380\,648\,52(79) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
COMPTON-Wellenlänge des Elektrons	λ_C	$= 2,426\,310\,2367(11) \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Elektrische Elementarladung	e	$= 1,602\,176\,6208(98) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$= 8,854\,187\,8176 \dots \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \text{ *)}$
Elektronenradius	r_e	$= 2,817\,940\,3227(19) \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Fallbeschleunigung (Normwert)	g_n	$= 9,806\,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ *)}$
FARADAY-Konstante	F	$= 96\,485,332\,89(59) \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Feinstrukturkonstante	α	$= 7,297\,352\,5664(17) \cdot 10^{-3}$
Gaskonstante (molare)	R_m	$= 8,314\,4598(48) \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Gravitationskonstante	γ	$= 6,674\,08(31) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
JOSEPHSON-Konstante	K_J	$= 4,835\,978\,525(30) \cdot 10^{14} \text{ Hz} \cdot \text{V}^{-1}$
Kernmagneton	μ_N	$= 5,050\,783\,699(31) \cdot 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	$= 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ *)}$
LOSCHMIDT-Konstante	N_L	$= 2,686\,7811(15) \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$= 12,566\,370\,614 \dots \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ *)}$
Magnetisches Flussquantum	Φ_0	$= 2,067\,833\,831(13) \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$
Molares Normvolumen des idealen Gases	V_{m0}	$= 0,022\,413\,962(13) \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
Normalluftdruck	p_0	$= 101\,325 \text{ Pa} \text{ *)}$
PLANCKsches Drehimpulsquantum	\hbar	$= 1,054\,571\,800(13) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
PLANCKsches Wirkungsquantum	h	$= 6,626\,070\,040(81) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Quanten-HALL-Widerstand	R_{H0}	$= 25\,812,807\,4555(59) \Omega$
Ruhmasse des Elektrons	m_e	$= 9,109\,383\,56(11) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhmasse des Neutrons	m_n	$= 1,674\,927\,471(21) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhmasse des Protons	m_p	$= 1,672\,621\,898(21) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
RYDBERG-Frequenz	$R_H c_0$	$= 3,289\,841\,960\,355(19) \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
RYDBERG-Konstante	R_H	$= 10\,973\,731,568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Spezifische Ladung des Elektrons	e/m_e	$= -1,758\,820\,024(11) \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$
Spezifische Ladung des Protons	e/m_p	$= 9,578\,833\,226(59) \cdot 10^7 \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$
STEFAN-BOLTZMANN-Konstante	σ	$= 5,670\,367(13) \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Wellenwiderstand des Vakuums	Z_0	$= 376,730\,313\,461 \dots \Omega \text{ *)}$
WIEN-Konstante	b	$= 2,897\,7729(17) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

Hinweis: Die letzten beiden Ziffern in runden Klammern geben jeweils die Standardabweichung der betreffenden Größe an; sie bezieht sich auf die letzten beiden, vor der Klammer stehenden Dezimalen. Z. B. ist die Elementarladung zu lesen als $e = (1,602\,176\,6208 \pm 0,000\,000\,0098) \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

*) Exakte Konstante.

Heribert Stroppe

PHYSIK

für Studierende der Natur- und
Ingenieurwissenschaften

Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen
mit 371 Bildern, 25 Tabellen, 245 durchgerechneten Beispielen
und 145 Aufgaben mit Lösungen

16., aktualisierte Auflage

Unter Mitarbeit von

Heinz Langer, Peter Streitenberger und Eckard Specht



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Prof. Dr. sc. nat. Dr.-Ing. Heribert Stroppe

Ordinarius für Technische Physik i. R.,
Wissenschaftlicher Leiter des Institute of High Technologies
and Education e.V. Magdeburg

unter Mitarbeit von

Dr. rer. nat. Heinz Langer

Dr. rer. nat. habil. Peter Streitenberger

Dr. rer. nat. Eckard Specht

Institut für Physik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-45533-7

E-Book-ISBN 978-3-446-45580-1

Einbandbild: Otto von Guericke's Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln
aus Caspar Schott, Technica curiosa, Nürnberg 1664
(Archiv der Otto-von-Guericke-Gesellschaft Magdeburg e. V.)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2018 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Manuel Leppert, M. A.

Herstellung: Katrin Wulst

Satz: Eckard Specht, Magdeburg

Bildbearbeitung: Michael Specht, Katja Neumann, Magdeburg

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner Göttingen

Printed in Germany

Für

Alma

Vorwort

Seit seinem Erscheinen im Jahre 1974 hat das Lehrbuch zunehmende Verbreitung gefunden, nicht nur unter Studierenden der Ingenieurwissenschaften, für die es ursprünglich gedacht war, sondern auch bei Studienanfängern der Physik und anderer Naturwissenschaften. Das von Anfang an verfolgte und über Jahre hinweg beibehaltene Konzept, das ganze umfangreiche Gebiet in einem einzigen Band wiederzugeben, hat sich somit stets aufs Neue bewährt.

Die Menge an neuen physikalischen Erkenntnissen wächst von Tag zu Tag in stürmischer Weise an. Dies zwingt zu einer Form des Lehrbuchs, wie sie einer Anfängervorlesung wohl am besten gerecht wird: Die Abschnitte über die „klassische“ Physik bringen die Herleitungen bis ins Einzelne; an ihnen sollen sich die Leser die erforderliche Gewandtheit im Rechnen sowie in der mathematischen Formulierung physikalischer Zusammenhänge aneignen. Später, hauptsächlich im Kapitel „Quanten“ sowie bei neueren Anwendungen der Physik, muss mehr und mehr dazu übergegangen werden, das physikalische Phänomen zu beschreiben und zu erklären.

Neben der reinen Wissensvermittlung soll das Buch aber noch einem anderen Zweck dienen: Es soll bei den jungen Studierenden, auch wenn sie die Physik nur als Grundlagenfach belegen (müssen), zugleich ein wenig die Liebe zum Gegenstand wecken. Deshalb sind trotz der gebotenen Kürze manche Probleme der Physik angesprochen, die nicht unmittelbar zum Stoff einer Grundlagenvorlesung gehören, aber üblicherweise allgemeines Interesse finden.

Die Durcharbeitung des in betont knapper Form gehaltenen Stoffes erfordert die intensive Mitarbeit der Leser. Wer also das Buch wirklich zum Lernen und nicht nur zum Nachschlagen benutzen will, wird viel „mitrechnen“ müssen. Dies bezieht sich nicht nur auf die zu den einzelnen Abschnitten aufgenommenen Übungsbeispiele und Aufgaben; diese möglichst ohne Zuhilfenahme der Lösungen zu meistern, sei jedem Studierenden dringend angeraten. Zahlreiche zusätzliche Beispiele und Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades mit meist praxisorientiertem Inhalt zu allen behandelten Stoffgebieten enthält unser einbändiges Übungsbuch „PHYSIK – Beispiele und Aufgaben“.

Das Verständnis ist ein allgemeines Problem beim Erlernen der Physik. Das Lesen mag einfach erscheinen, aber das tiefere Verstehen der Zusammenhänge erfordert mehr als nur Lesen und Auswendiglernen, es erfordert Nachdenken; es gibt bei ernsthaftem Studium keine Möglichkeit, Letzteres zu umgehen. Die Studierenden sollen aber wissen, dass die Schwierigkeiten, mit denen erfahrungsgemäß jeder anfänglich zu kämpfen hat, in der Natur der Sache liegen, und dass sie sich um das Verständnis der Dinge ebenso bemühen müssen, wie es vor ihnen auch alle großen Geister einmal getan haben. Der Lohn der Mühe wird sich dann bald im Erfolgserlebnis und „Leistungsglück“ einstellen und Ansporn für ein weiteres erfolgreiches Studium sein.

Trotz vieler Hinweise wurde mit der Erweiterung der Stoffinhalte bewusst zurückhaltend umgegangen. So wurden hinsichtlich der noch bevorstehenden Revision des Internationalen Einheitensystems (SI) bereits abzusehende Änderungen an vielen Stellen eingearbeitet, ein Abschnitt über den kristallinen Aufbau der Stoffe sowie über die allgemeine Relativitätstheorie hinzugefügt. Desweiteren wurden zahlreiche inhaltliche Ergänzungen vorgenommen sowie neue Beispiele und Aufgaben aufgenommen. Vor allem Merksätze, die Studierenden bei der Prüfungsvorbereitung helfen, sind nun deutlicher hervorgehoben als zuvor.

Es war dem Hauptautor des Buches, Prof. Dr. HERIBERT STROPPE, leider nicht vergönnt, das Erscheinen der 16. Auflage zu erleben. Er prägte noch wesentlich die inhaltliche Erweiterung des Lehrbuches und nahm Einfluss auf gestalterische Aspekte der Neuauflage. Wir, die Mitautoren Dr. habil. P. STREITENBERGER und Dr. E. SPECHT, haben nach bestem Wissen die Überarbeitung des Lehrbuches im Sinne des Hauptautors fortgeführt.

Wir danken den Herren Prof. Dr. W. HERMS (Magdeburg) und Prof. Dr. J. HÖHN (Wien) für wertvolle Hinweise. Weiterhin sind wir Frau U. KRUSE für das Zeichnen und Herrn M. SPECHT für die digitale Bearbeitung der Bilder zu Dank verpflichtet.

Dem Verlag sei für die seit Erscheinen des Buches stets gute Zusammenarbeit gedankt.

Magdeburg, im Juli 2018

Die Autoren

Hinweise

Gleichungen, Bilder, Tabellen, Beispiele und Aufgaben werden *innerhalb eines Hauptabschnittes* (Einer-Nummerierung) fortlaufend gezählt (z. B. Bild 3.10 = 10. Bild im Abschnitt 3, oder (14.5) = Gleichung (5) in Abschnitt 14 oder Beispiel 31.1/2 = zweites der Beispiele 31.1 usw.). Die *Lösungen* zu den Aufgaben befinden sich unter der entsprechenden Aufgaben-Nummer auf den Seiten 629 bis 634.

Vektoren sind im Text durch fettgedruckte Buchstaben, in den Bildern zur besseren Unterscheidung durch normale Buchstaben mit einem Pfeil darüber gekennzeichnet.

Aus didaktischen und historischen Gründen verwenden wir in der Benennung und/oder in den Formelzeichen physikalischer Größen in einigen Fällen sowohl die Größenbenennung nach DIN als auch die im physikalischen Schrifttum (noch) häufiger vorkommende Benennung, z. B. „Dielektrizitätskonstante“ und nach DIN „Permittivität“, „Verschiebungsdichte“ und „elektrischer Fluss“, „Flächenladungsdichte“ und „Ladungsbedeckung“, oder Stromdichte \mathbf{j} statt nach DIN \mathbf{J} , magnetische Spannung U_m statt V_m u. a. Im Übrigen unterliegen sowohl die Größenbenennungen als auch die Formelzeichen erfahrungsgemäß häufigen Veränderungen, und die Empfehlungen sind in verschiedenen Fachgebieten nicht einheitlich.

Inhaltsverzeichnis

I Einführung

1	Was ist „Physik“? Wege physikalischer Erkenntnisgewinnung	20
2	Physikalische Größen, Einheiten, Dimensionen, Gleichungen	22
2.1	Größen, Einheiten, Dimensionen	22
2.2	Physikalische Gleichungen	24
2.3	Das neue SI-Einheitensystem	25

II Teilchen

Mechanik der Punktmasse und des starren Körpers. Stoffe

3	Kinematik der Punktmasse	28
3.1	Raum, Zeit, Bezugssystem	28
3.2	Die gleichförmige Bewegung	30
3.3	Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung	31
3.4	Freier Fall. Senkrechter Wurf	34
3.5	Allgemeine Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung	36
3.6	Geschwindigkeit und Beschleunigung als Vektoren. Zusammengesetzte Bewegungen (Superposition)	39
3.7	Die gleichförmige Kreisbewegung	41
3.8	Die ungleichförmige Kreisbewegung	45
3.9	Bewegung auf beliebig krummliniger Bahn	47
4	Dynamik der Punktmasse	49
4.1	Der Kraftbegriff in der Physik. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statisches Gleichgewicht	49
4.2	Das Trägheitsgesetz (1. NEWTONSches Axiom)	51
4.3	Das Grundgesetz der Dynamik (2. NEWTONSches Axiom)	52
4.4	Träge und schwere Masse. Gewichtskraft. Radialkraft	53
4.5	Kraftstoß. Impuls (Bewegungsgröße)	55
4.6	Lösung der Bewegungsgleichung für konstante Kraft. Die Wurfbewegung	58

4.7	Das Wechselwirkungsgesetz (3. NEWTONSches Axiom)	61
4.8	Reibungskräfte	62
5	Bewegte Bezugssysteme	66
5.1	Geradlinig beschleunigte Bezugssysteme. Trägheitskräfte	66
5.2	Gleichförmig rotierende Bezugssysteme. Zentrifugalkraft, CORIOLIS-Kraft ..	69
5.3	Inertialsysteme. Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik	72
6	Grundzüge der speziellen Relativitätstheorie	74
6.1	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die LORENTZ-Transformation	74
6.2	Folgerungen aus der LORENTZ-Transformation	78
6.3	Relativistische Bewegungsgleichung	79
7	Arbeit und Energie	81
7.1	Arbeit	81
7.2	Leistung. Wirkung	85
7.3	Der Energiebegriff. Potenzielle und kinetische Energie	86
7.4	Das Gesetz von der Erhaltung der Energie (Energiesatz)	87
7.5	Äquivalenz von Masse und Energie	89
8	Gravitation	91
8.1	Die KEPLERSchen Gesetze der Planetenbewegung und das Gravitationsgesetz	91
8.2	Arbeit gegen die Schwerkraft. Kosmische Geschwindigkeiten	94
9	Dynamik der Punktmassen-Systeme	96
9.1	Impulserhaltungssatz. Massenmittelpunkt	96
9.2	Die Gesetze des Stoßes	98
9.3	Raketenantrieb	103
10	Statik des starren Körpers	105
10.1	Freiheitsgrade des starren Körpers	105
10.2	Kräfte am starren Körper. Drehmoment. Gleichgewichtsbedingungen	105
10.3	Kräftepaar	110
10.4	Der Schwerpunkt	110
10.5	Arten des Gleichgewichts	113
11	Dynamik des starren Körpers	114
11.1	Bewegung eines frei beweglichen Körpers bei Einwirkung einer Kraft	114
11.2	Kinetische Energie der Drehbewegung. Massenträgheitsmoment	114
11.3	Arbeit und Leistung bei der Drehbewegung. Grundgesetz der Dynamik	117
11.4	Der Drehimpuls (Drall). Drehimpulserhaltungssatz	119
11.5	Kreiselbewegungen. Freie Achsen	121
11.6	Bewegung des symmetrischen Kreisels	123

12	Die Zustandsformen der Stoffe	126
12.1	Einteilung der Stoffe. Aggregatzustände	126
12.2	Der kristalline Aufbau der Festkörper	127
12.3	Bindungsarten	130

III Kontinua

Mechanik der deformierbaren Medien

13	Der deformierbare feste Körper	132
13.1	Elastische Verformung. HOOKEsches Gesetz	132
13.2	Querkontraktion. Kompressibilität	134
13.3	Elastisches Verhalten bei Scherbeanspruchung	135
13.4	Der einachsige Spannungszustand	136
13.5	Dreiachsiger Spannungs- und Dehnungszustand	137
13.6	Zusammenhang zwischen Schubmodul, Elastizitätsmodul und POISSON- scher Querkontraktionszahl	138
13.7	Plastische Verformung. Spannungs-Dehnungs-Diagramm	139
13.8	Härte fester Körper	141

14	Ruhende Flüssigkeiten und Gase	142
14.1	Druck in Flüssigkeiten (hydrostatischer Druck)	142
14.2	Schweredruck. Auftrieb. Schwimmstabilität	143
14.3	Druck in Gasen. Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Dichte ...	147
14.4	Schweredruck in Gasen. Barometrische Höhenformel	148
14.5	Erscheinungen an Grenzflächen. Kohäsion und Adhäsion	150
14.6	Spezifische Oberflächenenergie, Oberflächenspannung	150
14.7	Benetzung und Kapillarwirkung	152

15	Strömende Flüssigkeiten und Gase (Strömungsmechanik)	154
15.1	Das Strömungsfeld. Kennzeichnung und Einteilung von Strömungen	154
15.2	Strömungen idealer Flüssigkeiten und Gase. Kontinuitätsgleichung	156
15.3	Die BERNOULLIsche Gleichung. Druckmessung	158
15.4	Strömungen realer Flüssigkeiten und Gase. Laminare Strömung	162
15.5	Gesetze von HAGEN-POISEUILLE und STOKES	163
15.6	Umströmung durch reale Flüssigkeiten und Gase. REYNOLDS-Zahl	165
15.7	Die Bewegungsgleichung eines Fluids	167

IV Wärme

Thermodynamik und Gaskinetik

16	Verhalten der Körper bei Temperaturänderung	172
16.1	Die Temperatur und ihre Messung	172
16.2	Thermische Ausdehnung fester und flüssiger Körper	174

16.3	Durch Änderung der Temperatur bewirkte Zustandsänderungen der Gase. Der absolute Nullpunkt	176
16.4	Die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases	179
17	Der I. Hauptsatz der Thermodynamik (Energiesatz)	182
17.1	Wärmemenge und Wärmekapazität	182
17.2	Innere Energie eines Systems. Formulierung des I. Hauptsatzes	184
17.3	Spezifische Wärmekapazität des idealen Gases. Kalorische Zustandsgleichung	186
17.4	Anwendung des I. Hauptsatzes auf spezielle Zustandsänderungen des idealen Gases	188
17.5	Zustandsänderungen des idealen Gases in offenen Systemen. Technische Arbeit. Enthalpie	193
18	Kinetische Gastheorie	195
18.1	Die Masse der Atome und Moleküle	195
18.2	Druck und mittlere quadratische Geschwindigkeit der Gasmoleküle. Grundgleichung der kinetischen Gastheorie	196
18.3	Die Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle	199
18.4	Molekularenergie und Temperatur. Wärmekapazität der Körper	202
18.5	Stoßzahl und mittlere freie Weglänge	205
18.6	Gemische idealer Gase. Gesetz von DALTON	206
19	Der II. Hauptsatz der Thermodynamik (Entropiesatz)	208
19.1	Der CARNOT-Kreisprozess. Wärmekraftmaschine, Kältemaschine und Wärmepumpe	208
19.2	Thermodynamische Temperatur	212
19.3	Reversible und irreversible Vorgänge. II. Hauptsatz	213
19.4	Entropie	215
19.5	Entropieänderung des idealen Gases. Irreversible Prozesse	220
19.6	Entropie und Wahrscheinlichkeit	222
19.7	III. Hauptsatz (Satz von der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts) ...	225
20	Reale Gase. Phasenumwandlungen	226
20.1	Die VAN-DER-WAALSSche Zustandsgleichung. Gasverflüssigung	226
20.2	JOULE-THOMSON-Effekt. Erzeugung tiefer Temperaturen	229
20.3	Gleichgewicht zwischen flüssiger und gasförmiger Phase. Sieden und Verdunsten	231
20.4	Gleichgewicht zwischen fester und flüssiger Phase. Koexistenz dreier Phasen	236
20.5	Lösungen. Siedepunktserhöhung, Gefrierpunktserniedrigung	239
21	Ausgleichsvorgänge	241
21.1	Wärmeleitung	241
21.2	Wärmeübergang, Wärmedurchgang, Konvektion	244
21.3	Diffusion	246

V Felder

Gravitation. Elektrizität und Magnetismus

22	Das Gravitationsfeld	250
22.1	Nahwirkungstheorie. Der Feldbegriff	250
22.2	Gravitationsfeldstärke, Gravitationspotenzial	252
22.3	Massen als Senken des Gravitationsfeldes	255
22.4	Grundaussagen der allgemeinen Relativitätstheorie	257
23	Das elektrostatische Feld	259
23.1	Die elektrische Ladung. Ladungsnachweis	259
23.2	Ladungen als Quellen bzw. Senken des elektrischen Feldes	261
23.3	Kraftwirkungen des elektrischen Feldes. Elektrische Feldstärke	262
23.4	Elektrostatisches Potenzial. Spannung	265
23.5	Elektrische Ladungen auf Leitern. Influenz	267
23.6	Elektrischer Fluss, Flussdichte	268
23.7	Das elektrische Zentralfeld (Punktladung und Punktladungssystem)	270
23.8	Kapazität. Kondensatoren	272
24	Das elektrische Feld in Isolatoren (Dielektrika)	275
24.1	Elektrische Polarisation der Dielektrika. Piezoelektrizität	275
24.2	Permittivität (Dielektrizitätskonstante), elektrische Suszeptibilität	276
24.3	Verhalten von D und E an der Grenzfläche zweier Medien	278
24.4	Energieinhalt des elektrischen Feldes	280
25	Der Gleichstromkreis	282
25.1	Das stationäre elektrische Feld in einem Leiter	282
25.2	Stromstärke, Spannung, Widerstand. OHMSches Gesetz	282
25.3	Schaltungen und Messmethoden	285
25.4	Arbeit und Leistung elektrischer Gleichströme	291
26	Elektrische Leitungsvorgänge in Festkörpern und Flüssigkeiten	292
26.1	Klassische Theorie der freien Elektronen in Metallen	292
26.2	Thermoelektrische Effekte	294
26.3	Elektrokinetische Effekte	296
26.4	Elektrolytische Stromleitung. FARADAYSche Gesetze	296
26.5	Elektrochemische Spannungsquellen	298
27	Elektrische Leitungsvorgänge im Vakuum und in Gasen	300
27.1	Bewegung freier Ladungsträger im elektrischen Feld	300
27.2	Ladungsträgerinjektion, Katodenstrahlen	302
27.3	Gasentladungen	303
27.4	Plasmaströme	306

28	Das magnetostatische Feld der Dipole und Gleichströme	307
28.1	Analogien und Unterschiede zum elektrostatischen Feld	307
28.2	Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf magnetische Dipole. Magnetische Feldstärke	308
28.3	Das Magnetfeld eines geraden Stromleiters. Durchflutungsgesetz	309
28.4	Einfache Feldberechnungen	311
28.5	Magnetische Flussdichte (Induktion)	313
28.6	Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf Stromleiter	314
28.7	Bewegung freier Ladungsträger im magnetischen Feld. LORENTZ-Kraft	316
28.8	Galvano- und thermomagnetische Effekte. HALL-Effekt. Quanten-HALL-Effekt	318
29	Das magnetische Feld in Stoffen	320
29.1	Magnetische Polarisation der Stoffe	320
29.2	Magnetisierung der Ferromagnetika. Hysterese	321
29.3	Der magnetische Kreis. Entmagnetisierung	323
30	Elektromagnetische Induktion	326
30.1	Das FARADAYSche Induktionsgesetz	326
30.2	Selbstinduktion	328
30.3	Energieinhalt des magnetischen Feldes	330
30.4	Elektromagnetische Induktion in einem bewegten Leiter	331
31	Der Wechselstromkreis	333
31.1	Wechselspannung, Wechselstrom, Dreiphasenstrom	333
31.2	Arbeit und Leistung elektrischer Wechselströme	335
31.3	Wechselstromwiderstände. OHMSches Gesetz für Wechselstrom	337
31.4	Der Transformator	343
31.5	Anharmonische Wechselströme in der Elektronik	344
31.6	Gleichrichter und Verstärker. Elektronische Bauelemente	345
32	Die MAXWELLSchen Gleichungen	349
32.1	Wirbel des magnetischen Feldes. Verschiebungsstrom	349
32.2	Wirbel des elektrischen Feldes. Wirbelströme	350
32.3	Elektromagnetisches Feld. System der MAXWELLSchen Gleichungen	352
32.4	Relativistische Elektrodynamik	353
VI	Wellen	
	Mechanische und elektromagnetische Schwingungen und Wellen	
33	Mechanische Schwingungen	356
33.1	Lineare Federschwingungen	356
33.2	Energiebilanz des harmonischen Oszillators	359
33.3	Drehschwingungen	360
33.4	Pendelschwingungen	362

33.5	Freie gedämpfte Schwingungen	364
33.6	Erzwungene Schwingungen	367
34	Elektrische Schwingungen	371
34.1	Der geschlossene Schwingkreis	371
34.2	Strom- und Spannungsresonanz	373
34.3	Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen	376
35	Überlagerung harmonischer Schwingungen	378
35.1	Überlagerung zweier Schwingungen längs gleicher Richtung	378
35.2	Gekoppelte Schwingungen	380
35.3	Überlagerung zweier Schwingungen längs aufeinander senkrechter Richtungen	383
35.4	Überlagerung von harmonischen zu anharmonischen Schwingungen	386
35.5	Nichtlineare Schwingungen. Deterministisches Chaos	388
36	Allgemeine Wellenlehre	392
36.1	Zusammenhang von Schwingungen und Wellen	392
36.2	Die eindimensionale Wellengleichung und ihre allgemeine Lösung	395
36.3	Transversal- und Longitudinalwellen	396
36.4	Stehende Wellen. Eigenschwingungen	399
36.5	Wellenausbreitung in ausgedehnten Medien	402
37	Schallwellen (Akustik)	405
37.1	Wellenausbreitung im Schallfeld. Phasengeschwindigkeit	405
37.2	Schallfeldgrößen	407
37.3	Schallquellen. Ton, Klang, Geräusch	409
37.4	Schallempfänger und Gehör. Schallpegel und Lautstärke	410
37.5	Stehende Schallwellen	412
37.6	DOPPLER-Effekt	414
37.7	MACHScher Kegel	416
38	Elektromagnetische Wellen	417
38.1	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen entlang von Leitungen	417
38.2	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im freien Raum	419
38.3	Erzeugung und Nachweis elektromagnetischer Wellen	423
38.4	Die Entdeckung der elektromagnetischen Wellen (H. HERTZ, 1888)	425
38.5	Das elektromagnetische Spektrum	426
39	Einfluss von Stoffen auf die Wellenausbreitung	429
39.1	Absorption und Streuung	429
39.2	Phasengeschwindigkeit und Dispersion. Gruppengeschwindigkeit	430
39.3	HUYGENSSches Prinzip	434
39.4	Reflexion und Brechung (Refraktion). Totalreflexion	435
39.5	Optische Dispersion. Prisma, Spektral- und Körperfarben	438

40	Strahlenoptik (Geometrische Optik)	441
40.1	Lichtstrahlen. FERMATSches Prinzip	441
40.2	Reflexion und Brechung von Lichtstrahlen	443
40.3	Abbildung durch Spiegel (ebener und gekrümmte Spiegel)	445
40.4	Abbildung durch Linsen (dünne und dicke Linsen, Linsensysteme)	450
40.5	Das Auge und der Sehvorgang	456
40.6	Optische Geräte zur Sehwinkelvergrößerung (Lupe, Mikroskop, Fernrohr) ..	456
40.7	Abbildungsfehler	459
41	Wellenoptik	460
41.1	Interferenz. Interferenzbedingungen	460
41.2	Interferenzen gleicher Neigung und gleicher Dicke	462
41.3	Beugung (Diffraktion). Das Beugungsphänomen	464
41.4	FRAUNHOFERSche Beugung am Spalt und an der Lochblende	466
41.5	Auflösungsvermögen optischer Geräte. Holografie	469
41.6	FRAUNHOFERSche Beugung am Strichgitter	472
41.7	Spektrometer	474
41.8	Beugung von RÖNTGENstrahlen am Raumgitter der Kristalle	475
41.9	Polarisation. Polarisation des Lichts durch Reflexion und Brechung	479
41.10	Polarisation durch Doppelbrechung	482
41.11	Interferenz des polarisierten Lichts	484
41.12	Drehung der Schwingungsebene des polarisierten Lichts	487
41.13	Nichtlineare Optik	489

VII Quanten

Struktur und Eigenschaften der Materie

42	Die Gesetze der Strahlung	492
42.1	Das Wesen der Temperaturstrahlung (Wärmestrahlung)	492
42.2	Strahlungsphysikalische Größen	493
42.3	Emission und Absorption von Strahlung. KIRCHHOFFSches Strahlungsgesetz	495
42.4	Das PLANCKSche Strahlungsgesetz	497
42.5	Folgerungen aus dem PLANCKSchen Strahlungsgesetz	498
42.6	Lichttechnische Größen (Photometrie)	501
42.7	Zusammenhang zwischen strahlungsphysikalischen und lichttechnischen Größen	504
43	Der Welle-Teilchen-Dualismus der Mikroobjekte	505
43.1	Die Teilchennatur des Lichts. Lichtquanten (Photonen)	505
43.2	Der lichtelektrische Effekt (Photoeffekt)	506
43.3	Der COMPTON-Effekt	509
43.4	Rückstoß durch Quantenemission. MÖSSBAUER-Effekt	510
43.5	Die Wellennatur der Teilchen	512
43.6	Das HEISENBERGSche Unbestimmtheitsprinzip (Unschärferelation)	515

44	Atombau und Spektren	518
44.1	Die Streuexperimente von LENARD und RUTHERFORD. Das RUTHERFORDSche Atommodell	518
44.2	Das Spektrum des Wasserstoffatoms	520
44.3	Das BOHRsche Atommodell	522
44.4	Die Spektren der Alkaliatome. Bahndrehimpulsquantenzahl	526
44.5	Richtungsquantelung des Bahndrehimpulses der Elektronen	529
44.6	Das magnetische Bahnmoment der Elektronen. BOHRsches Magneton	530
44.7	Elektronenspin und magnetisches Spinmoment. Die Feinstruktur der Atom-spektren	531
44.8	Mehrelektronensysteme	533
44.9	Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld (ZEEMAN-Effekt)	534
44.10	Das PAULI-Prinzip und das Periodensystem der Elemente	536
44.11	Die RÖNTGENspektren und ihre Deutung	540
44.12	Absorption und Streuung von RÖNTGENstrahlen	542
44.13	Induzierte Emission. Maser und Laser	546
45	Wellenmechanik	549
45.1	Die SCHRÖDINGER-Gleichung	549
45.2	Elektron im Kastenpotenzial	551
45.3	Das wellenmechanische Bild des Atoms	553
45.4	Der Tunneleffekt	555
46	Elektrische und magnetische Eigenschaften von Festkörpern	557
46.1	Elektrische Leitfähigkeit. Das Modell des Elektronengases	557
46.2	Bändermodell des Festkörpers. Metalle, Halbleiter, Isolatoren	558
46.3	Elektrische Ströme in Halbleitern. Eigenleitung, Störstellenleitung	562
46.4	Der pn-Übergang	565
46.5	Halbleiterdiode, Transistor	567
46.6	Magnetische Eigenschaften. Dia- und Paramagnetismus	569
46.7	Ferromagnetismus, Antiferro- und Ferrimagnetismus	571
46.8	Supraleitung. Der JOSEPHSON-Effekt	574
46.9	Supraflüssigkeit	577
47	Atomkerne	578
47.1	Masse, Ladung und Zusammensetzung der Kerne	578
47.2	Isotope	579
47.3	Isobare, Isotone, Nuklide, Isomere	580
47.4	Massendefekt und Bindungsenergie der Kerne	580
47.5	Stabilitätskriterien. Kernsystematik	582
47.6	Kernkräfte	585
47.7	Kernmodelle	586

48	Die natürliche Radioaktivität	588
48.1	Der α -Zerfall der schweren Kerne	588
48.2	Der β -Zerfall. Gammastrahlung	589
48.3	Das Zerfallsgesetz. Spezifische Aktivität	591
48.4	Radioaktive Zerfallsreihen und radioaktives Gleichgewicht	593
48.5	Dosimetrie und biologische Wirkung ionisierender Strahlung	594
49	Künstliche Kernumwandlungen	597
49.1	Arten künstlicher Kernumwandlungen	597
49.2	Massen- und Energiebilanz von Kernreaktionen. Wirkungsquerschnitt	598
49.3	Kernspaltung. Gewinnung von Kernspaltungsenergie	599
49.4	Arten von Kernreaktoren	602
49.5	Kernfusion	603
50	Elementarteilchen	605
50.1	Entwicklung zum Teilchen-„Zoo“	605
50.2	Erhaltungssätze für Baryonenladung, Leptonenladung, Isospin, Strangeness und Hyperladung	606
50.3	Die elementaren Teilchen: Leptonen und Quarks	608
50.4	Zusammengesetzte Elementarteilchen. Hadronen	610
50.5	Die elementaren Kräfte (Wechselwirkungen). Feldquanten	611
50.6	Standardmodell der Teilchenphysik. Vereinheitlichte Theorie der elementaren Kräfte	613
50.7	Kosmologie. Dunkle Materie und Dunkle Energie	614
A	ANHANG: Fehlerrechnung (Messabweichungen)	616
A.1	Arten und Ursachen von Messabweichungen	616
A.2	Ermittlung von Messergebnis und Messabweichung	617
A.3	Zufallsstreuung von Messwerten	619
A.4	Fehlerfortpflanzung	623
A.5	Geradenausgleich (lineare Regression). Korrelation	625
	Bildquellenverzeichnis	628
	Lösungen der Aufgaben	629
Index	635	

Teil I

Einführung

1

Was ist „Physik“? Wege physikalischer Erkenntnisgewinnung

Die *Physik* ist eine grundlegende Naturwissenschaft und beschäftigt sich mit der Untersuchung des Aufbaus, der Eigenschaften und der Bewegung der unbelebten Natur sowie mit den diese Bewegung hervorrufenden Kräften oder Wechselwirkungen. Wegen ihres grundlegenden und übergreifenden Charakters bildet die Physik ein unentbehrliches Fundament für viele andere Naturwissenschaften, wie z. B. die Chemie, die Astronomie, die Geowissenschaften und Meteorologie, sowie insbesondere für die gesamte Technik. So sind heute zahlreiche Physiker in den Ingenieurwissenschaften tätig, und viele in der Grundlagenforschung arbeitende Ingenieure sind zu hoch spezialisierten Physikern geworden. Da auch der Stoff, aus dem die Organismen bestehen und der in ihnen umgesetzt wird, den Gesetzen der Physik unterworfen ist, stellt diese darüber hinaus eine wesentliche Grundlage der biologischen und im weiteren Sinne auch der medizinischen Wissenschaft dar; man denke nur an die stürmische Entwicklung und zunehmende Bedeutung der Biophysik.

Die Physik ist eine *Erfahrungswissenschaft*. Jede ausgesprochene Behauptung oder Vermutung über einen physikalischen Sachverhalt ist das Resultat von Schlussfolgerungen, deren Ausgangspunkt bestimmte **Axiome** bilden. Das sind Grund- und Erfahrungssätze, deren Richtigkeit nicht durch logisches Schließen aus anderen Sätzen, sondern nur aus unmittelbar gegebenen Tatsachen hervorgeht. Ein Axiom kann man nicht logisch beweisen, sondern nur durch ein **Experiment** demonstrieren.

Das Experiment, d. h. die exakte Messung bestimmter, genau definierter *physikalischer Größen* im planmäßig und gezielt ausgeführten Versuch, bildet überhaupt die Grundlage jeglicher physikalischen Erkenntnis. Durch systematisches Ordnen des gewonnenen umfangreichen experimentellen Materials, durch die gedankliche Durchdringung mit den Methoden der *Mathematik* und Einordnung der Ergebnisse in schon bekannte Zusammenhänge lassen sich allgemein gültige physikalische **Gesetze** formulieren, die in ihrer Gesamtheit ein komplexes System von Naturerkenntnissen bilden, das sich in zunehmendem Maße ebenso erweitert, wie es an innerer Geschlossenheit gewinnt.

Dem hier skizzierten Weg der Erkenntnisgewinnung liegt die **induktive Methode** zu Grunde, die darin besteht, dass aus einer Fülle von Einzelbeobachtungen durch logische Schlussfolgerungen die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten aufgedeckt und in **Theorien** zusammengefasst werden. Sofern eine Gruppe von Gesetzmäßigkeiten noch nicht sicher in das allgemeine Gebäude von Erkenntnissen eingegliedert werden kann, sucht man zunächst mit der Aufstellung einer **Hypothese** eine vorläufige Erklärung. Hypothesen müssen aber sofort verworfen werden, wenn sie in Widerspruch zu den Tatsachen geraten. Da der Wahrheitsgehalt aller physikalischen Lehrsätze allein auf ihrer Übereinstimmung mit der Wirklichkeit beruht, ist die Physik eine immer *induktiv* arbeitende Wissenschaft. Daraus folgt:

Es gibt keine physikalische Theorie, die nicht zu experimentell prüfbareren Konsequenzen führt. Das Experiment ist deshalb ein wesentlicher Bestandteil der praktischen Überprüfung jeder physikalischen Theorie.

Für die Gewinnung von neuen physikalischen Erkenntnissen ist aber ebenso der zweite Weg, die **deduktive Methode**, von großer Bedeutung. Sie stellt das Gegenstück und zugleich eine notwendige Ergänzung zur induktiven Methode dar. Mit ihr werden aus bekannten, allgemein gültigen Sätzen, deren Richtigkeit gesichert ist, zumeist durch mathematische Ableitungen neue Einzelerkenntnisse, Experimente und Erscheinungen vorausgesagt. Beide Methoden, die induktive und die deduktive, treten stets in enger Verknüpfung auf.

So hatte beispielsweise JOHANNES KEPLER (1571–1630) die Gesetze der Planetenbewegung auf induktivem Wege ermittelt. Seine Fragestellung galt dem „Wie“ der Planetenbewegung. ISAAC NEWTON (1643–1727) suchte das „Warum“. Er fand es 1687 auf deduktivem Wege, indem er die allgemeinen Gesetze der Mechanik auf den besonderen Fall der Bewegung der Himmelskörper anwandte. Der Schlüssel dazu war das *Gravitationsgesetz*, das die gegenseitige Anziehung zweier Massen bestimmt (s. 8.1).

Die physikalischen Begriffe, mit denen wir bei unseren Untersuchungen und Überlegungen operieren, sind jedoch nicht die konkreten Objekte selbst, sondern mehr oder weniger bewährte Abstraktionen, in denen sich all unsere Erfahrung im Umgang mit diesen Objekten verdichtet und niederschlägt. Bei diesen von uns benutzten physikalischen Begriffen handelt es sich immer nur um „Bilder“ oder **Modelle**.

Solch ein Modell enthält allerdings niemals alle Eigenschaften und Aspekte des wirklichen Gegenstandes. Es ist Teil einer jeden Theorie, die ja nicht die Wirklichkeit selbst ist, sondern lediglich deren annähernd adäquate Widerspiegelung in unserem Bewusstsein. Das Modell gibt aber jene Eigenschaften wieder, die in dem gegebenen Zusammenhang interessieren. Gerade dadurch erhalten die physikalischen Modelle die Eleganz und „Handlichkeit“, mit der die oft unübersehbare Kompliziertheit der wirklichen Objekte auf die jeweils relevanten Aspekte reduziert werden kann.

Als Beispiel sei das *Planetenmodell des Atoms* genannt, wonach die Elektronen im Atom aufgrund der elektrostatischen Anziehung um den Atomkern kreisen wie Planeten um die Sonne als Folge der Schwerkraft, jeweils mit der Fliehkraft als Gegenkraft. Auf Grundlage dieses Modells gelang es (allerdings nicht ohne einschneidende Zusatzforderungen, die BOHRschen Postulate, vgl. 44.3), die Wellenlängen des von einfach gebauten Atomen emittierten Lichts sehr genau zu berechnen. Oder das *Tröpfchenmodell des Atomkerns* (s. 47.7), wonach der Kern einem Flüssigkeitstropfen vergleichbar ist. Wenn sich aus der Gasphase ein neues winziges Tröpfchen an den Tropfen anlagert, entspricht dies einer Kondensation, wobei eine bestimmte Wärmemenge, die Kondensationswärme, frei wird. Analog dazu wird Energie frei, wenn sich ein einzelner Kernbaustein, ein Nukleon, an den Kern anlagert.

2

Physikalische Größen, Einheiten, Dimensionen, Gleichungen

■ 2.1 Größen, Einheiten, Dimensionen

Zur kurzen und eindeutigen Beschreibung der Naturgesetze werden bestimmte physikalische **Größen** benutzt. Sie beschreiben Eigenschaften von physikalischen Objekten, für die ein *Messverfahren* existiert. Grundeigenschaften aller physikalischen Größen sind Erfassbarkeit durch Maß und Zahl (Metrisierung) und Verknüpfbarkeit mittels mathematischer Operationen. Physikalische Größen werden ihrer Qualität nach verschiedenen **Größenarten** zugeordnet. So z. B. gehören die Größen Wurfhöhe, Schwingungsamplitude und Kernradius sämtlich der Größenart „Länge“ an.

Als Maß zur Messung von Größen gleicher Art dienen die physikalischen **Einheiten**. Diese sind international festgelegte, reproduzierbare Größen und werden entweder durch eine Maßverkörperung, d. h. einen *Etalon* oder *Prototyp*, wie beim Kilogramm (vgl. 4.3), oder durch eine *Mess-* bzw. *Zählvorschrift*, wie beim Ampere (vgl. 28.6) bzw. Mol (vgl. 16.4) definiert. Bei der Messung einer physikalischen Größe wird dieselbe in Vielfachen bzw. Teilen der zugehörigen Einheit ausgedrückt. Jede physikalische Größe G trägt somit ein *quantitatives* und ein *qualitatives* Merkmal, und es kann daher ihr *Wert* formal als Produkt zweier Faktoren, *Zahlenwert* $\{G\}$ und *Einheit* $[G]$, aufgefasst werden:

$$G = \{G\} [G]. \quad (2.1)$$

Beispiel 2.1: Elektrische Spannung $U = 220\text{V}$; $\{U\} = 220$; $[U] = \text{V (Volt)}$. □

Man unterscheidet *Basisgrößenarten* und *abgeleitete Größenarten*. In der Mechanik kommt man z. B. mit drei Basisgrößenarten, der Länge s , der Zeit t und der Masse m , aus, wobei dann die Geschwindigkeit $v = s/t$, die Beschleunigung $a = v/t$, die Kraft $F = ma$ usw. abgeleitete Größenarten sind.

Entsprechend unterscheidet man zwischen *Basiseinheiten* und *abgeleiteten Einheiten*, je nachdem, ob es sich um Einheiten von Basisgrößenarten oder abgeleiteten Größenarten handelt.

Die SI-Basiseinheiten. Dem *Internationalen Einheitensystem* (Système International d'Unités, abgekürzt in allen Sprachen „SI“) liegen sieben Basiseinheiten zu Grunde; es sind dies die

Einheit der Länge:	das Meter	m	(vgl. 3.1)
Einheit der Masse:	das Kilogramm	kg	(vgl. 4.3)
Einheit der Zeit:	die Sekunde	s	(vgl. 3.1)
Einheit der elektrischen Stromstärke:	das Ampere	A	(vgl. 28.6)
Einheit der Temperatur:	das Kelvin	K	(vgl. 16.1)
Einheit der Stoffmenge:	das Mol	mol	(vgl. 16.4)
Einheit der Lichtstärke:	die Candela	cd	(vgl. 42.6).

Anmerkung: Die Temperatur darf wie bisher auch in Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) angegeben werden. CELSIUS-Temperatur ist gleich KELVIN-Temperatur minus 273,15 K.

Alle Einheiten, die aus diesen Basiseinheiten direkt gebildet werden (ohne Verwendung von Zahlenfaktoren), wie z. B. die Einheit der Geschwindigkeit 1 m/s (lies: Meter je Sekunde) $\equiv 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ oder die Einheit der elektrischen Spannung $1 \text{ Volt (V)} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-1}$, heißen *kohärente* Einheiten. *Nichtkohärente* Einheiten lassen sich zwar auch auf die Basiseinheiten zurückführen, jedoch treten in den entsprechenden Gleichungen Zahlenwerte auf, die von 1 verschieden sind (Beispiele: $1 \text{ Kilometer/Stunde} \equiv 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 0,278 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}$ usw.).

Tabelle 2.1 Vielfache und Teile von SI-Einheiten. Dezimale Vielfache und Teile von Basiseinheiten und abgeleiteten Einheiten werden wie folgt durch *Vorsätze* gekennzeichnet:

Vorsatz	Vorsatzzeichen	Faktor	Vorsatz	Vorsatzzeichen	Faktor
Yotta	Y	10^{24}	Dezi ¹	d	10^{-1}
Zetta	Z	10^{21}	Zenti ¹	c	10^{-2}
Exa	E	10^{18}	Milli	m	10^{-3}
Peta	P	10^{15}	Mikro	μ	10^{-6}
Tera	T	10^{12}	Nano	n	10^{-9}
Giga	G	10^9	Piko	p	10^{-12}
Mega	M	10^6	Femto	f	10^{-15}
Kilo	k	10^3	Atto	a	10^{-18}
Hekto ¹	h	10^2	Zepto	z	10^{-21}
Deka ¹	da	10	Yocto	y	10^{-24}

¹ Diese Vorsätze sollen nur noch bei solchen Einheiten angewendet werden, bei denen sie bisher gebräuchlich waren, z. B. Hektoliter, Hektopascal, Dezitonne, Zentimeter.

Dimensionen physikalischer Größenarten. Eine Verallgemeinerung der physikalischen Größe ist deren *Dimension*. Sie kennzeichnet die *Qualität* einer physikalischen Größenart, ohne Hinweis auf bestimmte Einheiten; sie gibt den Zusammenhang einer physikalischen Größenart mit den Basisgrößenarten an.

Der Mechanik liegen allein die drei Dimensionen *Länge* L, *Masse* M und *Zeit* T zu Grunde, entsprechend den oben genannten drei mechanischen Basisgrößenarten. Demnach hat z. B. die Geschwindigkeit die Dimension Länge/Zeit, also LT^{-1} (im Unterschied zu ihrer Einheit Meter/Sekunde), die Kraft $F = ma$ die Dimension MLT^{-2} , die Energie die Dimension ML^2T^{-2} usw.

Beispiele 2.2:

1. Führe die Einheit der elektrischen Spannung, das Volt (V), auf die Basiseinheiten zurück!

Lösung: Aus der Einheitenbeziehung für die Energie $1 \text{ J (Joule)} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ V} \cdot \text{A} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, vgl. (23/1), folgt $1 \text{ V} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/(\text{s}^3 \cdot \text{A})$.

2. Drücke die inkohärente Energieeinheit Kilowattstunde (kWh) durch die SI-Einheit Joule (J) aus!

Lösung: $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$.

3. Welche Basiseinheit hat das Produkt RC (elektrischer Widerstand mal Kapazität)?

Lösung: Aus $[R] = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$ (s. 25.2) und $[C] = 1 \text{ A s}/1 \text{ V}$ (s. 23.8) folgt $[RC] = 1 \text{ s}$ (Sekunde). □

Aufgabe

- 2.1 Forme den Ausdruck $\text{kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}/(\text{dm}^3 \cdot \text{MPa})$ so um, dass er nur kohärente SI-Einheiten enthält, und vereinfache ihn durch formale Rechnung (s. hintere Einband-Innenseite)!

■ 2.2 Physikalische Gleichungen

Man unterscheidet zwischen *Größengleichungen*, *zugeschnittenen Größengleichungen*, *Zahlenwertgleichungen* und *Einheitengleichungen*.

In der **Größengleichung** stehen die Symbole für die physikalischen Größen, d. h. für die Produkte aus Zahlenwert und Einheit dieser Größen. Die Größengleichung gilt unabhängig von der Wahl der Einheiten.

Beispiel 2.3:

$s = vt$ (Weg = Geschwindigkeit \times Zeit); $F = ma$ (Kraft = Masse \times Beschleunigung); usw. \square

Auch in den **zugeschnittenen Größengleichungen** stehen die Symbole für die physikalischen Größen; es treten jedoch in der Gleichung stets die Quotienten aus den Größen und ihren Einheiten, d. h. also die Zahlenwerte, auf. Als Beispiel sei die Gleichung (44.26) genannt.

Beispiel 2.4:

Umrechnung der CELSIUS-Temperatur ϑ (Einheit $^{\circ}\text{C}$) in die (absolute) KELVIN-Temperatur T (Einheit K)

$$\frac{T}{\text{K}} = \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} + 273,15 \quad \text{oder} \quad \{T\} = \{\vartheta\} + 273,15. \quad \square$$

In der **Zahlenwertgleichung** bedeuten die Symbole der vorkommenden physikalischen Größen *nur* die Zahlenwerte dieser Größen. Für die Größen sind dann ganz bestimmte Einheiten vorgeschrieben, die in einer Gleichungslegende angegeben werden.

Beispiel 2.5:

$$s = \frac{1}{3,6} vt \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} s & \text{Weg in Metern,} \\ v & \text{Geschwindigkeit in Kilometern je Stunde,} \\ t & \text{Zeit in Sekunden.} \end{array} \quad \square$$

In diesem Buch werden grundsätzlich keine Zahlenwertgleichungen verwendet.

Die Verwendung der SI-Einheiten bietet den Vorteil, dass die Größengleichungen ohne Veränderung auch als Zahlenwertgleichungen benutzt werden können.

Geht es darum, die *Einheit* einer physikalischen Größe zu ermitteln, so setzt man die in der zugehörigen Größengleichung vorkommenden Größen in eckige Klammern, d. h., man betrachtet lediglich die Einheiten der betreffenden Größen. Auf diese Weise entsteht aus der Größengleichung die zugehörige **Einheitengleichung**.

Beispiel 2.6:

Aus der Definition der *spezifischen Wärmekapazität* $c = Q/[m(T_2 - T_1)]$, vgl. Abschnitt 17.1, mit Q als Wärmemenge, m Masse und T absoluter Temperatur folgt als Einheitengleichung

$$[c] = \frac{[Q]}{[m] \cdot [T]} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \equiv \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

also für c die Einheit Joule je Kilogramm und Kelvin. \square

■ 2.3 Das neue SI-Einheitensystem

Im alten SI (bis Mai 2019) sind mit dem Caesium-Frequenzstandard f_{Cs} und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c die Basiseinheiten *Sekunde* und *Meter* auf eine unveränderliche Eigenschaft eines speziellen Atoms bzw. eine fundamentale Naturkonstante zurückgeführt (s. Abschnitt 3.1). Insbesondere wurde in Verbindung mit der Meterdefinition die Naturkonstante Lichtgeschwindigkeit 1983 ein für alle Mal auf einen bestimmten Wert festgelegt. Eine ähnliche auf unveränderliche Eigenschaften der Atome oder fundamentale Naturkonstanten zurückgehende definitorische Basis gibt es für die Einheiten Kilogramm, Ampere, Kelvin und Mol im alten SI nicht. Mit der Entdeckung elektrischer Quanteneffekte wie dem JOSEPHSON- und dem Quanten-HALL-Effekt (s. Abschnitte 46.8 bzw. 28.8) wurde es möglich, gut reproduzierbare Normale zu entwickeln, mit denen auch diese Basiseinheiten in großer Präzision und auf praktikable Weise durch Naturkonstanten oder atomare Größen dargestellt werden können. Dieses und die gewachsenen Anforderungen an die Messgenauigkeit in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft haben zu einer Revision des SI geführt, die ab Mai 2019 gültig ist.

Die sieben definierenden Konstanten. Das neue SI wird durch verbindliche Festlegung der folgenden sieben physikalischen Konstanten definiert:

- **Frequenz des Hyperfeinstrukturübergangs** des Grundzustands im ^{133}Cs -Atom (vgl. 3.1)
 $f_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770\,\text{s}^{-1}$
- **Lichtgeschwindigkeit** im Vakuum (vgl. 3.1)
 $c = 299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}$
- **PLANCK-Konstante** (vgl. 42.4)
 $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}$ ($\text{J s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$)
- **Elementarladung** (vgl. 23.1)
 $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ ($\text{C} = \text{A s}$)
- **BOLTZMANN-Konstante** (vgl. 18.2)
 $k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}\,\text{J K}^{-1}$ ($\text{J K}^{-1} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$)
- **AVOGADRO-Konstante** (vgl. 18.1)
 $N_{\text{A}} = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
- das **photometrische Strahlungsäquivalent** K_{cd} einer monochromatischen Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}\,\text{Hz}$ ist genau gleich 683 Lumen/Watt (vgl. 42.6).

Die angegebenen Zahlenwerte können sich zum Inkrafttreten der Revision noch geringfügig ändern. Die definierenden Konstanten sollen eine relative Messunsicherheit von mindestens 10^{-8} haben, weshalb die Gravitationskonstante γ (s. 8.1), die nur mit 10^{-4} bekannt ist, nicht unter ihnen ist. Dies unterscheidet u. a. das neue SI von den *PLANCK-Einheiten* (s. u.). Von den definierenden Konstanten sind nur die Lichtgeschwindigkeit c (s. 3.1), die *PLANCK-Konstante* h (s. 42.4) und die *Elementarladung* e (s. 23.1) *fundamentale Naturkonstanten*. Die *BOLTZMANN-Konstante* k (s. 18.2), die *AVOGADRO-Konstante* N_{A} (s. 18.1) und das *photometrische Strahlungsäquivalent* K_{cd} (s. 42.7) sind *festgelegte Umrechnungsfaktoren* zwischen Energie und Temperatur, Partikelzahl und Stoffmenge bzw. Leistung und Lichtstrom.

Die sieben Basisseinheiten. Jede Basiseinheit kann durch eine Kombination aus Einheiten der oben aufgeführten definierenden Konstanten dargestellt werden. Für das *Kilogramm* als Einheit der Masse zum Beispiel erhält man $\text{kg} = [h][f_{\text{Cs}}][c]^{-2}$. Nach (2.1) kann man dafür auch

$1 \text{ kg} = (h/\{h\}) \cdot (f_{\text{Cs}}/\{f_{\text{Cs}}\}) \cdot (c/\{c\})^{-2}$ schreiben. Mit den obigen Maßzahlen $\{h\}$, $\{f_{\text{Cs}}\}$ und $\{c\}$ der Konstanten h , f_{Cs} und c folgt daraus die *Definition* $1 \text{ kg} = 1,475\,521 \cdot 10^{40} h f_{\text{Cs}} / c^2$. Für die sieben Basiseinheiten im neuen SI ergeben sich so die folgenden Definitionen:

Sekunde (s)	$1 \text{ s} = 9\,192\,631\,770 / f_{\text{Cs}}$
Meter (m)	$1 \text{ m} = (c/299\,792\,458) \text{ s} = 30,663\,318 c / f_{\text{Cs}}$
Kilogramm (kg)	$1 \text{ kg} = (h/6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}) \text{ m}^{-2} \text{ s} = 1,475\,521 \cdot 10^{40} h f_{\text{Cs}} / c^2$
Ampere (A)	$1 \text{ A} = (e/1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}) \text{ s}^{-1} = 6,789\,686 \cdot 10^8 f_{\text{Cs}} e$
Kelvin (K)	$1 \text{ K} = (1,380\,649 \cdot 10^{-23} / k) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 2,266\,665 f_{\text{Cs}} h / k$
Mol (mol)	$1 \text{ mol} = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} / N_{\text{A}}$
Candela (cd)	$1 \text{ cd} = (K_{\text{cd}}/683) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ sr}^{-1} = 2,614\,830 \cdot 10^{10} f_{\text{Cs}}^2 h K_{\text{cd}}$

Auch hier kann es zum Inkrafttreten des neuen SI noch leichte Veränderungen der Zahlenwerte geben.

Die experimentelle Realisierung der Basiseinheiten. Die Bereitstellung der jeweiligen Einheit für die Wissenschaft und Technologie ist ein wesentlicher Bestandteil der Einheitsdefinition, durch die das Messverfahren festgelegt und die Weitergabe der Einheit für Eichungen und Kalibrierungen erst ermöglicht wird. Während die experimentelle Darstellung von Meter, Sekunde und Candela wie im alten SI erfolgt, ist die Realisierung der Einheiten Kilogramm, Ampere, Kelvin und Mol neu.

Für das **Kilogramm** gibt es zwei Realisierungsmethoden, die „*Siliciumkugel*“ und die „*Watt-Waage*“. Bei der ersten Methode wird der bisherige Kilogramm-Prototyp (s. 4.3), das sog. *Ur-Kilogramm*, durch eine hochreine und von strukturellen Gitterdefekten möglichst freie Siliciumkugel als Massennormal ersetzt. Mittels RÖNTGENfeinstrukturbeugung (s. 41.8) und weiterer Messverfahren kann (aus der Gitterkonstante, dem Kugelvolumen und der Kugelmasse sowie der Molmasse von Si) die AVOGADRO-Konstante bestimmt werden, was zunächst eine Realisierung der Einheit **Mol** darstellt. Zusammen mit der PLANCK-Konstanten lässt sich daraus die atomare Masseneinheit u (s. 18.1) bestimmen und somit die Masseneinheit Kilogramm (s. 4.3) auf atomare Größen zurückführen. Die Methode „*Watt-Waage*“, bei der eine mechanische Leistung mit einer elektrischen Leistung verglichen wird, ist in Abschnitt 46.8 näher erläutert.

Ebenso gibt es zwei Darstellungsmethoden für die Einheit **Ampere**. Für sehr niedrige Stromstärken I kann die Einheit mittels des sog. COULOMB-*Blockade-Effekts* in mit der Frequenz f getakteten Einzelelektronen-Schaltungen durch direktes „elektronisches Zählen“ (Elektronenanzahl n) über die Beziehung $I = nef$ auf die Elementarladung e zurückgeführt werden. Für etwas höhere Stromstärken wird I nach dem OHMSchen Gesetz $I = U/R_{\text{H}}$ aus der mittels des JOSEPHSON-Effekts gemessenen Spannung U und dem Quanten-HALL-Widerstand R_{H} bestimmt (s. 46.8).

Die Realisierung der Temperatureinheit **Kelvin** basiert auf der Bestimmung der BOLTZMANN-Konstanten k . Dies geschieht entweder aus der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in einem Gas, die proportional zu $(kT)^{1/2}$ ist (*akustisches Gasthermometer*, s. auch 37.1) oder aus der Veränderung der Permittivität eines Gases, z. B. Helium, bei isothermer Zustandsänderung (*Dielektrizitätskonstanten-Gasthermometer*), die proportional zu kT ist.

Die PLANCK-Einheiten. Einfache arithmetische Kombinationen von Naturkonstanten erlauben die Darstellung der Dimensionen *Länge* L , *Zeit* T und *Masse* M . Es sind dies die sog. *PLANCK-Einheiten*:

PLANCK-Länge	$l_{\text{P}} = \sqrt{\hbar G / c^3} = 1,616 \cdot 10^{-35} \text{ m}$
PLANCK-Zeit	$t_{\text{P}} = l_{\text{P}} / c = \sqrt{\hbar G / c^5} = 5,391 \cdot 10^{-44} \text{ s}$
PLANCK-Masse	$m_{\text{P}} = \sqrt{\hbar c / \gamma} = 2,176 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$
PLANCK-Temperatur	$T_{\text{P}} = m_{\text{P}} c^2 / k = \sqrt{\hbar c^3 / k} = 1,417 \cdot 10^{32} \text{ K}$

mit $\hbar = h/(2\pi)$. Diese Einheiten beschreiben einen Bereich, in dem Quanteneffekte und Gravitationswechselwirkung die gleiche Größenordnung haben und sind daher in der *Quanten-Kosmologie* bedeutsam (s. 50.6 und 50.7).

Teil II

Teilchen

Mechanik der Punktmasse und des starren Körpers. Stoffe

Bei der Beschreibung von Bewegungsvorgängen ist es oft zulässig, von den Abmessungen und der Gestalt der beteiligten Körper sowie den Bewegungen ihrer einzelnen Teile gegeneinander (*innere* Bewegungen) abzusehen und die Körper als unveränderliche stoffliche **Teilchen** von konstanter Menge Substanz und gegebenenfalls konstanter elektrischer Ladung zu idealisieren. Das Teilchen dient so als *Denkmodell* für Körper sowohl in der Mikro- als auch in der Makrophysik, indem einerseits z. B. Elektronen, Atomkerne und die Moleküle eines Gases, andererseits aber auch die Planeten, deren Abmessungen klein sind im Verhältnis zu den Räumen, in denen sie sich bewegen, als Teilchen idealisiert werden können.

Für die mathematische Behandlung ist es zweckmäßig, wenn man sich die gesamte stoffliche Substanz sowie die daran gebundene elektrische Ladung des Teilchens in einem Punkt konzentriert denkt, so dass seine Lage durch die drei Koordinaten des Raumes angegeben werden kann. Man spricht dann von einer **Punktmasse** bzw. **Punktladung**. Diese kann keine Drehungen, sondern nur fortschreitende Bewegungen ausführen.

Makroskopische Körper lassen sich durch ein *System von Punktmassen* bzw. *Punktladungen* darstellen, so z. B. die Gase durch die Gesamtheit der Gasmoleküle oder die festen kristallinen **Stoffe** durch die Atome bzw. Ionen des Kristallgitters. Der **starre Körper** kann modellmäßig durch ein System starr gekoppelter Punktmassen aufgefasst werden.

3

Kinematik der Punktmasse

Die *Kinematik* ist die *Lehre von den Bewegungen* der Körper, in der die Ursachen der Bewegungen (die beteiligten Kräfte) sowie die durch sie hervorgerufenen Wirkungen auf andere Körper außer Acht bleiben.

■ 3.1 Raum, Zeit, Bezugssystem

Jeder physikalische Vorgang läuft *in Raum und Zeit* ab. Das ist daraus zu ersehen, dass in allen Bereichen der Physik jedes Gesetz – offen oder verdeckt (explizit oder implizit) – Raum-Zeit-Beziehungen in Form von Längen und Zeitintervallen enthält.

Zur **Längenmessung** dienen Geräte, mit denen sich zwei Abstandsmarken reproduzierbar einstellen lassen, durch deren Entfernung die *Längeneinheit* festgelegt werden kann. Die zu vermessende Strecke wird dann mit der Längeneinheit verglichen und in Vielfachen oder Teilen derselben ausgedrückt.

Die Längeneinheit ist das **Meter (m)**. Die Meter-Definition basiert (seit 1983) auf einem festgelegten Wert der **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum** von 299 792 458 m/s. Sie wurde möglich durch die absolute Messung der Frequenz von Laserstrahlung im sichtbaren Spektralbereich. Da Frequenz f und Wellenlänge λ der Strahlung mit der Lichtgeschwindigkeit c durch die Beziehung $c = f\lambda$ verknüpft sind (vgl. 36.1), kann die hohe Genauigkeit von Frequenzmessungen zur Darstellung der Längeneinheit genutzt werden. Aus dem oben angegebenen Wert für die Lichtgeschwindigkeit folgt als *Meter-Definition*:

Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunde durchläuft.

Für die praktische Handhabung wird die so definierte Längeneinheit auf körperliche Vergleichsmaßstäbe übertragen, die Abstandsmarken tragen (für eine bestimmte Temperatur und weitere genau festgelegte Umgebungsbedingungen). Die Genauigkeit solcher Vergleichsmaßstäbe beträgt einige 10^{-7} , d. h., bezogen auf die Länge von 1 m beträgt der prinzipiell nicht unterschreitbare Fehler in der Längenangabe einige 10^{-7} m.

Eine außerordentlich hohe Genauigkeit und Reproduzierbarkeit besitzen Verfahren zur Längenbestimmung, bei denen als maßverkörperndes Normal die Wellenlänge des Lichts zu Grunde gelegt wird (*optische Interferenzlängenmessung*). Diese Methode besteht vom Prinzip her im Auszählen von Wellenlängen des zur Messung verwendeten Lichts. Auf diese Weise lässt sich das Meter auf Bruchteile der Lichtwellenlänge ($\approx 10^{-8}$ m) genau vermessen. Bezogen auf die Entfernung Erde–Mond entspricht dies einer Messgenauigkeit von nur wenigen Metern!

Mit Hilfe von *Endmaßen* lassen sich Längen zwischen etwa 0,1 mm und allgemein 0,25 m mit einer Genauigkeit von einigen Zehntel Mikrometer vermessen. Die häufig anzutreffende *Messschraube* („Mikrometerschraube“) gestattet die Messung von Längen zwischen 0,01 mm und meist 25 mm auf

etwa $5\ \mu\text{m}$ genau. Mit Hilfe von *Messuhren* mit Taster kann eine Genauigkeit von etwa $1\ \mu\text{m}$ erreicht werden. Beim *Messschieber* erfolgt die Ablesung der Länge auf dem Maßstab mittels *Nonius* (Bild 3.1).

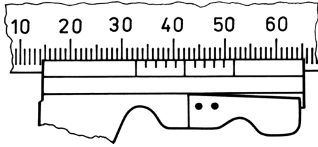


Bild 3.1 Nonius an einer geraden Skala. Ablesung: 32,7. Die Dezimalstelle 7 ergibt sich daraus, dass der 7. Teilstrich der kurzen (unteren) Hilfsskala, des Nonius, genau mit einem Teilstrich der (oberen) Hauptskala zusammenfällt.

Die **Zeitmessung** erfolgt mit Hilfe von *Uhren*. Es handelt sich dabei um Messgeräte, deren Rolle jedes beliebige System erfüllen kann, welches einen zeitlich streng periodischen Vorgang ausführt und mit dessen Hilfe ein Zeitintervall reproduzierbar dargestellt werden kann. Die *Zeiteinheit* ist die **Sekunde (s)**. Ihre Definition (1967) geht auf Vorgänge im Atom zurück:

1 Sekunde ist die Dauer von 9 192 631 770 Schwingungsperioden einer charakteristischen Strahlung des Atoms Caesium 133.

Das Funktionsprinzip einer *Atomuhr* beruht auf der Wechselwirkung von Strahlungsübergängen im Atom mit elektromagnetischen Hochfrequenzfeldern, die von einem Hilfsgenerator erzeugt werden, unter Ausnutzung der *Resonanz*. Der **Caesium-Frequenz-Standard** entspricht der Frequenz $f_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770\text{ Hz}$ des Hyperfeinstrukturübergangs des Grundzustandes des ^{133}Cs -Atoms (s. 44.7) und hat eine Genauigkeit von 10^{-14} , das entspricht einer Abweichung von 1 s in ≈ 3 Millionen Jahren.

Durch geeignete Mittelung der Anzeigen mehrerer Atomuhren wird nach internationaler Übereinkunft für die physikalische Zeitmessung die *internationale Atomzeit (IAT)* festgelegt (SI-Sekunden-Definition). Aus astronomischen Ereignissen folgt eine *Weltzeit UT* (universal time), die aus der Erdrotation abgeleitet wird und für astronomische Beobachtungen sowie für die Navigation nach Himmelskörpern maßgebend ist. Die Atomzeit hat langfristig gegen die Weltzeit eine Abweichung, die bei Erreichen einer Sekunde durch Einschleichen oder Auslassen einer „Schaltsekunde“ ausgeglichen wird.

Relativität der Bewegungen. Jede Bewegung ist eine im Zeitablauf erfolgende Ortsveränderung eines Körpers *relativ zu anderen, willkürlich als ruhend angenommenen Körpern* der Umgebung, die das **Bezugssystem** bilden. Meist wird stillschweigend angenommen, dass der Beobachter stillsteht, das Bezugssystem also ruht. Registriert der Beobachter, dass sich in seiner Umgebung ein Körper bewegt, so kann er ohne Orientierung an anderen Körpern der Umgebung (d. h. ohne Zuhilfenahme eines Bezugssystems) nicht entscheiden, ob er sich selbst bewegt oder der Körper. Man denke hierbei nur an die bekannte Täuschung, der man immer wieder unterliegt, wenn man aus einem stillstehenden Eisenbahnabteil heraus auf einen anfahrenen Zug blickt. Wenn man sich nicht z. B. am Bahnsteig orientiert, hat man den Eindruck, der eigene Zug setze sich in Bewegung. Fahren beide Züge gleich schnell nebeneinander her, so sieht es für den Mitfahrenden aus, als stünden beide Züge still. Wir erkennen daraus:

Wie jede Bewegung ist auch der Zustand der Ruhe relativ.

Da zur vollständigen Bestimmung der Lage eines Körpers relativ zu den Körpern der Umgebung (dem Bezugssystem) im Allgemeinen die Angabe von drei Längen nötig ist, wird mit dem Bezugssystem ein *dreidimensionales Koordinatensystem* verknüpft. Meist wählt man ein kartesisches System, in welchem die drei Koordinatenachsen aufeinander senkrecht stehen. Die

Gesamtheit aller durch die Koordinatentripel (x, y, z) gegebenen Punkte wird als **Raum** bezeichnet.

■ 3.2 Die gleichförmige Bewegung

Es werde die Bewegung eines Teilchens (Punktmasse) längs einer Geraden, die durch eine Führungsschiene realisiert werden kann, betrachtet. Diese Gerade lassen wir mit der x -Achse unseres Bezugssystems zusammenfallen, so dass die Lage des Teilchens durch Angabe der entsprechenden Koordinate x bestimmt ist. Zur Beschreibung der Bewegung des Teilchens genügt es offenbar, wenn man zu jedem Zeitpunkt t seine Lage x bzw. den gegenüber einem beliebig wählbaren Bezugspunkt x_0 zurückgelegten Weg $x - x_0 = s$, d. h. das **Weg-Zeit-Gesetz** $s = s(t)$, kennt.

Werden in gleichen Zeitabschnitten stets gleich große Wegstrecken zurückgelegt, sprechen wir von einer **gleichförmigen Bewegung**, und wenn die Bewegung überdies auf gerader Bahn erfolgt, von einer *geradlinig gleichförmigen Bewegung*. Bei dieser einfachsten aller Bewegungsformen ist der zurückgelegte Weg s der verstrichenen Zeit t direkt proportional: $s \sim t$. Man erhält also als Weg-Zeit-Gesetz die einfache Beziehung

$$s = vt \quad \text{mit} \quad v = \text{const.} \quad (3.1)$$

Den Proportionalitätsfaktor v nennt man die **Geschwindigkeit** der gleichförmigen Bewegung; sie berechnet sich als *Quotient aus dem zurückgelegten Weg und der dazu benötigten Zeit* zu

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{(Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung).} \quad (3.2)$$

Hieraus ergibt sich die Einheitengleichung

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1 \text{ m/s} \equiv 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Trägt man wie in Bild 3.2a die zurückgelegte Wegstrecke s als Ordinate und die zugehörige Zeit t als Abszisse auf, so erhält man das **Weg-Zeit-Diagramm** der Bewegung. In diesem wird gemäß Gleichung (3.1) die gleichförmige Bewegung durch eine steigende Gerade beschrieben, deren Anstieg die (konstante) Geschwindigkeit v kennzeichnet. Ist nämlich s_1 der nach Ablauf der Zeit t_1 und s_2 der nach Ablauf der Zeit t_2 zurückgelegte Weg, so gilt $s_1/t_1 = s_2/t_2 = v = \text{const.}$ Die Geschwindigkeit kann daher – wie man aus dem Bild entnimmt – auch durch den konstanten *Differenzenquotienten*

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

beschrieben werden.

Der Weg s geht in anschaulicher Weise aus dem **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** (Bild 3.2b) hervor, das die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit $v = v(t)$ abbildet. In ihm wird nach (3.1) die gleichförmige Bewegung durch eine Gerade parallel zur t -Achse beschrieben. Da der Flächeninhalt unter der Geraden für eine vorgegebene Zeit t zahlenmäßig gleich dem Produkt vt ist, gibt dieser daher den in der Zeit t zurückgelegten Weg an (in Bild 3.2b den Weg $s_2 = vt_2$). Dies gilt auch bei beliebiger Abhängigkeit $v = v(t)$; vgl. die Bilder 3.3 und 3.4b.

Beispiel 3.1:

Ein Fahrzeug legt die erste Hälfte einer vorgegebenen Strecke mit der Geschwindigkeit $v_1 = 30\text{ km/h}$ und die zweite Hälfte mit der Geschwindigkeit $v_2 = 50\text{ km/h}$ zurück. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit (= gesamte Strecke/Gesamtfahrzeit) hat das Fahrzeug?

Lösung: Ist der Gesamtweg gleich $2s$, so ist nach (3.2) $v_1 = s/t_1$ und $v_2 = s/t_2$. Die Gesamtfahrzeit beträgt daher $t_1 + t_2 = s/v_1 + s/v_2$ und somit die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 37,5\text{ km/h} \quad (\text{harmonisches Mittel}),$$

also nicht etwa 40 km/h (arithmetisches Mittel). □

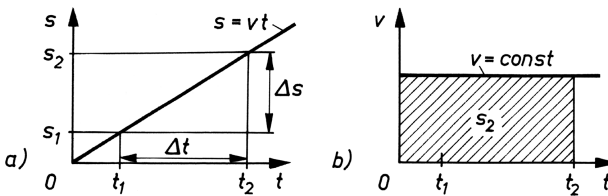


Bild 3.2 Bewegungsdiagramme der gleichförmigen Bewegung: a) Weg-Zeit-Diagramm $s = s(t)$; b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm $v = v(t)$; der schraffierte Flächeninhalt entspricht dem durchlaufenen Weg s .

■ **3.3 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung**

Bei allen Bewegungsvorgängen wird eine bestimmte Geschwindigkeit nicht sprunghaft, sondern allmählich erreicht (z. B. Anfahrvorgänge). Das Gleiche trifft auf Abbremsvorgänge zu, bei denen die Geschwindigkeit stetig abnimmt. Derartige Bewegungen, bei denen sich die Geschwindigkeit *zeitlich ändert*, nennt man *beschleunigt*. Eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeit in gleichen Zeitintervallen um denselben Betrag wächst oder abnimmt, heißt **gleichmäßig beschleunigt**. Bei ihr ist die Geschwindigkeitsänderung Δv der verstrichenen Zeitspanne Δt direkt proportional:

$$\Delta v = a\Delta t \quad \text{mit} \quad a = \text{const.} \tag{3.3}$$

Wird der Körper nicht aus der Ruhelage heraus beschleunigt, sondern hat er zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ (d. h. zu Beginn der Zeitzählung, z. B. bei Verwendung einer Stoppuhr) bereits eine bestimmte *Anfangsgeschwindigkeit* v_0 , dann ist, wenn v die *Endgeschwindigkeit* nach Ablauf der Zeit t ist, die Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall $\Delta t = t - t_0 = t$ wegen (3.3) gleich $\Delta v = v - v_0 = at$ und somit

$$v = at + v_0 \quad \text{(Endgeschwindigkeit bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung).} \tag{3.4}$$

Die konstante Größe a heißt **Beschleunigung**; sie ist demnach gleich dem *Quotienten aus der Geschwindigkeitsänderung und der dazu benötigten Zeit*:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{(Beschleunigung bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung).} \tag{3.5}$$

Einheit der Beschleunigung: $[a] = \frac{[v]}{[t]} = 1 \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \equiv 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Wenn die Geschwindigkeit abnimmt ($\Delta v < 0$), hat a die Bedeutung einer **Verzögerung**; ihr Zahlenwert erhält dann negatives Vorzeichen ($a < 0$).

Als Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm erhält man nach Gleichung (3.4) für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eine steigende, für die gleichmäßig verzögerte Bewegung eine fallende Gerade, deren Anstieg durch die konstante Beschleunigung a und deren Ordinatenabschnitt durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben ist (Bild 3.3).

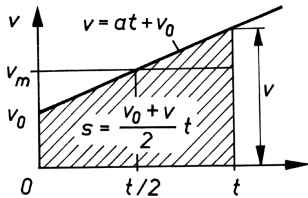


Bild 3.3 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die schraffierte Fläche gibt zahlenmäßig den zurückgelegten Weg an. v_m ist die mittlere Geschwindigkeit.

Die schraffiert gezeichnete Fläche unter der v , t -Geraden, welche die Gestalt eines Trapezes hat, ist – wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben – zahlenmäßig gleich dem Weg s . Dieser berechnet sich somit zu

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t = v_m t. \quad (3.6)$$

$v_m = s/t = (v_0 + v)/2$ gibt dabei die **mittlere Geschwindigkeit** an; bei dieser Geschwindigkeit wird während der Zeit t in *gleichförmiger* Bewegung die gleiche Wegstrecke zurückgelegt wie in gleichmäßig beschleunigter Bewegung von v_0 auf v . Nach Einsetzen von v gemäß Gleichung (3.4) in Gleichung (3.6) erhält man

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t \quad \text{(Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung).} \quad (3.7)$$

Ersetzt man hingegen in (3.6) nach Gleichung (3.4) die Zeit $t = (v - v_0)/a$, so folgt nach Umstellung:

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} \quad \text{(Endgeschwindigkeit bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung).} \quad (3.8)$$

Aus den allgemein gültigen Gleichungen (3.4) bis (3.8) lassen sich nun bestimmte **Sonderfälle** ableiten. So ist beim *Start aus der Ruhelage* $v_0 = 0$ zu setzen. Beim *Abbremsen bis zum Stillstand* ist die Endgeschwindigkeit $v = 0$, womit sich aus (3.4) die Anfangsgeschwindigkeit bei gegebener Bremszeit zu $v_0 = -at$ und aus (3.8) der Bremsweg zu $s = -v_0^2/(2a)$ oder die Anfangsgeschwindigkeit bei gegebenem Bremsweg zu $v_0 = \sqrt{-2as}$ ergeben. Die Minuszeichen verschwinden beim Einsetzen des Wertes für die Beschleunigung a , der hier negativ ist. In Bild 3.4 sind die Bewegungsdiagramme für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung zusammengestellt.

Für $a < 0$ weist $s = s(t)$ in Bild 3.4a (rechts) ein Maximum auf, das einem Umkehrpunkt der Bewegung entspricht. Die einzelnen s -Werte werden nach Erreichen des Maximums in umgekehrter Richtung noch einmal durchlaufen, wobei die Geschwindigkeit jetzt negative Werte annimmt (Bild 3.4b (rechts)). $s = s(t)$ stellt in diesem Falle nicht den in einer bestimmten Zeit insgesamt zurückgelegten Weg dar, sondern die *momentane Entfernung zum Bezugspunkt*, was gleichbedeutend mit der *Ortskoordinate* des Körpers zur Zeit t ist. Dementsprechend bezeichnet man das s , t -Diagramm für $a < 0$ in Bild 3.4a auch als **Ort-Zeit-Diagramm**. Den vom Körper insgesamt zurückgelegten Weg erhält man

durch Addition der Beträge der im v, t -Diagramm Bild 3.4b (rechts) schraffiert gezeichneten Flächen. Vergleiche dazu das Beispiel zum senkrechten Wurf in Abschnitt 3.4.

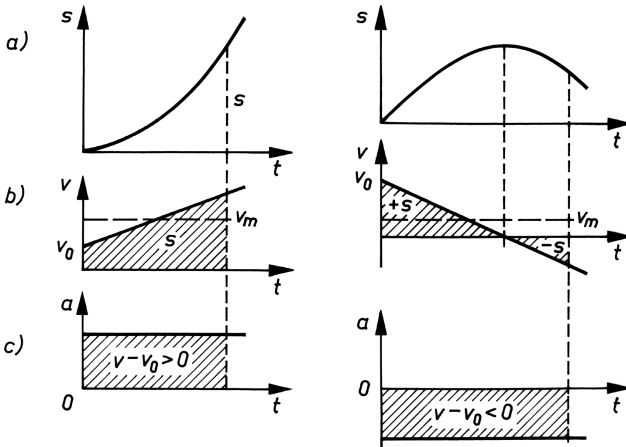


Bild 3.4 Bewegungsdiagramme für $a > 0$ (links) und $a < 0$ (rechts):

- a) Weg-Zeit-Diagramm bzw. Ort-Zeit-Diagramm $s = s(t)$
- b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm $v = v(t)$
- c) Beschleunigung-Zeit-Diagramm $a = a(t)$

Beispiel 3.2:

Der Fahrer eines mit 80km/h fahrenden Pkw bemerkt plötzlich in 60m Entfernung auf der Straße ein Hindernis, worauf er seinen Wagen mit der maximal möglichen Verzögerung von $a = -5\text{m/s}^2$ abbremst. a) Wie viel Sekunden nach Einsetzen des Bremsvorgangs und wie viel Meter vor dem Hindernis kommt der Wagen zum Stehen? b) Mit welcher Geschwindigkeit prallt der Wagen auf, wenn er anfänglich mit 90km/h gefahren wird?

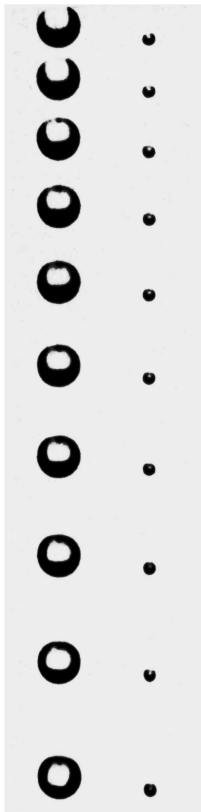
Lösung: a) Bekannt sind die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = (80/3,6) \text{ m/s} = 22,2 \text{ m/s}$, die Endgeschwindigkeit $v = 0$ und die Beschleunigung a . Aus (3.4) folgt damit die Bremszeit $t = -v_0/a \approx 4,5\text{s}$. Für den Bremsweg ergibt sich aus (3.8) $s = -v_0^2/(2a) = 49,3\text{m}$; der Wagen kommt also 10,7m vor dem Hindernis zum Stehen. b) Mit $s = 60\text{m}$ und $v_0 = (90/3,6) \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$ folgt nach (3.8) für die Aufprallgeschwindigkeit $v = 5 \text{ m/s} = 18 \text{ km/h}$. □

Aufgaben

- 3.1 Um wie viel Meter vergrößert sich im obigen Beispiel die Strecke für den Anhaltvorgang gegenüber dem Bremsweg, wenn die Reaktionszeit des Fahrers bis zum Beginn des Bremsvorganges von $t_R = 0,8\text{s}$ berücksichtigt wird? Kommt es jetzt bei $v_0 = 80 \text{ km/h}$ zum Aufprall? Wenn ja, mit welcher Geschwindigkeit?
- 3.2 Ein Kurzstreckenläufer legt die Strecke von 100m in der Zeit von 10,5s zurück. Während der ersten 20m beschleunigt er dabei gleichmäßig und läuft den Rest der Strecke mit konstanter Geschwindigkeit. Wie groß sind die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit des Läufers? Stelle den Lauf in einem v, t - sowie in einem s, t -Diagramm dar!

3.4 Freier Fall. Senkrechter Wurf

Das wohl bekannteste Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der **freie Fall**. Ursache der Fallbewegung eines Körpers ist die Anziehungskraft der Erde. GALILEI (1564–1642) erkannte als Erster, dass *alle Körper mit der gleichen Beschleunigung* zum Mittelpunkt der Erde *fallen*, wenn der Einfluss des Luftwiderstandes vernachlässigt wird (Bild 3.5). Anhand sorgfältiger und für seine Zeit genauer Experimente konnte er zeigen, dass die Wege, die von einem Körper in 1, 2, 3, 4, ... Zeiteinheiten (z. B. Sekunden) durchfallen werden, sich wie 1 : 4 : 9 : 16 : ... verhalten, d. h., *die Fallhöhe ist dem Quadrat der Fallzeit proportional (Fallgesetz)*.



So fällt ein Körper in Luft in der ersten Sekunde etwa 4,9 m und in jeder folgenden jeweils um das Doppelte dieses Wertes, also ungefähr um 9,8 m, mehr als in der vorangegangenen Sekunde. Die gesamte Fallhöhe, ausgedrückt in Metern, beträgt also

$$h = 4,9 + (4,9 + 9,8) + (4,9 + 2 \cdot 9,8) + \dots + [4,9 + (t - 1) \cdot 9,8],$$

wenn t die Anzahl der Sekunden angibt. Wir haben also t Summanden, die sich als Summe einer arithmetischen Reihe wie folgt zusammenfassen lassen:

$$h = 4,9 t + \frac{9,8 t(t - 1)}{2} = \frac{9,8}{2} t^2.$$

Dies ist das quadratische Zeitgesetz des freien Falls mit dem speziellen Wert $9,8 \text{ m/s}^2$ für die **Fallbeschleunigung** oder **Schwerebeschleunigung**, die mit dem Buchstaben g (von lat. „gravitas“, die Schwere) bezeichnet wird.

Bild 3.5 Stroboskopische Aufnahme von zwei frei fallenden Kugeln ungleicher Masse. Sie wurde hergestellt, indem bei geöffneter Blende in Abständen von $1/100 \text{ s}$ mit Blitzlicht beleuchtet wurde. Man beachte, dass die leichte Kugel genauso schnell fällt wie die schwere Kugel.

Dieses Gesetz folgt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und dem genauen Wert der experimentell zu bestimmenden Fallbeschleunigung $a = g$, der innerhalb nicht allzu großer Höhenunterschiede konstant ist, unmittelbar auch aus (3.7):

$$h = \frac{g}{2} t^2 \quad (\text{Fallhöhe}). \quad (3.9)$$

Aus (3.8) erhält man die Endgeschwindigkeit nach Durchfallen der Höhe h :

$$v = \sqrt{2gh} \quad (\text{Fallgeschwindigkeit}). \quad (3.10)$$

Der Wert für die Fallbeschleunigung g kann z. B. mittels genauer Messungen der Fallzeit für eine vorgegebene Höhe nach Gleichung (3.9) $g = 2h/t^2$ bestimmt werden. Genauere Messun-

gen sind mit Hilfe von *Pendeln* möglich (vgl. A.2 im *Anhang*). Infolge der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt und wegen der Erddrehung ist g von der geografischen Breite abhängig (s. 5.2). Für Orte um den 50. Breitenkreis und niedrige Höhenlagen erhält man $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Als *Normwert* wurde der Wert für 45° nördlicher Breite und Meereshöhe vereinbart:

$$g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Normfallbeschleunigung}).$$

Beispiel 3.3:

Bestimme aus Bild 3.5 den Wert der Fallbeschleunigung g !

Lösung: Die Ausmessung der Abstände aufeinander folgender Positionen der frei fallenden Kugeln ergibt, dass in jeweils einer hundertstel Sekunde ($\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$) die zurückgelegten Wege jedes Mal um $\Delta s \approx 1 \text{ mm}$ zunehmen. Die Geschwindigkeitszunahme zwischen zwei aufeinander folgenden Belichtungen beträgt also $\Delta v = \Delta s / \Delta t \approx 0,1 \text{ m/s}$, woraus für die Beschleunigung folgt $a = \Delta v / \Delta t \approx 10 \text{ m/s}^2 \approx g$. \square

Der senkrechte Wurf. Beim senkrechten Wurf eines Körpers ist der gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung eine *gleichförmige* Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 überlagert. Die resultierende Bewegung ist ebenfalls gleichmäßig beschleunigt. Beim senkrechten Wurf **nach unten** hat v_0 dieselbe Richtung wie die Fallbewegung; es gelten daher für ihn die allgemeinen Bewegungsgesetze (3.4), (3.7) und (3.8) mit $a = g$ in unveränderter Form. Beim senkrechten Wurf **nach oben** ist demgegenüber zu beachten, dass die Fallbeschleunigung g als *Verzögerung* wirkt und daher negativ anzusetzen ist. Damit ergibt sich aus (3.4) die Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t zu

$$v = v_0 - gt, \quad (3.11)$$

aus (3.7) die Wurfhöhe nach der Zeit t zu

$$h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \quad (3.12)$$

und aus (3.8) die Geschwindigkeit in der Höhe h zu

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (3.13)$$

Bei einer vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht der Körper eine bestimmte maximale Höhe h_{\max} . In dieser Höhe ist er für einen Augenblick in Ruhe ($v = 0$), um danach frei nach unten zu fallen. Für den Gipfelpunkt gilt daher $0 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_{\max}}$, woraus folgt

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (\text{maximale Wurfhöhe}). \quad (3.14)$$

$v_0 = \sqrt{2gh_{\max}}$ ist diejenige Geschwindigkeit, die dem Körper erteilt werden muss, damit er die Höhe h_{\max} gerade erreicht. Wie man sieht, ist sie der Geschwindigkeit (3.10) gleich, die der Körper erhält, wenn er aus der Höhe h_{\max} frei zu Boden fällt.

Beispiel 3.4:

Ein Körper werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. Bis zu welcher Höhe steigt er maximal? Nach welcher Zeit hat er seine Anfangslage wieder

erreicht? ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$). Wurfhöhe h , Geschwindigkeit v und Beschleunigung a sind in Abhängigkeit von der Zeit grafisch darzustellen.

Lösung: Nach (3.14) ist $h_{\max} = 20 \text{ m}$. Die *Steigzeit* t_1 erhält man aus (3.11) mit der Bedingung $v = 0$ zu $t_1 = v_0/g = 2 \text{ s}$. Der Körper kommt also nach $t_2 = 2t_1 = 4 \text{ s}$ wieder am Boden an. Entsprechend Gleichung (3.7) bzw. (3.12) wird die gleichmäßig beschleunigte Bewegung im Ort-Zeit-Diagramm durch eine *Parabel* beschrieben. In unserem Beispiel ist die Parabel wegen des negativen Vorzeichens der Beschleunigung nach unten geöffnet (Bild 3.6a). Das Maximum liegt an der Stelle $t = t_1$ bei $h = h_{\max}$. Im v, t -Diagramm (Bild 3.6b) ergibt sich gemäß Gleichung (3.11) eine fallende Gerade mit dem Ordinatenabschnitt $v = v_0$ bei $t = 0$ und der Ordinate $v = -v_0$ bei $t = t_2 = 2t_1$. Sie veranschaulicht die verzögerte Bewegung während der Aufstiegsphase bis zum Stillstand ($v = 0$) zum Zeitpunkt t_1 und die anschließende beschleunigte Bewegung in umgekehrter Richtung (Abstiegsphase mit negativer Geschwindigkeit). Wegen der auf den Körper wirkenden konstanten Fallbeschleunigung $a = -g$ ergibt sich im a, t -Diagramm (Bild 3.6c) eine Gerade parallel zur t -Achse. Auch im höchsten Punkt der Flugbahn, wo die Geschwindigkeit gleich null ist, behält die Beschleunigung ihren Wert $a = -g$; denn „Beschleunigung“ bedeutet *Geschwindigkeitsänderung*, und im höchsten Punkt erfolgt die Änderung der Geschwindigkeit von positiven zu negativen Werten. \square

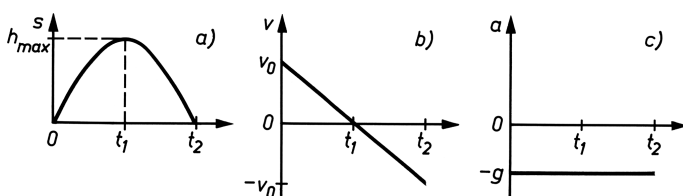


Bild 3.6 Senkrechter Wurf nach oben: Ort-Zeit-Diagramm (a), Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (b) und Beschleunigung-Zeit-Diagramm (c)

Aufgabe

- 3.3 Von einer 100m hohen Plattform eines Aussichtsturmes wird ein Körper mit $v_0 = 15 \text{ m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. a) Wie groß ist die Gipfelhöhe über dem Erdboden, und wann wird sie erreicht? b) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit trifft der Körper am Erdboden auf? Luftwiderstand wird vernachlässigt.

3.5 Allgemeine Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Wie aus den Bildern 3.4a und 3.6a hervorgeht, wird die beschleunigte Bewegung im Weg-Zeit-Diagramm durch eine *gekrümmte* Kurve $s = s(t)$ beschrieben. Im Gegensatz zur gleichförmigen Bewegung, für die man im s, t -Diagramm wegen der konstanten Geschwindigkeit eine Gerade erhält, ist daher für die beschleunigte Bewegung die Definition der Geschwindigkeit als Differenzenquotient $\Delta s/\Delta t$ wie in Abschnitt 3.2 nicht mehr ausreichend; denn dieser gibt – wie man aus Bild 3.7 ersehen kann – nur eine *mittlere (durchschnittliche)* Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an, entsprechend dem Anstieg der *Sekante* durch die Kurvenpunkte P_1 und P_2 .

Um die **Momentangeschwindigkeit** $v(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t , z. B. $t = t_1$, zu erhalten, ist es erforderlich, den Anstieg der *Tangente* an die Weg-Zeit-Kurve im zugehörigen Kurvenpunkt P_1 zu bestimmen. Dies geschieht dadurch, dass das Zeitintervall Δt (und damit zugleich auch das Wegintervall Δs) verschwindend klein gewählt wird. Durch diesen *Grenzübergang* wird der Differenzenquotient $\Delta s / \Delta t$ zum Differenzialquotienten ds/dt , der dann die Geschwindigkeit im betreffenden Zeitpunkt angibt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}. \tag{3.15}$$

Die allgemeine Definition der Geschwindigkeit lautet somit:

Die Geschwindigkeit ist gleich dem Differenzialquotienten des Weges nach der Zeit.

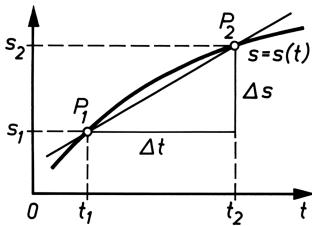


Bild 3.7 Zur Definition der Geschwindigkeit bei beschleunigter Bewegung

Analog ist bei der Bestimmung der Beschleunigung zu verfahren, wenn die Bewegung *ungleichmäßig beschleunigt* ist. Denn in diesem Fall ist der Geschwindigkeitszuwachs Δv in gleichen Zeitintervallen Δt verschieden groß, d. h., die Beschleunigung ändert sich dauernd, weshalb diese Bewegung im v, t -Diagramm nicht wie bei gleichmäßiger Beschleunigung durch eine Gerade, sondern durch eine gekrümmte Kurve beschrieben wird. Daher gibt hier der Differenzenquotient (3.5) $\Delta v / \Delta t$ nur eine *durchschnittliche* Beschleunigung im Zeitintervall Δt an. Die **Momentanbeschleunigung** $a(t)$ erhält man wie oben durch Grenzübergang zu

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} \tag{3.16}$$

oder mit (3.15) zu

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \equiv \ddot{s}. \tag{3.17}$$

Die Beschleunigung ist gleich dem Differenzialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit oder gleich dem zweiten Differenzialquotienten des Weges nach der Zeit.

Mit Hilfe dieser Definitionen für Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich die oben behandelten Gesetze der *gleichmäßig beschleunigten* Bewegung durch Anwendung der Integralrechnung auf analytischem Wege herleiten. So folgt zunächst aus (3.16) durch Umstellung $dv = a dt$ und hieraus mit $a = \text{const}$:

$$v = \int dv = \int a dt = a \int dt = at + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt man aus der **Anfangsbedingung**, dass der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit $v = v_0$ haben soll. Durch Einsetzen dieser Werte für t und v folgt aus vorstehender Gleichung $C = v_0$, womit sich die bekannte Beziehung (3.4) $v = at + v_0$ ergibt. Mit (3.15) wird hieraus

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0; \quad s = \int (at + v_0) dt = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + C'.$$

Nehmen wir an, dass die zur Zeit $t = 0$ zurückgelegte Wegstrecke gleich s_0 ist, so folgt durch Einsetzen $C' = s_0$. Lassen wir hingegen die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ erst beginnen, d. h. $s_0 = 0$, so ist auch C' gleich null, und es folgt das Weg-Zeit-Gesetz (3.7).

Beispiele 3.5:

1. Bei einer geradlinigen Bewegung werden nach 1, 2, 3 ... Sekunden 1, 8, 27 ... Meter zurückgelegt. Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung nach der 1., 2. und 3. Sekunde?

Lösung: Wir entnehmen, dass s der dritten Potenz von t proportional ist, d. h., es gilt $s = kt^3$. Die Konstante k erhält man durch Einsetzen zusammengehöriger Werte von t und s zu $k = 1 \text{ m/s}^3$. Nach (3.15) folgt damit als Geschwindigkeit $v(t) = 3kt^2$ und nach (3.16) als Beschleunigung $a(t) = 6kt$. Einsetzen von k ergibt $v(t) = 3t^2 \text{ m/s}^3$; $a(t) = 6t \text{ m/s}^3$. Für $t = 1, 2, 3$ s erhält man $v = 3, 12, 27 \text{ m/s}$ und $a = 6, 12, 18 \text{ m/s}^2$.

2. Die Geschwindigkeit einer senkrecht aufsteigenden Rakete zum Zeitpunkt t nach dem Start beträgt nach Gleichung (9.22):

$$v(t) = c \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} - gt = -c \ln \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right) - gt.$$

Dabei ist c die konstante Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase aus dem Triebwerk, \dot{m} der zeitlich konstante Treibstoffverbrauch, gemessen in Kilogramm je Sekunde, und m_0 die Startmasse der Rakete. Wie groß sind Startbeschleunigung und Endbeschleunigung der Rakete, wenn $c = 3000 \text{ m/s}$, $\dot{m}/m_0 = 10^{-2} / \text{s}$ und die Brenndauer des Treibsatzes $t_E = 25 \text{ s}$ beträgt?

Lösung: Aus obiger Gleichung für $v(t)$ erhält man durch Differenziation nach der Zeit

$$a(t) = \frac{c(\dot{m}/m_0)}{1 - (\dot{m}/m_0)t} - g.$$

Für $t = 0$ folgt hieraus als Startbeschleunigung $a(0) = c(\dot{m}/m_0) - g = 20 \text{ m/s}^2 \approx 2g$ und für $t = t_E = 25 \text{ s}$ als Endbeschleunigung $a(t_E) = 30 \text{ m/s}^2 \approx 3g$. \square

Aufgabe

3.4 Ein Elektron bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 600 \text{ km/s}$ geradlinig im Vakuum. Vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ an wird es durch ein mit der Zeit linear anwachsendes Gegenfeld mit einer Verzögerung $a = -kt$ abgebremst ($k = 3 \cdot 10^{19} \text{ m/s}^3$). a) Bestimme Weg und Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit allgemein! b) Zu welchem Zeitpunkt nach t_0 kehrt sich die Bewegungsrichtung des Elektrons um? c) Welchen Weg hat es bis dahin im Gegenfeld zurückgelegt?

3.6 Geschwindigkeit und Beschleunigung als Vektoren. Zusammengesetzte Bewegungen (Superposition)

Vektoren. Zur eindeutigen Bestimmung einer Geschwindigkeit gehört außer der Angabe ihres Zahlenwertes nebst Einheit die Angabe der *Richtung*. Gleiches gilt für die Beschleunigung. Derartige gerichtete Größen heißen *Vektoren*, im Gegensatz zu den ungerichteten *Skalaren*, wie z. B. der Zeit, der Temperatur und der Dichte. Vektoren stellt man durch Pfeile in der entsprechenden Richtung dar, deren Länge gleich so viel willkürlich gewählten Längeneinheiten ist, wie der Zahlenwert der betreffenden Größen angibt. Der Zahlenwert zusammen mit der Einheit eines Vektors heißt sein *Betrag*. Zwei vektorielle Größen sind nur dann gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

Vektorielle Größen werden durch *fettgedruckte* lateinische Buchstaben gekennzeichnet, z. B. \mathbf{v} für den Geschwindigkeitsvektor. Üblich ist auch die Kennzeichnung durch gewöhnliche Buchstaben mit einem darübergesetzten Pfeil (z. B. \vec{v}), wie sie in den Bildern dieses Buches verwendet wird.

Überlagerung von Bewegungen. Führt ein Körper zwei Bewegungen *gleichzeitig* aus (z. B. ein Boot, das über den Fluss setzt und dabei infolge der Strömung des Flusses abgetrieben wird), so setzen sich die beiden Teilbewegungen (Bewegung des Bootes in Bezug auf den Fluss und Bewegung des Flusses in Bezug auf das Ufer) zur Gesamtbewegung (Bewegung des Bootes gegenüber dem Ufer) so zusammen, als ob sie zeitlich nacheinander stattfinden würden. Man nennt dies das *Prinzip der ungestörten Superposition* (Überlagerung) oder auch das *Unabhängigkeitsprinzip*.

Danach ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} der aus zwei Teilbewegungen zusammengesetzten Bewegung als Diagonale des Parallelogramms, das aus den Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 der Teilbewegungen gebildet wird (Bild 3.8). Nach den Regeln der Vektorrechnung ist diese gleich der *Vektorsumme*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (\text{Vektor der resultierenden Geschwindigkeit}). \quad (3.18)$$

Es handelt sich hierbei um die *geometrische Addition* von Vektoren, im Gegensatz zur algebraischen Addition von Skalaren. Die zu addierenden vektoriellen Größen bezeichnet man als **Komponenten**, deren Summe als **Resultierende**. Damit lautet das

Superpositionsprinzip:

Gleichzeitig ablaufende Bewegungen eines Körpers beeinflussen sich gegenseitig nicht. Resultierende Größen (Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung) ergeben sich durch geometrische Addition der Komponenten.

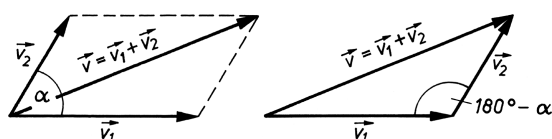


Bild 3.8 Superposition (Überlagerung) von Geschwindigkeiten. Anstatt des Parallelogramms genügt zur Ermittlung der resultierenden Geschwindigkeit auch das zugehörige Vektordreieck (rechts).

Schließen v_1 und v_2 den Winkel α ein (Bild 3.8), so berechnet sich der *Betrag* der resultierenden Geschwindigkeit aus dem rechten Teilbild mit Hilfe des Kosinussatzes zu

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}. \quad (3.19)$$

Sind die beiden Bewegungen *gleichgerichtet* ($\alpha = 0^\circ$) oder einander *entgegengerichtet* ($\alpha = 180^\circ$), so folgt hieraus (unter Beachtung der binomischen Formeln)

$$v = |v_1 \pm v_2| \quad \text{(Additionstheorem der Geschwindigkeiten)}. \quad (3.20)$$

Dieses Gesetz der Superposition gilt nicht für Geschwindigkeiten, die der Lichtgeschwindigkeit nahe kommen (vgl. Abschnitt 6.2, *relativistisches Additionstheorem der Geschwindigkeiten*, Gleichung (6.14)).

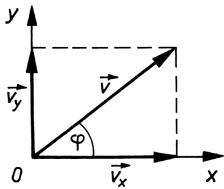


Bild 3.9 Komponentenerlegung des Geschwindigkeitsvektors v in einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem x, y

Die zur Bildung der Resultierenden umgekehrte Aufgabe besteht darin, einen gegebenen Vektor, z. B. die Geschwindigkeit v , in zwei oder mehrere Komponenten zu zerlegen. Dies ist nur dann eindeutig möglich, wenn die Richtungen der Komponenten vorgegeben sind. Besonders häufig ist die Zerlegung in den Richtungen der x - und y -Achse eines *rechtwinkligen* Koordinatensystems. In diesem Fall ergeben sich nach Bild 3.9 die Beträge der Komponenten als *Projektionen* des Vektors v auf die x - und y -Achse zu $v_x = v \cos \varphi$ und $v_y = v \sin \varphi$ und der Betrag der Resultierenden wegen des Lehrsatzes des PYTHAGORAS $v_x^2 + v_y^2 = v^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = v^2$ zu $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Der Winkel φ folgt aus $\tan \varphi = v_y / v_x$.

Die Komponentenerlegung des Vektors v in Bezug auf ein *räumliches* kartesisches Koordinatensystem lautet

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad (3.21)$$

wobei v_x, v_y, v_z die vektoriellen und v_x, v_y, v_z die skalaren Komponenten (Koordinaten) von v sowie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen x, y, z sind, für deren Beträge gilt $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$. Der *Betrag* von v ergibt sich wie oben nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS zu

$$|v| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.22)$$

Dieser gibt keine Information über die Richtung des Vektors v und ist als *positive* Größe definiert. Im Unterschied dazu können die Komponenten v_x, v_y und v_z sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Bei den bisher zur Beschreibung der geradlinigen Bewegung verwendeten (positiven und negativen) Geschwindigkeiten und Beschleunigungen handelte es sich also nicht um den Betrag, sondern um die mit der Bewegungsrichtung zusammenfallende (einzige) Komponente des Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsvektors.

Beispiel 3.6:

In einem Flussbett der Breite $B = 100\text{m}$ fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit $v_F = 1,2\text{m/s}$. Ein Fährschiff bewegt sich mit einer Relativgeschwindigkeit von $v_S = 5\text{m/s}$ gegenüber dem Wasser. a) Wie weit würde das Schiff abgetrieben, wenn es den Fluss senkrecht zu überqueren versucht? b) Unter welchem Winkel muss es gegensteuern, wenn es auf kürzestem Wege das andere Ufer erreichen will? c) In welche Richtung muss es steuern, wenn es einen beliebigen Punkt am gegenüberliegenden Ufer erreichen will?

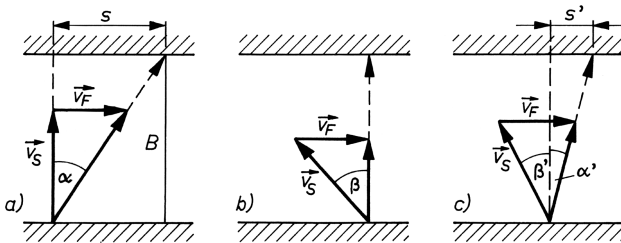


Bild 3.10 Zum Rechenbeispiel 3.6: Superpositionsprinzip der Geschwindigkeiten

Lösung: a) Nach Bild 3.10a ist $\tan \alpha = v_F / v_S = 0,24$ und damit $s = B \tan \alpha = 24\text{m}$. b) Die resultierende Bewegung muss quer zur Flussrichtung verlaufen (Bild 3.10b). In diesem Fall ist $\sin \beta = v_F / v_S = 0,24$. Es muss also unter dem Winkel $\beta \approx 14^\circ$ gegengesteuert werden. c) Für eine vorgegebene Abdrift s' (Bild 3.10c) ist $\tan \alpha' = s' / B$, der Winkel α' ist also bekannt. Nach dem Sinussatz gilt in dem Vektordreieck

$$\frac{v_S}{v_F} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha')}{\sin(\alpha' + \beta')} \quad \text{oder} \quad \sin(\alpha' + \beta') = \frac{v_F}{v_S} \cos \alpha'$$

Hieraus erhält man den Winkel β' , unter dem gegenzusteuern ist. Für $s' = 0$ (Beispiel b) wird $\alpha' = 0$ und somit $\sin \beta' = v_F / v_S$, wie zuvor. □

Aufgabe

3.5 Unter welchem Winkel in Bild 3.10 muss das Schiff steuern, um in der kürzesten Zeit das andere Ufer zu erreichen? Wie lange dauert die Überfahrt?

3.7 Die gleichförmige Kreisbewegung

Ein Teilchen bewege sich mit *konstanter* Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn (*gleichförmige* Kreisbewegung). Eine solche Bewegung vollführen auch alle Punkte eines rotierenden Körpers (mit Ausnahme derjenigen, die auf der Drehachse liegen) bei konstanter Drehzahl. Dabei überstreicht der vom Kreismittelpunkt zum Teilchen weisende Radius r in der Zeitspanne Δt einen zu ihr proportionalen Drehwinkel $\Delta \varphi$, zu dem ein Kreisbogen der Länge

$$\Delta s = r \Delta \varphi \tag{3.23}$$

gehört (Bild 3.11a). Dabei ist $\Delta \varphi = \Delta s / r$ das **Bogenmaß** des Drehwinkels (Kreisbogenlänge/Radius). Als Verhältnis zweier Strecken ist das Bogenmaß eines Winkels *dimensionslos*. Um Verwechslungen mit anderen dimensionslosen Größen zu vermeiden, wird es mit der Bezeichnung **rad** (Radiant) als *Einheit* versehen.

Ein Winkel hat die Größe 1 rad, wenn der zugehörige Kreisbogen gleich dem Radius des Kreises ist. Im Gradmaß entspricht dies dem Winkel $360^\circ/(2\pi) = 57,3^\circ$. Für den Vollkreis erhalten wir mit $\Delta s = 2\pi r$ (Kreisumfang) $\Delta\varphi = 2\pi r/r = 2\pi$ rad, entsprechend 360° . Demnach ist das Bogenmaß z. B. von 180° gleich π rad, von 1° gleich $0,017453$ rad.

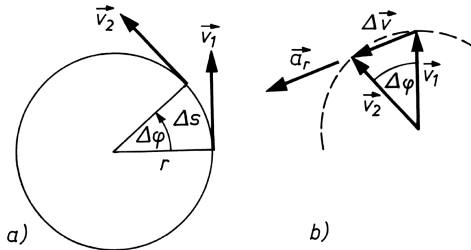


Bild 3.11 Zur Kreisbewegung: Der Geschwindigkeitsvektor v hat stets die Richtung der Tangente an die Kreisbahn (a), der Vektor der Geschwindigkeitsänderung Δv ist bei gleich bleibender Drehzahl zum Kreismittelpunkt hin gerichtet (b).

Analog zur Geschwindigkeit v bei geradliniger Bewegung definiert man für die Kreisbewegung die **Winkelgeschwindigkeit** ω als Quotienten aus dem Drehwinkel $\Delta\varphi$ und dem Zeitintervall Δt , in dem dieser durchlaufen wird:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{(Winkelgeschwindigkeit).} \quad (3.24)$$

Einheit: $[\omega] = 1 \text{ rad/s}$.

Der gesamte in der Zeit t zurückgelegte Drehwinkel wird damit

$$\varphi = \omega t \quad \text{(Gesamtdrehwinkel),} \quad (3.25)$$

und die Anzahl der Umdrehungen in dieser Zeit ist $z = \varphi/(2\pi \text{ rad}) \equiv \varphi/(2\pi)$.

Für die Geschwindigkeit des auf der Kreisbahn umlaufenden Teilchens erhält man mit (3.23) und (3.24)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} r = \omega r \quad \text{(Bahngeschwindigkeit).} \quad (3.26)$$

Ist T die Dauer eines vollen Umlaufs, die *Periodendauer*, so ergibt sich aus (3.24) mit $\Delta\varphi = 2\pi \text{ rad} \equiv 2\pi$ als zugehörigem Drehwinkel die Winkelgeschwindigkeit zu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(Winkelgeschwindigkeit).} \quad (3.27)$$

Werden in der Zeit t insgesamt z Umläufe vollführt, d. h. $t = zT$, so ist die Anzahl der Umläufe je Zeiteinheit

$$n = \frac{z}{t} = \frac{1}{T} \quad \text{(Drehzahl).} \quad (3.28)$$

Einheit der Drehzahl: $[n] = 1/\text{s}$.

Damit wird Gleichung (3.27)

$$\omega = 2\pi n \quad \text{(Kreisfrequenz, Winkelfrequenz).} \quad (3.29)$$

Winkelgeschwindigkeit als Vektor. Man kann die Winkelgeschwindigkeit ω als einen sog. *axialen Vektor* auffassen, der durch einen Pfeil dargestellt wird, dessen Länge sich aus dem

Betrag nach (3.27) bzw. (3.29) ergibt und dessen Richtung mit der Drehachse (in Bild 3.11a senkrecht zur Zeichenebene) zusammenfällt. Der Richtungspfeil folgt aus der

Rechtsschraubenregel:

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit zeigt in die Richtung, in die sich eine Rechtsschraube beim Eindrehen bewegt.

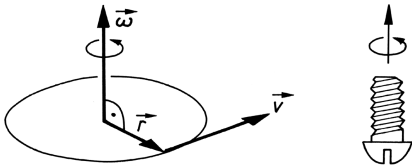


Bild 3.12 Zur Festlegung der Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit ω (Rechtsschraube)

Damit lässt sich nach Gleichung (3.26) die Bahngeschwindigkeit des umlaufenden Teilchens v als *Vektorprodukt*, gebildet aus dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω und dem vom Kreismittelpunkt zum Teilchen zeigenden *Radiusvektor* r , wie folgt schreiben:

$$v = \omega \times r \quad (\text{Vektor der Bahngeschwindigkeit}). \quad (3.30)$$

Entsprechend der Definition des Vektorprodukts steht v senkrecht auf ω und r , d. h., v hat stets die Richtung der Tangente an die Bahnkurve.

Die Radialbeschleunigung. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist zwar der Betrag der Geschwindigkeit $|v| = v$ konstant, d. h., für die in aufeinander folgenden Zeitpunkten t_1 und t_2 vorhandenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (vgl. Bild 3.11a) gilt $|v_1| = |v_2|$; es ändert sich aber fortgesetzt ihre Richtung, weshalb diese Bewegung *beschleunigt* ist. Zeichnen wir die beiden Vektoren v_1 und v_2 unter Beibehaltung ihrer Richtung so, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen (Bild 3.11b), so liegen ihre Endpunkte auf einem Kreis mit dem Radius v , dem sog. *Hodographen* der Bewegung. Wie man sieht, ergibt sich v_2 aus v_1 durch Addition eines Differenzvektors Δv ; es ist also $v_2 = v_1 + \Delta v$ oder $\Delta v = v_2 - v_1$. Der Vektor Δv beschreibt demnach die Geschwindigkeitsänderung. Machen wir den Winkel $\Delta\varphi$, den v_1 und v_2 miteinander einschließen, verschwindend klein, so steht Δv senkrecht auf v_1 und v_2 . Der Vektor der Beschleunigung $a_r = \Delta v / \Delta t$, der mit der Richtung von Δv zusammenfällt, ist daher stets vom Bahnpunkt zum Kreismittelpunkt gerichtet. Man spricht daher von der **Radial-, Zentral- oder auch Zentripetalbeschleunigung**.

Bei hinreichend kleinem Zentriwinkel $\Delta\varphi$ kann der Betrag von Δv , wie aus Bild 3.11b hervorgeht, näherungsweise durch den zugehörigen Bogen des Kreises mit dem Radius v ersetzt werden. Es ist daher $\Delta v = v\Delta\varphi$ und somit $a_r = \Delta v / \Delta t = v\Delta\varphi / \Delta t = v\omega$, woraus mit (3.26) folgt:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{Radial- oder Zentripetalbeschleunigung}). \quad (3.31)$$

Die Radial- oder Zentripetalbeschleunigung auf einer Kreisbahn ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und dem Bahnradius umgekehrt proportional und immer zum Mittelpunkt gerichtet.

Die Beziehungen (3.26) und (3.31) lassen sich auf einfache Weise auch unter Benutzung von **ebenen Polarkoordinaten** r, φ gewinnen (Bild 3.13). Für die *Kreisbewegung* ist $r = \text{const}$ und $\varphi = \varphi(t)$, bei gleichförmiger Kreisbewegung nach (3.25) speziell $\varphi = \omega t$. Es ist somit

$$x(t) = r \cos \omega t; \quad y(t) = r \sin \omega t.$$

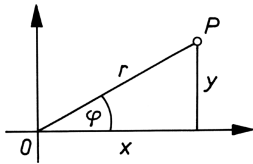


Bild 3.13 Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten x, y und den ebenen Polarkoordinaten r, φ eines Punktes P :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = y/x.$$

Durch Differenziation nach der Zeit erhält man daraus für die Komponenten v_x und v_y sowie den Betrag v des Geschwindigkeitsvektors (mit $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$):

$$v_x = \dot{x} = -\omega r \sin \omega t; \quad v_y = \dot{y} = \omega r \cos \omega t; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r.$$

Nochmalige Zeitableitung ergibt entsprechend für die Beschleunigung:

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 r \cos \omega t; \quad a_y = \ddot{y} = -\omega^2 r \sin \omega t; \quad a_r = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 r.$$

Für $\varphi = 0$ bzw. $\omega t = 0$ hat a_r nur eine x -Komponente, für $\varphi = 90^\circ$ bzw. $\omega t = \pi/2$ nur eine y -Komponente, welche beide negativ sind; d. h., der Beschleunigungsvektor ist stets zum Kreismittelpunkt hin gerichtet. Er hat also die entgegengesetzte Orientierung des Radiusvektors r in Bild 3.12, weshalb gilt

$$\mathbf{a}_r = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (\text{Vektor der Radial- oder Zentripetalbeschleunigung}). \quad (3.32)$$

Ein Körper bewegt sich nur dann auf einer Kreisbahn, wenn er eine dem Betrage nach gleich bleibende, zum Mittelpunkt hin gerichtete Beschleunigung erfährt.

Beispiele 3.7:

1. Ein stationärer Nachrichtensatellit, der über einem bestimmten Ort am Äquator scheinbar stillsteht, kreist in einer Höhe von 35 600 km über der Erdoberfläche. Wie groß ist seine Bahngeschwindigkeit? (Erdradius $R = 6380$ km).

Lösung: Aus (3.26) und (3.27) folgt $v = \omega r = 2\pi r/T$, wobei hier $r = R + h$ zu setzen und für T die Dauer einer Erdumdrehung, also 24 h (genau: 1 Sterntag = 86 164 s), einzusetzen ist. Damit folgt $v = 6,28 \cdot 41\,980 \text{ km} / (86\,164 \text{ s}) = 3,06 \text{ km/s}$.

2. Wie groß ist in Beispiel 1 die Radialbeschleunigung des Satelliten, die ihn auf der kreisförmigen Umlaufbahn hält?

Lösung: Aus (3.31) folgt $a_r = v^2/(R + h) = 0,22 \text{ m/s}^2$. Dies ist genau der Wert der Fallbeschleunigung g in der Höhe des Satelliten (vgl. 8.1). \square

Aufgabe

3.6 Ein Satellit bewege sich um die Erde auf einer Kreisbahn, die konzentrisch zum Äquator verläuft, im Drehsinn der Erdrotation. Seine Umlaufzeit betrage $T_S = 96$ min. Die Umdrehungszeit der Erde ist $T_E = 86\,164$ s. In welchen Zeitabständen t_B befindet sich der Satellit über demselben Beobachtungspunkt des Äquators?

■ 3.8 Die ungleichförmige Kreisbewegung

Wenn sich die Drehzahl zeitlich ändert, wie z. B. beim Anfahren von Motoren, so ist die Drehbewegung nicht mehr gleichförmig, und die nun zeitlich veränderliche Winkelgeschwindigkeit ist – analog zur Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung (3.15) – definiert durch

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}. \quad (3.33)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist gleich dem Differenzialquotienten des Drehwinkels nach der Zeit.

Ganz analog zur Beschleunigung (3.16) berechnet sich auch die *Winkelbeschleunigung*:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{oder mit (3.33)} \quad \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \ddot{\varphi}. \quad (3.34)$$

Die Winkelbeschleunigung ist gleich dem ersten Differenzialquotienten der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit oder gleich dem zweiten Differenzialquotienten des Drehwinkels nach der Zeit.

Einheit der Winkelbeschleunigung: $[\alpha] = 1 \text{ rad/s}^2$.

Die bei veränderlicher Drehzahl nun zusätzlich zur Radialbeschleunigung a_r vorhandene Beschleunigung in der Kreisbahn, die *Tangential-* oder *Bahnbeschleunigung* a_t , ergibt sich aus (3.34) mit $v = \omega r$ zu

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \alpha r. \quad (3.35)$$

Entsprechend zu (3.30) gilt auch hier die Vektorgleichung

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (\text{Vektor der Tangential- oder Bahnbeschleunigung}). \quad (3.36)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ der Vektor der Winkelbeschleunigung; er hat ebenso wie $\boldsymbol{\omega}$ die Richtung der Drehachse (s. Bild 3.12).

Die Größen der Kreisbewegung Drehwinkel φ , Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung α erhält man also aus den entsprechenden Größen der geradlinigen Bewegung Weglänge s , Geschwindigkeit v und Beschleunigung a einfach dadurch, dass letztere durch den Radius des Kreises dividiert werden:

$$\varphi = \frac{s}{r}; \quad \omega = \frac{v}{r}; \quad \alpha = \frac{a}{r}. \quad (3.37)$$

Ganz entsprechend gewinnt man die *Gesetze der Drehbewegung* aus denen der geradlinigen Bewegung, indem man die entsprechenden Gleichungen beiderseits durch den Radius dividiert (vgl. Tabelle 3.1).

Tabelle 3.1 Einander entsprechende Gesetze der geradlinigen Bewegung und der Drehbewegung

Geradlinige Bewegung		Drehbewegung		
Gleichförmige Bewegung ($v = \text{const}$):		Gleichförmige Drehbewegung ($\omega = \text{const}$):		
Weg	$s = vt$	Drehwinkel	$\varphi = \omega t$	(3.38)
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung ($a = \text{const}$):		Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung ($\alpha = \text{const}$):		
Weg	$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	Drehwinkel	$\varphi = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(3.39)
	$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t$		$\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0t$	(3.40)
Endgeschwindigkeit	$v = at + v_0$	Endwinkelgeschwindigkeit	$\omega = \alpha t + \omega_0$	(3.41)
	$v = \sqrt{2as + v_0^2}$		$\omega = \sqrt{2\alpha\varphi + \omega_0^2}$	(3.42)

Beispiele 3.8:

1. Der Anker eines Elektromotors soll bei einer konstanten Winkelbeschleunigung von 94 rad/s^2 aus dem Stillstand auf die Drehzahl 1800 min^{-1} gebracht werden. Berechne die Dauer des Anfahrvorgangs und die Anzahl der dazu notwendigen Umdrehungen!

Lösung: Mit $\omega_0 = 0$ folgt aus (3.41) $\omega = \alpha t$ und hieraus mit (3.29) die Beschleunigungsdauer zu $t = \omega/\alpha = 2\pi n/\alpha = 6,28 \cdot (1800/60) \text{ s}^{-1} / (94 \text{ s}^{-2}) = 2 \text{ s}$. Der Gesamtdrehwinkel während dieser Zeit beträgt nach (3.40) $\varphi = \alpha t^2/2$ und die Anzahl der Umdrehungen (mit $2\pi \text{ rad}$ als Drehwinkel für eine Umdrehung) $z = \varphi/(2\pi \text{ rad}) = \alpha t^2/(4\pi \text{ rad}) = 30$.

2. Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit $v_0 = 30 \text{ km/h}$ in eine 90° -Grad-Kurve vom Radius $R = 50 \text{ m}$ ein und beschleunigt beim Durchfahren der Kurve gleichmäßig. Die größte Radialbeschleunigung ist $a_r = 3,86 \text{ m/s}^2$. a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 verlässt es die Kurve? b) Geben Sie die Größe der maximalen Beschleunigung a an!

Lösung: a) Aus (3.31) $a_r = v_1^2/R$ folgt die Endgeschwindigkeit beim Verlassen der Kurve $v_1 = \sqrt{a_r R} = 13,89 \text{ m/s} = 50 \text{ km/h}$. b) Für die Beschleunigung in der Kreisbahn (Tangentialbeschleunigung) a_t erhält man aus (3.42) $v_1 = \sqrt{2a_t s_1 + v_0^2}$ mit der Kurvenlänge $s_1 = \pi R/2$:

$$a_t = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s_1} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{\pi R} = 0,787 \text{ m/s}^2.$$

Damit wird der Betrag der Gesamtbeschleunigung $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = 3,94 \text{ m/s}^2$.

3. Ein mit der Drehzahl 3600 min^{-1} laufender Elektromotor kommt nach dem Abschalten innerhalb von 10 s zum Stillstand. a) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung beim Auslaufen? b) Wie viel Umdrehungen führt der Motor nach dem Abschalten noch aus?

Lösung: a) Mit $n = 60 \text{ s}^{-1}$ beträgt die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 2\pi n = 377 \text{ rad/s}$, und nach $t = 10 \text{ s}$ ist $\omega = 0$. Damit folgt als Winkelbeschleunigung (Verzögerung) $\alpha = (\omega - \omega_0)/t = -37,7 \text{ rad/s}^2$. b) Der Gesamtdrehwinkel φ nach dem Abschalten folgt aus $\omega = \sqrt{2\alpha\varphi + \omega_0^2}$ mit $\omega = 0$ zu $\varphi = -\omega_0^2/(2\alpha) = 1885 \text{ rad}$. Die Umdrehungszahl ist $z = \varphi/(2\pi \text{ rad}) = 300$. Rechnet man zweckmäßigerweise mit der mittleren Drehzahl beim Auslaufen $\bar{n} = (n_1 + n_2)/2 = n/2 = 30 \text{ s}^{-1}$ (mit $n_1 = n$ und $n_2 = 0$), so folgt die Umdrehungszahl (ohne den Umweg über den Drehwinkel φ) unmittelbar aus $z = \bar{n}t$. □

3.9 Bewegung auf beliebig krummliniger Bahn

Zur Beschreibung der Bewegung eines Teilchens auf einer beliebigen Bahn *im Raum* ist es erforderlich, die Lagekoordinaten x, y, z des Bahnpunktes P , in dem sich das Teilchen momentan befindet, in Abhängigkeit von der Zeit darzustellen:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Mit der Einführung eines aus den Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ in Richtung der Koordinatenachsen gebildeten Dreibeins können diese drei Angaben zum zeitlich veränderlichen **Ortsvektor**

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{3.43}$$

zusammengefasst werden, der vom Koordinatenursprung O ausgeht und zum betrachteten Bahnpunkt zeigt (Bild 3.14a). Im Verlaufe der Bewegung des Teilchens ändern sich während des Zeitintervalls Δt dessen Koordinaten um $\Delta x, \Delta y$ und Δz , entsprechend einer Änderung des Ortsvektors \mathbf{r} um

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}.$$

Befindet sich das Teilchen zum Zeitpunkt t_1 im Bahnpunkt P_1 mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_1 , so trifft man es zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ an der Stelle P_2 mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}$. Machen wir das Zeitintervall verschwindend klein, entsprechend dem Grenzübergang von der Differenz Δt zum Differenzial dt , so liegen die beiden Bahnpunkte P_1 und P_2 äußerst dicht beieinander, und wir erhalten als **Vektor der Geschwindigkeit**

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}. \tag{3.44}$$

$\mathbf{v}(t)$ ist stets tangential zur Bahnkurve gerichtet, da das vektorielle Wegelement $d\mathbf{r}$ vom Betrage ds immer die momentane Bewegungsrichtung angibt.

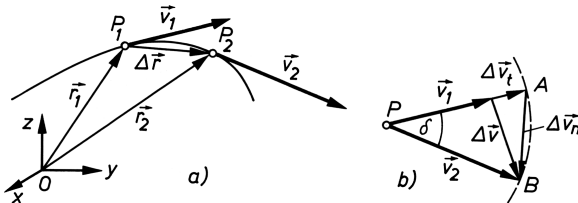


Bild 3.14 Änderung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} bei krummliniger Bewegung (a) und Zerlegung des Vektors der Geschwindigkeitsänderung $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ in eine tangentielle Komponente Δv_t und eine normale Komponente Δv_n : $\Delta \mathbf{v} = \Delta v_t + \Delta v_n$.

Zeichnet man die beiden in den benachbarten Punkten P_1 und P_2 vorhandenen Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 unter Beibehaltung ihres Betrages und ihrer Richtung so, dass sie mit ihren Anfangspunkten zusammenfallen (Bild 3.14b), so gibt der Differenzvektor $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ den Zuwachs an, den die Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt erfährt. Durch Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ (gleichbedeutend mit $\delta \rightarrow 0$, wobei δ der Winkel ist, den die beiden Geschwindigkeitsvektoren miteinander einschließen), erhält man als **Vektor der Beschleunigung**

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \tag{3.45}$$

Schlägt man, wie in Bild 3.14b, um P einen Kreisbogen AB vom Radius v_2 , so erkennt man, dass sich $\Delta \mathbf{v}$ aus zwei Komponenten zusammensetzt: $\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_t + \Delta \mathbf{v}_n$. Die Komponente $\Delta \mathbf{v}_t$ ist *tangential* zur Bahnkurve gerichtet; bezieht man sie auf das zugehörige Zeitintervall Δt , so folgt durch Grenzübergang

$$\mathbf{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t \quad (\text{Vektor der Tangentialbeschleunigung}). \quad (3.46)$$

\mathbf{e}_t ist dabei der Einheitsvektor in Tangentenrichtung. Die zweite Komponente $\Delta \mathbf{v}_n$ steht für $\delta \rightarrow 0$ senkrecht auf der Tangentenrichtung, sie hat also stets die Richtung der *Normale* zur Bahnkurve. Denkt man sich ein kurzes Stück der Bahnkurve um den betrachteten Punkt näherungsweise durch einen Kreisbogen, den sog. *Krümmungskreis*, ersetzt, so zeigt $\Delta \mathbf{v}_n$ zum Mittelpunkt des Krümmungskreises. Entsprechend der Radialbeschleunigung (3.31) bei der Kreisbewegung erhält man daher hier mit dem *Krümmungsradius* ρ und dem Einheitsvektor in Normalenrichtung \mathbf{e}_n

$$\mathbf{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (\text{Vektor der Normalbeschleunigung}). \quad (3.47)$$

Die Normalbeschleunigung bewirkt, dass das Teilchen sich nicht geradeaus bewegt, sondern eine gekrümmte Bahn durchläuft. Addiert man nun Tangential- und Normalbeschleunigung vektoriell, so erhält man

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad (\text{Vektor der resultierenden Beschleunigung}) \quad (3.48)$$

mit dem Betrag

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (3.49)$$

Zwei *Sonderfälle* lassen sich aus (3.46) und (3.47) unmittelbar ablesen: Bewegt sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit von gleich bleibendem Betrag v , aber veränderlicher Richtung, so erfährt es wegen $dv/dt = 0$ keine Tangentialbeschleunigung. Es tritt jedoch eine Normalbeschleunigung auf, die bei konstantem Krümmungsradius der Bahn eine *gleichförmige Kreisbewegung* zur Folge hat. Ist hingegen die Normalbeschleunigung gleich null, entsprechend einem unendlich großen Krümmungsradius ρ , so liegt eine *geradlinige Bewegung* vor.

Aufgabe

- 3.7 Ein Elektron, welches in ein räumlich und zeitlich konstantes Magnetfeld eingeschossen wird und eine Geschwindigkeitskomponente v_z in Richtung der magnetischen Feldlinien hat, bewegt sich infolge der LORENTZ-Kraft (vgl. 28.7) auf einer *Schraubensbahn* um die Feldlinien, welche durch

$$x(t) = r \cos \omega t, \quad y(t) = r \sin \omega t, \quad z(t) = v_z t$$

beschrieben wird. Hierbei sind r , ω und v_z konstant. Berechne den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung des Elektrons!

4

Dynamik der Punktmasse

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die für den Bewegungsablauf charakteristischen Größen eingeführt. Die Frage nach der Ursache der Bewegungen, z. B. für das Auftreten von Beschleunigungen, wurde dabei nicht gestellt. Für die Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung ist diese Fragestellung auch belanglos, denn beide Größen sind rein geometrisch-zeitlich und nicht als Wirkungen irgendwelcher Ursachen definiert. Wenn man nach den Ursachen von Beschleunigungen fragt, so gelangt man von der Kinematik zur *Dynamik*, der *Lehre von den Kräften*.

■ 4.1 Der Kraftbegriff in der Physik. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. Statisches Gleichgewicht

Im Alltag bringen wir den Begriff *Kraft* gefühlsmäßig mit einer körperlichen Anstrengung (Muskelkraft) zum Zwecke der Fortbewegung oder Verformung eines Körpers in Verbindung, oder mit dem „Gewicht“ eines Körpers, welches überhaupt als das Urbild der Kraft gelten darf (GALILEI). In Verallgemeinerung dieser Vorstellung wird in der Physik die Kraft als alleinige *Ursache für die Änderung des Bewegungszustandes* eines freien Körpers (Beschleunigung oder Abbremsung) oder für die *Änderung der äußeren Form* (Deformation) und gegebenenfalls auch der *inneren Struktur* eines festgehaltenen Körpers angesehen, ganz gleich, bei welchen Vorgängen diese Wirkungen beobachtet werden (z. B. Druck, Zug, Stoß, Schwerkraft, elektrische und magnetische Anziehung und Abstoßung usw.). Dabei kommt es mitunter vor, dass, wenn mehrere Kräfte auf einen freien Körper einwirken, diese keine Veränderungen seines Bewegungszustandes hervorrufen; die Kräfte heben sich dann in ihrer Wirkung gegenseitig auf, sie stehen untereinander im *Gleichgewicht*.

Kräfte sind durchweg eine Folge der *vier* grundsätzlich voneinander zu unterscheidenden Arten von **Wechselwirkungen** zwischen den Bausteinen der Materie, der *Gravitationswechselwirkung*, der *schwachen* Wechselwirkung, der *elektromagnetischen* und der *starken* Wechselwirkung (vgl. 50.5). So z. B. sind die Kräfte, auf denen die Festigkeit der Metalle beruht, elektromagnetischen Ursprungs und etwa 10^{40} mal (!) größer als die infolge der Schwerkraft (Gravitation) zwischen den Metallatomen wirkenden Kräfte. Die starke und schwache Wechselwirkung treten nur in der Kern- und Elementarteilchenphysik auf.

Die *Einheit der Kraft* ist das **N e w t o n** (N); sie wird in Abschnitt 4.3 definiert.

Die Kraft als vektorielle Größe. Verschiedene Kräfte können sich 1. durch ihren *Betrag*, 2. durch ihre *Richtung* (dargestellt durch einen Pfeil) und 3. durch ihren *Angriffspunkt* am Körper voneinander unterscheiden. Betrag und Richtung kennzeichnen die Kraft als Vektor. Die Gerade, auf welcher der Kraftvektor liegt, heißt *Wirkungslinie* der Kraft.

Zusammensetzen von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt. Greifen in einem Punkt mehrere Kräfte an, ist die wirkende Gesamtkraft, die sog. *Resultierende*, nach den Regeln der Vektoraddition zu berechnen (analog zur Addition von Geschwindigkeiten, vgl. 3.6). So ist die

Resultierende zweier Kräfte F_1 und F_2 gleich $F = F_1 + F_2$. Man gewinnt sie als Diagonale des aus den beiden Komponenten F_1 und F_2 gebildeten *Kräfteparallelogramms* (Bild 4.1a).

Die Resultierende zweier Kräfte fasst deren Wirkung zusammen. Sie greift im Schnittpunkt der gegebenen Kräfte an und ist nach Größe und Richtung die Diagonale durch diesen Punkt im Kräfteparallelogramm.

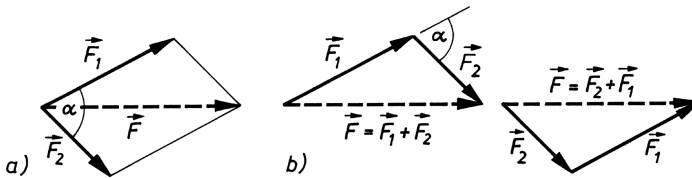


Bild 4.1 Zusammensetzung von zwei Kräften F_1 und F_2 zur Resultierenden F :
a) Kräfteparallelogramm; b) Kräfte Dreieck

Im Allgemeinen zeichnet man nur das halbe Parallelogramm, das *Kräfte Dreieck* (Bild 4.1b). Der **Betrag** der resultierenden Kraft berechnet sich mit Hilfe des Kosinussatzes $F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)$ zu

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \tag{4.1}$$

Dabei ist α der von F_1 und F_2 eingeschlossene Winkel. Ist insbesondere α ein rechter Winkel, so folgt mit $\cos 90^\circ = 0$ der Satz des PYTHAGORAS

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}. \tag{4.2}$$

Als Spezialfall ist in (4.1) auch enthalten, dass sich zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte in derselben Wirkungslinie ($F_1 = -F_2$, d. h. $F_1 = F_2$ und $\alpha = 180^\circ$) in ihrer Wirkung aufheben, die resultierende Kraft also verschwindet.

Greifen wie in Bild 4.2a in einem Punkt mehr als zwei Kräfte an, so lassen sich auch diese zu einer Resultierenden im Sinne einer *Ersatzkraft* zusammenfassen, welche nach Größe und Richtung die Wirkungen aller Teilkräfte in sich vereint. Zu ihrer Konstruktion verfährt man so, dass zunächst zwei Kräfte gemäß dem Parallelogrammsatz zu einer Resultierenden zusammengesetzt und danach dieselbe zusammen mit einer dritten Kraft nach dem gleichen Verfahren zu einer neuen Resultierenden vereinigt wird usw. Man findet jedoch sofort, dass man sich die Konstruktion der einzelnen Parallelogramme ersparen kann; es genügt, die im sog. **Lageplan** enthaltenen Einzelkräfte, wie in Bild 4.2a gezeigt,

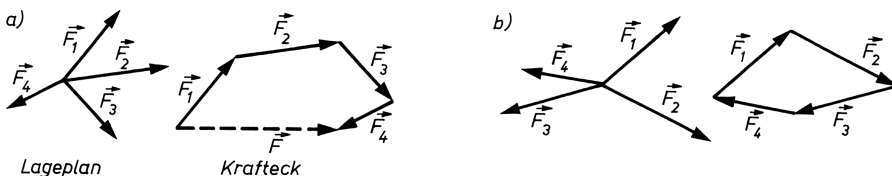


Bild 4.2 a) Ermittlung der Resultierenden F von vier Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt mittels Krafteck; b) Kräftegleichgewicht

schrittweise zum **Krafteck** zusammensetzen. Die Resultierende F weist dann vom Angriffspunkt der ersten nach dem Endpunkt der letzten Teilkraft; sie ist damit dem Umlaufungssinn des Kraftecks stets entgegengerichtet. In dem Fall, dass der Endpunkt des Kraftecks mit dem Ausgangspunkt zusammenfällt (Bild 4.2b), das Krafteck also *geschlossen* ist, ist die Resultierende gleich null, d. h., die Kräfte befinden sich im (**statischen**) **Gleichgewicht**. Die Kraftvektoren bilden dann im Krafteck einen durchgehenden Umlaufsinn.

Zerlegung einer Kraft in Komponenten. So wie mehrere Teilkräfte zu einer Kraft vereinigt werden können, ist auch die umgekehrte Aufgabe durchführbar, die Zerlegung einer Kraft F in Komponenten bezüglich beliebig vorgegebener, nichtparalleler Wirkungslinien (Bild 4.3). Man erhält das Kräfteparallelogramm und damit die Kraftkomponenten F_1 und F_2 , indem parallel zu ihren Wirkungslinien Hilfslinien gezeichnet werden, die durch die Spitze des Vektorpfeiles von F gehen.

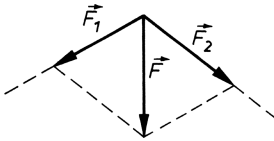


Bild 4.3 Zerlegung einer Kraft F in zwei Komponenten bezüglich vorgegebener Wirkungslinien

Beispiel 4.1:

Bei der in Bild 4.4 beschriebenen Aufgabe sind F_1 und die Wirkungslinien von F_2 und F gegeben. Damit kann das Kräfteparallelogramm gezeichnet werden, und zwar mit F_1 und F_2 als Komponenten von F in Richtung der Spannseile. Aus dem von den Kräften gebildeten Dreieck findet man $F_2 = F_1 / \cos 60^\circ = 5000 \text{ N}$ und $F = F_1 \tan 60^\circ = 4330 \text{ N}$. \square

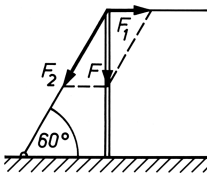


Bild 4.4 Ein senkrecht stehender Mast wird durch zwei Spannseile gehalten, von denen das waagrechte die Zugkraft $F_1 = 2500 \text{ N}$ ausübt. Mit welcher Kraft F_2 muss das schräge Seil gespannt sein, und wie groß ist die im Mast vertikal gerichtete Druckkraft F ?

Aufgabe

- 4.1 Ein Mast soll durch drei schräg verlaufende Spannseile, die mit dem Erdboden den gleichen Winkel einschließen, lotrecht gehalten werden. Die Spannkraft des ersten Seils beträgt $F_1 = 4,0 \text{ kN}$ und die des zweiten, um $\alpha_1 = 120^\circ$ gegenüber dem ersten versetzten Seils $F_2 = 3,6 \text{ kN}$. Mit welcher Kraft und unter welchem Winkel α_2 gegen das zweite Seil versetzt muss das dritte Seil gespannt sein? Löse die Aufgabe auch zeichnerisch!

■ 4.2 Das Trägheitsgesetz (1. NEWTONSches Axiom)

Die Erfahrung lehrt, dass ein auf waagrechter Unterlage ruhender Körper nicht von selbst in Bewegung gerät und dass jeder bewegte, sich selbst überlassene Körper nach einer bestimmten Zeit zur Ruhe kommt. Im ersten Fall ist die Ursache das Fehlen jeglicher äußerer Kräfte, im zweiten das Vorhandensein äußerer Kräfte, die die Bewegung hemmen (Reibungskräfte). Diese Eigenschaft der Körper, ihren Bewegungszustand niemals von selbst zu ändern, sondern

sich vielmehr einer Änderung desselben zu widersetzen, bezeichnet man als *Beharrungsvermögen* oder **Trägheit**. Für den Fall, dass alle Bewegungswiderstände fehlen, gilt das von NEWTON (1643–1727) ausgesprochene **Trägheitsgesetz** oder

1. NEWTONSches Axiom:

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn einwirkt oder die Resultierende der angreifenden Kräfte null ist.

Es gilt also für die Vektoren von Geschwindigkeit und resultierender Kraft:

$$\boldsymbol{v} = \text{const} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{F} = 0. \quad (4.3)$$

Die Unterscheidung zwischen Ruhe und geradliniger gleichförmiger Bewegung ist dabei allein eine Frage des gewählten *Bezugssystems*, von dem aus die Bewegung des Körpers beobachtet wird. Bezugssysteme, in denen das Trägheitsgesetz gilt, nennt man *Inertialsysteme* (vgl. 5.3).

Die direkte experimentelle Überprüfung des Trägheitsgesetzes ist nicht möglich, da kein Körper äußeren Einflüssen (z. B. Reibungskräften) völlig entzogen werden kann. Als Begründung für die Richtigkeit dieses Gesetzes kann aber gelten, dass alle daraus gezogenen Schlussfolgerungen durch das Experiment bestätigt werden. Eine der Schlussfolgerungen ist:

Ändert ein Körper seinen Bewegungszustand, bewegt er sich also beschleunigt oder verzögert, so ist hierfür stets eine Kraft die Ursache.

4.3 Das Grundgesetz der Dynamik (2. NEWTONSches Axiom)

Während das 1. NEWTONSche Axiom nur allgemein aussagt, dass für jede Beschleunigung eines Körpers eine Kraft die Ursache ist, definiert das 2. NEWTONSche Axiom den Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung genau. Es lautet:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad (\text{Grundgesetz der Dynamik}). \quad (4.4)$$

2. NEWTONSches Axiom:

Die Beschleunigung eines Körpers ist der auf ihn einwirkenden Kraft proportional und erfolgt in derjenigen Richtung, in der die Kraft wirkt.

In dieser quantitativen Formulierung des Trägheitsgesetzes (4.3), welche sich auf zahlreiche Erfahrungstatsachen gründet, vor allem auf die bereits von GALILEI (1564–1642) zur Fall- und Wurfbewegung erkannten Gesetze der Dynamik, ist die Größe m zunächst ein skalarer Proportionalitätsfaktor, der offenbar ein Maß für den Widerstand eines Körpers gegen Beschleunigungen, für seine *Trägheit* also, darstellt. Denn bei gegebener Kraft ist die Beschleunigung umso kleiner, je größer m ist. Die Größe m hängt demnach von der Art des beschleunigten

Körpers ab. Nach Gleichung (4.4) haben wir zwei beliebig beschaffenen Körpern immer dann den gleichen Wert von m zuzuordnen, wenn sie durch gleich große Kräfte dieselbe Beschleunigung erfahren. Man nennt die so definierte Größe m die *träge Masse* oder einfach die **Masse** des Körpers.

Die Masse kennzeichnet die Eigenschaft eines Körpers, sich der Änderung seines Bewegungszustandes zu widersetzen. Ihre Größe ist ein Maß für die Trägheit des Körpers.

Die *Einheit der Masse* ist das **Kilogramm (kg)**; neben dem Meter und der Sekunde ist sie die dritte Basiseinheit der Mechanik.

Die Darstellung der Masseneinheit erfolgt (bis 2019) mittels des *Kilogramm-Prototyps* des jeweiligen Staatsinstituts. Seine Masse ist nach den internationalen Vergleichen mit dem in Paris aufbewahrten Prototyp, einem Platin(90%)-Iridium(10%)-Zylinder, bis auf eine relative Unsicherheit von 10^{-9} bekannt; dies entspricht einem Fehler von 1 g auf 1 Million kg. 1 kg ist ziemlich genau gleich der Masse von 1 Liter ($1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$) reinen, luftfreien Wassers bei normalem Atmosphärendruck (1013 hPa) und von maximaler Dichte, d. h. bei $3,98\text{ }^\circ\text{C}$.

Die Einheit der Masse wird im *neuen SI* – wie die Längen- und die Zeiteinheit – auf atomare Eigenschaften bzw. Naturkonstanten zurückgeführt (s. Abschnitt 2.3). Im Bereich der Atome und Elementarteilchen wird die *atomare Masseneinheit* (u) verwendet, welche gleich dem 12. Teil der Masse des Kohlenstoffisotops ^{12}C ist (vgl. 18.1).

Mit der Masse als Basisgröße wird nach (4.4) die Kraft zu einer abgeleiteten Größe. Dies gilt demzufolge auch für die

$$\text{Einheit der Kraft: } [F] = 1\text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = 1\text{ N e w t o n (N)}.$$

1 N ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung $1\text{ m}/\text{s}^2$ erteilt.

Aus Gleichung (4.4) geht hervor, dass eine *konstante Kraft* bei unveränderlicher Masse eine konstante Beschleunigung, d. h. also eine *gleichmäßig beschleunigte Bewegung* hervorruft. Bekanntestes Beispiel hierfür ist der freie Fall mit der (über kleine Höhenunterschiede) konstanten Fallbeschleunigung g . Für $F = 0$ folgt $a = 0$, d. h. $v = \text{const}$, entsprechend einer *geradlinigen gleichförmigen Bewegung* bzw. dem Zustand der *Ruhe*. Dies ist wieder das Trägheitsgesetz (4.3).

Eine quantitative Überprüfung des Grundgesetzes (4.4) kann mit Hilfe der ATWOODSchen Fallmaschine erfolgen (vgl. das Rechenbeispiel im nächsten Abschnitt). Eine andere Formulierung des Grundgesetzes, die der ursprünglichen NEWTONSchen Fassung entspricht, werden wir in Abschnitt 4.5 kennen lernen.

■ 4.4 Träge und schwere Masse. Gewichtskraft. Radialkraft

Die Masse eines Körpers kennzeichnet nicht nur dessen **Trägheit**, sondern auch dessen **Schwere**. Letztere beruht auf der Eigenschaft der Körper, sich wechselseitig anzuziehen (*Gravitation*). Die Kraft, mit der ein im Schwerfeld der Erde an einem Faden aufgehängter Körper den Faden spannt, heißt **Gewichtskraft** G des Körpers. Sie kann statisch mit Hilfe eines

zwischen Körper und Aufhängung geschalteten Federkraftmessers (*Dynamometer*, Bild 4.5) gemessen werden. Schneidet man den Faden durch, so bewegt sich der Körper, frei fallend, mit der gleich bleibenden Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Die Kraft, die ihn beschleunigt und die vorher den Faden spannte, bestimmt sich analog dem Grundgesetz (4.4) zu

$$G = mg \quad (\text{Gewichtskraft}). \quad (4.5)$$

Die in dieser Gleichung vorkommende, aus der Gewichtskraft ermittelte Masse des Körpers wird als *schwere* Masse (m_s) bezeichnet, im Unterschied zu der in einem Beschleunigungsexperiment nach Gleichung (4.4) bestimmten *trägen* Masse $m_t = F/a$. Durch Präzisionsmessungen konnte die *Gleichheit von träger und schwerer Masse* nachgewiesen werden (vgl. 43.4). Diese Tatsache bildet in Form des *Äquivalenzprinzips* die experimentelle Grundlage für die von EINSTEIN 1915 aufgestellte *allgemeine Relativitätstheorie* (s. 22.4).

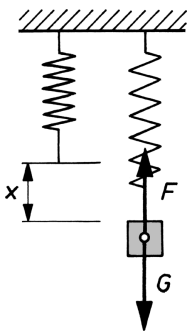


Bild 4.5 Federkraftmesser (*Dynamometer*). Die Auslenkung x der Schraubenfeder ist der an ihr angreifenden Kraft (hier der Gewichtskraft G des angehängten Körpers) proportional: $G = kx$ (k Federkonstante). Für die rücktreibende Federkraft F gilt aus Gleichgewichtsgründen $F + G = 0$ bzw. $F = -G = -kx$. Die Bestimmung von k erfolgt durch Messung von x_1 für eine bekannte Gewichtskraft G_1 : $k = G_1/x_1$ (Eichung).

Die Bestimmung von Massen geschieht durch *Wägung*, d. h., die Masse eines Körpers wird durch Vergleich seiner Gewichtskraft mit der eines Massennormals ermittelt (Hebel- oder Balkenwaage).

Die Dichte. Unter der *Massendichte* (oder einfach *Dichte*) ρ eines festen, flüssigen oder gasförmigen Stoffes versteht man den Quotienten aus der Masse einer bestimmten Stoffportion und dem von ihr eingenommenen Volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad \text{Einheit: } [\rho] = 1 \text{ kg/m}^3. \quad (4.6)$$

Beispielsweise beträgt die Dichte von Luft bei 0°C und normalem Luftdruck $\rho = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Um bei festen und flüssigen Stoffen mit ihren gegenüber Gasen wesentlich höheren Dichtewerten zu handlichen Zahlen zu kommen, rechnet man bei diesen meist in den gebräuchlichen Dichteeinheiten

$$[\rho] = 1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1 \text{ t/m}^3;$$

z. B. für Wasser ≈ 1 ; Quecksilber 13,6; Gold 19,3; Materie in der Nähe des Mittelpunkts der Sonne 100; Kernmaterie $2 \cdot 10^{14}$ (!); demgegenüber: das beste vom Menschen erzeugte Vakuum 10^{-19} g/cm^3 . Zu *Methoden der Dichtebestimmung* vgl. 14.2.

Die Radialkraft. Um einen Körper auf einer Kreisbahn vom Radius r zu halten, ist die Radialbeschleunigung (3.32) $\mathbf{a}_r = -\omega^2 \mathbf{r}$ vom Betrage $a_r = \omega^2 r = v^2/r$ erforderlich. Ihr entspricht nach dem Grundgesetz (4.4) eine zum Kreismittelpunkt gerichtete Kraft, die **Radialkraft** oder **Zentripetalkraft**

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r = -m\omega^2 \mathbf{r}, \quad \text{Betrag } F_r = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}. \quad (4.7)$$

Beispiel 4.2:

Wie groß sind die Beschleunigungen der Massen der in Bild 4.6a,b dargestellten Anordnungen? Gegeben sind für Anordnung a): $m_1 = 1,0\text{kg}$, $m_2 = 3,0\text{kg}$, und für die als ATWOODSche Fallmaschine bekannte Anordnung b): $m_1 = M$ und $m_2 = M + M'$, wobei M' eine auflegbare Zusatzmasse zu M ist. Massen der Rollen und der Seile sowie Reibung werden vernachlässigt.

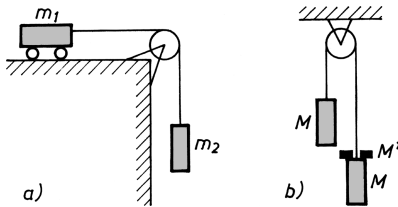


Bild 4.6 Versuche zum Grundgesetz der Dynamik. Rechts: ATWOODSche Fallmaschine

Lösung: Die gesamte in Bewegung versetzte Masse ist bei beiden Anordnungen $m = m_1 + m_2$. Die beschleunigende Kraft F ist bei a) die Gewichtskraft m_2g , bei b) die Differenz der Gewichtskräfte beider Massen $(m_2 - m_1)g = M'g$. Aus dem Grundgesetz (4.4) erhält man damit für Anordnung a) die Beschleunigung $a = F/m = m_2g/(m_1 + m_2) = 7,36\text{m/s}^2$ und für Anordnung b) die Beschleunigung $a = M'g/(2M + M')$. Es tritt also in beiden Fällen eine konstante Beschleunigung auf, welche auch experimentell festgestellt wird, wenn man z. B. die von den Massen zurückgelegten Wegstrecken s als Funktion der Zeit t misst und daraus nach (3.7) die Beschleunigung $a = 2s/t^2$ ermittelt.

Für die ATWOODSche Fallmaschine b) findet man also nach obiger Rechnung einerseits $a \sim M'g$, andererseits $a \sim 1/(2M + M')$, wie man durch Veränderung der Massen M und M' auch experimentell zeigen kann. Das heißt, die Beschleunigung ist der wirkenden Kraft $F = M'g$ proportional und der zu beschleunigenden Masse $m = 2M + M'$ umgekehrt proportional, wie es das Grundgesetz (4.4) fordert. \square

Aufgabe

4.2 Siehe Bild 4.7.

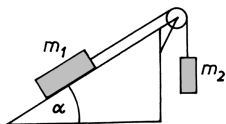


Bild 4.7 Die Masse m_1 gleitet reibungsfrei auf der schiefen Ebene ($m_1 = 1,0\text{kg}$; $\alpha = 30^\circ$).

- Wie groß muss m_2 sein, um m_1 das Gleichgewicht zu halten?
- Wie groß ist die Beschleunigung der Bewegung für den Fall, dass $m_1 = m_2$ ist?

■ 4.5 Kraftstoß. Impuls (Bewegungsgröße)

Der Geschwindigkeitszuwachs, den ein Körper durch eine angreifende Kraft erfährt, hängt nicht nur von der Größe der Kraft selbst, sondern auch von der Zeitdauer Δt ihrer Einwirkung, d. h. also vom Wert des Produktes $F \Delta t$, ab. Man nennt dieses Produkt den **Kraftstoß**. Ist während der Zeitdauer Δt der Betrag der Kraft konstant, so stellt sich der Kraftstoß als Fläche unter dem Rechteck im *Kraft-Zeit-Diagramm* (Bild 4.8a) dar, welches den zeitlichen Verlauf der Kraftübertragung auf den Körper veranschaulicht. Eine solche Art der Kraftübertragung, bei der die Kraft *momentan* ihren Maximalwert annimmt und danach ebenso plötzlich wieder

auf null abfällt, ist allerdings äußerst selten. Vielmehr hat man es meist mit einem Verlauf zu tun, wie ihn Bild 4.8b zeigt, nämlich einem allmählichen, mehr oder weniger steilen Anstieg und einem ebensolchen Abfall. Der Kraftstoß berechnet sich dann durch das *Zeitintegral der Kraft* $\int F dt$.

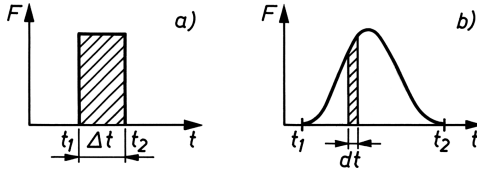


Bild 4.8 Kraftstoß bei zeitlich konstanter Kraft (a) und zeitlich veränderlicher Kraft (b)

Der so definierte Kraftstoß steht in engem Zusammenhang mit einer anderen physikalisch bedeutsamen Größe, welche durch das Produkt aus der Masse m und dem Vektor der Geschwindigkeit \mathbf{v} des Körpers gegeben ist und **Impuls** oder **Bewegungsgröße** genannt wird:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \text{Einheit: } [p] = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}. \quad (4.8)$$

Mit ihr lässt sich das Grundgesetz der Dynamik (4.4) wie folgt formulieren:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (4.9)$$

Die zeitliche Änderung des Impulsvektors ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in der Richtung, in der jene Kraft angreift.

Dies ist die ursprüngliche NEWTONSche Fassung des Grundgesetzes. Sie geht in der Aussage wesentlich weiter als Gleichung (4.4) $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Nach (4.9) ist $\mathbf{F} = m(d\mathbf{v}/dt) + (dm/dt)\mathbf{v} = m\mathbf{a} + \dot{m}\mathbf{v}$, woraus hervorgeht, dass nur für *zeitlich unveränderliche Masse* ($\dot{m} = 0$) die vorstehende Gleichung (4.4) gilt, während in (4.9) die Masse nicht konstant zu sein braucht, was z. B. bei Raketen (vgl. Abschnitt 9.3) und nach der Relativitätstheorie bei Geschwindigkeiten, die der Lichtgeschwindigkeit nahe kommen, der Fall ist.

Grundgesetz bei veränderlicher Masse. Findet zwischen einem Körper und seiner Umgebung ein Massenaustausch statt (z. B. *Rakete* während der Antriebsphase), so ist in (4.9) $d\mathbf{p}/dt$ als zeitliche Impulsänderung des Gesamtsystems aller beteiligten Massen (z. B. Rakete und abgestoßene Treibstoffgase) aufzufassen. Von einem Körper mit dem momentanen Impuls $m\mathbf{v}$ wird die infinitesimale Masse dm mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}' abgestoßen, wobei \mathbf{v}' im gleichen Bezugssystem wie die Körpergeschwindigkeit \mathbf{v} , z. B. gegenüber der Erde, definiert ist. Der Gesamtimpuls von Körper und abgestoßener Masse beträgt anschließend $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{v}' dm'$ (im Beispiel der Rakete ist $dm < 0$). Der erste Term stellt den Impuls des Körpers selbst nach dem Abstoßen von dm dar, wobei sich die Masse des Körpers um dm und seine Geschwindigkeit um $d\mathbf{v}$ geändert hat. Der zweite Term stellt den von der abgestoßenen Masse dm' mitgeführten Impuls $\mathbf{v}' dm'$ dar, für den wegen $dm' = -dm$ (Erhaltung der Gesamtmasse) $\mathbf{v}' dm' = -\mathbf{v}' dm$ gilt. Die gesamte Impulsänderung ist also $d\mathbf{p} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \mathbf{v}' dm - m\mathbf{v} = m d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}') dm + dm d\mathbf{v}$. Das letzte Glied kann als infinitesimale Größe zweiter Ordnung weggelassen werden, so dass die zeitliche Impulsänderung $d\mathbf{p}/dt = m d\mathbf{v}/dt + (dm/dt)(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ beträgt. Nach (4.9) gilt daher

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{v}'. \quad (4.10)$$

Zum Beispiel gilt für eine mit der momentanen Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$ senkrecht nach oben steigende Rakete $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ und $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = c\mathbf{k}$, wobei c die Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase relativ zur Rakete und \mathbf{k} der senkrecht nach oben zeigende Einheitsvektor ist. Für die Masse ist zu setzen $m = m_0 - \dot{m}t$, wobei m_0 die Anfangsmasse und \dot{m} der sekundliche Massenausstoß ist. Analoges gilt für das *Ausströmen einer Flüssigkeit* aus einem fahrbaren Behälter. Hingegen gilt für das *Ausfließen nach unten* (Loch im Tankwagen) $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ (s. Beispiel 4.3). Für das *Zufließen von oben* (Betanken in der Luft) gilt ebenfalls $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, jedoch mit $m = m_0 + \dot{m}t$. Wenn die aus- oder hinzutretenden Massenelemente die Geschwindigkeit null haben und daher keinen Impuls mit sich führen, ist $\mathbf{v}' = 0$ zu setzen. Letzteres gilt auch bei der relativistischen Massenveränderlichkeit (vgl. 6.3). Durch Integration der so entstehenden speziellen Bewegungsgleichung (4.10) erhält man das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz der Bewegung $v = v(t)$ und mit $ds = v(t)dt$ nach nochmaliger Integration das Weg-Zeit-Gesetz $s = s(t)$; vgl. dazu die Herleitung der *Raketengleichung* in Abschnitt 9.3.

Der Kraftstoß. Hat ein Körper zu Beginn der Krafteinwirkung (Zeitpunkt t_1) die Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 und am Ende der Krafteinwirkung (Zeitpunkt t_2) die Geschwindigkeit \mathbf{v}_2 , so folgt durch einfache Umformung des Grundgesetzes (4.9) für gleich bleibende Masse m :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} d(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = m\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{p} \quad (4.11)$$

und bei konstanter Kraft

$$\mathbf{F}\Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{p} \quad (\text{Kraftstoß}). \quad (4.12)$$

Der Kraftstoß ist gleich der durch ihn am Körper bewirkten Änderung des Impulses.

Bei fehlenden äußeren Kräften ist nach (4.9) $d\mathbf{p}/dt = 0$, d. h., der Impuls bleibt nach Größe und Richtung konstant (*Impulserhaltungssatz*, vgl. 9.1). Bei konstanter Masse ist diese Aussage gleichbedeutend mit dem Trägheitsgesetz (4.3).

Beispiel 4.3:

Ein Tankfahrzeug mit der Anfangsmasse $m_0 = 10\text{ t}$, welches (nach Abzug aller Reibungs- und Fahrwiderstände) durch eine konstante Kraft $F_0 = 500\text{ N}$ angetrieben wird und bei der Geschwindigkeit null startet, verliert stetig an Flüssigkeit (Loch im Boden des Tankwagens). Der zeitlich konstante und mit Beginn der Bewegung einsetzende Masseverlust beträgt $\mu = 15\text{ kg/s}$. Welche Geschwindigkeit hat das Fahrzeug nach $t_1 = 5\text{ min}$ Fahrt?

Lösung: Nach (4.10) und mit $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ gilt das Bewegungsgesetz $F = ma = m(dv/dt)$, woraus mit $F = F_0 = \text{const}$ und $m(t) = m_0 - \mu t$ ($dm = -\mu dt$) für die Geschwindigkeit v_1 nach der Zeit t_1 folgt:

$$v_1 = \int_0^{t_1} a(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{F_0 dt}{m(t)} = -\frac{F_0}{\mu} \int_{m_0}^{m_1} \frac{dm}{m} = -\frac{F_0}{\mu} [\ln m]_{m_0}^{m_1} = \frac{F_0}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t_1}.$$

Mit $t_1 = 300\text{ s}$ wird $v_1 = 19,9\text{ m/s} = 71,7\text{ km/h}$. □

Aufgabe

4.3 Ein Pkw der Masse $m = 1\text{ t}$ fährt mit der Geschwindigkeit $v_1 = 86\text{ km/h}$. Infolge Geschwindigkeitsbegrenzung wird der Wagen 8 s lang gebremst und hat anschließend die Geschwindigkeit $v_2 = 50\text{ km/h}$. Wie groß ist die Bremskraft, wenn angenommen wird, dass diese während des gesamten Bremsvorganges konstant ist?

■ 4.6 Lösung der Bewegungsgleichung für konstante Kraft. Die Wurfbewegung

Das NEWTONsche Grundgesetz der Dynamik (4.9) beschreibt den Zusammenhang zwischen der an einem Körper angreifenden Kraft und dem Zeitablauf der durch sie hervorgerufenen Bewegung des Körpers in Form einer *Differenzialgleichung*, der sog. **Bewegungsgleichung**. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Bahn einer Punktmasse für ein bestimmtes Zeitintervall exakt berechnen, wenn die **Anfangsbedingungen**, gegeben durch *Ort* und *Impuls* (bzw. Geschwindigkeit), für einen beliebigen Zeitpunkt t_0 aus diesem Intervall sowie die wirkenden Kräfte für das gesamte Zeitintervall genau bekannt sind. Das bedeutet, dass bei Kenntnis der Kräfte und Anfangsbedingungen jeder frühere oder spätere Zustand eines Körpers angegeben werden kann (*Ursache-Wirkung- oder Kausalzusammenhang der klassischen Mechanik*).

Unter Voraussetzung konstanter Masse lautet die Bewegungsgleichung (4.9)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{oder mit (3.45)} \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (4.13)$$

Sie kann durch zweimalige Integration über die Zeit gelöst werden. Es folgt zunächst für die Geschwindigkeit *bei konstanter Kraft*

$$d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m} dt, \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{F}}{m} \int dt = \frac{\mathbf{F}}{m} t + \mathbf{v}_0. \quad (4.14)$$

Dabei ist \mathbf{v}_0 eine Integrationskonstante. Ihre physikalische Bedeutung erkennt man, wenn in (4.14) $t = t_0 = 0$ gesetzt wird; es entsteht $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, d. h., \mathbf{v}_0 ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$, die für die Bewegung willkürlich vorgegeben werden kann. Wird nun in (4.14) $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$ gesetzt und nochmals über t integriert, so folgt schließlich für den *Ortsvektor der Bahnkurve*

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2m} \mathbf{F} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (4.15)$$

Dabei sind alle Integrationskonstanten in \mathbf{r}_0 zusammengefasst. Aus (4.15) folgt $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, entsprechend dem Ortsvektor des Teilchens zur Zeit $t = 0$. $\mathbf{v}_0 = 0$ und $\mathbf{r}_0 = 0$ bedeutet, dass die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ im Nullpunkt des gewählten Koordinatensystems mit der Anfangsgeschwindigkeit null beginnt.

Ist nun z. B. \mathbf{F} die **Schwerkraft** und wird das Koordinatensystem so orientiert, dass die z -Achse mit dem Einheitsvektor \mathbf{k} senkrecht nach oben zeigt, dann gilt

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -m\mathbf{g}\mathbf{k} \quad (4.16)$$

mit $\mathbf{g} = -\mathbf{g}\mathbf{k}$ als Vektor der Fallbeschleunigung. Aus (4.15) folgt damit

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (4.17)$$

Greift also an der Punktmasse eine nach Größe und Richtung konstante Kraft an, so beschreibt der zur Punktmasse zeigende Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eine Bahnkurve, die sich im allgemeinen Falle aus der Überlagerung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in Richtung der Kraft und einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 ergibt. Eine

solche finden wir z. B. beim **schiefen Wurf** vor (s. Bild 4.9a; dort ist $\mathbf{r}_0 = 0$). Durch Wahl der Anfangswerte für Ort und Impuls (bzw. Geschwindigkeit) ist nun, wie im Folgenden gezeigt, eine Spezialisierung der Bewegung möglich.

Der senkrechte Wurf. Setzt man z. B. in Gleichung (4.17) als Anfangswerte

$$\mathbf{r}_0 = z_0 \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{k},$$

was bedeutet, dass die Bewegung nur in der z -Richtung, d. h. senkrecht zur Erdoberfläche, erfolgt und in der Höhe z_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 beginnt, so folgt in Komponentendarstellung des Ortsvektors (4.17) bezüglich der x -, y - und z -Achse:

$$x(t) = y(t) = 0, \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0. \tag{4.18}$$

Diese Gleichungen beschreiben für $v_0 > 0$ den senkrechten Wurf nach oben, für $v_0 < 0$ den senkrechten Wurf nach unten und für $v_0 = 0$ den freien Fall aus der Höhe z_0 mit der Fallhöhe $h = z(t) - z_0$; vgl. (3.9).

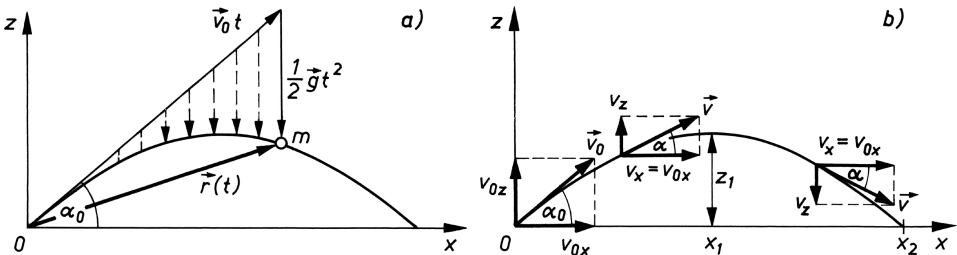


Bild 4.9 Schiefer Wurf als Überlagerung einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung und einer (gleichmäßig beschleunigten) Fallbewegung: a) Darstellung des Ortsvektors der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$; b) Komponenten des Geschwindigkeitsvektors für $t = 0$ und für zwei beliebig spätere Zeitpunkte

Der schiefe Wurf. Die Anfangswerte in Gleichung (4.17)

$$\mathbf{r}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0 = v_{0x} \mathbf{i} + v_{0z} \mathbf{k}$$

kennzeichnen eine Bewegung, die im Koordinatenursprung beginnt und deren Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 je eine Komponente senkrecht (v_{0z}) und tangential (v_{0x}) zur Erdoberfläche besitzt. Es handelt sich um den *schiefen Wurf* (Bild 4.9). Man entnimmt Bild 4.9b

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha_0,$$

womit unter Beachtung obiger Anfangswerte aus (4.17) für die Komponenten des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ der in der x, z -Ebene ablaufenden Bewegung folgt

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha_0, \quad z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha_0 \quad \text{\textbf{(Weg-Zeit-Gesetze des schiefen Wurfs)}} \tag{4.19}$$

und hieraus durch Zeitableitung als Horizontal- und Vertikalkomponente des Geschwindigkeitsvektors

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 = v_{0x}, \quad v_z = -gt + v_0 \sin \alpha_0 = -gt + v_{0z}. \tag{4.20}$$

Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors \boldsymbol{v} zu einem beliebigen Zeitpunkt t , welche stets mit der Richtung der Tangente an die Bahnkurve zusammenfällt (Bild 4.9b), erhält man aus $\tan \alpha = v_z/v_x$, sein Betrag ist $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$. Die Gleichung der Bahnkurve ist eine *Parabel*. Man erhält sie durch Elimination der Zeit t aus den beiden Gleichungen (4.19), indem man die Gleichung $x = x(t)$ nach t umstellt und diesen Ausdruck anschließend in $z = z(t)$ einsetzt:

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 + x \tan \alpha_0 \quad (\text{Gleichung der Wurfparabel}). \quad (4.21)$$

Aus ihr lassen sich die maximale Höhe der Flugbahn, die *Wurfhöhe* z_1 , und die *Wurfweite* x_2 berechnen. Das Parabelmaximum ergibt sich aus der Bedingung $dz/dx = 0$ an der Stelle

$$x_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0.$$

Dies in (4.21) eingesetzt, ergibt den Scheitelwert

$$z_1 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0 \quad (\text{Wurfhöhe}). \quad (4.22)$$

Als Schnittpunkt der Wurfparabel mit der x -Achse, d. h. für $z = 0$ in Gleichung (4.21), erhält man

$$x_2 = 2x_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0 \quad (\text{Wurfweite}). \quad (4.23)$$

Die größte Wurfweite wird (Abwurf- und Auftreffpunkt liegen hier in derselben Höhe $z = 0$) für $\sin 2\alpha_0 = 1$, d. h. $\alpha_0 = 45^\circ$, erreicht. Für jede Wurfweite kleiner als v_0^2/g gibt es wegen $\sin 2\alpha_0 = \sin(180^\circ - 2\alpha_0)$ zwei Winkel, mit denen diese Weite erreicht wird, nämlich α_0 und $90^\circ - \alpha_0$.

Bei Abwurfinkeln, die sich zu 90° ergänzen, sind die Wurfweiten gleich.

Berücksichtigt man den Luftwiderstand, so ergeben sich Abweichungen von der Wurfparabel. Die dabei mit geringeren Reichweiten durchlaufenen Flugbahnen heißen *ballistische Kurven*.

Der horizontale Wurf. Die zugehörigen Gleichungen ergeben sich unmittelbar aus denen des schiefen Wurfs für $\alpha_0 = 0^\circ$. Man erhält als Koordinaten der Bahnkurve aus (4.19) $x = v_0 t$, $z = -gt^2/2$ und als Geschwindigkeitskomponenten in x - und z -Richtung nach (4.20) $v_x = v_0$ und $v_z = -gt$. Wie man sieht, hängt v_z nicht von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab; *der Körper durchfällt also beim horizontalen Wurf in der gleichen Zeit dieselbe Höhe, wie sie auch im freien Fall zurückgelegt wird* (Bild 4.10). Die Wurfparabel wird durch die Gleichung $z = -[g/(2v_0^2)]x^2$ beschrieben.

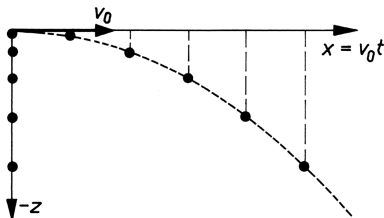


Bild 4.10 Horizontaler Wurf: Positionen eines geworfenen und eines frei fallenden Körpers in aufeinander folgenden gleichen Zeitintervallen

Beispiel 4.4:

Ein Körper fliegt mit konstanter Geschwindigkeit $v_1 = 720 \text{ km/h}$ horizontal in einer Höhe von $H = 6000 \text{ m}$. Ein anderer Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel $\alpha_0 = 60^\circ$ in dem Augenblick abgefeuert, wo sich beide Körper genau übereinander befinden. Geschoss und Flugkörper sollen sich treffen ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$; kein Luftwiderstand). Berechne v_0 und die Zeit t_1 , die das Geschoss auf seiner Bahn benötigt, um den Flugkörper zu erreichen!

Lösung: Für $t = t_1$ müssen die Bahnkoordinaten beider Körper übereinstimmen. Nach (4.19) ist also $x_1 = v_1 t_1 = v_0 t_1 \cos 60^\circ = v_0 t_1 / 2$, d. h. $v_0 = 2v_1 = 400 \text{ m/s}$, und $z_1 = v_0 t_1 \sin 60^\circ - g t_1^2 / 2 = v_1 t_1 \sqrt{3} - g t_1^2 / 2 = H$. Die Lösung dieser quadratischen Gleichung für t_1 ergibt $t_1 = v_1 \sqrt{3} / g \pm (1/g) \sqrt{3v_1^2 - 2gH} = 34,6 \text{ s}$. Warum gibt es hier nur eine Lösung? \square

Aufgabe

- 4.4 a) Unter welchem Winkel muss ein Geschoss mit $v_0 = 100 \text{ m/s}$ abgefeuert werden, wenn das Ziel 1 km entfernt und 50 m unter dem Höhengniveau des Abschusspunktes liegt? Stelle zunächst eine allgemeine Beziehung für α_0 bei vorgegebenen Zielkoordinaten (x, z) auf! – *Hinweis:* Benutze die Umformung $1/\cos^2 \alpha_0 = 1 + \tan^2 \alpha_0$!
- b) Nach welcher Zeit, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel wird der Zielpunkt erreicht? Luftwiderstand wird vernachlässigt.

■ 4.7 Das Wechselwirkungsgesetz (3. NEWTONSches Axiom)

Untersucht man die verschiedenen Kraftwirkungen näher, so erkennt man, dass immer mindestens zwei Körper an ihnen beteiligt sind. Man sagt: Die beiden Körper stehen miteinander *in Wechselwirkung*. Die Kraft stellt dabei jeweils nur eine einseitige Wirkung dar, sie kann gewissermaßen als die eine Hälfte der Wechselwirkung betrachtet werden. Auf dieser Erkenntnis beruht das 3. NEWTONSche Axiom, bekannt als **Wechselwirkungsgesetz** bzw. als **Gegenwirkungsprinzip**.

3. NEWTONSches Axiom:

Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte (Wirkung und Gegenwirkung) sind gleich groß und einander entgegengerichtet.

Ist F_{12} die vom ersten Körper auf den zweiten ausgeübte Kraft und F_{21} die Rückwirkung des zweiten Körpers auf den ersten, so gilt demnach

$$F_{12} = -F_{21} \quad \text{oder} \quad F_{12} + F_{21} = 0. \quad (4.24)$$

Kraft und Gegenkraft halten sich stets das Gleichgewicht. So übt ein auf einer Tischplatte ruhender Körper auf diese durch sein Gewicht eine senkrecht nach unten gerichtete Kraft aus, die jedoch den Körper nicht in Bewegung zu setzen vermag, da die Unterlage mit einer gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft auf ihn zurückwirkt, so dass die angreifende Gesamtkraft gemäß (4.24) gleich null ist. Derartige, von einer festen Unterlage ausgehenden Gegenkräfte nennt man **Reaktions- oder Zwangskräfte**. Da sie bei jeder unnachgiebigen Führung (z. B. Eisenbahnschiene, Gleit- oder Fahrbahnen, Radlager) auftreten, werden sie auch

als **Führungskräfte** bezeichnet. Die Führungskraft verschwindet sofort, wenn die von dem betreffenden Körper selbst gegen die Führung ausgeübte Belastungskraft oder **eingeprägte Kraft** wegfällt.

Das Gegenwirkungsprinzip gilt nicht nur für den Fall zweier unmittelbar aneinander grenzender Körper bzw. Teile von Körpern, sondern auch für die durch *Felder* hervorgerufenen Krafteinwirkungen zwischen entfernten Körpern, wie die elektrische und magnetische Anziehung und Abstoßung oder die Gravitationskräfte zwischen den Himmelskörpern, wobei allerdings bei weit voneinander entfernten Körpern wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kraftwirkungen die Gegenwirkung erst später einsetzt als die Wirkung (vgl. 6.1 und 22.1).

Beispiele 4.5:

1. Wie groß ist in der in Bild 4.6b gezeigten Rollenordnung die Spannkraft des Seils, wenn die beiderseits der Rolle hängenden Körper gleiche Masse haben?

Lösung: Die Spannkraft ist durch die Gewichtskraft nur *eines* Körpers gegeben; denn der jeweils andere Körper liefert durch sein Gewicht lediglich die Gegenkraft, die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erforderlich ist.

2. Was geschieht, wenn an dem einen Seilende in Bild 4.6b ein Mann von gleicher Masse wie die des Körpers am anderen Seilende hängt, der sich mit der Geschwindigkeit v am Seil hochzieht? (System anfänglich in Ruhe).

Lösung: Beide, Mann und Körper, bewegen sich gleichzeitig mit $v/2$ nach oben. □

■ 4.8 Reibungskräfte

Haftreibung (Reibung der Ruhe). Wenn zwei Körper gegeneinander bewegt werden, tritt erfahrungsgemäß immer ein Widerstand auf. Versuchen wir z. B. einen auf einer Tischplatte liegenden quaderförmigen Holzklotz durch eine horizontal angreifende Kraft F zu verschieben (Bild 4.11), so stellen wir fest, dass dies erst beim Erreichen einer bestimmten Größe der Kraft gelingt, während bei Aufwendung kleinerer Kräfte die Ruhelage nicht gestört wird. Das liegt daran, dass bei kleineren Kräften die Bewegung durch die zwischen den beiden festen Körpern (Tischplatte und Holzklotz) auftretende *Reibung* verhindert wird, indem die Kraft F durch eine *ihr entgegengesetzt gerichtete, gleich große Reibungskraft* $F_R = -F$ kompensiert wird. Erst wenn F den zwischen den Körpern maximal übertragbaren Reibungswiderstand übersteigt, beginnt der Körper zu rutschen. Diesen kritischen Wert der Reibungskraft nennt man **Haftreibungskraft** F_{RH} . Durch das Verhältnis von F_{RH} zu der senkrecht zur Kontaktfläche der Körper wirkenden Normalkraft F_N (Bild 4.11) wird die *Haftreibungszahl* μ_0 definiert:

$$\mu_0 = \frac{F_{RH}}{F_N} \quad (\text{Haftreibungszahl}). \quad (4.25)$$

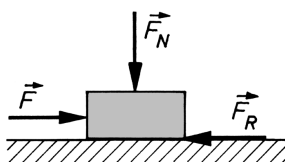


Bild 4.11 Zur Erklärung der Reibung zwischen festen Körpern (F_R Reibungskraft, F_N Normalkraft)

Bei Kenntnis von μ_0 folgt für den Betrag der Haftreibungskraft

$$F_{RH} = \mu_0 F_N \quad (\text{COULOMBSches Reibungsgesetz}). \quad (4.26)$$

Im Falle von Bild 4.11 ist die Normalkraft F_N gleich der Gewichtskraft G des Körpers. Liegt hingegen der Holzquader wie in Bild 4.12 auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α , so beträgt die Normalkraft $F_N = G \cos \alpha$. Außer ihr greift dann aber am Körper noch die Hangabtriebskraft $G \sin \alpha$ an. Benutzt man eine Vorrichtung mit verstellbarem Neigungswinkel α und vergrößert diesen allmählich bis zum kritischen Wert $\alpha = \varrho_0$, bei dem der Quader zu rutschen beginnt, so ist jetzt die Hangabtriebskraft gerade gleich der Haftreibungskraft F_{RH} , und es gilt nach Gleichung (4.26) $G \sin \varrho_0 = \mu_0 G \cos \varrho_0$, woraus für die Haftreibungszahl folgt

$$\mu_0 = \tan \varrho_0. \quad (4.27)$$

ϱ_0 nennt man den *Reibungswinkel*. Hieraus geht hervor, wie auch experimentell für die meisten trockenen Oberflächen nachgewiesen wurde:

Die Haftreibungszahl μ_0 ist unabhängig von der Normalkraft F_N und von der Größe der Berührungsfläche zwischen den Körpern.

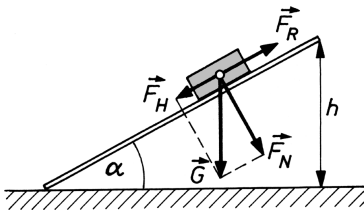


Bild 4.12 Reibung auf der schiefen Ebene

Wenn man also in dem Abgleitexperiment auf der schiefen Ebene den Holzklötz statt auf die breite Seite hochkant auf die schmale Seite stellt, erhält man für μ_0 das gleiche Ergebnis. μ_0 hängt von den sich berührenden Materialien und von zahlreichen anderen Einflussfaktoren wie Temperatur, Oberflächenbeschaffenheit, Schmierung usw. ab. Eine Werteübersicht gibt die Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1 Haftreibungszahlen μ_0 und Gleitreibungszahlen μ für einige Stoffpaarungen

Stoffpaarung	μ_0		μ	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Stahl auf Eis	0,027	–	0,014	–
Stahl auf Stahl	0,15	0,11	0,12	0,05
Holz auf Holz	0,4 ... 0,6	0,16	0,2 ... 0,4	0,08
Holz auf Metall	0,6 ... 0,7	0,11	0,4 ... 0,5	0,10
Leder auf Metall	0,3 ... 0,5	0,16	0,3	0,15
Gummi auf Asphalt	0,7 ... 0,8	–	0,5 ... 0,6	–

Gleitreibung (Reibung der Bewegung). Wenn nach Überschreiten der Haftreibungskraft der Körper einmal gleitet, bedarf es zur Aufrechterhaltung seiner Bewegung im Allgemeinen einer