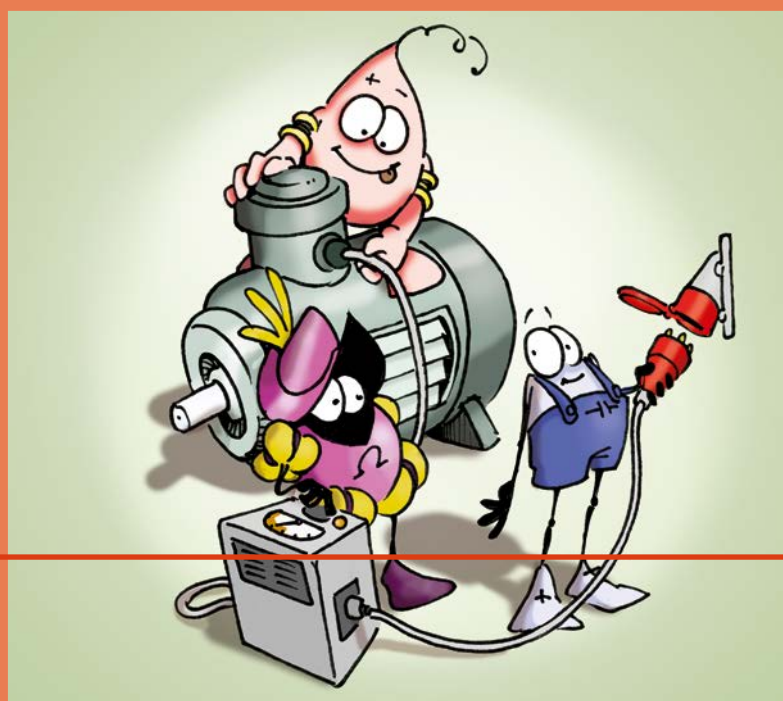


Christian Kral



Grundlagen der Antriebstechnik

Ein einführendes Lehrbuch



2., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Kral
Grundlagen der Antriebstechnik



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf *plus.hanser-fachbuch.de* gibt es kostenloses Zusatzmaterial zu diesem Buch. Den Zugangscode finden Sie am Ende des Werkes.



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter *www.hanser-fachbuch.de/newsletter*

Christian Kral

Grundlagen der Antriebstechnik

Ein einführendes Lehrbuch

2., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Über den Autor:

Dipl.-Ing. Dr. Christian Kral lehrt am Technologischen Gewerbemuseum (TGM), Wien/Österreich.



Print-ISBN: 978-3-446-48591-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-48646-1

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2026 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de
www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Michi Fleischmann, MF-Illustrationen, <https://www.cromagnon.at>

Satz: Christian Kral, mit LaTeX

Illustrationen: Michi Fleischmann, MF-Illustrationen, <https://www.cromagnon.at>

Druck: Elanders Waiblingen GmbH, Waiblingen

Printed in Germany

Vorwort

Aus dem Vorwort der ersten Auflage

Zur elektrischen Antriebstechnik gibt es viele gute Bücher auf hohem und damit meist universitärem Niveau. Ebenso gibt es eine Reihe von Lehrbüchern, die eine Fülle an Überblickswissen vermitteln, mit wenig Mathematik und Hintergrund. Der Platz dazwischen ist ziemlich leer. Mit diesem Buch soll dieser Platz gefüllt werden, damit der Einstieg in die Antriebstechnik für angehende Ingenieurinnen und Ingenieure gelingt. Dabei folge ich einem einfachen Prinzip: Das grundlegende Verständnis ist das Wichtigste. Es geht um die Grundlagen. Wer die Grundlagen versteht, kann sich alles andere erarbeiten.

Sobald man in die Welt der elektrischen Antriebstechnik eintaucht, betritt man eine neue, fremde Welt. Sich in dieser Welt mit ihren Begriffen und Darstellungen zurechtzufinden ist schwierig. Daher ist es meiner Ansicht nach wichtig, gute Vorstellungen zu entwickeln. Erst wenn ich mir etwas gut vorstellen kann, kann ich es verstehen und dann auch damit arbeiten. Dafür braucht es auch gute Bilder. Einen besonderen Beitrag dazu leisten in diesem Buch die drei Figuren Farad, Henry und Ohm. Sie helfen mit, technische Sachverhalte und Zusammenhänge in Illustrationen zu veranschaulichen und auch ein bisschen unterhaltsam darzustellen.

Ich habe in diesem Lehrbuch die Inhalte oft ausgehend von Bildern entwickelt. Zusätzlich wollte ich ausreichend Erläuterung bereitstellen, ganz im Sinne eines Lehrbuchs. Daher ist dieses Lehrbuch auch sehr textlastig. Um monoton erscheinende Textblöcke zu vermeiden, habe ich die Texte meist stark strukturiert, übersichtlich gestaltet und mit Illustrationen aufgelockert.

Ja, ich bin ein Formalist. Darum ist es mir auch wichtig, Begriffe möglichst klar zu definieren und zu verwenden. Ebenso habe ich eine möglichst einheitliche Bildsprache

bei den Ersatzschaltbildern und Diagrammen umgesetzt. Formelzeichen sind in einer möglichst vereinheitlichten Form verwendet, wodurch sich auch einige Abweichungen gegenüber der klassischen Literatur ergeben. So gesehen breche ich auch mit einigen Konventionen zugunsten einer konsistenten Darstellung der Inhalte.

Mein grundsätzlicher Zugang zur elektrischen Antriebstechnik ist sehr mathematisch geprägt. Erst durch die Mathematik verstehe ich persönlich, wie etwas funktioniert. Gleichzeitig weiß ich, dass das so nicht immer zumutbar ist. Dennoch ist es aus meiner Sicht wichtig, grundlegende Berechnungen durchführen zu können, da die mathematischen Gleichungen wesentliche Zusammenhänge verknüpfen und sichtbar machen. Meinem Illustrator und gutem Freund, Michi Fleischmann, danke sehr für die – aus meiner Sicht – grandiose Umsetzung der drei Figuren in den vielen unterschiedlichen Szenen und Situationen. Besonders erfreulich waren immer die Augenblicke, als wieder Illustrationen fertiggestellt waren und in das Manuskript eingearbeitet werden konnten.

Ein großes Dankeschön geht an meine Kollegen Thomas Jäger, Norbert Salomon und Franz Raschbacher für die vollständige und überaus gründliche Durcharbeitung des Manuskripts. Ihre kritischen Anmerkungen haben zu vielen tiefgehenden Diskussionen geführt, die allesamt zum guten Gelingen des Buchs beigetragen haben. Ganz besonders danke ich auch Anton Haumer, Peter Macheiner, Daniel Asch, Wolfgang Brandl und Günter Mika für die inhaltlich wichtigen Rückmeldungen und Gespräche. Ganz herzlich danke ich meinem Schüler Julian Chirila für seine differenzierte Auseinandersetzung mit den technischen Inhalten und den Formulierungen dieses Lehrbuchs. Seine genauen und kritischen Rückmeldungen waren für mich im Erstellungsprozess des Manuskripts von hohem Wert.

Dank der freundlichen Unterstützung durch viele Firmen, ist es möglich, sehr hochwertige technische Fotos in diesem Lehrbuch zu verwenden. Diese Firmen sind in den Bildunterschriften zu den Fotos genannt. Den Firmen mitsamt ihren Mitarbeitern, die mich tatkräftig unterstützt haben, möchte ich auch ein besonderes Dankeschön aussprechen.

Meinen Lektoren Frank Katzenmayer und Tyll Leyh vom Carl Hanser Verlag danke ich für die stets konstruktive und gute Zusammenarbeit.

Lichtenegg, im Mai 2023

Christian Kral

Zweite Auflage

Die vorliegende zweite Auflage hat Farbe und ein neues Layout bekommen. Viele Bilder sind außerdem etwas großzügiger gestaltet. Dadurch ist die Seitenzahl stark angewachsen, obgleich inhaltlich nur geringfügige Erweiterungen vorgenommen wurden.

Folgende inhaltliche Ergänzungen und Veränderungen wurden vorgenommen:

- Alle dokumentierten und gemeldeten Fehler zur ersten Auflage wurden eingearbeitet.
- In **Kapitel 1** wurden einige Bilder zur Vektorrechnung und den komplexen Zahlen ergänzt.
- Bei den Erwärmungsvorgängen elektrischer Maschinen in **Kapitel 3** wurden die Zeitverläufe von Wärmeströmen und Temperatur visualisiert.
- Die Begriffe Pol und Polpaarzahl sind bei der Gleichstrommaschine in **Kapitel 7** um Feldbilder ergänzt.
- Alle Stranggrößen sind nun einheitlich mit den Indizes u, v, w gekennzeichnet. Das war in der ersten Auflage nicht immer konsistent der Fall.
- Auf mehrere Kapitel verteilt sind einige neue Illustrationen dazugekommen.

In diesem Lehrbuch finden sich praktisch keine Übungsaufgaben und Rechenbeispiele. Damit Übung jedoch die Meisterin und den Meister macht, gibt es dennoch viele Aufgaben zu diesem Lehrbuch, die online zur Verfügung stehen. Auf der letzten Seite dieses Buches steht der Code, den Sie einfach auf <https://plus.hanser-fachbuch.de> eingeben. Sie kommen damit zur Online-Plattform, auf der alle Aufgaben in LeTTo bereitgestellt sind. Diese Aufgaben sind frei verfügbar und können daher auch auf dem LeTTo-Server einer beliebigen Bildungseinrichtung uneingeschränkt verwendet und modifiziert werden.

Dieses Buch enthält Fehler, so wie andere Bücher auch. Es gibt die Möglichkeit, mit mir in Angelegenheiten dieses Lehrbuchs über <https://github.com/christiankral/Grundlagen-der-Antriebstechnik> in Kontakt zu treten. Dazu gehören beispielsweise Fehler, die sich eingeschlichen haben, Unklarheiten, die bereinigt werden sollten, oder Probleme mit LeTTo-Aufgaben. Um auf GitHub ein neues »Issue« zu einem Anliegen zu erstellen, ist es einmalig erforderlich, einen kostenfreien GitHub-Account anzulegen.

Die Errata zur zweiten Auflage sind auf <https://tinyurl.com/ckralgat-2> geführt.

Sehr herzlich danke ich an dieser Stelle meinem Lektor Frank Katzenmayer vom Carl Hanser Verlag für die gute Unterstützung bei der Entwicklung der zweiten Auflage.

Lichtenegg, im Januar 2026

Christian Kral

Inhalt

Schreibweisen und Gezeichnetes	1
1 Grundlegendes Handwerkszeug	5
1.1 Trigonometrie	5
1.1.1 Winkel	6
1.1.2 Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen	7
1.1.3 Allgemeines Dreieck	13
1.2 Vektorrechnung	14
1.2.1 Zweidimensionale Vektoren	14
1.2.2 Dreidimensionale Vektoren	16
1.3 Komplexe Rechnung	27
1.4 Bezugspfeile	35
1.5 Einphasenwechselstrom	37
1.5.1 Komplexe Effektivwert-Zeitzeiger	37
1.5.2 Impedanz und Admittanz	39
1.5.3 Leistungsbegriffe	42
1.6 Drehstrom	44
1.6.1 Sternschaltung	46
1.6.2 Dreieckschaltung	47
1.6.3 Leistungsbegriffe	48
1.7 Leistungselektronik	49
1.7.1 Bauelemente	50
1.7.2 Grundlegende Kennwerte periodischer Größen	52

2	Mechanik	57
2.1	Statik	58
2.1.1	Kraft	58
2.1.2	Axiome der Statik	60
2.1.3	Zentrales ebenes Kraftsystem	62
2.1.4	Gewichtskraft	63
2.1.5	Äußere und innere Kräfte.....	64
2.1.6	Kraftübertragungselemente	66
2.1.7	Auflager.....	68
2.1.8	Drehmoment	69
2.1.9	Allgemeines ebenes Kraftsystem	72
2.1.10	Steigung.....	73
2.1.11	Reibung	74
2.1.12	Statischer Fahrwiderstand	78
2.2	Kinetik.....	79
2.2.1	Translatorische Kinetik	80
2.2.2	Rotatorische Kinetik	87
2.2.3	Elemente translatorischer und rotatorischer Systeme	94
2.2.4	Gemischt translatorische und rotatorische Kinetik	99
3	Betriebsumfeld	101
3.1	Klassifikation	102
3.2	Ausführungsformen.....	105
3.2.1	Baugröße und Flanschgröße	105
3.2.2	International Mounting	106
3.2.3	Schutzart	107
3.3	Verluste, Erwärmung, Kühlung	108
3.3.1	Verluste in elektrischen Maschinen	108
3.3.2	Verluste in Leistungselektronik	110
3.3.3	Wirkungsgradklassen von Drehstrommotoren	110
3.3.4	Wärmetransport und Wärmespeicherung	111
3.3.5	Wärmeklasse	115
3.3.6	Betriebsarten elektrischer Maschinen	116
3.3.7	Überlast	119

3.3.8	Kühlung elektrischer Maschinen	120
3.4	Typenschild	125
3.5	Normen	126
4	Magnetisches Feld	131
4.1	Feldvektoren.....	131
4.2	Magnetischer Widerstand.....	134
4.3	Durchflutungssatz	136
4.4	Induktionsgesetz	139
4.5	Induktivität	145
4.6	Lorentzkraft	146
4.7	Eisenverluste	147
5	Einphasentransformator	151
5.1	Idealer Transformator	151
5.1.1	Physikalisches Modell	152
5.1.2	Bauformen, Aufbau und Begriffe	155
5.1.3	Transformation von Impedanzen	159
5.2	Realer Transformator.....	160
5.2.1	Physikalisches Modell	161
5.2.2	Bemessungsgrößen	164
5.2.3	Allgemeiner Belastungszustand.....	164
5.3	Kurzschlussimpedanz	166
5.3.1	Kappsches Dreieck	167
5.3.2	Spannungsänderung bei Belastung	168
5.3.3	Kurzschlussspannung	170
5.3.4	Dauerkurzschlussstrom	170
5.4	Parameterbestimmung.....	171
5.4.1	Kurzschlussversuch.....	171
5.4.2	Leerlaufversuch	174
5.4.3	Typenschild	176
5.4.4	Leistungsbilanz und Wirkungsgrad	176
5.5	Besondere Ausführungsformen	179
5.5.1	Dreiwicklungs-Transformator.....	179
5.5.2	Transformator mit Anzapfung.....	180
5.5.3	Spannungswandler	180

5.5.4	Stromwandler	182
5.5.5	Spartransformator	184
5.5.6	HGÜ-Transformator.....	185
5.6	Besonderheiten	186
5.6.1	Parallelbetrieb	186
5.6.2	Magnetisierungsstrom	188
5.6.3	Einschaltstromstoß	189
5.6.4	Stoßkurzschlussstrom	190
6	Drehstromtransformator	193
6.1	Aktivteil	193
6.1.1	Eisenkern.....	194
6.1.2	Wicklung	197
6.2	Kühlung	199
6.3	Wicklungsverschaltung	202
6.3.1	Klemmenbezeichnung	202
6.3.2	Bemessungsgrößen	204
6.3.3	Spannungsübersetzung	204
6.3.4	Schaltgruppe	205
6.4	Typenschild	211
6.5	Ersatzschaltbild.....	212
6.5.1	Idealer Transformator	212
6.5.2	Transformator mit Kurzschlussimpedanz	213
6.6	Asymmetrische Belastung	214
6.6.1	Übersicht	214
6.6.2	Einphasig belasteter Yyn-Transformator.....	215
6.7	Besonderheiten	217
6.7.1	Parallelbetrieb	218
6.7.2	Verteiltransformator mit Laststufenschalter	218
6.7.3	Dreiwicklungs-Transformator	221
6.7.4	Phasenschieber-Transformator	221
6.7.5	Prüfung	224

7	Gleichstrommaschine	227
7.1	Aufbau und Wirkungsweise	227
7.1.1	Prinzip	228
7.1.2	Technische Umsetzung	235
7.1.3	Ankerwicklung	239
7.1.4	Erregerwicklung	240
7.1.5	Feldverteilung	241
7.1.6	Kommutierung und Wendepolwicklung	244
7.1.7	Ankerrückwirkung	247
7.2	Modellbildung	249
7.2.1	Klemmenbezeichnung	249
7.2.2	Symbole und Schaltungen	250
7.2.3	Modell und Ersatzschaltbild	253
7.2.4	Leistungsbilanz	258
7.2.5	Typenschild und Bemessungsgrößen	261
7.2.6	Berechnete Bemessungsgrößen	262
7.2.7	Bauvolumen	263
7.3	Betriebsverhalten	264
7.3.1	Ein- und Ausschalten	264
7.3.2	Permanentmagnetmaschine	266
7.3.3	Vierquadrantenbetrieb	269
7.3.4	Fremderregte Gleichstrommaschine	272
7.3.5	Wirksame Windungszahl	276
7.3.6	Nebenschlussgenerator	279
7.3.7	Reihenschlussmaschine	280
7.3.8	Universalmaschine	281
8	Gleichstromsteller	283
8.1	Tiefsetzsteller	283
8.2	H-Brücke	288

9	Netzgeführter Gleichrichter	293
9.1	M1U-Gleichrichter	294
9.2	M1C-Gleichrichter	297
9.3	B2U-Gleichrichter	299
9.4	B2C-Gleichrichter	301
9.5	B6U-Gleichrichter	305
9.6	B6C-Gleichrichter	308
10	Drehfeldmaschine	311
10.1	Grundlegende Eigenschaften	312
10.2	Erzeugung eines Drehfelds	314
10.2.1	Rotierender Permanentmagnet	314
10.2.2	Drehfeld einer Drehstromwicklung	316
10.2.3	Ideale Drehfeldmaschine	319
10.2.4	Reale Drehfeldmaschine.....	320
10.3	Drehstromwicklung	321
10.3.1	Kenngößen	324
10.3.2	Typenschild	329
10.3.3	Berechnete Bemessungsgrößen	330
10.3.4	Klemmenkasten	331
10.3.5	Polumschaltbare Wicklung	332
10.4	Raumzeiger	332
10.4.1	Rücktransformation	335
10.4.2	Leistung und Drehmoment	336
10.4.3	Bezogene Raumzeiger	337
10.5	Bauvolumen	338
11	Asynchronmaschine	339
11.1	Aufbau.....	339
11.1.1	Kurzschlussläufer	340
11.1.2	Schleifringläufer	343
11.2	Grundlegende Eigenschaften	344
11.2.1	Wirkungsweise	345
11.2.2	Ersatzschaltbild	348

11.2.3	Eigenschaften des Drehfelds	350
11.2.4	Typenschild und Bemessungsgrößen	351
11.2.5	Leistungsbilanz.....	352
11.3	Vereinfachtes Ersatzschaltbild	355
11.3.1	Leistung und Verluste	356
11.3.2	Streuung und Rotorzeitkonstante	357
11.3.3	Bemessungsgrößen	358
11.4	Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer am Netz.....	358
11.4.1	Statorstromortskurve	359
11.4.2	Betriebskennlinien	363
11.4.3	Stromverdrängung und Netzanlauf	370
11.4.4	Strombegrenzung beim Netzanlauf	374
11.4.5	Drehzahlstellung.....	379
11.5	Parameterbestimmung.....	380
11.5.1	Kurzschlussversuch.....	381
11.5.2	Leerlaufversuch	383
11.5.3	Übersetzungsverhältnis	385
11.6	Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer am Stromrichter	385
11.6.1	Ersatzschaltbild	387
11.6.2	Betriebskennlinien	388
11.6.3	Grenzkennlinien	392
11.6.4	Vergleich Netz- und Stromrichterbetrieb.....	395
11.7	Asynchronmaschine mit Schleifringläufer am Netz	396
11.7.1	Externe Rotorwiderstände	397
11.7.2	Betriebskennlinien	397
11.8	Doppelt gespeiste Asynchronmaschine	399
11.8.1	Leistungsbilanz.....	400
11.8.2	Vergleich von Schleifringläufer-Maschinen mit externen Rotorwiderständen und doppelter Speisung	403
11.9	Einphasen-Asynchronmaschine	403
11.9.1	Drehstromasynchronmaschine im einphasigen Betrieb	405
11.9.2	Asynchronmaschine mit Haupt- und Hilfswicklung	406

12 Synchronmaschine	407
12.1 Aufbau	408
12.1.1 Vollpolläufer mit elektrischer Erregung	410
12.1.2 Schenkelpolläufer mit elektrischer Erregung.....	411
12.1.3 Erregersystem	414
12.1.4 Permanentmagnetläufer	416
12.1.5 Reluktanzläufer	418
12.2 Grundlegende Eigenschaften	419
12.2.1 Rotorfestes Koordinatensystem	419
12.2.2 Ersatzschaltbild bei magnetisch symmetrischem Rotor	421
12.2.3 Leistungsbilanz.....	424
12.2.4 Vereinfachtes Ersatzschaltbild bei magnetisch symmetrischem Rotor	427
12.3 Vollpolmaschine am Netz	427
12.3.1 Typenschild und Bemessungsgrößen	428
12.3.2 Polradwinkel	428
12.3.3 Betriebszustände	430
12.3.4 Zeigerdiagramme	432
12.3.5 Betriebskennlinien	434
12.3.6 Synchronisierung	440
12.4 Vollpolgenerator im Inselbetrieb	441
12.5 Schenkelpolmaschine am Netz.....	442
12.5.1 Vereinfachte Gleichungen.....	442
12.5.2 Betriebskennlinien	444
12.6 Kennlinien bei variabler Erregung	446
12.6.1 Leerlaufversuch	446
12.6.2 Kurzschlussversuch.....	447
12.6.3 Leerlauf-Kurzschluss-Verhältnis	448
12.7 Permanentmagnetmaschine am Stromrichter	449
12.7.1 Vereinfachte Gleichungen.....	449
12.7.2 Feldorientierte Regelung	452
12.7.3 Betriebskennlinien	453
12.7.4 Grenzkennlinien	458
12.7.5 Bürstenlose Gleichstrommaschine	458

12.8 Synchronmaschine mit Reluktanzläufer am Stromrichter	459
12.8.1 Betriebseigenschaften	459
12.8.2 Betriebskennlinien	460
12.8.3 Vergleich mit Kurzschlussläufer-Asynchronmaschine	462
13 Selbstgeführter Stromrichter	463
13.1 Maschinenstromrichter	465
13.2 Pulsmuster	468
13.2.1 Vollblockbetrieb	469
13.2.2 Unterschwingungsverfahren	471
13.2.3 Raumzeigermodulation	475
13.3 Netzstromrichter	477
A Technologievergleich	481
A.1 Vergleich von elektrischen Maschinen	481
A.2 Vergleich von Netzgleichrichtern für den Umrichterbetrieb	484
Literatur	487
Index	491

Schreibweisen und Gezeichnetes

Allgemeines

Wichtige Begriffe werden **fett** geschrieben.

Erweitertes Wissen. Kennzeichnet Inhalte, die über das Grundlegende hinaus gehen.

Physikalische Größen werden *kursiv* dargestellt. Sie bestehen in aller Regel aus einem Zahlenwert und einer in gerader Schrift gesetzten Einheit. Die Momentanwerte elektrischer Größen werden als Kleinbuchstaben geschrieben, ihre Effektivwerte mit Großbuchstaben. Wenn eine physikalische Größe null ist, wird ihre Einheit aus Gründen der Vollständigkeit mit angegeben.

Beispiel: Effektivwert des Stroms $I = 0 \text{ A}$

Beispiel: Momentanwert der Spannung $u = 10,5 \text{ V}$

Komplexe physikalische Größen werden unterstrichen. Sie können entweder in kartesischer oder polarer Schreibweise geschrieben werden.

Beispiel: Strom in kartesischer Schreibweise $\underline{I} = 3 \text{ A} + j \cdot 4 \text{ A}$

Beispiel: Spannung in polarer Schreibweise $\underline{U}_2 = 230 \text{ V} \angle -120^\circ$

Physikalische Vektoren werden mit einem Pfeil über dem Formelzeichen versehen und können entweder zwei- oder dreidimensional sein.

Beispiel: Zweidimensionaler Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \end{pmatrix}$

Beispiel: Dreidimensionaler Drehmomentvektor $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \text{ Nm} \\ 0 \text{ Nm} \\ 20 \text{ Nm} \end{pmatrix}$

Punkte, Kurven und Flächen werden über kalligrafische Symbole – also in einer schreibschriftartigen Schrift – gekennzeichnet.

Beispiel: Punkt \mathcal{P} im Raum

Beispiel: Fläche \mathcal{A}_1 als räumliches Objekt, zur Unterscheidung vom Flächeninhalt A_1

Gleichungen werden in einer separaten Zeile geschrieben und mit runden Klammern nummeriert. Dabei gibt die erste Zahl das Kapitel an, während die zweite Zahl eine fortlaufende Nummerierung repräsentiert. Besonders wichtige Gleichungen werden in einen rechteckigen Rahmen gesetzt, um deren Wichtigkeit zu unterstreichen.

Beispiel: Der Satz von Pythagoras lautet:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.6)$$

Beispiel: Die Leistung in einem translatorischen System beträgt:

$$P = F \cdot v \quad (2.35)$$

Literaturstellen sind Verweise auf andere Bücher und Artikel, etwa aus Zeitschriften. Sie sind in eckigen Klammern angegeben und am Ende des Buchs unter »Literatur« aufgelistet.

Beispiel: Eine Ergänzung zur Leistungselektronik ist in [Pro15] angegeben.

Figuren

Durch dieses Buch begleiten uns drei Figuren, die sich am besten gleich selbst vorstellen:



Farad. Farad ist eine treibende Größe, wie etwa die **Spannung**. Farad hat lange Beine und ist ein recht drahtiger Typ. Seine Kraft sollten wir nicht unterschätzen, auch wenn er wie ein Fliegengewicht erscheint.

Henry. Der Zweite ist Henry, er ist wie ein **Strom**. Seine äußere Form erinnert an einen Tropfen, und das kommt nicht von ungefähr. Wenn er will, kommt er durch alles hindurch, da er sich dehnen und stauchen, strecken und verrenken kann. Henry ist auch hart im Nehmen, da steht er Farad in nichts nach.

Ohm. Und dann ist da noch Ohm. Er geht nicht nur immer wieder auf **Widerstand**, er ist sogar der Widerstand und heißt nach seiner Einheit. Ohm macht es Farad und Henry nicht immer leicht. Und dennoch, die drei gehören einfach zusammen.

Symbole

Hervorhebungen mit Rufzeichen beinhalten wichtige Merkinhalte.

Beispiel:



Magnetische **Feldlinien** sind stets **geschlossen**.

Hervorhebungen mit Häkchen listen am Beginn eines Abschnitts physikalische Größen mit ihren Einheiten, einschließlich einer englischen Übersetzung, auf.

Beispiel:



Zeichen	Einheit	Größe	Quantity
E	J	Energie, Arbeit	Energy, work



Das Einheitenzeichen J steht für »Joule«.
 $J = Ws =$ »Wattsekunde«, also »Watt« mal »Sekunde«.

Hervorhebungen mit Fahnen zeigen am Ende eines Abschnitts eine nach deutschen Begriffen sortierte Liste mit ihren englischen Übersetzungen.

Beispiel:



Deutsch	English
Bürstenlose Gleichstrommaschine	Brushless DC machine
Gleichstrommaschine	DC machine

1

Grundlegendes Handwerkszeug

Dieses Kapitel fasst ausgewählte mathematische und elektrotechnische Grundlagen zusammen, wie sie in den darauffolgenden Kapiteln angewandt werden. Die wichtigsten Zusammenhänge der Trigonometrie, der Vektorrechnung, der komplexen Rechnung sowie der ein- und dreiphasigen Wechselstromnetze werden knapp umrissen. Dadurch soll einerseits die in diesem Buch verwendete Schreibweise und Nomenklatur vermittelt werden. Andererseits sollen die erforderlichen Grundlagen in Erinnerung gerufen und aufgefrischt werden.

1.1 Trigonometrie



Zeichen	Einheit	Größe	Quantity
α, β, γ	rad	Winkel	Angle



Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet!

Der Winkel α wird »alpha« gesprochen, der Winkel β als »beta« und der Winkel γ als »gamma«!

Die Einheit »Radian« (rad) ist gleichbedeutend mit 1!

In der Trigonometrie werden Zusammenhänge zwischen Längen und Winkeln in Dreiecken hergestellt. Wir betrachten nachfolgend geometrische Darstellungen, die jeweils in einem x - y -Koordinatensystem, wie beispielsweise in [Bild 1.1a](#), angegeben sind. Als Folge dessen behandeln wir in diesem Abschnitt ausschließlich Winkel in der zweidimensionalen x - y -Ebene.

1.1.1 Winkel

Der Winkel β zwischen zwei Schenkeln a und c , wie er in **Bild 1.1b** dargestellt ist, lässt sich beispielsweise mit einem Geodreieck bestimmen. Den Schnittpunkt der beiden Schenkel kann man auch als Drehpunkt ansehen, ähnlich wie bei der Schere in **Bild 1.1c**. Wenn man ausgehend von zwei parallelen, horizontal ausgerichteten Scherenhebeln, den einen Scherenhebel um den Winkel β **gegen den Uhrzeigersinn** um den Drehpunkt dreht, erhalten wir eine Konfiguration wie in **Bild 1.1b**.

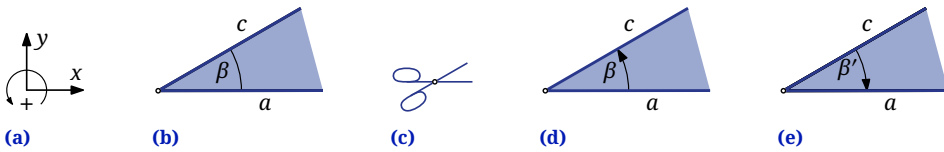


Bild 1.1 (a) x - y -Koordinatensystem, (b) Schenkel und Winkel β , (c) Schere mit zwei Scherenhebeln, (d) positiver Winkel β , (e) negativer Winkel β'



Eine Drehung **gegen den Uhrzeigersinn** (\odot) entspricht in einem ebenen x - y -Koordinatensystem dem **mathematisch positiven Bezugssinn**. Eine Drehung in Richtung dieses Bezugssinns entspricht daher einem positiven Winkel. Eine Drehung entgegen dem mathematisch positiven Bezugssinn (im Uhrzeigersinn) entspricht hingegen einem negativen Winkel.

Der mathematisch positive Drehsinn (\odot) in **Bild 1.1a** ist mit einem kreisbogenförmigen Pfeil um das Pluszeichen herum angezeigt. Der Winkel β in **Bild 1.1d**, der vom Schenkel a zum Schenkel c gerichtet ist, ist größer als null¹⁾, da er im mathematisch positiven Bezugssinn gezeichnet ist. In **Bild 1.1e** betrachten wir den Winkel β' , welcher vom Schenkel c zum Schenkel a hin gerichtet ist. Der Winkel β' ist daher kleiner als null²⁾, da er gegen den mathematisch positiven Bezugssinn gerichtet ist.



- Ein **positiver** Winkel wird mit einem Kreisbogen samt Pfeil gekennzeichnet, dessen Richtung mit dem mathematisch positiven Bezugssinn übereinstimmt (\odot).
- Ein **negativer** Winkel wird mit einem Kreisbogen samt Pfeil gekennzeichnet, dessen Richtung mit dem mathematisch positiven Bezugssinn nicht übereinstimmt (\ominus).
- Als Kreisbogen gekennzeichnete Winkel ohne Pfeil meinen in der Regel einen positiven Winkel.

¹ Genauer: $0^\circ < \beta < 180^\circ$

² Genauer: $-180^\circ < \beta' < 0^\circ$

Der Winkel eines vollen Kreises beträgt:

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \quad (1.1)$$

Der im Bogenmaß dargestellte Winkel $2 \cdot \pi$ wird mitunter auch mit der Einheit Radian (rad) versehen. Letztlich ist die Einheit rad jedoch gleichbedeutend mit 1.

1.1.2 Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen

Um die Winkelfunktionen mathematisch beschreiben zu können, betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck in [Bild 1.2a](#). Die beiden Winkel α und β bezeichnen wir als **Komplementwinkel**, da sie zusammen 90° ergeben:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (1.2)$$

Dabei benennen wir die beiden in einem rechten Winkel zueinander stehenden Seiten als Katheten und die dritte Seite als Hypotenuse. Bezüglich des Winkels α nennen wir die Seite b die **Ankathete** – da sie an den Winkel angrenzt – und die Seite a die **Gegenkathete** – da sie dem Winkel gegenüberliegt. Da die Kathete a an den Winkel β angrenzt, heißt sie bezüglich des Winkels β **Ankathete** und b heißt **Gegenkathete**; siehe [Tabelle 1.1](#).

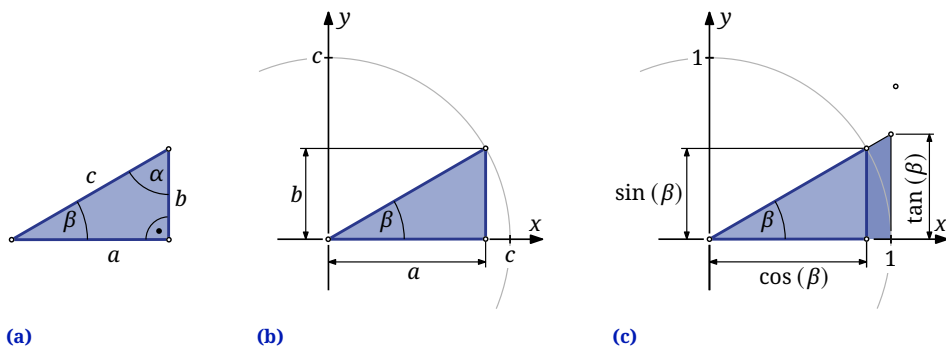


Bild 1.2 Rechtwinkeliges Dreieck mit Winkeln und Winkelfunktionen

Tabelle 1.1 Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

	Seite a	Seite b	Seite c
Bezüglich α	Gegenkathete	Ankathete	Hypotenuse
Bezüglich β	Ankathete	Gegenkathete	Hypotenuse

Wir definieren folgende Winkelfunktionen:

Sinus. Der Sinus (Funktionsname sin) von einem der beiden Komplementwinkel ist die Gegenkathete dividiert durch die Hypotenuse:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad (1.3)$$

Kosinus. Der Kosinus (Funktionsname cos) ist jeweils gleich dem Verhältnis aus Ankathete zu Hypotenuse:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad (1.4)$$

Tangens. Der Tangens (Funktionsname tan) berechnet sich aus Gegenkathete zu Ankathete:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \qquad (1.5)$$

Zwischen den Seiten a , b und c gilt der Satz von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1.6)$$

Aus den Winkelfunktionen lassen sich noch folgende Eigenschaften ableiten:

Steigung. Bezüglich des Winkels β sind die Winkelfunktionen in Bild 1.2b und c veranschaulicht. Dass man neben dem Sinus und dem Kosinus des Winkels β auch den Tangens einzeichnen kann, ist eine Folge der Betrachtung der Steigung k der Hypotenuse im x - y -Koordinatensystem; sie beträgt

$$k = \tan(\beta) \qquad (1.7)$$

und stimmt mit Gl. (1.5) überein.

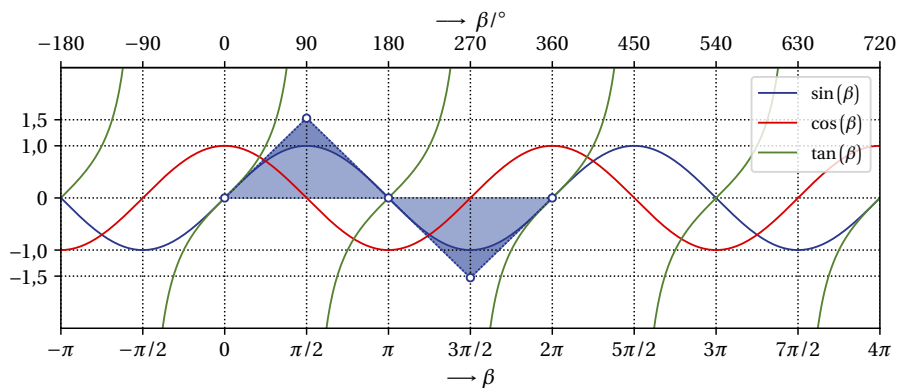


Bild 1.3 Funktionen $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$ und $\tan(\beta)$, Hilfspunkte für die näherungsweise Konstruktion einer Sinuskurve per Handskizze

Satz von Pythagoras. Der Satz von Pythagoras angewandt auf die Winkelfunktionen aus Bild 1.2c zeigt:

$$\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1 \quad (1.8)$$



$\cos^2(\beta)$ bedeutet $(\cos(\beta))^2$ und
 $\sin^2(\beta)$ bedeutet $(\sin(\beta))^2$

Handskizze. Die wesentlichen Merkmale einer Sinus-Funktion – für die Erstellung mittels Handskizze – sind in Bild 1.3 gezeigt. Dazu zeichnet man jeweils eine horizontale Linie bei der positiven und negativen Amplitude sowie dem jeweils etwa 1,5-fachen Wert der positiven und negativen Amplitude. Die in Bild 1.3 markierten Punkte werden über einen Linienzug miteinander verbunden. Dieser Linienzug, ebenso wie die horizontalen Linien bei der positiven und negativen Amplitude, sind die Tangenten für das Zeichnen der Sinuskurve: Das lässt sich mit freier Hand gut bewerkstelligen.

Verschiebung. Die Sinus- und Kosinuskurve in Bild 1.3 sind horizontal gegeneinander verschoben:

$$\cos(\beta) = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin(\beta) = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.9)$$

Diese beiden Winkelfunktionen weisen zusätzlich folgende Eigenschaften auf:

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta) \quad \cos(-\beta) = \cos(\beta) \quad (1.10)$$

Periode. Die Winkelfunktionen $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$ und $\tan(\beta)$ sind in Bild 1.3 dargestellt. Die sin- und cos-Funktionen sind $2 \cdot \pi$ -periodisch, die tan-Funktion ist π -periodisch. Die Periode gibt hier an, nach welchem kleinstmöglichen Winkel sich die Funktion (nach links und rechts) wiederholt. Dies schreiben wir mathematisch in folgender Form:

$$\sin(\beta) = \sin(\beta + z \cdot 2 \cdot \pi) \quad \cos(\beta) = \cos(\beta + z \cdot 2 \cdot \pi) \quad \tan(\beta) = \tan(\beta + z \cdot \pi) \quad (1.11)$$

Dabei ist $z \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Dieser Zusammenhang lässt sich mit einem Taschenrechner im Radiant-Modus einfach nachvollziehen. Die Funktion $\tan(\beta)$ weist immer dann eine Unstetigkeitsstelle auf, wenn die Funktion $\cos(\beta)$ gleich null ist.

Für jede der drei Funktionen aus Bild 1.3 gibt es jeweils eine Umkehrfunktion:

Arkussinus. In Bild 1.4a können wir jedem beliebigen Winkel β eindeutig einen Funktionswert

$$y = \sin(\beta) \quad (1.12)$$

zuordnen, wobei $-1 \leq y \leq 1$ ist. Wenn wir umgekehrt y kennen und den Winkel β bestimmen wollen, so gibt es dazu meist zwei Lösungen im Intervall $-\pi < \beta \leq \pi$. Um die in [Bild 1.4a](#) im blau unterlegten Bereich liegende Lösung zu bestimmen, verwenden wir die Umkehrfunktion Arkussinus, mathematisch geschrieben als \arcsin :

$$\beta = \arcsin(y) \quad (1.13)$$

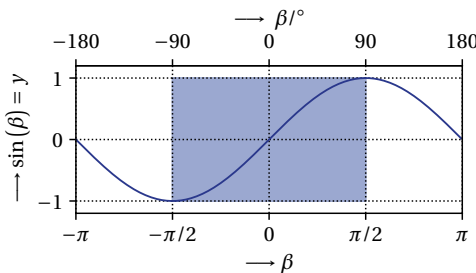
Die Funktion $\arcsin(y)$ liefert in [Bild 1.4b](#), im ebenfalls blau unterlegten Bereich, einen eindeutigen Funktionswert β , der im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ liegt.³⁾ Die gesuchte Lösung von $y = \sin(\beta)$ könnte auch außerhalb des blauen Bereichs liegen. So liefert beispielsweise $\arcsin(0)$ in den Taschenrechner eingetippt als Ergebnis den Winkel $\beta = 0^\circ$. Aus [Bild 1.4a](#) ist allerdings ersichtlich, dass auch beispielsweise $\beta = \pi$ eine gültige Lösung von $y = \sin(\beta)$ für $y = 0$ ist. Welcher Winkel tatsächlich die korrekte Lösung von $y = \sin(\beta)$ ist, hängt von den zu berücksichtigenden Bedingungen in einer technischen Aufgabe ab, ohne die die Lösung nicht eindeutig bestimmbar ist. Die zweite mathematische Lösung von $y = \sin(\beta)$, zusätzlich zu $\arcsin(y)$ im Bereich $-\pi < \beta \leq \pi$, beträgt:

$$\beta = \begin{cases} \pi - \arcsin(y) & \text{wenn } y \geq 0 \\ \arcsin(y) - \pi & \text{wenn } y < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

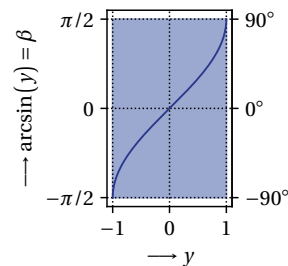
Mathematisch gesehen haben wir in der Regel zwei mögliche Lösungen. Die Gln. (1.13) und (1.14) liefern nur für $y = \pm 1$ das jeweils selbe Ergebnis, womit wir in diesen beiden Sonderfällen eine eindeutige Lösung haben.

Arkuskosinus. In gleicher Weise wie beim Arkussinus gibt es für jeden beliebigen Winkel β einen eindeutigen Funktionswert

$$x = \cos(\beta) \quad (1.15)$$



(a)



(b)

Bild 1.4 (a) Funktion $y = \sin(\beta)$, (b) Umkehrfunktion $\beta = \arcsin(y)$

³ Der Funktionsverlauf aus [Bild 1.4b](#) ergibt sich aus [Bild 1.4a](#) durch Vertauschen der beiden Achsen

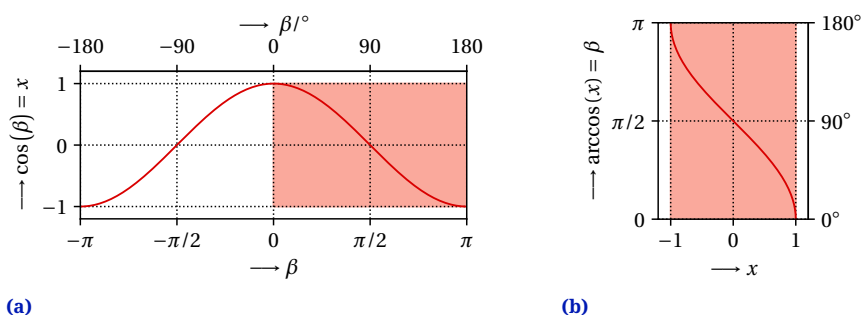


Bild 1.5 (a) Funktion $x = \cos(\beta)$, (b) Umkehrfunktion $\beta = \arccos(x)$

mit $-1 \leq x \leq 1$ in **Bild 1.5a**. Mit der Umkehrfunktion Arkuskosinus, mathematisch geschrieben als \arccos , lässt sich wiederum nur ein Lösungswinkel β passend zu $x = \cos(\beta)$ bei gegebenem x finden:

$$\beta = \arccos(x) \quad (1.16)$$

Die Umkehrfunktion $\arccos(x)$ liefert als Resultat einen eindeutigen Winkel β im Bereich $0 \leq \beta \leq \pi$, ist jedoch keine eindeutige Lösung von $x = \cos(\beta)$. Eine mögliche zweite mathematische Lösung könnte außerhalb des rot unterlegten Bereichs von **Bild 1.5a** und **b** liegen. Zum Beispiel liefert $\arccos(0)$ als Lösung $\beta = \frac{\pi}{2}$. **Bild 1.5a** zeigt jedoch, dass für $x = \cos(\beta)$ auch $\beta = -\frac{\pi}{2}$ denselben Funktionswert $x = 0$ aufweist. Für den Bereich $-\pi < \beta \leq \pi$ gibt es zusätzlich zu $\arccos(x)$ als mögliche zweite Lösung von $x = \cos(\beta)$:

$$\beta = -\arccos(x) \quad (1.17)$$



Für den Sonderfall $x = 1$ sind die beiden Lösungen ...



... $\beta = \pm \arccos(x) = 0$ identisch.

Arkustangens. Einem Winkel β wird über

$$k = \tan(\beta) \quad (1.18)$$

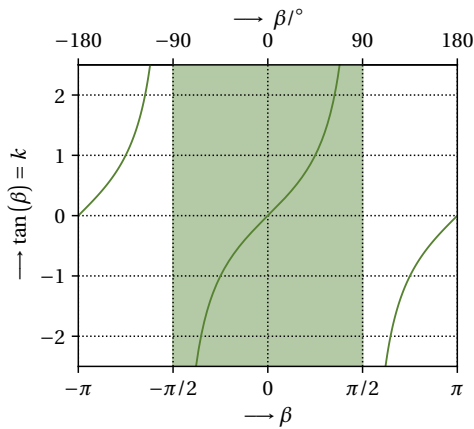
ein eindeutiger Funktionswert k zugeordnet, der jeden beliebigen reellen Funktionswert annehmen kann. Um umgekehrt den Winkel β im grün unterlegten Bereich von **Bild 1.6a** aus k zu bestimmen, verwendet man die Umkehrfunktion Arkustangens, mathematisch geschrieben als \arctan :

$$\beta = \arctan(k) \quad (1.19)$$

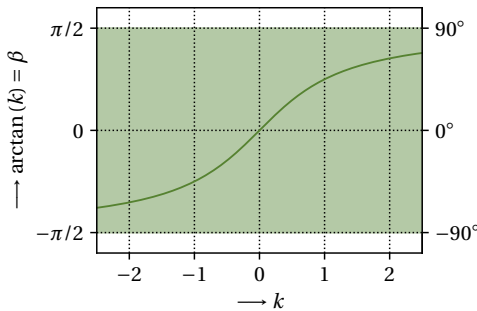
Die Funktion $\arctan(k)$ in Bild 1.6b liefert den Winkel β im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ als Ergebnis. Der Winkel β als Lösung von $k = \tan(\beta)$ könnte jedoch auch außerhalb des grün unterlegten Bereichs von Bild 1.6a liegen. So liefert etwa $\arctan(0)$ als Lösung $\beta = 0^\circ$, aber eine zweite Lösung ist $\beta = \pi$, wo ebenfalls $\tan(\beta) = 0$ ist. Neben der Umkehrfunktion $\arctan(k)$ ist eine zweite Lösung von $k = \tan(\beta)$:

$$\beta = \begin{cases} \arctan(k) - \pi & \text{wenn } k > 0 \\ \pi + \arctan(k) & \text{wenn } k \leq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Eine Ausnahme bilden die Winkel $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, wo die Tangensfunktion eine Unstetigkeitsstelle aufweist.



(a)



(b)

Bild 1.6 (a) Funktion $k = \tan(\beta)$, (b) Umkehrfunktion $\beta = \arctan(k)$



Die **Umkehrfunktionen** $\arcsin(y)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(k)$ sind eindeutige Funktionen, liefern aber jeweils nicht notwendigerweise eine eindeutige Lösung für den Winkel β in folgenden Gleichungen:

$$y = \sin(\beta) \qquad x = \cos(\beta) \qquad k = \tan(\beta)$$

Ausgenommen von Sonderfällen gibt es immer auch einen zweiten Lösungswinkel, wie er jeweils in den Gln. (1.14), (1.17) und (1.20) angegeben ist.

1.1.3 Allgemeines Dreieck

Bei einem allgemeinen Dreieck wie in Bild 1.7a ergibt die Summe der drei Winkel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad (1.21)$$

Sinussatz

Der Sinussatz besagt, dass die Verhältnisse der Seiten zum jeweils gegenüberliegenden Winkel in einem Dreieck konstant sind:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad (1.22)$$

Kosinussatz

Der Kosinussatz kann als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras gemäß $c^2 = a^2 + b^2$ angesehen werden:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \qquad (1.23)$$

In gleicher Form gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta) \qquad (1.24)$$

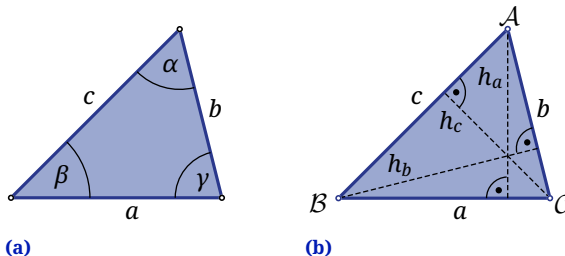


Bild 1.7 Allgemeines Dreieck (a) mit Seiten a , b , c und Winkeln α , β , γ , (b) zusätzlich mit Höhen h_a , h_b , h_c und den Eckpunkten A , B , C

Höhen

Die drei Höhen h_a , h_b und h_c eines allgemeinen Dreiecks sind in [Bild 1.7b](#) eingezeichnet. Dabei geht

- die Höhe h_a durch den Punkt A und steht normal auf die Seite a ,
- die Höhe h_b durch den Punkt B und steht normal auf die Seite b ,
- die Höhe h_c durch den Punkt C und steht normal auf die Seite c .

Da jede Höhe das allgemeine Dreieck in jeweils zwei rechtwinkelige Dreiecke teilt, gilt:

$$\begin{aligned} h_a &= b \cdot \sin(\gamma) & h_b &= c \cdot \sin(\alpha) & h_c &= a \cdot \sin(\beta) & (1.25) \\ &= c \cdot \sin(\beta) & &= a \cdot \sin(\gamma) & &= b \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$



Deutsch

Rechtwinkeliges Dreieck
Allgemeines Dreieck
Umkehrfunktion
Winkel

English

Right triangle
General triangle
Inverse function
Angle

1.2 Vektorrechnung

Wir werden nachfolgend zunächst die zweidimensionalen und danach die dreidimensionalen Vektoren behandeln. Dabei werden wir die wichtigsten mathematischen Eigenschaften und Rechenregeln zusammenfassen.

1.2.1 Zweidimensionale Vektoren

Um einen Punkt auf der Erdoberfläche zu finden, ist es ausreichend, seine GPS-Koordinaten zu kennen. In ähnlicher Weise kann man einen beliebigen Punkt in der x - y -Ebene dadurch kennzeichnen, dass man seine x - und y -Koordinate angibt, wie das in [Bild 1.8a](#) dargestellt ist.

Ortsvektor

Wenn wir in [Bild 1.8b](#) in der x - y -Ebene einen Pfeil vom Ursprung \mathcal{O} zu einem Punkt \mathcal{P}_1 mit den Koordinaten x_1 und y_1 zeichnen, so bezeichnen wir diesen Pfeil als **Ortsvektor** \vec{r}_1 . Wir schreiben die beiden Koordinaten in der Vektorschreibweise übereinander in einer runden Klammer:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Ortsvektor nennen wir einen Vektor dann, wenn er vom Ursprung \mathcal{O} weg gezeichnet wird. Ein Vektor wird in der Mathematik über einen kleinen Vektorpfeil oberhalb des Formelzeichens gekennzeichnet, wie bei \vec{r}_1 .

Vektor

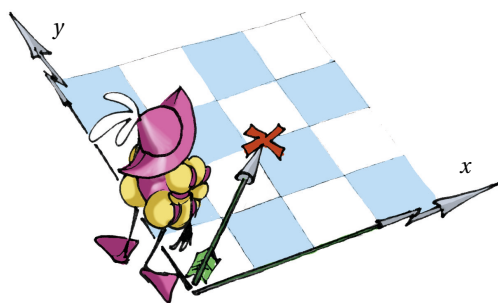
Wenn wir nun den Ortsvektor \vec{r}_1 aus Bild 1.8b derart parallel verschieben, dass sein Ursprungspunkt in \mathcal{P}_2 mit den Koordinaten x_2 und y_2 zu liegen kommt, dieser Pfeil jedoch dieselbe Länge aufweist und in dieselbe Richtung zeigt, so sprechen wir einfach nur von einem Vektor \vec{r}_1 . Der Ortsvektor ist also ein Sonderfall des Vektors, der im Ursprung \mathcal{O} beginnt. In unserem Beispiel ist der Vektor \vec{r}_1 von \mathcal{P}_2 nach \mathcal{P}_3 gerichtet. Seine Abmessungen in x - und y -Richtung sind gleich wie der ursprünglich gezeichnete Ortsvektor, d. h. $x_1 = x_3 - x_2$ und $y_1 = y_3 - y_2$. Die x - und y -Koordinaten (d. h. x - und y -Abmessungen) des Vektors sind gleich wie jene des Ortsvektors. Damit weist auch der von \mathcal{P}_2 nach \mathcal{P}_3 gerichtete Vektor dieselben Koordinaten wie in Gl. (1.26) auf.

Der Endpunkt eines gezeichneten Vektors – wie in Bild 1.8b – wird über eine Pfeilspitze gekennzeichnet. Der gerade Bereich vom Ausgangspunkt des Vektorpfeils bis zur Spitze wird als **Schaft** bezeichnet.

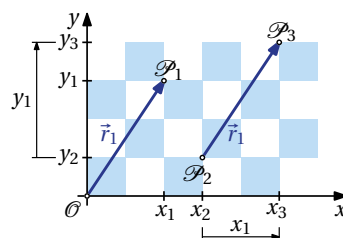


Begrifflich unterscheiden wir zweidimensionale Vektoren in der Form (1.26) und skalare Größen, kurz Skalare.

- Ein **Skalar** ist eine gewöhnliche Zahl oder physikalische Größe mit Einheit.
- Ein zweidimensionaler **Vektor** besteht aus einem Paar gewöhnlicher Zahlen oder physikalischen Größen: den Koordinaten. Die Koordinaten eines zweidimensionalen Vektors können wir uns in einem Koordinatensystem vorstellen, wie in Bild 1.8.



(a)



(b)

Bild 1.8 (a) Zweidimensionaler Vektor, (b) Ortsvektor \vec{r}_1 von \mathcal{O} nach \mathcal{P}_1 sowie Vektor \vec{r}_1 von \mathcal{P}_2 nach \mathcal{P}_3 ,

1.2.2 Dreidimensionale Vektoren

Wenn wir unsere Vorstellung von den zwei- zu den dreidimensionalen Vektoren hin erweitern, fügen wir die z -Koordinate als dritte Koordinate der Vektorschreibweise hinzu:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Dreidimensional können wir uns das wie in [Bild 1.9a](#) perspektivisch vorstellen. Wenn man die x - und die y -Achse eines Koordinatensystems gezeichnet hat, zeichnet man die z -Achse jeweils normal auf die beiden anderen Achsen, wie in [Bild 1.10a](#). Die Richtung der z -Achse ist in die Richtung des Daumens der rechten Hand gerichtet, wenn die x -Achse über den kürzeren der beiden möglichen Winkel in die y -Achse gedreht wird. Die vier Finger der rechten Hand in [Bild 1.10b](#) geben die Drehrichtung an.

Alternativ kann man sich die x -, y - und z -Achse als Dreibein vorstellen, dessen Beine über Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand gebildet werden. Die Finger weisen jeweils einen Winkel von 90° zueinander auf, wie das in [Bild 1.10c](#) gezeichnet ist. Dabei zeigt

- der Daumen in die Richtung der x -Achse,
- der Zeigefinger in Richtung der y -Achse und
- der Mittelfinger in Richtung der z -Achse.



Die x -, y - und z -Achse des Koordinatensystems dürfen wir in [Bild 1.10a](#) nicht irgendwelchen Fingern zuordnen. Stattdessen müssen wir uns an eine feste Reihenfolge der Koordinatenachsen halten. Anstelle der Reihenfolge $x \rightarrow y \rightarrow z$ können allerdings auch die Reihenfolgen $y \rightarrow z \rightarrow x$ oder $z \rightarrow x \rightarrow y$ verwendet werden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem **zyklischen Vertauschen** der Koordinatenachsen.

Damit wir ein dreidimensionales Koordinatensystem auf einem Blatt Papier zeichnen können, greifen wir anstelle einer perspektivischen Darstellung wie in [Bild 1.9a](#) auf eine Projektion zurück. Konkret werden wir in der angewandten Vektorrechnung die Projektion auf die x - y -Ebene betrachten, wie sie auch in [Bild 1.9a](#) mit dem Schatten des Vektorpfeils illustriert ist.

Wenn wir in diesem Fall die x -Achse nach rechts und die y -Achse nach oben zeichnen, dann ist die z -Achse aus der Zeichenebene heraus gerichtet, wie in [Bild 1.9b](#). Die Richtung aus der Zeichenebene symbolisieren wir durch den Kreis mit dem Punkt (\odot), wie in [Bild 1.10d](#). Wir können uns das wie den Blick auf eine Pfeilspitze vorstellen.

Umkehrt symbolisieren wir einen Richtungspfeil in die Zeichenebene über einen Kreis, in dessen Innerem zwei gekreuzte Linien gezeichnet sind (\otimes). Wir können uns dazu

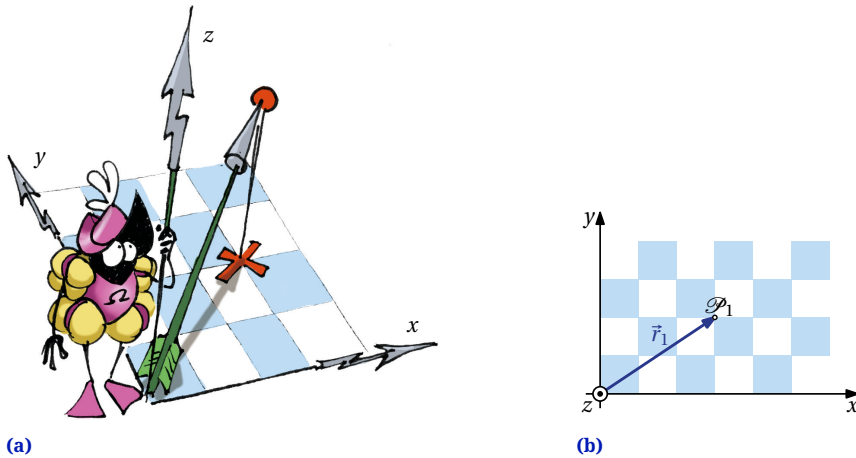


Bild 1.9 Dreidimensionaler Vektor, (a) perspektivisch dargestellt und mit Schattenprojektion auf die x - y -Ebene, (b) in einem dreidimensionalen Koordinatensystem mit x - und y -Achse in der Ebene und z -Achse aus der Ebene

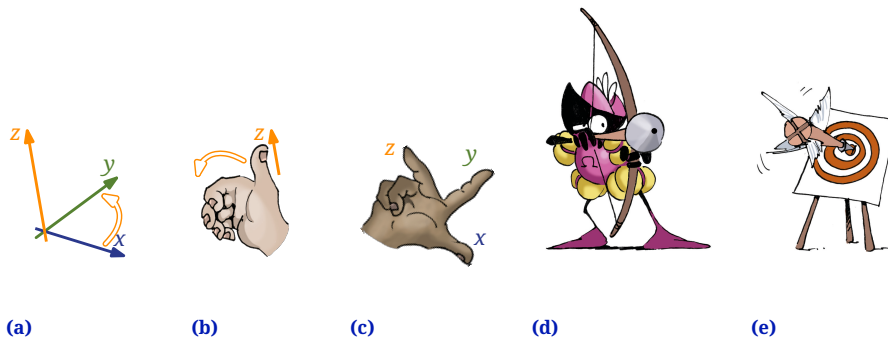
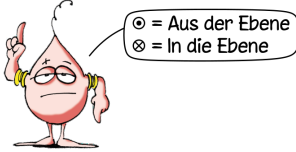


Bild 1.10 (a) Achsen x , y und z eines dreidimensionalen Koordinatensystems, (b) die Richtung der z -Achse entspricht der Richtung des Daumens der rechten Hand, wenn die vier Finger die Drehrichtung der x -Achse über den kleineren der beiden Winkel in die y -Achse anzeigt, (c) Koordinatensystem, aus drei rechtwinklig aufeinander stehenden Fingern gebildet, (d) Pfeilspitze von vorne gesehen (\odot), (e) Pfeil von hinten gesehen (\otimes)

vorstellen, dass dies der Blick auf das Ende eines Pfeils in [Bild 1.10e](#) ist, der mit einer x-förmigen Einkerbung versehen ist.



Wir verwenden folgende **Symbole**:



Ein zweidimensionaler Vektor in der x - y -Ebene kann daher als Sonderfall von Gl. (1.27) mit $z_1 = 0$ betrachtet werden:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$



Die einzelnen **Koordinaten** eines Vektors sind bei Additionen und Subtraktionen wie auch in Vektorgleichungen immer **voneinander unabhängig**. In allen nachfolgenden Vektorgleichungen müssen wir daher jede Zeile jeweils als separate Gleichung behandeln.

Addition

Die Addition des Vektors \vec{r}_1 aus Gl. (1.27) und des Vektors

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

erfolgt koordinatenweise, d. h.:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Grafisch erhält man den Vektor $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ in [Bild 1.11a](#), indem man den Anfangspunkt des Vektors \vec{r}_2 an die Spitze des Vektor \vec{r}_1 anfügt. Der Summenvektor wird dann vom Anfangspunkt des Vektors \vec{r}_1 zur Spitze des Vektor \vec{r}_2 gezeichnet, also von \mathcal{O} zu \mathcal{P}_3 .

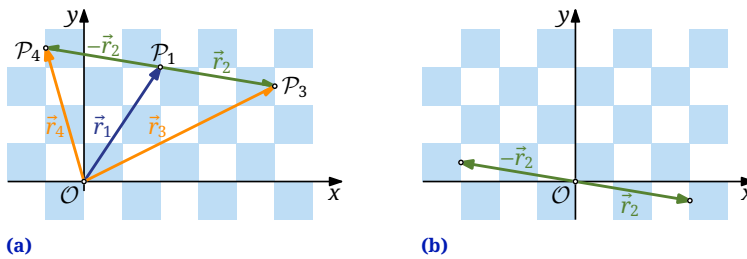


Bild 1.11 (a) Addition $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ und Subtraktion $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ von Vektoren, (b) Vektoren \vec{r}_2 und $-\vec{r}_2$,

Nullvektor

Alle Koordinaten des Nullvektors sind gleich null:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Negativer Vektor

Der negative Vektor $-\vec{r}_2$ weist die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung wie \vec{r}_2 auf, wie das in [Bild 1.11b](#) dargestellt ist:

$$-\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Subtraktion

Subtrahieren wir den Vektor \vec{r}_2 vom Vektor \vec{r}_1 , wie in [Bild 1.11a](#), so entspricht das der Addition der Vektoren \vec{r}_1 und $(-\vec{r}_2)$:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (-\vec{r}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Länge eines Vektors

Die **Länge** des Vektors \vec{r}_1 nennen wir auch den **Betrag** des Vektors \vec{r}_1 . Diese Größe berechnen wir über:

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (1.34)$$

Die Länge des Vektors \vec{r}_1 kennzeichnen wir dadurch, dass wir vor und hinter dem Vektor einen Betragsstrich schreiben. Wenn wir hingegen r_1 ohne Vektorpfeil schreiben, dann meinen wir in der Regel einfach nur eine skalare Größe, aber nicht unbedingt den Betrag des Vektors; stattdessen könnten auch beispielsweise nur eine Koordinate oder ein Radius gemeint sein. Daher ist es fortan wichtig, einen Vektor immer mit einem Vektorpfeil zu kennzeichnen, um ihn von einer ähnlich bzw. gleich bezeichneten, skalaren Größe unterscheiden zu können.

Im Falle eines ebenen Vektors, der mit $z_1 = 0$ in der x - y -Ebene liegt, können wir die Länge des Vektors \vec{r}_1 mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.35)$$

Winkel ebener Vektoren

Unter dem Winkel des sich in der x - y -Ebene befindlichen Vektors \vec{r}_1 verstehen wir jenen Winkel, der von der Richtung der positiven x -Achse weggezählt zum betrachteten **Ortsvektor** \vec{r}_1 (der im Ursprung \mathcal{O} beginnt) gerichtet ist. In **Bild 1.12a** ist dieser Winkel als β_1 bezeichnet. Den Winkel β_1 des Vektors \vec{r}_1 bestimmen wir mit der Funktion \arg (vom Begriff **Argument** stammend) in folgender Form:

$$\arg(\vec{r}_1) = \beta_1 \quad (1.36)$$

Für Berechnung dieses Winkels ist die Gleichung

$$\tan(\beta_1) = \frac{y_1}{x_1} \quad (1.37)$$

unter der Berücksichtigung von $x_1 = \cos(\beta_1)$ und $y_1 = \sin(\beta_1)$ zu lösen.

Wenn wir den Vektor \vec{r}_1 in **Bild 1.12a** und den Vektor $-\vec{r}_1$ in **Bild 1.12b** miteinander vergleichen, so stellen wir folgende Zusammenhänge fest:

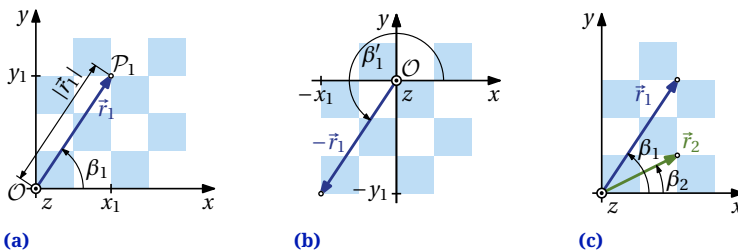


Bild 1.12 (a) Betrag und Winkel des Vektors \vec{r}_1 , (b) Betrag und Winkel des Vektors $-\vec{r}_1$, (c) Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2

- Die Beträge sind gleich, d. h. $|\vec{r}_1| = |-\vec{r}_1|$.
- Den Winkel β_1 in Bild 1.12a können wir wegen $x_1 > 0$ und $y_1 > 0$ aus $\beta = \arctan(k)$ berechnen.
- Der Winkel $\beta'_1 = \arg(-\vec{r}_1)$ muss aus Gl. (1.20) bestimmt werden, da der Lösungswinkel β'_1 aufgrund von $-x_1 < 0$ und $-y_1 < 0$ im Bereich $-180^\circ < \beta'_1 < -90^\circ$ liegen muss; dies führt zu $\beta'_1 = \beta_1 + 180^\circ$.

Wenn wir den Winkel zwischen den beiden ebenen Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 in Bild 1.12c bestimmen wollen, so schreiben wir die Funktion \arg mit zwei Vektoren als Funktionsargumenten an und meinen damit:

$$\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \arg(\vec{r}_1) - \arg(\vec{r}_2) = \beta_1 - \beta_2 \quad (1.38)$$

Der Winkel zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 ist bis auf das Vorzeichen gleich dem Winkel zwischen \vec{r}_2 und \vec{r}_1 :

$$\arg(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \arg(\vec{r}_2) - \arg(\vec{r}_1) = -\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \beta_2 - \beta_1 \quad (1.39)$$

Einsvektor

Einen besonderen Fall der Vektoren stellen die Einsvektoren dar, die mitunter auch als Einheitsvektoren bezeichnet werden. Ihre Länge beträgt jeweils eins. Die Einsvektoren, die in die x -, y - und z -Richtung zeigen, sind:

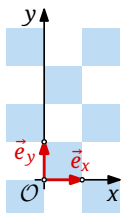
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Zwei dieser Einsvektoren sind in Bild 1.13a dargestellt.

Den Einsvektor \vec{e}_{r_1} eines beliebigen Vektors \vec{r}_1 können wir aus

$$\vec{e}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} \quad (1.41)$$

berechnen. Die Länge des **Richtungsvektors** \vec{e}_{r_1} beträgt eins und er weist dieselbe Richtung wie \vec{r}_1 auf.



(a)

Bild 1.13 Einsvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y

Orthogonalität



Zwei Vektoren sind zueinander **orthogonal** ...



... wenn sie miteinander einen rechten Winkel einschließen!

Diese Orthogonalität ist gleichbedeutend mit der Formulierung, dass diese Vektoren aufeinander senkrecht oder zueinander im rechten Winkel stehen.

Zwei beliebige Einsektoren aus Gl. (1.40) sind jeweils zueinander orthogonal.

Multiplikation mit Skalar

Wenn wir einen Vektor \vec{r}_1 mit einem Skalar a multiplizieren, so müssen wir jede Koordinate mit dem Skalar multiplizieren, wie das in Bild 1.14 dargestellt ist:

$$a \cdot \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot y_1 \\ a \cdot z_1 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Als Besonderheit dieser Eigenschaft können wir den Vektor \vec{r}_1 auch als Summe der Einsektoren aus Gl. (1.40) – jeweils multipliziert mit den Koordinatenwerten – konstruieren:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + z_1 \cdot \vec{e}_z \\ &= x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_x} + y_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_y} + z_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_z} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1 \cdot \vec{e}_x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_1 \cdot \vec{e}_y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{z_1 \cdot \vec{e}_z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.43)$$

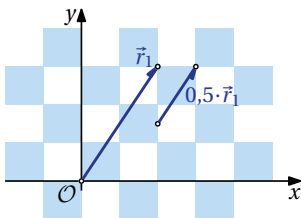


Bild 1.14 Multiplikation von \vec{r}_1 mit Skalar 0,5

Inneres Produkt

Wir unterscheiden in der Physik bei Vektoren das innere und das äußere Produkt. Das **innere Produkt** oder **Skalarprodukt** ist das Produkt zweier Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , dessen Resultat eine skalare Größe ist. Das Multiplikationszeichen ist der Punkt im Ausdruck $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$. Die Berechnungsvorschrift lautet:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (1.44)$$

Alternativ können wir das innere Produkt auch über folgende Gleichung bestimmen:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos(\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) \quad (1.45)$$

Das Resultat des inneren Produkts kann positiv, negativ oder null sein. Das Skalarprodukt ist **kommutativ**; dies bedeutet:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \quad (1.46)$$



Das **innere Produkt** $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ **ergibt** eine **skalare Größe** und hat folgende Eigenschaften:

- Das innere Produkt zweier Vektoren, die **orthogonal** zueinander sind, ist stets **null**.
- Für das innere Produkt zweier Vektoren, die in dieselbe Richtung gerichtet sind, gilt $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.
- Für das innere Produkt zweier Vektoren, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen, gilt $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = -|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.
- Das innere Produkt eines Vektors mit sich selbst ($\vec{r}_2 = \vec{r}_1$) liefert das Quadrat seiner Länge: $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = |\vec{r}|^2$

Wenn wir das innere Produkt eines Vektors \vec{r}_1 mit einem Einsektor bestimmen, dann erhalten wir den Längenteil dieses Vektors, der in der Richtung des verwendeten Einsektors auftritt. Das bedeutet konkret mit den Einsektoren aus Gl. (1.40), dass wir die Koordinaten des Vektors $\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + z_1 \cdot \vec{e}_z$ bestimmen können:

$$\begin{aligned} x_1 &= \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_x & y_1 &= \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_y & z_1 &= \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.47)$$



Ergibt das innere Produkt eines Vektors mit einem Einsektor null, so ist der Längenteil in Richtung des verwendeten Einsektors ebenso null. Als Konsequenz davon müssen der Vektor und der Einsektor zueinander **orthogonal** sein.

Äußeres Produkt

Das **äußere Produkt** oder **Vektorprodukt** oder **Exprodukt** ist das Produkt zweier Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , dessen Ergebnis wiederum ein Vektor ist. Als Multiplikationszeichen wird das Zeichen \times verwendet, das »ex« gesprochen wird. Ganz allgemein gilt, dass der Ergebnisvektor von $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ sowohl zu \vec{r}_1 als auch zu \vec{r}_2 **orthogonal** ist. Konkret erhält man die Richtung des Ergebnisvektors, wenn man \vec{r}_1 über den kleineren der beiden Winkel in \vec{r}_2 dreht, wie das in Bild 1.15a und b dargestellt ist. Wenn die Finger der rechten Hand die Drehrichtung angeben, so zeigt der Daumen in Richtung des Ergebnisvektors.

Die Berechnungsvorschrift für das äußere Produkt lautet:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & x_1 & x_2 \\ \vec{e}_y & y_1 & y_2 \\ \vec{e}_z & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 \\ z_1 \cdot x_2 - z_2 \cdot x_1 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$



Das Vektorprodukt wird aus der **Determinante** einer Matrix berechnet, in deren drei Spalten der Reihe nach

- die drei Einsektoren in der Reihenfolge \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z ,
- der Vektor \vec{r}_1 und danach
- der Vektor \vec{r}_2 stehen.

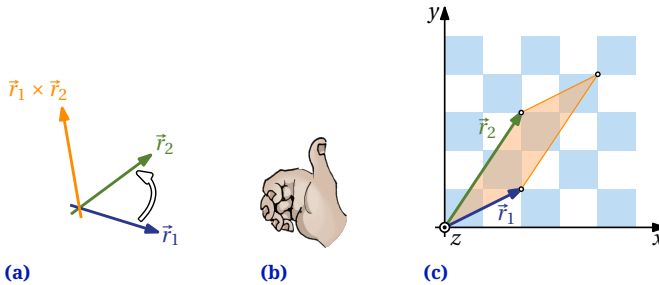


Bild 1.15 Äußeres Produkt: (a) Dreht man \vec{r}_1 über den kleineren der beiden Winkel in \vec{r}_2 in Richtung (b) der Finger der rechten Hand, dann zeigt der Daumen in Richtung des Ergebnisvektors $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, (c) Betrag des äußeren Produkts $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ ist gleich der Fläche des aus \vec{r}_1 und \vec{r}_2 gebildeten Parallelogramms

Den Betrag des Vektorprodukts $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ können wir alternativ auch aus den Längen und Winkeln der beiden Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 berechnen:⁴⁾

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot |\sin(\arg(\vec{r}_1, \vec{r}_2))| \quad (1.49)$$

Dieser Betrag hat auch eine grafische Interpretation in der Mathematik: Er ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 aufgespannten Parallelogramms, das in **Bild 1.15c** für zwei ebene Vektoren dargestellt ist. Wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren gleich 90° ist, dann wird aus dem Parallelogramm ein Rechteck mit der Fläche $|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.

Das äußere Produkt ist nicht kommutativ. Stattdessen gilt allgemein:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_2 \times \vec{r}_1 \quad (1.50)$$



Das **äußere Produkt** $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ hat ...



... und folgende Eigenschaften:

- Das äußere Produkt zweier **paralleler Vektoren** ist stets der **Nullvektor**.
- Der Betrag des äußeren Produkts zweier Vektoren, die zueinander **orthogonal** sind, beträgt $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|$.

Wenn die Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 in der x - y -Ebene liegen und damit keine z -Koordinate enthalten, dann weist das äußere Produkt ausschließlich eine z -Koordinate auf:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \cdot \vec{e}_z \quad (1.51)$$



Ob wir das innere oder das äußere **Produkt** auf zwei Vektoren anwenden müssen, ist eine Folge der zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhänge. Anders gesagt: die **Naturgesetze** geben uns vor, welches Produkt wir in welchem Zusammenhang anzuwenden haben. Einen unmittelbaren Hinweis gibt dabei immer, ob das behandelte Ergebnis eine skalare Größe oder ein Vektor ist.

⁴ Kennen wir umgekehrt die Beträge des Ergebnisvektors sowie der Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , so können wir daraus den Winkel zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 bestimmen. Dies funktioniert ganz allgemein auch für dreidimensionale Vektoren, nicht nur für zweidimensionale Vektoren in der x - y -Ebene.

Äußeres Produkt der Einsvektoren

Wenn wir das äußere Produkt zweier Einsvektoren aus Gl. (1.40) unter Berücksichtigung von Bild 1.15 bilden, dann erhalten wir:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \qquad (1.52)$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x \qquad (1.53)$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \qquad (1.54)$$



Unter der **zyklischen Abfolge** der Indizes x, y, z verstehen wir:

- Index y folgt auf Index x .
- Index z folgt auf Index y .
- Index x folgt auf Index z .

Das äußere Produkt zweier unterschiedlicher Einsvektoren, deren Indizes zyklisch nacheinander abfolgen (z. B. \vec{e}_y folgt auf \vec{e}_x in $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$), ergibt den dritten Einsvektor mit positivem Vorzeichen. Folgen die Indizes hingegen nicht zyklisch aufeinander (z. B. \vec{e}_x folgt nicht auf \vec{e}_y in $\vec{e}_y \times \vec{e}_x$), so ist das Vorzeichen des Ergebnisvektors negativ.

Division

Die Division zweier Vektoren ist nicht definiert.

Relation

Zwei Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 sind dann gleich, wenn jeweils ihre x -, y - und z -Koordinaten gleich sind. Ein Vektor \vec{r}_1 kann aber nicht größer oder kleiner als ein Vektor \vec{r}_2 sein. Die Relationen größer oder kleiner können wir nur auf skalare Kenngrößen von Vektoren – wie etwa deren Länge oder Koordinaten – anwenden.



Deutsch

Äußeres Produkt
Allgemeines Dreieck
Einsvektor
Länge eines Vektors
Inneres Produkt
Senkrecht auf
Vektor

English

Outer product
General triangle
Unity vector
Magnitude of a vector
Inner product
Perpendicular to
Vector

1.3 Komplexe Rechnung

Wir benötigen die komplexe Rechnung in der Wechsel- und Drehstromtechnik. Damit sind wir in der Lage, die zeitabhängigen sinus- bzw. kosinusförmigen Spannungen und Ströme auf eine mathematisch sehr einfache Art und Weise zu behandeln. Für die komplexen Zahlen benötigen wir die sogenannte **imaginäre Einheit**, die in der Elektrotechnik mit »j« und in der Mathematik mit »i« bezeichnet wird.

Das Quadrat der imaginären Einheit j ergibt:

$$\boxed{j^2 = -1} \quad (1.55)$$

Da keine reelle Zahl existiert, deren Quadrat -1 ergibt, eröffnet die imaginäre Einheit einen neuen Zahlenbereich. Die reellen und imaginären Zahlen bilden gemeinsam die Zahlenmenge \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

Kartesische Darstellung

Eine beliebige komplexe Zahl⁵⁾ $\underline{z}_1 \in \mathbb{C}$ weist den Realteil x_1 und den Imaginärteil y_1 auf. Die zugehörige Schreibweise über Real- und Imaginärteil nennen wir die kartesische Darstellung der komplexen Zahl \underline{z}_1 :

$$\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1 \quad (1.56)$$

Die komplexe Zahl \underline{z}_1 versehen wir mit einem Unterstrich, um sie von einer reellen Zahl zu unterscheiden.



Sowohl der **Real-** als auch der **Imaginärteil** sind ...



... jeweils eine reelle Zahl!

Erst die **Multiplikation mit j** macht aus $j \cdot y_1$ eine **imaginäre Zahl**.

Der Real- und Imaginärteil werden in diesem Zusammenhang über die Funktionen Re und Im aus der komplexen Zahl \underline{z}_1 ermittelt:

$$\text{Re}(\underline{z}_1) = x_1 \quad \text{Im}(\underline{z}_1) = y_1 \quad (1.57)$$

Zu den komplexen Zahlen gehören folgende Begriffe und Eigenschaften:

Komplexe Ebene. Die komplexe Ebene oder **Gaußsche Zahlenebene** in **Bild 1.16a** ist eine Ebene, die über zwei rechtwinkelig zueinander stehende Achsen aufgespannt wird:

⁵⁾ Die Schreibweise $\underline{z}_1 \in \mathbb{C}$ besagt, dass \underline{z}_1 ein Element der Zahlenmenge \mathbb{C} ist.

Reelle Achse. Die reelle Achse »Re« zeichnen wir meist nach rechts.

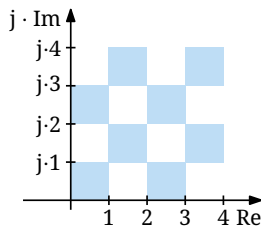
Imaginäre Achse. Die imaginäre Achse » $j \cdot \text{Im}$ « ist um 90° im mathematisch positiven Sinn (\odot) gegenüber der reellen Achse verdreht. In **Bild 1.16b** zeigt diese Achse nach oben.

Komplexe Zahl. Eine komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ finden wir in der Ebene, indem wir

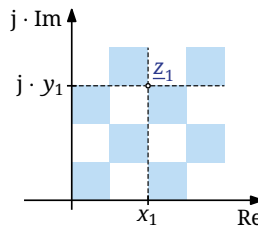
- eine gestrichelte Linie senkrecht auf die reelle Achse bei x_1 und
- eine gestrichelte Linie senkrecht auf die imaginäre Achse bei $j \cdot y_1$ zeichnen.
- Der Schnittpunkt der gestrichelten Linien repräsentiert die komplexe Zahl \underline{z}_1 in der komplexen Ebene. Diese komplexe Zahl ist in **Bild 1.16b** durch eine kreisförmige Markierung (\circ) repräsentiert.

Komplexer Pfeil. Wir repräsentieren eine komplexe Zahl in der Ebene in aller Regel durch einen »komplexen« Pfeil, wie er in **Bild 1.17a** dargestellt ist. Dazu zeichnen wir diesen Pfeil vom Ursprung zum eingezeichneten Punkt \underline{z}_1 .

Parallelverschiebung. Komplexe Pfeile darf man in der Wechselstromtechnik zur Veranschaulichung von grafischen Zusammenhängen parallel verschieben. Der in

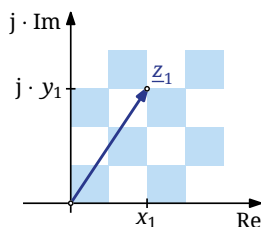


(a)

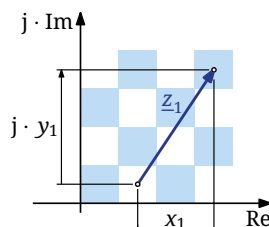


(b)

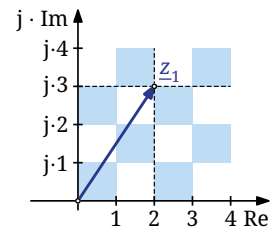
Bild 1.16 (a) Komplexe Ebene, (b) Konstruktion der komplexen Zahl \underline{z}_1 , mit kreisförmiger Markierung (\circ) in der komplexen Ebene



(a)



(b)



(c)

Bild 1.17 Repräsentation von \underline{z}_1 durch einen Pfeil: (a) allgemein für $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$, (b) komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ parallel verschoben, (c) komplexe Zahl $\underline{z}_1 = 2 + j \cdot 3$

Bild 1.17b dargestellte Pfeil repräsentiert daher dieselbe komplexe Zahl \underline{z}_1 wie in Bild 1.17a, da er dieselbe Länge und dieselbe Richtung aufweist.

Betrag

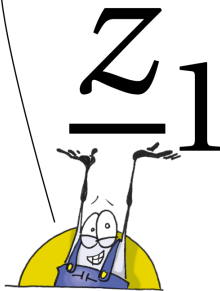
Der Betrag einer komplexen Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ ist gemäß Bild 1.18 die Länge des zugehörigen komplexen Zeigers. Nach dem Satz von Pythagoras bestimmen wir:

$$|\underline{z}_1| = \text{abs}(\underline{z}_1) = z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (1.58)$$

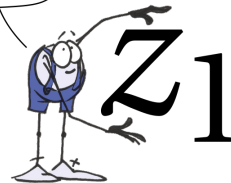


Für die **komplexe Zahl** \underline{z}_1 und deren **Betrag** z_1 gilt:

Die komplexe Zahl \underline{z}_1 erhält einen Unterstrich!



Der Betrag dieser komplexen Zahl wird ohne Unterstrich geschrieben!



Der Betrag des Vektors wird entweder durch zwei Betragsstriche um die komplexe Zahl \underline{z}_1 in der Form $|\underline{z}_1|$, durch die Funktion abs (Absolutwert) oder durch das Fortlassen des komplexen Unterstrichs gekennzeichnet, also durch z_1 .

Daher ist es fortan wichtig, komplexe Zahlen konsequent mit einem komplexen Unterstrich zu versehen, um eine Verwechslung mit den zugehörigen Beträgen zu vermeiden.

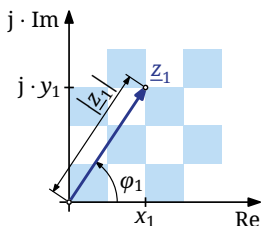


Bild 1.18 Komplexe Zahl \underline{z}_1 in der komplexen Ebene mit Betrag und Winkel

Winkel

Den Winkel φ_1 der komplexen Zahl \underline{z}_1 in [Bild 1.18](#) nennen wir auch das **Argument**. Wir bestimmen diese Größe mit der Funktion \arg (Argument):

$$\arg(\underline{z}_1) = \varphi_1 \quad (1.59)$$

Polardarstellung

Die komplexe Zahl $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ kann statt mit Real- und Imaginärteil auch über ihren Betrag und Winkel repräsentiert werden. Dafür gibt es die **Polarschreibweise**:

$$\underline{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1 \quad (1.60)$$

Dabei entspricht der Ausdruck $\angle \varphi_1$ dem Term $(\cos(\varphi_1) + j \cdot \sin(\varphi_1))$ und damit einem Zeiger mit der Länge eins und dem Winkel φ_1 . Aus dem Betrag z_1 und dem Winkel φ_1 können gemäß Gl. (1.57) der Real- und Imaginärteil bestimmt werden:

$$\operatorname{Re}(\underline{z}_1) = x_1 = z_1 \cdot \cos(\varphi_1) \quad \operatorname{Im}(\underline{z}_1) = y_1 = z_1 \cdot \sin(\varphi_1) \quad (1.61)$$



Jede **komplexe Zahl** kann gleichwertig ...



... in kartesischer oder polarer Form dargestellt werden!

Addition

Die Summe von $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ berechnen wir gemäß:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2) \quad (1.62)$$

Der Realteil der Summe ist die Summe der Realteile, der Imaginärteil der Summe berechnet sich aus der Summe der Imaginärteile. Grafisch setzen wir in [Bild 1.19a](#) bei der Summenbildung den Anfang eines der beiden Pfeile an die Pfeilspitze des anderen Pfeils.

Gegenzahl

Die zur komplexen Zahl $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ gehörige negative Zahl $-\underline{z}_2$ heißt Gegenzahl. Um sie zu bestimmen, müssen wir die Vorzeichen des Real- und Imaginärteils umdrehen:

$$-\underline{z}_2 = -x_2 - j \cdot y_2 \quad (1.63)$$

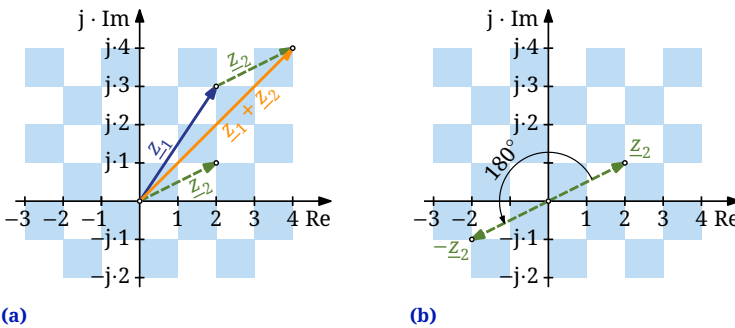
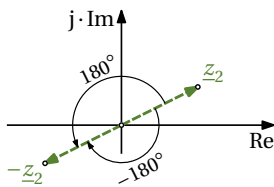


Bild 1.19 (a) Addition der komplexen Zahlen \underline{z}_1 und \underline{z}_2 , (b) komplexe Zahl \underline{z}_2 und Gegenzahl $-\underline{z}_2$



Die komplexe **Zahl** \underline{z}_2 und ihrer **Gegenzahl** $-\underline{z}_2$ unterscheiden sich um den Winkel $\pm 180^\circ$.



Subtraktion

Die Differenz aus $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ berechnen wir dadurch, indem wir \underline{z}_1 und die Gegenzahl $-\underline{z}_2$ addieren:

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = \underline{z}_1 + (-\underline{z}_2) = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2) \quad (1.64)$$

Bei der grafischen Subtraktion in **Bild 1.20a** werden die Pfeile von \underline{z}_1 und $-\underline{z}_2$ addiert.

Multiplikation

Das Produkt aus $\underline{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$ lässt sich in kartesischer Form durch Ausmultiplizieren bestimmen:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad (1.65)$$

Verwenden wir alternativ die Polardarstellung $\underline{z}_1 = z_1 \angle \varphi_1$ und $\underline{z}_2 = z_2 \angle \varphi_2$, so ergibt sich bei der Multiplikation:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2) \quad (1.66)$$

Der Betrag des Produkts berechnet sich aus dem Produkt der einzelnen Beträge, der Winkel des Produkts berechnet sich aus der Summe der einzelnen Winkel, wie das in [Bild 1.20b](#) gezeigt ist.

Potenzen der imaginären Einheit

Es gilt folgende Definition:

$$\boxed{j^0 = 1 \angle 0^\circ = 1} \quad (1.67)$$

Zusätzlich erhalten wir unter Berücksichtigung von $j^2 = -1$:

$$j = j^1 = 1 \angle 90^\circ \quad \frac{1}{j} = j^{-1} = 1 \angle -90^\circ = -j \quad (1.68)$$

$$j^2 = 1 \angle 180^\circ = -1 \quad \frac{1}{j^2} = j^{-2} = 1 \angle -180^\circ = -1 \quad (1.69)$$

$$j^3 = 1 \angle 270^\circ = -j \quad \frac{1}{j^3} = j^{-3} = 1 \angle -270^\circ = j \quad (1.70)$$

$$j^4 = 1 \angle 0^\circ = 1 \quad \frac{1}{j^4} = j^{-4} = 1 \angle 0^\circ = 1 \quad (1.71)$$

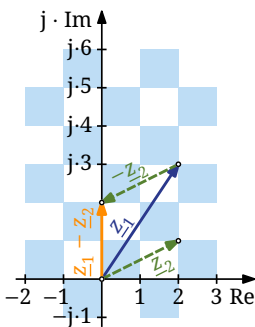
Die grafische Darstellung dieser Potenzen ist in [Bild 1.21a](#) angegeben.

Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit Potenzen von j sind in [Bild 1.21b](#) gezeigt:

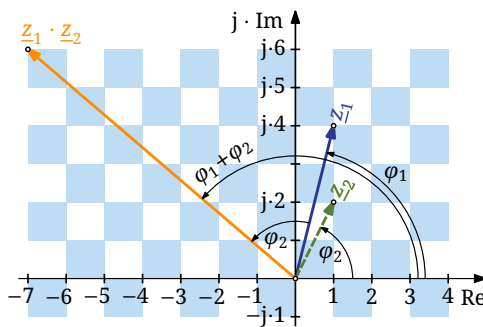
Multiplikation mit j . Multipliziert man die komplexe Zahl $\underline{z}_2 = z_2 \angle \varphi_2$ mit j , so ergibt das Produkt eine komplexe Zahl mit dem Betrag z_2 , aber um 90° im mathematisch positiven Sinn (\odot) verdreht:

$$\underline{z}_2 \cdot j = \underbrace{z_2 \angle \varphi_2}_{z_2} \cdot \underbrace{1 \angle 90^\circ}_j = z_2 \cdot \angle (\varphi_2 + 90^\circ) \quad (1.72)$$

Drehung um 90°



(a)



(b)

Bild 1.20 (a) Subtraktion und (b) Multiplikation der komplexen Zahlen \underline{z}_1 und \underline{z}_2