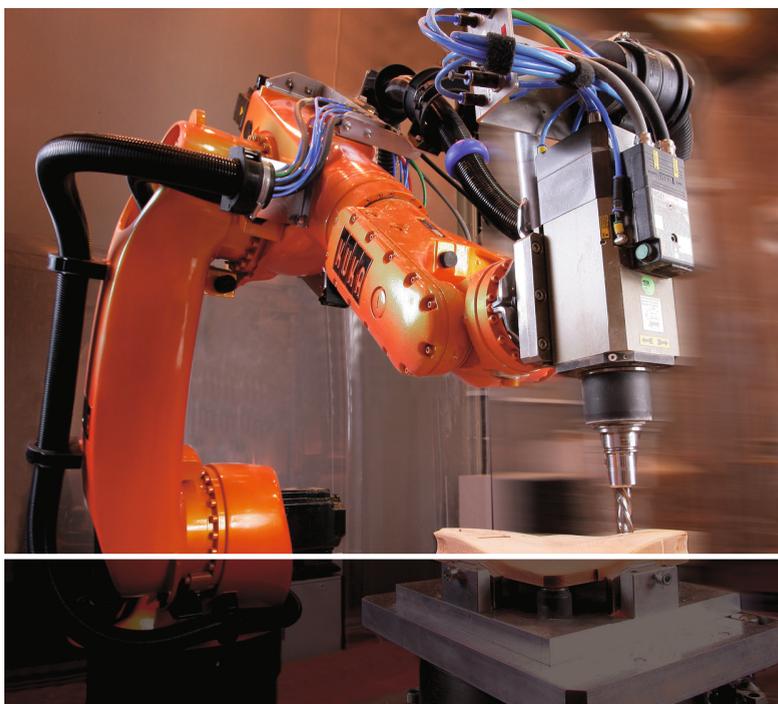


Georg Flegel
Karl Birnstiel
Wolfgang Nerreter



Elektrotechnik für Maschinenbau und Mechatronik



11., aktualisierte Auflage

HANSER



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-p9t89-3a6gz

plus.hanser-fachbuch.de



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Georg Flegel, Karl Birnstiel, Wolfgang Nerreter

Elektrotechnik für Maschinenbau und Mechatronik

11., aktualisierte Auflage

HANSER

Die Autoren:

Dipl.-Ing. Georg Flegel †, 1910–1984

Prof. Dr.-Ing. Karl Birnstiel †, 1931–2021

Bearbeitung seit der 8. Auflage:

Prof. Dr.-Ing. Holger Borchering, Hessisch-Oldendorf

Prof. Dr.-Ing. Uwe Meier, Lemgo

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Nerreter, Lemgo



Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benützt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2023 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelmotiv: © KUKA AG, Zugspitzstraße 140, 86165 Augsburg

Satz: Prof. Dr. Wolfgang Nerreter

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-47275-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-47931-9

Vorwort zur 11. Auflage

Als Georg Flegel im Jahr 1961 die erste Auflage dieses Lehrbuches verfasste, war er der Ansicht, dass Maschinenbau und Elektrotechnik einander bedingen und nicht ausschließen. Seine sorgfältige Art, die Elektrotechnik dem Maschinenbauer zu erklären, hat diesem Werk viele Auflagen eingebracht.

Georg Flegel hat noch die 6. Auflage seines Werkes erlebt. Von der 3. bis zur 7. Auflage hat Karl Birnstiel das Werk mitbetreut. Zur 7. Auflage kam Wolfgang Nerreter als Autor hinzu.

Leider schied Karl Birnstiel vor Beginn der Bearbeitung zur 8. Auflage aus dem Autorenteam aus. Als neue Co-Autoren haben Holger Borchering das Kapitel Leistungselektronik und Uwe Meier das Kapitel Informationsübertragung bearbeitet.

Zwischen der 1. und dieser 11. Auflage sind mehr als sechs Jahrzehnte vergangen, in denen sich vor allem in der Technik viele Neuentwicklungen ergeben haben. Konnte 1961 noch das gesamte Fachwissen der Elektrotechnik weitgehend in einem Band untergebracht werden, so ist dies nunmehr unmöglich. Die aktuelle Auflage ist daher lediglich als Einführung in die Elektrotechnik zu verstehen.

Man kann den Umfang des Werkes nicht beliebig anwachsen lassen. Ein Lehrbuch muss nicht nur bezahlbar, sondern auch studierbar bleiben.

Wer in die einzelnen Fachgebiete tiefer eindringen will, sollte dies mithilfe der Fachliteratur tun. Deshalb ist im Anhang ein nach Kapiteln geordnetes Literaturverzeichnis enthalten.

In den Kapiteln 1 – 11 sind die Grundlagen dargestellt und in den Kapiteln 12 – 18 werden Anwendungen beschrieben. Der Lehrtext wird durch insgesamt 141 Rechenbeispiele mit Lösungen ergänzt, die zeigen sollen, wie der Lehrstoff anzuwenden ist. Unter <http://www.emaschtronik.de> und plus.hanser-fachbuch.de lassen sich zusätzliche Informationen sowie zu etlichen Kapiteln Aufgaben mit Lösungen abrufen.

In dieser 11. Auflage haben wir das Kap. 8 auf das Programm LTspice umgestellt, weil es das bisher

verwendete Programm PSpice nicht mehr gibt. Vor allem in das Kap. 18, aber auch in andere Kapitel wurden einige Aktualisierungen eingebracht. Der Abschnitt Einheiten im Anhang wurde auf den neuesten Stand gebracht.

Zum zweispaltigen Satz sind wir auf den Rat von Fachleuten übergegangen. Das Auge vermag die Spaltenbreite „mit einem Blick“ zu erfassen, wodurch das Lesen erleichtert wird. Zwar sind viele Leser an einspaltig gesetzte Lehrbücher gewöhnt, aber wir sind der Meinung, dass sie den zweispaltigen Satz wegen seiner Vorteile akzeptieren.

Da sich die mathematischen Hilfsmittel geändert haben und weiterentwickelt worden sind, können wir auf umständliche Herleitungen verzichten. Wir brauchen nicht mehr zu zeigen, wie algebraische Gleichungen umgeformt oder z.B. die Lösungen eines linearen Gleichungssystems gefunden werden; die Studierenden können dies dem Taschenrechner oder einem Mathematikprogramm überlassen.

Die wichtigsten Fachausdrücke der Elektrotechnik werden beim ersten Erscheinen im Text auch in *englischer Sprache* gebracht; dabei bevorzugen wir die *amerikanische* Schreibweise, da sie in Veröffentlichungen überwiegend verwendet wird. Nicht nur in der Elektrotechnik, sondern auch im Maschinenbau und in der Mechatronik ist die englische Fachsprache zunehmend von Bedeutung.

Wir hoffen, dass unser Buch weiterhin gut aufgenommen wird, und sind dankbar für Nachrichten an den Verlag mit Verbesserungsvorschlägen, Kritik oder Fehlermeldungen.

Dem Carl Hanser Verlag danken wir für die gute und vertrauensvolle Zusammenarbeit. Insbesondere danken wir Frau Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg für die Betreuung des Werkes.

Nun noch ein Wort an Sie, liebe Leserin und lieber Leser: Wir freuen uns, wenn Sie uns Vertrauen entgegenbringen und mit unserem Buch arbeiten. Für Ihr Studium wünschen Ihnen viel Erfolg

im Frühjahr 2023

die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe	11
1.1 Elektrische Ladung	11
1.2 Elektrischer Strom	14
1.3 Leistung und Energie	16
1.4 Elektrischer Widerstand	19
1.5 Quellen	23
2 Gleichstrom-Schaltungen	26
2.1 Bestimmung des Arbeitspunktes	26
2.2 Knotensatz	26
2.3 Maschensatz	29
2.4 Ersatzschaltungen	32
2.5 Überlagerungssatz	34
2.6 Knotenpotenzialverfahren	35
3 Zeitabhängige Größen	37
3.1 Periodische Größen	37
3.2 Sinusgrößen	39
4 Elektrisches Feld	42
4.1 Feldlinien und Äquipotenzialflächen	42
4.2 Kondensatoren	43
4.3 Flussdichte und Feldstärke	43
4.4 Energie eines geladenen Kondensators	45
4.5 Kondensator an Sinusspannung	45
4.6 Polarisationsverluste	46
4.7 Schaltvorgang in einer Schaltung mit einem Kondensator	47
5 Magnetisches Feld	48
5.1 Feldlinien von Magneten	48
5.2 Magnetische Flussdichte	49
5.3 Durchflutungsgesetz	50
5.4 Spulen	51
5.5 Materie im Magnetfeld	52
5.6 Magnetische Werkstoffe	54
5.7 Magnetische Kreise	56
5.8 Induktion	58
5.9 Energie des magnetischen Feldes	62
5.10 Verluste im magnetischen Feld	64
5.11 Kräfte im Magnetfeld	66
6 Wechselstrom-Schaltungen	69
6.1 Grundeintore	69
6.2 Widerstand und Leitwert	70
6.3 Leistung und Arbeit	71
6.4 Verbindung von Grundeintoren	75
6.5 Wechselstromnetze	78
6.6 Drehstrom	80

7 Bauelemente	86
7.1 Widerstände	86
7.2 Kondensatoren	88
7.3 Thermoelektrische Bauelemente	90
7.4 Dioden	91
7.5 Transistoren	98
8 Rechnergestützte Simulation	101
8.1 Netzwerkanalyse	101
8.2 Schaltplan	101
8.3 Gleichanalyse	102
8.4 Variation von Bauelement-Werten	102
8.5 Transientanalyse	103
8.6 Sinusanalyse	104
8.7 Großsignalanalyse	104
9 Analoge Schaltungen	105
9.1 Stabilisierungsschaltungen	105
9.2 Transistorschaltungen	106
9.3 Operationsverstärker	107
9.4 Rückkopplungsschaltungen	109
9.5 Filter	112
10 Digitale Schaltungen	115
10.1 Gatter	115
10.2 Schaltwerke	120
10.3 Kippschaltungen	123
10.4 Frequenzteiler und Zähler	126
10.5 Rechenoperationen mit Dualzahlen	128
10.6 Verarbeitung von Bitmustern	129
10.7 Integrierte Schaltungen	133
11 Elektrochemie	137
11.1 Elektrischer Strom in Flüssigkeiten	137
11.2 FARADAYSche Gesetze	138
11.3 Elektrochemische Spannungsreihe	139
11.4 Batterien	140
11.5 Akkumulatoren	142
11.6 Brennstoffzellen	144
11.7 Elektrolytische Korrosion	145
12 Elektrische Maschinen	146
12.1 Transformator	146
12.2 Rotierende elektrische Maschinen	160
12.3 Gleichstrommaschine	163
12.4 Drehstrom-Asynchronmaschine	174
12.5 Einphasen-Asynchronmotor	191
12.6 Synchronmaschine	193
12.7 Linearmotoren	201
12.8 Kleinmotoren	204

12.9	Erwärmung und Kühlung	210
12.10	Motorparameter	213
13	Elektrische Antriebe	215
13.1	Stationärer Betrieb	215
13.2	Betriebsarten	216
13.3	Trägheitsmoment	218
13.4	Dynamischer Betrieb	219
13.5	Anlauf	219
13.6	Statische Stabilität	221
13.7	Direktantriebe	221
14	Elektrische Messtechnik	223
14.1	Grundbegriffe des Messens	223
14.2	Elektromechanische Messgeräte	225
14.3	Oszilloskop	228
14.4	Digitale Messgeräte	232
14.5	Messbrücken	240
14.6	Sensoren	241
14.7	Messung von Spannung und Strom	244
14.8	Leistungs- und Energiemessung	247
14.9	Messung von C und L	250
14.10	Zeitmessung	251
14.11	Elektromagnetische Verträglichkeit	252
15	Steuer- und Regelungstechnik	253
15.1	Die Begriffe Steuern und Regeln	253
15.2	Entwicklung der Steuerungstechnik	254
15.3	Komponenten von Steuerungen	255
15.4	Steuerung elektrischer Maschinen	258
15.5	Regelungstechnik	260
16	Leistungselektronik	269
16.1	Entwicklung der Leistungselektronik	269
16.2	Aufgaben der Leistungselektronik	269
16.3	Leistungshalbleiter	270
16.4	Ungesteuerte Gleichrichter	274
16.5	Netzgeführte Stromrichter	277
16.6	Selbstgeführte Stromrichter	282
16.7	Frequenzumrichter	286
16.8	Wechsel- und Drehstromsteller	293
16.9	EMV von Stromrichtern	294
17	Informationsübertragung	296
17.1	Grundbegriffe	296
17.2	Leitungen und Kabel	298
17.3	Lichtwellenleiter	303
17.4	Funkkanäle	307
17.5	LAN, Ethernet	312
17.6	TCP/IP, OSI-Modell	314

17.7	Feldbusse	316
17.8	USB	317
18	Energieübertragung	319
18.1	Energieversorgung	319
18.2	Energienetze	320
18.3	Überstromschutz	326
18.4	Erder und Erdung	327
18.5	Schutzmaßnahmen	328
18.6	USV	333
	Verwendete Formelzeichen	334
	Einheiten	335
	Komplexe Rechnung	337
	Literatur	338
	Namenverzeichnis	340
	Sachwortverzeichnis	341
	Und zum Schluss: Bloß nicht	350

1 Grundbegriffe

1.1 Elektrische Ladung

1.1.1 Mit Bernstein fing alles an

Schon im klassischen Griechenland war folgendes Experiment bekannt: Wird Bernstein mit einem Katzenfell gerieben, so zieht er leichte Gegenstände, z. B. eine Flaumfeder, an. Nach dem griechischen Wort ἤλεκτρο für Bernstein wurden um 1600 alle derartigen Erscheinungen „elektrisch“ genannt. Man bezeichnet den Gegenstand, von dem die Kraftwirkung ausgeht, als „geladen“ und sagt, er trägt eine **Ladung** (*charge*).

Nach systematisch durchgeführten Experimenten erkannte man, dass es zwei Arten von Ladungen gibt, und formulierte:

Gleichartige Ladungen stoßen einander ab; ungleichartige Ladungen ziehen einander an.

Die unterschiedlichen Arten der Ladung werden durch die Vorzeichen „+“ und „-“ gekennzeichnet.

Das Formelzeichen für die physikalische Größe Ladung ist Q ; die Einheit

$$[Q] = 1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C}$$

der Ladung ist nach CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB benannt, der als erster im Jahr 1785 genaue Messungen durchführte; auch werden nach ihm die Kräfte auf Ladungen als **COULOMB-Kräfte** bezeichnet. Er erkannte, dass der Betrag der Kraft proportional dem Produkt der Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes a der Ladungen ist:

$$F \sim \frac{|Q_1 Q_2|}{a^2} \quad (1.1)$$

Zum Heben von Lasten sind die COULOMB-Kräfte zwar nicht geeignet, aber dennoch gibt es wichtige technische Anwendungen; so werden z. B. beim Laserdrucker die elektrisch geladenen Tonerpartikel durch COULOMB-Kräfte an den vorbestimmten Stellen festgehalten, bis sie durch Erhitzen aufgeschmolzen und damit fixiert sind.



Bild 1.1 COULOMB-Kräfte auf Ladungen

Die COULOMB-Kräfte auf Ladungen sind formelmäßig analog zur Gravitationskraft, mit der sich zwei schwere Massen m_1 und m_2 anziehen:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{a^2} \quad (1.2)$$

Im Gegensatz zu der stets positiven Masse können Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben; es gibt bei ihnen anziehende und abstoßende Kräfte.

1.1.2 Ausgleich und Trennung von Ladungen

Jede Ladung ist an einen **Ladungsträger** (*charge carrier*) gebunden. Diese sind die Atombausteine Elektron und Proton; ihre Ladung wird als **Elementarladung** (*elementary charge*) bezeichnet, sie erhält das Formelzeichen e :

$$e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 0,16022 \text{ aC} \quad (1.3)$$

Jedes Proton trägt eine positive, jedes Elektron eine negative Elementarladung; Neutronen sind ungeladen.

Für die Beschreibung der grundlegenden Vorgänge in der Elektrotechnik ist das **BOHRSCHE Atommodell** ausreichend; darin besteht ein Atom aus Protonen und Neutronen, die den Atomkern bilden, und Elektronen, welche diesen auf Kreis- oder Ellipsenbahnen umlaufen. Der Durchmesser eines Atomkerns ist wesentlich geringer als der des betreffenden Atoms. Im Atomkern wirken auf die Protonen und Neutronen starke Anziehungskräfte mit geringer Reichweite; diese **Kernkräfte** sind wesentlich stärker als die COULOMB-Kräfte, mit denen die Protonen einander abstoßen.

Jede Ladung Q ist ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e .

Beispiel 1.1

Wir wollen die Anzahl der Elektronen berechnen, die zur Ladung $Q = -1\text{ C}$ gehören.

$$Q = -1\text{ C} = k \cdot (-e)$$

$$k = -1\text{ C} / (-1,6022 \cdot 10^{-19}\text{ C}) = 6,24 \cdot 10^{18}$$

Werden zwei Stoffe, die Ladungen $Q_1 = -Q_2$ (gleicher Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen) tragen, zur Berührung gebracht, so können sich die Ladungen ausgleichen, wobei Energie abgegeben wird; dies setzt allerdings voraus, dass die Ladungsträger in den betreffenden Stoffen beweglich sind. Der Ladungsausgleich wird durch die Kräfte bewirkt, mit denen sich die Ladungen anziehen.

Umgekehrt ist für die Trennung zweier Ladungen eine Energiezufuhr erforderlich; so sammeln sich z. B. beim Reiben des Bernsteins auf ihm und dem Katzenfell unterschiedliche Ladungen an. Dieses Experiment lässt sich auch mit einem Kunststoffkamm nachvollziehen, der an einem Pullover gerieben wird.

1.1.3 Leiter und Nichtleiter

Die elektrischen Wirkungen des geriebenen Gegenstandes sind dann längere Zeit nachweisbar, wenn sich die Ladungsträger in diesem Gegenstand nicht oder nur sehr wenig bewegen können. Man bezeichnet einen derartigen **Nichtleiter** als **Isolator** (*insulator*); hierzu gehören z. B. Glas, Porzellan und die meisten Kunststoffe, aber auch einige Flüssigkeiten, z. B. reines Wasser oder Transformatoröl, und sämtliche Gase.

Ein Stoff, in dem sich Ladungen *gut* bewegen können, wird als **Leiter** (*conductor*) bezeichnet. Zu diesen Stoffen gehören z. B. viele Metalle. Der beste Leiter ist Silber, dann folgen Kupfer, Aluminium und Gold.

In Metallen sind ausschließlich *Elektronen* die beweglichen Ladungsträger. Wie man sich diese Beweglichkeit erklären kann, soll im Folgenden kurz erläutert werden.

Man stellt sich vor, dass die Elektronen eines Atoms in *Schalen* angeordnet sind; das Bild 1.2 zeigt als Beispiel das **Modell** – eine vereinfachte Darstellung – des Aluminiumatoms, bei dem sich drei Elektronen in der äußeren Schale befinden, die **Valenzelektronen** genannt werden. Wegen des höheren Abstandes vom Atomkern sind sie mit geringeren COULOMB-Kräften an den positiv geladenen Atomkern gebunden als die übrigen Elektronen auf den inneren Schalen.

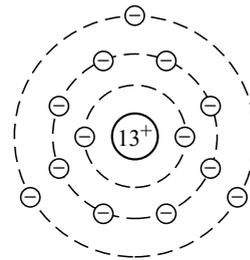


Bild 1.2 Modell des Aluminiumatoms

Der Abstand der Metallatome in einem Kristallgitter liegt in der Größenordnung des Atomdurchmessers. Auf die Valenzelektronen wirken auch die anziehenden Kräfte von den Atomkernen der benachbarten Atome mit der Folge, dass von jedem Atom im Durchschnitt ein Valenzelektron abgelöst wird, das als frei bewegliches Elektron nicht mehr an ein bestimmtes Atom gebunden ist, sondern der Gesamtheit der Atome im Kristallverband angehört.

Ein Atom oder ein Molekül, das nach außen hin elektrisch geladen wirkt, wird als **Ion** bezeichnet; die Metallatome, denen je ein Elektron entzogen wurde, sind also **ionisiert**. Die frei beweglichen Elektronen führen in dem Raum zwischen den positiven Metallionen regellose und ungeordnete Bewegungen aus, die sich nach außen im Allgemeinen nicht bemerkbar machen.

Die frei beweglichen Elektronen verhalten sich im Metall wie die Moleküle eines Gases in einem geschlossenen Gefäß; sie werden deshalb in ihrer Gesamtheit auch als **Elektronengas** bezeichnet.

Zwischen den Leitern und den Nichtleitern steht eine weitere Art von Stoffen, die man als

Halbleiter (*semiconductor*) bezeichnet; hierzu gehören nicht nur Germanium und Silizium, sondern auch Mischkristalle wie z. B. GaAs oder SiC.

Halbleiter besitzen bei Zimmertemperatur nur wenige frei bewegliche Ladungen und wirken dabei nahezu wie Isolatoren; durch Energiezufuhr, z. B. durch Erwärmung, wird die Anzahl der Ladungen stark erhöht. Halbleiter-Bauelemente erhalten ihre besonderen Eigenschaften durch die Einlagerung von Fremdatomen in das Kristallgitter, was als **Dotierung** bezeichnet wird.

1.1.4 Elektrische Spannung

Ist ein Körper ungeladen, so heißt das nicht etwa, dass er keine Ladung enthält, sondern vielmehr, dass sich die (stets vorhandenen) Ladungen nach außen hin in ihrer Wirkung aufheben.

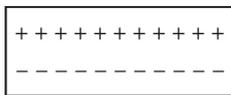


Bild 1.3 Die Elektrizitätsmengen eines ungeladenen Körpers heben sich nach außen hin auf

Sind in einem Körper A weniger und in einem anderen Körper B mehr Elektronen vorhanden als jeweils im ungeladenen Zustand, so wirkt der Körper A nach außen *positiv geladen* (Elektronenmangel) und der Körper B *negativ geladen* (Elektronenüberschuss). Zur besseren Übersichtlichkeit gibt man nur die jeweils über-zähligen Ladungen Q_p bzw. Q_n an.

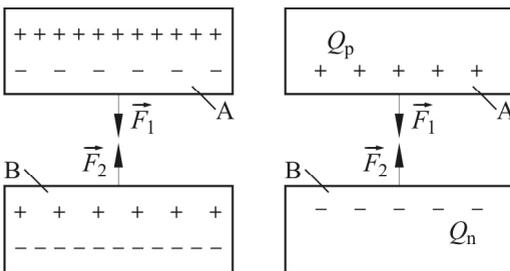


Bild 1.4 Elektronenmangel bewirkt die positive Ladung des Körpers A und Elektronenüberschuss die negative Ladung des Körpers B

Wie im Bild 1.4 dargestellt, bewirken die COULOMB-Kräfte eine Anziehung der beiden gegenseitig geladenen Körper A und B. Sollen nun die beiden Körper entgegen der Krafrichtung weiter voneinander entfernt werden, so wird hierfür *Energie* benötigt: Eine Ladungstrennung erfordert eine Energiezufuhr.

Man könnte nun, um die Ladungstrennung quantitativ zu beschreiben, die Energie W angeben, die für den Vorgang erforderlich ist. Diese Energie sagt jedoch nichts darüber aus, wie viel Ladung getrennt worden ist. Deshalb wird in der Elektrotechnik der Quotient aus Energie und Ladung verwendet, der als **elektrische Spannung** oder kurz **Spannung** (*voltage*) U bezeichnet wird:

$$U = \frac{W}{Q} \tag{1.4}$$

Die Einheit der Spannung U ist:

$$\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} = \mathbf{1 \text{ Volt}} = 1 \text{ V} \tag{1.5}$$

Der Begriff Spannung ist allgemein bekannt; so übt z. B. eine gespannte Zugfeder Kräfte auf ihre Endpunkte aus. Eine zeitlich konstante Spannung wird **Gleichspannung** (*direct voltage*) genannt.

Während es sich bei der Kraft um eine gerichtete Größe, also um einen **Vektor** handelt, ist die Spannung U als Quotient der ungerichteten Größen W und Q ebenfalls ungerichtet, sie ist also ein **Skalar**. Der Spannung U wird jedoch ein **Richtungssinn** von der positiven Ladung Q_p zur negativen Ladung Q_n zugeordnet (Bild 1.5).

Ist in einer Schaltung der Richtungssinn einer Spannung zunächst unbekannt, so nimmt man willkürlich einen **Bezugssinn** an, der durch einen **Bezugspfeil** dargestellt wird, und vereinbart:

Ist der Zahlenwert einer durch einen Bezugspfeil beschriebenen Spannung positiv (z. B. U_1 im Bild 1.5), so stimmt der Richtungssinn mit dem Bezugssinn überein; ist der Zahlenwert einer Spannung negativ, so sind Richtungssinn und Bezugssinn einander entgegengesetzt.

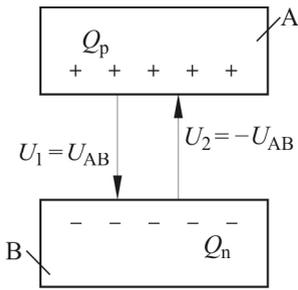


Bild 1.5 Zusammenhang zwischen dem Richtungssinn der Spannung U_{AB} und dem Bezugssinn U_1 bzw. U_2

Der Zusammenhang zwischen Bezugssinn und Richtungssinn ist bei der Spannungsmessung mit dem **Voltmeter** von Bedeutung. Der Bezugssinn der Spannung ist dabei von der mit „+“ bezeichneten Klemme zu der mit „-“ bezeichneten Klemme festgelegt (Bild 1.6). Wird bei der Messung ein positiver Wert angezeigt, so bedeutet dies, dass Bezugssinn und Richtungssinn übereinstimmen und eine Spannung mit dem Richtungssinn von „+“ nach „-“ anliegt.

Wird ein negativer Spannungswert angezeigt, so sind Bezugssinn und Richtungssinn einander entgegengesetzt und es liegt eine Spannung mit dem Richtungssinn von „-“ nach „+“ an.

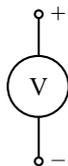


Bild 1.6 Voltmeter mit Klemmenbezeichnungen für Gleichspannung

1.2 Elektrischer Strom

1.2.1 Stromstärke

Eine geordnete Bewegung von Ladungsträgern wird als **elektrischer Strom** oder kurz als **Strom** (*current*) bezeichnet. Bewegen sich die Ladungsträger gleichmäßig mit konstanter Geschwindigkeit durch den Querschnitt eines Leiters, so liegt ein **Gleichstrom** (*direct current*) vor.

Die ungeordnete Bewegung der Elektronen in einem metallischen Leiter stellt keinen Strom dar.

Ein elektrischer Strom kann drei unterschiedliche **Wirkungen** hervorrufen:

- Erzeugung von Wärmeenergie;
- Erzeugung magnetischer Erscheinungen;
- Erzeugung chemischer Veränderungen der durchströmten Stoffe.

Jede dieser Wirkungen wird in der Elektrotechnik genutzt.

Unter der Stärke einer Strömung versteht man im Allgemeinen die auf die Zeit bezogene Menge der bewegten „Teilchen“. Beim elektrischen Strom wird Ladung bewegt und die **Stromstärke** I eines Gleichstromes ist der Quotient aus Ladung und Zeit:

$$I = \frac{Q}{t} \tag{1.6}$$

Die Einheit der Stromstärke I ist:

$$\frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}} = \mathbf{1 \text{ Ampere}} = 1 \text{ A} \tag{1.7}$$

Im technischen Sprachgebrauch wird zwischen dem Strom, also der Bewegung von Ladungen, und der Stromstärke häufig nicht unterschieden: Die Stromstärke wird meist kurz als „Strom“ bezeichnet.

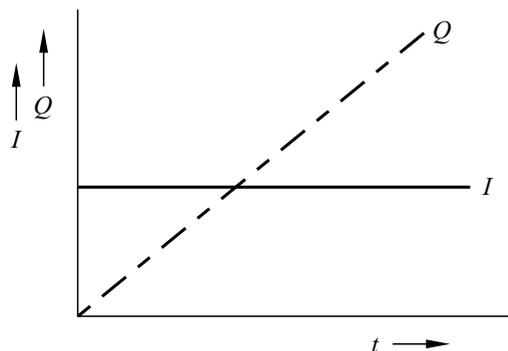


Bild 1.7 Ladungs-Zeit-Diagramm und Strom-Zeit-Diagramm eines Gleichstromes

1.2.2 Stromkreis

Ein Gleichstrom kann nur in einem geschlossenen Kreis fließen, der als **Stromkreis** (*circuit*) bezeichnet wird. Die Ladungsströmung wird von einer **Quelle** (*source*) angetrieben, welche die Ladungstrennung bewirkt. In einem Stromkreis mit metallischen Leitern liegt am Pluspol der Quelle ein *Mangel* und am Minuspol ein *Überschuss* negativer Ladungsträger vor.

Die Ladungstrennung kann durch elektrochemische Prozesse, z. B. bei Batterien oder Brennstoffzellen, oder durch einen elektromechanischen Energiewandler wie z. B. die sog. „Lichtmaschine“ im Kraftfahrzeug erfolgen.

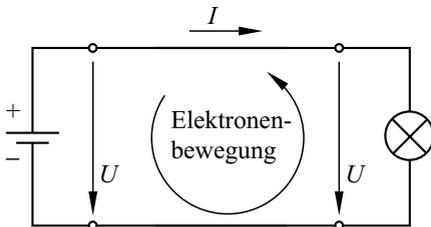


Bild 1.8 Einfacher Stromkreis mit Batterie und Glühlampe

Die COULOMB-Kräfte sorgen dafür, dass die Elektronen in den Leitungen vom Minuspol der Quelle abgestoßen und vom Pluspol angezogen werden.

1.2.3 Richtungssinn und Bezugssinn

Im Bild 1.8 ist auch der **Richtungssinn** des Stromes eingetragen. Willkürlich wurde festgelegt: Der elektrische Strom fließt *außerhalb der Quelle* von ihrem Pluspol zu ihrem Minuspol. Demzufolge fließt der elektrische Strom *innerhalb der Quelle* von ihrem Minuspol zum Pluspol.

Nach dieser Definition strömen in metallischen Leitern die Elektronen entgegen dem Richtungssinn des Stromes (Bild 1.8).

Die in der Gl. (1.4) zur Beschreibung der Stromstärke verwendete Ladung Q kann positiv oder negativ sein. Während sich in Metallen aus-

schließlich Elektronen als negative Ladungsträger bewegen, können in Flüssigkeiten oder in Gasen positive und negative Ladungsträger zur Stromstärke beitragen. Dies muss bei einer allgemein gültigen Definition der Stromstärke berücksichtigt werden.

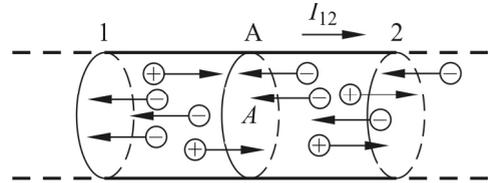


Bild 1.9 Bewegung positiver und negativer Ladungsträger durch einen Querschnitt A

Wie bei einer zweispurigen Straße, bei der die in entgegengesetzter Richtung strömenden Fahrzeuge zur Erhöhung der Belastung beitragen, wird die Stromstärke durch die in entgegengesetzter Richtung strömenden Ladungen *erhöht*. Mit der positiven Ladung Q_p , die in der Zeitspanne t durch den Querschnitt A strömt, und der entsprechenden negativen Ladung Q_n setzen wir an:

$$I_{12} = \frac{Q_p - Q_n}{t} \tag{1.8}$$

Wegen $Q_p > 0$ und $Q_n < 0$ ist die so definierte Stromstärke I_{12} positiv. Der zugehörige **Richtungssinn** des Stromes I_{12} stimmt mit der Bewegungsrichtung *positiver* Ladungsträger überein.

Beispiel 1.2

Ein Gleichstrom 1 A fließt in einem metallischen Leiter 1 min lang. Welche Ladung bewegt sich dabei durch einen Querschnitt?

$$Q_p = 0 ; Q_n = - I t = -60 \text{ As} = -60 \text{ C}$$

Oft ist in einer Schaltung der Richtungssinn eines Stromes zunächst unbekannt. So kann z. B. die im Bild 1.10 dargestellte Batterie eines Fahrzeugs

- den Anlasser treiben und es fließt der Strom I_A ;
- von der „Lichtmaschine“ geladen werden und es fließt der Strom I_L .

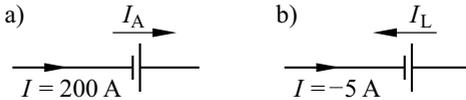


Bild 1.10 Zusammenhang zwischen dem Richtungssinn I_A bzw. I_L und dem Bezugssinn I des Stromes

Für die Bearbeitung eines Stromes mit unterschiedlichem Richtungssinn gibt man willkürlich einen **Bezugssinn** vor, der durch einen Bezugspfeil dargestellt wird, und vereinbart:

Ist der Zahlenwert eines durch einen Bezugspfeil beschriebenen Stromes positiv, so stimmt der Richtungssinn mit dem Bezugssinn überein; ist der Zahlenwert eines Stromes negativ, so sind Richtungssinn und Bezugssinn einander entgegengesetzt.

Die Begriffe Richtungssinn und Bezugssinn sind genormt und der Bezugspfeil wird *in* den Leitungszug gezeichnet. Im Bild 1.10a ist der Zahlenwert des Stromes $I = 200$ A positiv und der Strom $I_A = I$ treibt den Anlasser; im Bild 1.10b ist der Zahlenwert des Stromes $I = -5$ A negativ und die Batterie wird mit dem Strom $I_L = -I$ geladen.

Der Zusammenhang zwischen Bezugssinn und Richtungssinn ist bei der Strommessung mit dem **Amperemeter** von Bedeutung. Der Bezugssinn des Stromes ist dabei von der mit „+“ bezeichneten Klemme zu der mit „-“ bezeichneten Klemme festgelegt.

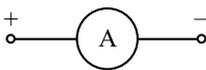


Bild 1.11 Amperemeter mit Klemmenbezeichnungen für Gleichstrom

Wird bei der Messung ein positiver Wert angezeigt, so bedeutet dies, dass Bezugssinn und Richtungssinn übereinstimmen und dass ein Strom mit dem Richtungssinn von „+“ nach „-“ fließt. Die Anzeige eines negativen Stromwertes bedeutet, dass Bezugssinn und Richtungssinn einander entgegengesetzt sind und dass ein Strom mit dem Richtungssinn von „-“ nach „+“ fließt.

1.3 Leistung und Energie

1.3.1 Erzeuger und Verbraucher

Ein elektrischer Stromkreis besteht im einfachsten Fall aus zwei Energiewandlern: Der eine wandelt nichtelektrische Energie in elektrische Energie um, er wird daher als **Erzeuger** (elektrischer Energie) bezeichnet; der andere wandelt elektrische Energie in nichtelektrische Energie um, er wird daher als **Verbraucher** (elektrischer Energie) bezeichnet.

Der im Bild 1.12 dargestellte einfache Stromkreis mit einem Gleichstromgenerator, der als Erzeuger arbeitet, und einem Motor, der als Verbraucher arbeitet, lässt sich mit einem Flüssigkeitsstromkreis vergleichen. Die Pumpe bzw. der Generator bewirken den Antrieb der Wassermoleküle bzw. der Ladungsträger. Die Wassermenge bzw. die Elektrizitätsmenge geben in der Turbine bzw. im Motor Energie ab. Ein Hahn bzw. ein Schalter dienen zur Unterbrechung der Strömung.

Es ist keinesfalls erforderlich, dass ein Wassermolekül vor der Energieabgabe in der Turbine die Pumpe durchlaufen haben muss. Die Energie steht vielmehr sofort nach dem Einschalten zur Verfügung, sie wird in einer Kraftwelle auf die Wasserteilchen in der Druckleitung übertragen. In gleicher Weise übertragen die COULOMB-Kräfte nach dem Einschalten des Stromkreises die Energie auf die bewegten Ladungsträger, die diese an den Motor abgeben. Die Ausbreitung dieser Kräfte läuft nach dem Einschalten des Stromkreises nahezu mit Lichtgeschwindigkeit ab, so dass ein Strom im gesamten Stromkreis unmittelbar nach dem Einschalten zu fließen beginnt.

Die beweglichen Ladungsträger im Stromkreis brauchen also nicht erst die Quelle zu durchlaufen, um Energie aufzunehmen; dies ist vor allem bei einem Wechselstrom von Bedeutung, bei dem die Elektronen nur um eine Ruhelage pendeln.

Wenn der Anteil der Zweidrahtleitung, die den Generator mit dem Motor verbindet, und des

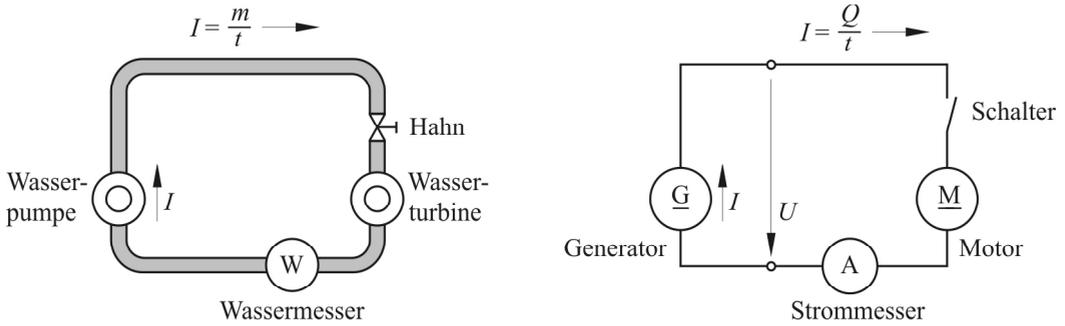


Bild 1.12 Vergleich zwischen einem Wasser- und einem elektrischen Stromkreis

Strommessers am Energieumsatz vernachlässigt werden kann, steht die gesamte Energie, die im Generator für die Ladungstrennung aufgewendet wird, dem Motor zur Verfügung. Bei gleichmäßigem Energiefluss kann die Leistung als Quotient aus Energie und Zeit berechnet werden:

$$P = \frac{W}{t} \tag{1.9}$$

Die Einheit der Leistung P ist:

$$\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}} = \mathbf{1 \text{ Watt}} = 1 \text{ W} \tag{1.10}$$

Wir erweitern die Gl. (1.9) mit der Ladung Q und setzen die Gln. (1.4 und 1.6) ein:

$$P = \frac{W}{Q} \cdot \frac{Q}{t} = UI \tag{1.11}$$

Hieraus ergibt sich die Einheitengleichung:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \tag{1.12}$$

1.3.2 Der Begriff Eintor

Viele Bauteile und Geräte der Elektrotechnik haben *zwei* Anschlussdrähte oder -klemmen. Da diese Anschlüsse früher auch **Pole** genannt wurden, bezeichnete man ein solches Bauteil oder Gerät als **Zweipol**.

Nun aber hat sich für zwei funktionell zusammengehörige Klemmen der Begriff **Tor** (*port*)

durchgesetzt. Die Begriffe **Eintor** (*one-port*) und **Zweipol** sind also gleichbedeutend. So sind z. B. in der Schaltung 1.12 der Generator, der Schalter, der Motor und das Amperemeter Eintore.

An jedem Eintor kann sowohl der Bezugssinn der Spannung als auch der Bezugssinn des Stromes frei gewählt werden. Dadurch können sich jedoch nur *zwei* unterschiedliche Zuordnungen – gleichsinnig oder gegensinnig – der Bezugspfeile für Spannung und Strom ergeben; diese Zuordnungen sind in den Bildern 1.13 und 1.14 dargestellt.

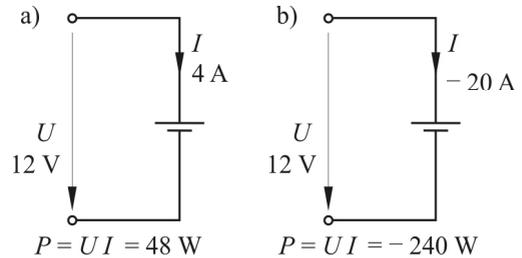


Bild 1.13 Bei gleichsinnigen Bezugspfeilen von Strom und Spannung ist die Leistung $P = UI$ positiv, wenn das Eintor als Verbraucher wirkt (a); wirkt das Eintor als Erzeuger, so ist die Leistung $P = UI$ negativ (b)

Die Eigenschaft eines Eintors, als Erzeuger oder Verbraucher zu wirken, ist vielfach nicht von vornherein festgelegt oder bekannt. So liefert z. B. der Akkumulator eines Kraftfahrzeugs beim Startvorgang die Energie für den Elektromotor, der „Anlasser“ genannt wird; er wirkt dabei als Erzeuger. Wird der Akkumulator dagegen von

der „Lichtmaschine“ geladen, so wirkt er als Verbraucher.

Werden an dem Akkumulator die Bezugspfeile für Strom und Spannung gleichsinnig gewählt (Bild 1.13a), so wirkt er wie der Motor im Bild 1.12 für $U > 0$ und $I > 0$ als Verbraucher mit der Leistung $P = UI > 0$. Wenn jedoch der Akkumulator als Erzeuger arbeitet, dann fließt der Strom entgegen dem gewählten Bezugspfeil und es ist $I < 0$ (Bild 1.13b); die Leistung $P = UI$ ist dabei negativ.

Am Vorzeichen der Leistung ist also erkennbar, ob ein Eintor als Erzeuger oder als Verbraucher wirkt. Dies hat vor allem den Vorteil, dass die Wirkungsweise eines Eintors nicht von vornherein bekannt sein muss: Ergibt sich im Zuge einer Berechnung, dass die Leistung eines Eintors *positiv* ist, so handelt es sich um einen *Verbraucher*; ist die Leistung *negativ*, so wirkt das Eintor als *Erzeuger*.

Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass die Leistungsbilanz für sämtliche Eintore einer Schaltung vereinfacht geschrieben werden kann:

$$\sum P = 0 \quad (1.13)$$

Die Summe der Leistungen sämtlicher Eintore in einer Schaltung ist gleich Null, wenn jede Verbraucherleistung positiv und jede Erzeugerleistung negativ eingesetzt wird.

Die gegensinnige Zuordnung der Bezugspfeile für Spannung und Strom wird nur noch in Ausnahme-

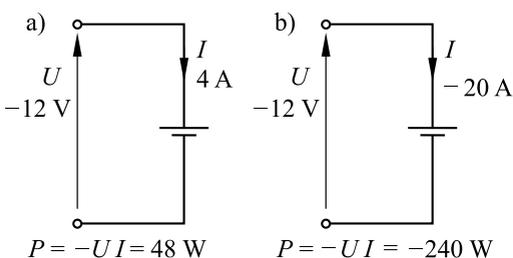


Bild 1.14 Bei entgegengesetzten Bezugspfeilen U und I ist die Leistung $P = -UI$ positiv, wenn das Eintor als Verbraucher wirkt (a); wirkt das Eintor als Erzeuger, so ist die Leistung $P = -UI$ negativ (b)

fällen verwendet, weil dabei für die Leistung die Gleichung $P = -UI$ gilt.

Wir arbeiten im Folgenden ausschließlich mit der gleichsinnigen Zuordnung der Bezugspfeile, bei der für die Leistung gilt:

$$P = UI \quad (1.14)$$

Beispiel 1.3

An einem Akkumulator werden mit zwei Messgeräten der Strom $I = -2,4 \text{ A}$ und die Spannung $U = 12,5 \text{ V}$ gemessen.

Wir wollen die Leistung berechnen, die dabei umgesetzt wird, und entscheiden, ob der Akkumulator als Erzeuger oder als Verbraucher wirkt.

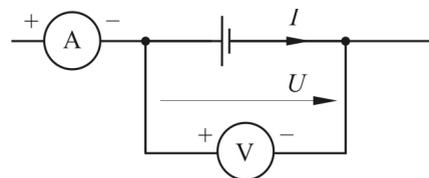


Bild 1.15 Akkumulator mit Messgeräten für Strom und Spannung

Die Bezugspfeile für U und I sind an jedem Messgerät von der „+“-Klemme zur „-“-Klemme festgelegt. Der Strom durch das Voltmeter wird vernachlässigt.

Am Akkumulator hat der Bezugspfeil für I die gleiche Richtung wie der Bezugspfeil für U ; wir berechnen die Leistung deshalb mit der Gl. (1.11):

$$P = UI = 12,5 \text{ V} \cdot (-2,4 \text{ A}) = -30 \text{ W}$$

Wegen $P < 0$ wirkt der Akkumulator als Erzeuger.

1.3.3 Wirkungsgrad

Vielfach wird mit einem elektrischen Gerät eine Energiewandlung durchgeführt. Dabei ist die *nutzbare* abgegebene Leistung P_{ab} kleiner als die zugeführte Leistung P_{zu} . Der Quotient aus diesen beiden Leistungen wird als **Wirkungsgrad** (*efficiency*) η (griech. Buchstabe eta) bezeichnet:

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} \quad (1.15)$$

Beispiel 1.4

Ein Motor mit dem Wirkungsgrad 0,78 gibt an der Welle die mechanische Leistung 1,5 kW ab. Welche Leistung nimmt der Motor auf und welche Verluste P_{verl} entstehen im Motor?

$$P_{\text{zu}} = \frac{P_{\text{ab}}}{\eta} = 1923 \text{ W}$$

$$P_{\text{verl}} = P_{\text{zu}} - P_{\text{ab}} = 423 \text{ W}$$

1.3.4 Elektrowärme

Wie schon erwähnt, ist die Erzeugung von Wärmeenergie eine der Wirkungen des elektrischen Stromes.

Ein Stoff der Masse m , der von der **CELSIUS-Temperatur** ϑ_1 (griech. Buchstabe theta) auf $\vartheta_2 > \vartheta_1$ erwärmt wird, nimmt dabei die **thermische Energie** W_{th} auf, die auch *Wärmeenergie* genannt wird:

$$W_{\text{th}} = c m (\vartheta_2 - \vartheta_1) = c m \Delta\vartheta \tag{1.16}$$

Dabei ist c die Energie, die zur Erwärmung von 1 kg des Stoffes um 1 K erforderlich ist; sie wird als **spezifische Wärmekapazität** bezeichnet.

Tabelle 1.1: Spezifische Wärmekapazität c (Auswahl)

Stoff	$\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
Wasser	4,187
Transformatoröl	1,8
Luft	1
Aluminium	0,9
Stahl	0,46
Kupfer	0,39

Wird der Stoff durch einen elektrischen Heizleiter erwärmt, dann ist wegen der unvermeidlichen Verluste die nutzbare Leistung P_{th} kleiner als die dem Heizleiter zugeführte Leistung $P = UI$.

Beispiel 1.5

Ein Warmwasserbereiter mit dem Anschlusswert 1,5 kW hat den Wirkungsgrad 70 %. Wie lange dauert es, bis 1,5 l Wasser von 10 °C auf 80 °C erwärmt werden?

$$W_{\text{th}} = c m \Delta\vartheta = 439,6 \text{ kJ} = P_{\text{th}} t$$

Die Leistung P_{th} ist:

$$P_{\text{th}} = \eta P = 0,7 \cdot 1,5 \text{ kW} = 1050 \text{ W}$$

Mit den Gln. (1.9 und 1.10) berechnen wir:

$$t = \frac{W_{\text{th}}}{P_{\text{th}}} = 0,116 \text{ h} \approx 7 \text{ min}$$

1.4 Elektrischer Widerstand

1.4.1 Der Begriff Widerstand

Damit in einem Metalldraht ein Strom I fließt, muss Energie zugeführt werden; dies lässt sich durch Anlegen einer Spannung U erreichen. Bei einem Eintor, das ausschließlich als *Verbraucher* wirken kann, wird der Quotient aus Spannung und Strom als **Widerstand** (*resistance*) R bezeichnet:

$$R = \frac{U}{I} \tag{1.17}$$

Die Einheit des Widerstandes R ist:

$$\frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} = \mathbf{1 \text{ Ohm}} = 1 \Omega \tag{1.18}$$

Der Widerstand eines metallischen Leiters lässt sich durch die Schwingungen der Atome des Kristallgitters erklären; diese Schwingungen stellen eine Bewegungshemmung, also einen *Widerstand*, für die in Leiterrichtung strömenden Elektronen dar. Wird die Bewegungshemmung durch Anlegen einer Spannung überwunden, so entsteht Wärme, da ein Strom fließt; im Leiter wird dabei Leistung umgesetzt.

Nach DIN 1324 ist der Widerstand R stets positiv. Ist eine der Größen U oder I negativ und die andere positiv, so führt der Ansatz $R = -U/I$ zu einem positiven Widerstandswert.

Die Leistung P , die im Widerstand in Wärmeleistung P_{th} umgewandelt wird, berechnen wir mit den Gln. (1.11 und 1.17):

$$P = P_{\text{th}} = RI^2 = \frac{U^2}{R} \tag{1.19}$$

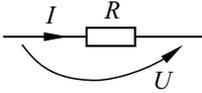


Bild 1.16 Schaltzeichen des Widerstandes mit Bezugspfeilen für Strom und Spannung

Der Kehrwert des Widerstandes R wird als **Leitwert** (*conductance*) G bezeichnet:

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} \quad (1.20)$$

Im deutschen Sprachraum hat der Leitwert die Einheit 1 Siemens = 1 S = 1/Ω. Im englischen Sprachraum werden der Name Ohm und die Einheit Ω umgedreht: 1 mho = 1 Ω (sprich: mou).

1.4.2 Das OHMSche Gesetz

Trägt man für einen Metalldraht, dessen Temperatur ϑ konstant gehalten wird, den Strom I über der Spannung U auf, so erhält man als I - U -Kennlinie eine Gerade. Der Widerstand des Drahtes hat für jeden Punkt der Geraden denselben Wert:

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.} \quad (1.21)$$

Der durch diese Gleichung beschriebene Zusammenhang wird **OHMSches Gesetz** genannt. Ein konstanter, also vom Strom oder von der Spannung unabhängiger Widerstand wird dementsprechend als **OHMScher Widerstand** bezeichnet.

Die Steigung der I - U -Kennlinie eines OHMSchen Widerstandes ist der konstante Leitwert G .

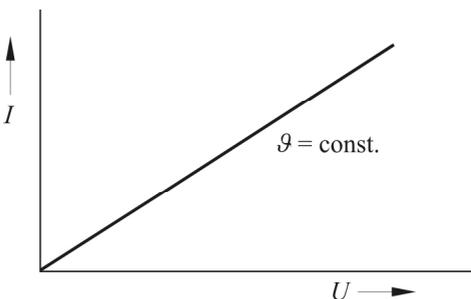


Bild 1.17 I - U -Kennlinie eines OHMSchen Widerstandes

Beispiel 1.6

Durch einen OHMSchen Widerstand $R = 150 \Omega$ fließt der Strom $0,2 \text{ A}$. Welche Spannung liegt dabei an dem Widerstand?

$$U = R I = 150 \Omega \cdot 0,2 \text{ A} = 30 \text{ V}$$

Beispiel 1.7

Welcher Strom fließt durch den Leitwert $G = 55 \text{ mS}$, der an der Spannung 12 V liegt?

$$I = G U = 55 \text{ mS} \cdot 12 \text{ V} = 0,66 \text{ A}$$

1.4.3 Linearer Leiter

Ein Leiter, der überall gleichen Querschnitt A hat und dessen Querschnittsabmessungen wesentlich kleiner als die Länge l sind, wird **linearer Leiter** genannt. Es ist unerheblich, ob der Leiter gerade ausgestreckt oder gekrümmt ist; so ist z. B. der gewendelte Glühdraht einer Glühlampe ein linearer Leiter.

Bei einem linearen Leiter ist der Strom I gleichmäßig auf den Querschnitt A verteilt. Der Quotient aus Strom und Querschnitt, der als **Stromdichte** (*current density*) J bezeichnet wird, hat an jeder Stelle des Leiters denselben Wert:

$$J = \frac{I}{A}; \text{ Einheit: } 1 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (1.22)$$

Beim linearen Leiter fällt die Spannung U gleichmäßig über der Länge l ab. Der Quotient aus beiden Größen wird **elektrische Feldstärke** (*electric field strength*) E genannt:

$$E = \frac{U}{l}; \text{ Einheit: } 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1.23)$$

Wenn das OHMSche Gesetz gilt, wie z. B. bei einem Metalldraht, dessen Temperatur konstant bleibt, dann ist die Stromdichte J linear von der Feldstärke E abhängig. Der konstante Proportionalitätsfaktor wird als **Leitfähigkeit** (*conductivity*) γ (griech. Buchstabe gamma) bezeichnet:

$$\gamma = \frac{J}{E}; \text{ Einheit: } 1 \frac{\text{S}}{\text{m}} \quad (1.24)$$

Da Leiterquerschnitte im Allgemeinen in der Einheit mm^2 angegeben werden, ist für die Leitfähigkeit die Einheit $\text{S m}/\text{mm}^2$ üblich. Der Kehrwert der Leitfähigkeit wird **spezifischer Widerstand** (*resistivity*) ρ (griech. Buchstabe rho) genannt:

$$\rho = \frac{E}{J}; \text{ Einheit: } 1 \Omega\text{m} \quad (1.25)$$

Der Widerstand R eines linearen Leiters lässt sich mit den Gln. (1.22 ... 1.25) umformen:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E l}{J A} = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\gamma A} \quad (1.26)$$

Beispiel 1.8

Die Wicklung eines Motors besteht aus 400 m Kupferdraht von $0,2 \text{ mm}^2$ Querschnitt. Welchen Widerstand hat sie bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$?

Mit der Leitfähigkeit für Kupfer aus der Tabelle 1.2 berechnen wir:

$$R = \frac{l}{\gamma A} = \frac{400 \text{ m}}{56 \frac{\text{S m}}{\text{mm}^2} \cdot 0,2 \text{ mm}^2} = 35,7 \Omega$$

Tabelle 1.2 Leitfähigkeit und Temperaturkoeffizienten von Metallen (Auswahl)

Metall	γ_{20} $\frac{\text{S m}}{\text{mm}^2}$	α_{20} $10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$	β_{20} $10^{-6} \frac{1}{\text{K}^2}$
Silber	62,5	3,8	0,7
Kupfer (s. VDE 201)	56	3,92	0,6
Gold	44	4,0	0,5
Aluminium (s. VDE 202)	35	3,77	1,3
Magnesium	22	3,9	1
Wolfram	18	4,1	1
Zink	16	3,7	2
Nickel (s. DIN IEC 751)	10,5	5,16	6,54
Eisen	10	4,55	6
Platin (s. DIN IEC 751)	9,25	3,6	-0,54
Zinn	9,1	4,2	6
Blei	4,8	4,2	2
Neusilber Cu Ni17 Zn23	3,33	0,35	—
Manganin Cu Mn12 Ni2	2,32	0,02	—
Konstantan Cu Ni45 Mn1	2	-0,003	—
Chromnickel Ni80 Cr20	0,91	0,1	—

1.4.4 Widerstand von Isolierstoffen

Da feste Isolierstoffe im Allg. eine niedrige Wärmeleitfähigkeit aufweisen, kühlt man Geräte, in denen hohe Verluste entstehen, zweckmäßig mit flüssigen Isolierstoffen. In der Tab. 1.3 sind die Werte des spezifischen Widerstands für einige technisch wichtige Isolierstoffe zusammengestellt.

Tabelle 1.3 Spezifischer Widerstand von Isolierstoffen

Stoff	ρ in $\Omega\text{ m}$
destilliertes Wasser	$10^3 \dots 10^5$
Wasser, reinst	$2,5 \cdot 10^5$
Hartpapier	10^8
Porzellan	10^{10}
Transformatoröl	10^{12}
PVC	10^{13}
Polyethylen PE	10^{13}
Polystyrol	10^{15}

1.4.5 Nichtlinearer Widerstand

Ist die I - U -Kennlinie eines Eintors keine Gerade durch den Nullpunkt, dann hat der Widerstand in den einzelnen Punkten unterschiedliche Werte; ein derartiger Widerstand wird **nichtlinearer Widerstand** genannt.

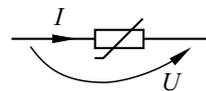


Bild 1.18 Schaltzeichen eines nichtlinearen Widerstandes mit Bezugspfeilen für Strom und Spannung

Sämtliche Halbleiter-Bauelemente, z. B. Dioden, haben nichtlineare I - U -Kennlinien. Auch metallische Leiter, deren Temperatur nicht konstant bleibt, sind nichtlineare Widerstände; das Bild 1.19 zeigt als Beispiel die I - U -Kennlinie einer Glühlampe.

Die Nichtlinearität der I - U -Kennlinien von elektronischen Bauelementen ist keineswegs ein „Betriebsunfall“; die stark ausgeprägten Nichtlinearitäten ergeben vielmehr die besonderen Eigenschaften dieser Bauelemente.

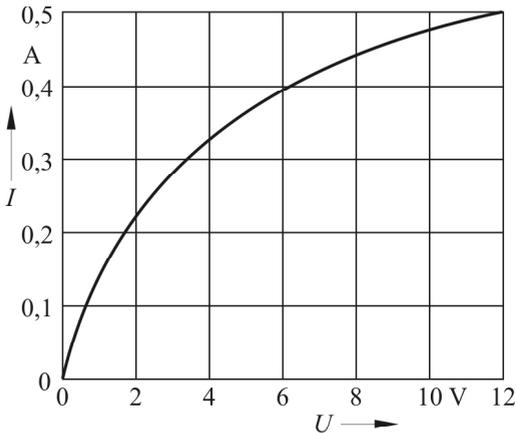


Bild 1.19 I-U-Kennlinie einer Glühlampe

Beispiel 1.9

Wir wollen den Widerstand der Glühlampe mit der I-U-Kennlinie nach Bild 1.19 für die Spannungen 4 V, 8 V und 12 V berechnen.

Für $U = 4 \text{ V}$ ist $I = 0,32 \text{ A} \rightarrow R = 12,5 \Omega$;

für $U = 8 \text{ V}$ ist $I = 0,44 \text{ A} \rightarrow R = 18,2 \Omega$;

für $U = 12 \text{ V}$ ist $I = 0,5 \text{ A} \rightarrow R = 24 \Omega$.

1.4.6 Temperaturabhängigkeit

Die Abhängigkeit eines Widerstandes von der Temperatur wird durch **Temperaturkoeffizienten** (TK) α und β beschrieben. Zur Berechnung des bei der **CELSIUS-Temperatur** ϑ (griech. Buchstabe theta) vorhandenen Widerstandes R_ϑ geht man z. B. vom Widerstand R_{20} aus, der bei der **Bezugstemperatur** 20°C vorliegt, und setzt mit α_{20} und β_{20} an:

$$R_\vartheta = R_{20} [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20^\circ\text{C}) + \beta_{20}(\vartheta - 20^\circ\text{C})^2] \quad (1.27)$$

Für die Bezugstemperatur 0°C sind der Bezugswiderstand R_0 und die TK α_0 und β_0 erforderlich:

$$R_\vartheta = R_0 [1 + \alpha_0 \vartheta + \beta_0 \vartheta^2] \quad (1.28)$$

Die TK α_{20} und β_{20} , die nur für die Bezugstemperatur 20°C verwendet werden dürfen, sind in der Tabelle 1.2 für einige Metalle angegeben.

Beispiel 1.10

Eine Kupferwicklung hat bei 20°C den Widerstand 100Ω . Welchen Widerstand hat sie bei 80°C ? Wir entnehmen die TK α_{20} und β_{20} aus der Tab. 1.2 und setzen in die Gl. (1.27) ein:

$$R_\vartheta = 100 \Omega \cdot [1 + \alpha_{20} 60 \text{ K} + \beta_{20} (60 \text{ K})^2]$$

$$R_\vartheta = 100 \Omega \cdot [1 + 0,2352 + 0,0022] = 123,7 \Omega$$

Ist der Widerstand für die Bezugstemperatur nicht gegeben, so muss er vorab mithilfe der Gl. (1.27) oder der Gl. (1.28) berechnet werden.

Beispiel 1.11

Ein Leiterseil aus Aluminium hat bei 12°C den Widerstand $1,8 \Omega$. Welchen Widerstand hat es bei 70°C ?

Zunächst setzen wir für $\vartheta = 12^\circ\text{C}$ an:

$$1,8 \Omega = R_{20} [1 - \alpha_{20} \cdot 8 \text{ K} + \beta_{20} \cdot (8 \text{ K})^2]$$

Damit berechnen wir: $R_{20} = 1,856 \Omega$

$$R_\vartheta = R_{20} [1 + \alpha_{20} \cdot 50 \text{ K} + \beta_{20} \cdot (50 \text{ K})^2] = 2,21 \Omega$$

Mit steigender Temperatur nimmt bei Metallen die Schwingungsweite der Atome des Kristallgitters und damit auch die Bewegungshemmung der in Leiterrichtung strömenden Elektronen zu. Man bezeichnet solche Leiter, deren Widerstand mit steigender Temperatur zunimmt, als **Kaltleiter**.

Beispiel 1.12

Die Betriebstemperatur des Wolframdrahtes einer Glühlampe, die an 230 V die Leistung 100 W aufnimmt, beträgt 2500°C . Welchen Widerstand hat die Lampe bei 20°C ?

Zunächst berechnen wir den Widerstand für die Betriebstemperatur:

$$R = \frac{U^2}{P} = 529 \Omega$$

Nun setzen wir die TK α_{20} und β_{20} aus der Tab. 1.2 in die Gl. (1.27) ein:

$$529 \Omega = R_{20} [1 + \alpha_{20} \cdot 2480 \text{ K} + \beta_{20} \cdot (2480 \text{ K})^2]$$

Damit berechnen wir: $R_{20} = 30,5 \Omega$

1.4.7 Supraleitung

Auch bei sehr niedrigen Temperaturen hängt der Widerstand im Allgemeinen nichtlinear von der Temperatur ab. Einige Metalle wie z. B. Silber (Ag), Kupfer (Cu) und Gold (Au) weisen bei wenigen Kelvin einen Restwiderstand auf; im Bild 1.20 ist der spezifische Widerstand $\rho = 1/\gamma$ über der Temperatur T aufgetragen.

Bei einer Gruppe von Stoffen springt der elektrische Widerstand bei der **Sprungtemperatur** (*critical temperature*) T_S auf einen unmessbar kleinen Wert: Diese Stoffe werden als **Supraleiter** (*superconductor*) bezeichnet.

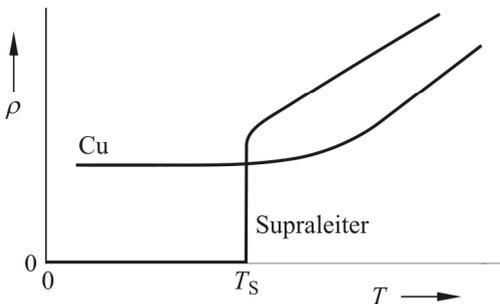


Bild 1.20 Spezifischer Widerstand in der Umgebung des absoluten Nullpunkts

Ein Strom, der in einem supraleitenden Stoff fließt, erfordert zwar keine Energiezufuhr, doch wird Energie für die Kühlung des Leitermaterials benötigt. Bei einer Erwärmung des Leiters über die Sprungtemperatur verschwindet die Supraleitung. Auch Magnetfelder können die Supraleitung aufheben.

Technische Anwendung findet die Supraleitung z. B. bei Spulen der Kernfusionsforschung, bei Kernspin-Tomographen und bei der Magneto-Encephalographie MEG (Messung der Magnetfelder der Gehirnströme). Als Werkstoffe werden Niob-Titan NbTi ($T_S = 10$ K) und Nb₃Sn ($T_S = 18$ K) eingesetzt, die mit Helium gekühlt werden.

Ab 1986 wurden sog. *Hochtemperatur-Supraleiter* (z. B. Y₁Ba₂Cu₃O₇) mit Sprungtemperaturen über 77 K entwickelt. Die hierbei mögliche Kühlung mit flüssigem Stickstoff ist wesentlich einfacher und billiger als die Kühlung mit Helium.

Die **Hochtemperatur-Supraleiter** (*high temperature superconductor*, HTS) werden vielfältig genutzt, z. B. bei Drähten aus dem HTS-Material BSCCO-2223, die Ströme bei 77 K mit einer Stromdichte $J = 150$ A/mm² transportieren können und mit Längen über 1 km auf dem Markt sind. Genannt seien noch als weitere Beispiele die HTS-Synchronmotoren, hochempfindliche Magnetfeld-Messgeräte und die HTS-Filter in Mobilfunk-Basisstationen.

1.5 Quellen

1.5.1 Leerlauf und Kurzschluss

Eine **Quelle** ist ein Eintor, das elektrische Energie an einen Verbraucher abgeben kann. Ob und wie viel Energie abgegeben wird, hängt nicht nur von der Quelle selbst, sondern auch von dem Stromkreis ab, mit dem die Quelle verbunden ist.

In zwei Sonderfällen des Betriebes gibt eine Quelle keine Leistung ab, es ist also $P = -U I = 0$ (Bild 1.21):

- Der Quelle wird kein Strom entnommen, es ist also $I = 0$; diese Betriebsart wird **Leerlauf** genannt. Dementsprechend wird die Spannung bei $I = 0$ als **Leerlaufspannung** U_0 bezeichnet. Bei Leerlauf der Quelle ist der Leitwert des angeschlossenen Verbrauchers $G = I / U = 0$.
- Die Quelle wird an ihren Klemmen mit einem Widerstand $R = 0$ überbrückt, so dass die Klemmenspannung $U = 0$ ist. Diese Betriebsart wird als **Kurzschluss** bezeichnet und der dabei fließende Strom der Quelle wird **Kurzschlussstrom** I_k genannt.

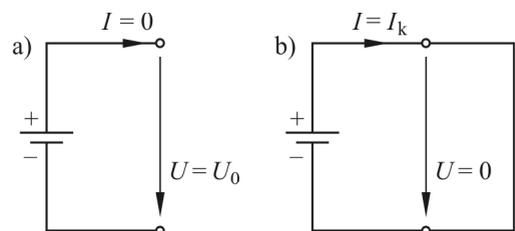


Bild 1.21 Leerlauf (a) und Kurzschluss (b) einer Quelle

1.5.2 Ideale Quellen

Eine Quelle, die unabhängig von der Belastung an ihren Klemmen eine konstante Spannung – die **Quellenspannung** U_q – aufweist, wird **ideale Spannungsquelle** genannt. Bild 1.22 zeigt das Schaltzeichen und die I - U -Kennlinie einer derartigen Quelle. Da die maximale Leistung begrenzt ist, verläuft die I - U -Kennlinie nur bis zum Strom I_{\max} linear. Ein Beispiel für eine ideale Spannungsquelle ist mit sehr guter Näherung das Versorgungsnetz; seine an der Steckdose zur Verfügung stehende Spannung ist weitgehend unabhängig von der Belastung durch zugeschaltete Verbraucher.

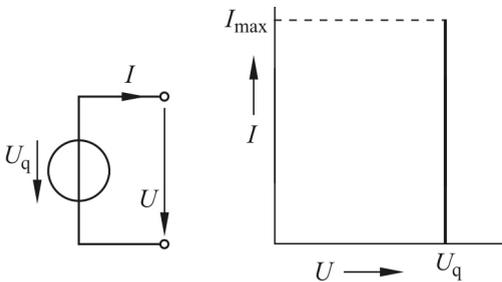


Bild 1.22 Schaltzeichen und I - U -Kennlinie der idealen Spannungsquelle

Eine Quelle, die unabhängig von der Belastung an ihren Klemmen einen konstanten Strom – den **Quellenstrom** I_q – treibt, wird **ideale Stromquelle** genannt (Bild 1.23). Da die maximale Leistung begrenzt ist, verläuft die I - U -Kennlinie nur bis zur Spannung U_{\max} linear. So setzt man z. B. ideale Stromquellen zum Laden wiederaufladbarer Batterien ein; sie werden durch elektronische Schaltungen realisiert.

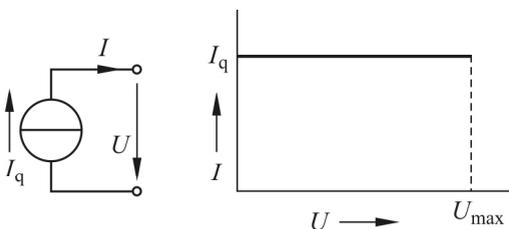


Bild 1.23 Schaltzeichen und I - U -Kennlinie der idealen Stromquelle

1.5.3 Lineare Quellen

Viele Quellen, z. B. die elektrochemischen Elemente, haben eine lineare I - U -Kennlinie. Eine derartige Quelle wird als **lineare Quelle** bezeichnet. Das Bild 1.24 zeigt hierfür ein Beispiel: Die Achsenabschnitte der Geraden sind der Kurzschlussstrom I_k bei der Spannung $U=0$ und die Leerlaufspannung U_0 beim Strom $I=0$.

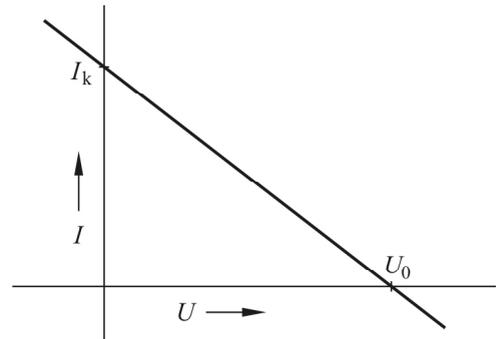


Bild 1.24 I - U -Kennlinie einer linearen Quelle

Die lineare Quelle lässt sich durch zwei gleichwertige Ersatzschaltungen darstellen:

- Die **lineare Spannungsquelle** besteht aus der Reihenschaltung einer idealen Spannungsquelle und eines **Innenwiderstandes** R_i . Bei Leerlauf ($I = 0$) fällt an diesem Innenwiderstand keine Spannung ab und die Leerlaufspannung ist $U_0 = U_q$. Bei Kurzschluss ($U = 0$) fließt der Kurzschlussstrom:

$$I_k = \frac{U_q}{R_i} \quad (1.29)$$

- Die **lineare Stromquelle** besteht aus der Parallelschaltung einer idealen Stromquelle und eines **Innenleitwertes** G_i . Bei Kurzschluss ($U = 0$) fließt kein Strom durch den Innenleitwert; der Kurzschlussstrom ist also $I_k = I_q$. Bei Leerlauf ($I = 0$) fließt der Quellenstrom I_q durch den Innenleitwert G_i und bewirkt die Leerlaufspannung:

$$U_0 = \frac{I_q}{G_i} \quad (1.30)$$

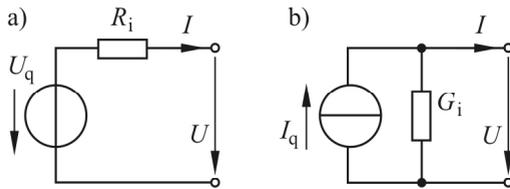


Bild 1.25 Ersatzschaltungen der linearen Quelle:
a) lineare Spannungsquelle, b) lineare Stromquelle

Mit $U_0 = U_q$ und $I_k = I_q$ ergibt sich aus den Gln. (1.29 und 1.30):

$$G_i = \frac{I_q}{U_0} = \frac{I_k}{U_q} = \frac{1}{R_i} \quad (1.31)$$

Beispiel 1.13

Eine Mignonzelle hat die Leerlaufspannung 1,5 V und den Kurzschlussstrom 0,6 A. Wir wollen die Elemente der Ersatzschaltungen berechnen.

Die lineare Spannungsquelle hat die Größen

$$\text{Quellenspannung: } U_q = U_0 = 1,5 \text{ V}$$

$$\text{Innenwiderstand: } R_i = \frac{U_q}{I_k} = 2,5 \Omega$$

Die lineare Stromquelle hat die Größen

$$\text{Quellenstrom: } I_q = I_k = 0,6 \text{ A}$$

$$\text{Innenleitwert: } G_i = \frac{1}{R_i} = 0,4 \text{ S}$$

Beide Ersatzschaltungen der linearen Quelle beschreiben die lineare I - U -Kennlinie in gleicher Weise. Die Spannungsquelle wird vorzugsweise dann verwendet, wenn die Klemmenspannung in der Größenordnung der Leerlaufspannung $U_0 = U_q$ ist; die Stromquelle wird dann verwendet, wenn der Strom in der Größenordnung des Kurzschlussstromes $I_k = I_q$ ist. Sind die Elemente der einen Ersatzschaltung bekannt, so können die Elemente der anderen mit den Gln. (1.29 ... 1.31) berechnet werden.

Beispiel 1.14

Von einem NiCd-Akkumulator sind die Quellenspannung $U_q = 6 \text{ V}$ und der Innenwiderstand $R_i = 0,2 \Omega$ bekannt. Welche Werte haben die Elemente der linearen Stromquelle?

Wir berechnen den Quellenstrom $I_q = I_k$ mit der Gl. (1.29):

$$I_k = \frac{U_q}{R_i} = 30 \text{ A}$$

Anschließend berechnen wir den Innenleitwert mit der Gl. (1.31):

$$G_i = \frac{1}{R_i} = 5 \text{ S}$$

Die Gerade im Bild 1.24 hat die Steigung $m = -I_k/U_0 = -G_i$ und den Achsenabschnitt $I_k = I_q$ auf der I -Achse. Die Geradengleichung lautet:

$$I = I_q - G_i U \quad (1.32)$$

Wir formen diese Gleichung mit den Gln.(1.29 und 1.31) um:

$$U = U_q - R_i I \quad (1.33)$$

Diese Gleichung bzw. die hierzu äquivalente Gl. (1.32) beschreibt die I - U -Kennlinie des Eintors Quelle; sie wird daher als **Eintorgleichung** bezeichnet.

Beispiel 1.15

Der Mignonzelle (s. Beispiel 1.13) wird der Strom 60 mA entnommen. Welche Klemmenspannung stellt sich dabei ein?

$$U = U_q - R_i I = 1,5 \text{ V} - 2,5 \Omega \cdot 60 \text{ mA} = 1,35 \text{ V}$$

Beispiel 1.16

An dem belasteten NiCd-Akkumulator (s. Beispiel 1.14) wird die Klemmenspannung 5,84 V gemessen. Welcher Strom fließt dabei?

$$I = I_q - G_i U = 30 \text{ A} - 5 \text{ S} \cdot 5,84 \text{ V} = 0,8 \text{ A}$$

2 Gleichstrom-Schaltungen

2.1 Bestimmung des Arbeitspunktes

Beim einfachen Stromkreis (Bild 1.8) ist die Klemmenspannung U der Quelle gleich der Spannung des Verbrauchers. Ist diese Spannung bekannt, so kann der Strom I mit der I - U -Kennlinie des Verbrauchers bestimmt werden.

Handelt es sich jedoch z. B. um eine lineare Quelle, so ist ihre Klemmenspannung U nicht von vornherein bekannt. Zur Bestimmung der Klemmenspannung U und des Stromes I müssen in diesem Fall *zwei* Gleichungen gelöst werden; dies kann entweder grafisch oder rechnerisch geschehen.

Das Bild 2.1 zeigt die grafische Lösung für den Fall, dass der Verbraucher ein OHMScher Widerstand ist; seine I - U -Kennlinie ist eine Gerade (s. Abschnitt 1.4.2). Diese schneidet die I - U -Kennlinie der linearen Spannungsquelle in einem Punkt, der **Arbeitspunkt** (*bias point*) genannt wird. In diesem Punkt stimmen die Spannungen der beiden Eintore überein und der Strom I der Quelle ist gleich dem Strom des OHMSchen Widerstandes.

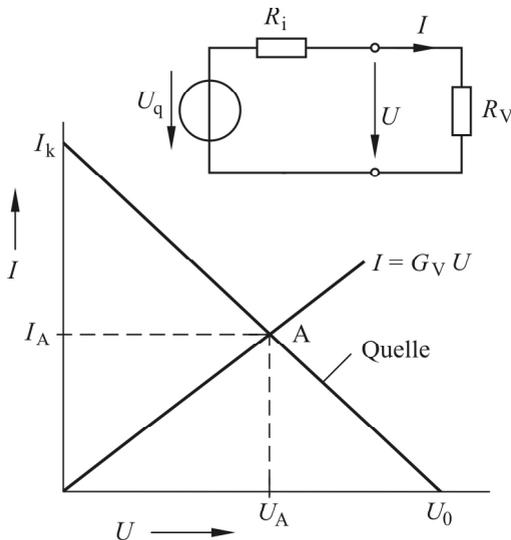


Bild 2.1 Einfacher Stromkreis und grafische Bestimmung des Arbeitspunktes A im I - U -Kennlinienfeld

Zur *Berechnung* der Spannung U_A und des Stromes I_A für den Arbeitspunkt der Schaltung 2.1 setzen wir in die Gln. (1.21 und 1.33) die Bedingungen $U = U_A$ und $I = I_A$ für den Arbeitspunkt ein:

$$U_A = U_q - R_i I_A \quad (2.1)$$

$$U_A = R_v I_A \quad (2.2)$$

Wir lösen nach I_A auf und erhalten:

$$I_A = \frac{U_q}{R_i + R_v} \quad (2.3)$$

Ist der Strom I_A bekannt, so lässt sich die Spannung U_A entweder mit der Gl. (2.1) oder mit der Gl. (2.2) berechnen.

Beispiel 2.1

Die Quellenspannung eines Stromkreises nach Bild 2.1 ist $U_q = 12$ V. Beim Strom $I = 1,5$ A wird die Klemmenspannung $U = 11,7$ V gemessen. Wie groß sind der Innenwiderstand R_i und der Verbraucherwiderstand R_v ?

$$I_A = 1,5 \text{ A}; \quad U_A = 11,7 \text{ V}; \quad R_v = \frac{U_A}{I_A} = 7,8 \Omega$$

$$R_i = \frac{U_q - U_A}{I_A} = 0,2 \Omega$$

2.2 Knotensatz

2.2.1 Der Begriff Knoten

Beim einfachen Stromkreis fließt an jeder Stelle derselbe Strom I ; in dieser Hinsicht handelt es sich dabei um einen Sonderfall. In einer beliebigen Schaltung kann sich der Strom *verzweigen*: In einem Teil der Leitungen strömen Ladungen zum **Verzweigungspunkt** (*branch point*) hin, in den übrigen Leitungen vom Verzweigungspunkt weg.

Da die Ladungen im Verzweigungspunkt nicht gespeichert werden können, ist die gesamte zuströmende Ladung gleich der gesamten wegströmenden Ladung. Wegen $I = Q/t$ gilt entsprechend für die Ströme: Die Summe der zufließenden Ströme I_{zu} ist gleich der Summe der abfließenden Ströme I_{ab} :

$$\sum I_{ab} = \sum I_{zu} \quad (2.4)$$

Dieser Zusammenhang gilt auch dann, wenn sich die stromführenden Leiter nicht in einem Punkt treffen, sondern beliebig angeordnet sind; so gilt z. B. sowohl für das Bild 2.2a als auch für das Bild 2.2b: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$.

Es ist also unerheblich, wie die stromführenden Leiter miteinander verbunden sind. Entscheidend ist lediglich, dass sämtliche Ströme erfasst werden, die eine (geschlossene) Hüllfläche um den Verzweigungspunkt „durchstoßen“.

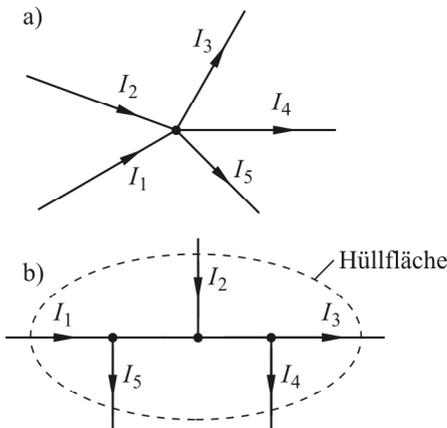


Bild 2.2 Verbindung der stromführenden Leiter in einem Punkt (a) und beliebig (b)

Da man das Gebiet, innerhalb dessen die Leiter miteinander verbunden sind, als **Knoten** (*node*) bezeichnet, wird der durch Gl. (2.4) beschriebene Zusammenhang **Knotensatz** genannt. Vielfach ist hierfür auch die Bezeichnung **1. KIRCHHOFFScher Satz** gebräuchlich.

In der Mechanik gibt es zwei Bedingungen für den Gleichgewichtszustand eines Körpers: das Gleichgewicht der Kräfte und das der Drehmomente. Entsprechend besitzt auch die Elektrotechnik zwei Bedingungen für die stationäre elektrische Strömung. Der Knotensatz ist eine dieser Gleichgewichtsbedingungen; er verlangt, dass sich die Ströme an jedem Knoten »im Gleichgewicht« befinden.

2.2.2 Knotengleichung

Wir sortieren zunächst die Gl. (2.4) so, dass sämtliche Ströme auf *einer* Seite der Gleichung stehen:

$$\sum I_{zu} - \sum I_{ab} = 0 \quad (2.5)$$

Eine einfache mathematische Formulierung des Knotensatzes ergibt sich dann, wenn man z. B. sämtliche Bezugs Pfeile so einzeichnet, dass sie zum Knoten hinweisen. Wegen $\sum I_{ab} = 0$ erhält man damit die Knotengleichung in der Form:

$$\sum I = 0 \quad (2.6)$$

In der Praxis ist die beschriebene einheitliche Zuordnung der Strombezugspfeile „zum Knoten hin“ im Allg. nicht gegeben. Die Gl. (2.6) kann jedoch stets angewendet werden, wenn man vereinbart, dass die *abfließenden* Ströme mit *geändertem* Vorzeichen in die Summe eingesetzt werden.

Beispiel 2.2

Für die Schaltung 2.2 sind folgende Ströme gegeben: $I_1 = 1,5 \text{ A}$; $I_2 = 0,4 \text{ A}$; $I_3 = 1,8 \text{ A}$; $I_4 = 0,6 \text{ A}$. Welcher Strom I_5 fließt und welchen Richtungssinn hat dieser Strom?

Wir tragen in die Knotengleichung (2.6) die dem Knoten zufließenden Ströme positiv und die abfließenden Ströme mit geändertem Vorzeichen, also negativ, ein:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

Der gesuchte Strom I_5 ist:

$$I_5 = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = -0,5 \text{ A}$$

Der Richtungssinn dieses Stromes ist entgegengesetzt zu dem im Bild 2.2 eingetragenen Bezugspfeil für I_5 ; der Strom fließt also zum Knoten hin.

Wie schon beschrieben, ergibt der Bezugspfeil eines Stromes nur im Zusammenhang mit dem Vorzeichen des Zahlenwertes eine Aussage über den Richtungssinn (s. Abschnitt 1.2.3).

2.2.3 Parallelschaltung von Widerständen

Derjenige Teil einer Schaltung, in dem ein und derselbe Strom fließt, wird als **Zweig** (*branch*) bezeichnet. Der einfache Stromkreis besteht also aus einem einzigen Zweig. Sind dagegen in einer Schaltung Verzweigungspunkte vorhanden, so besteht die Schaltung aus mehreren Zweigen.

Eine **Parallelschaltung** (*parallel connection*) von Zweigen liegt dann vor, wenn die betreffenden Zweige an *derselben* Zweigspannung liegen. Das Bild 2.3a zeigt als Beispiel die Parallelschaltung der drei Widerstände R_1 , R_2 und R_3 . Für die Ströme in diesen Widerständen gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U}{R_3} \quad (2.7)$$

Die Summe dieser Ströme ist nach dem Knotensatz gleich dem Gesamtstrom I :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (2.8)$$

Die drei Widerstände lassen sich rein rechnerisch zu einem einzigen Widerstand R_e zusammenfassen, der an derselben Zweigspannung U liegt und den Gesamtstrom

$$I = \frac{U}{R_e} \quad (2.9)$$

aufnimmt; dieser Widerstand wird als **Ersatzwiderstand** (*equivalent resistance*) bezeichnet.

Durch einen Vergleich der Gln. (2.8 und 2.9) erhalten wir den Kehrwert des Ersatzwiderstandes:

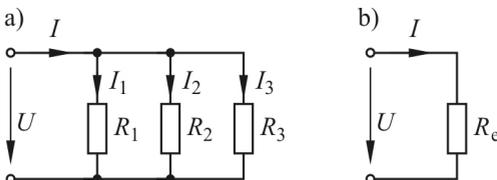


Bild 2.3 Parallelschaltung von drei Widerständen (a) und Ersatzwiderstand (b)

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (2.10)$$

Der Kehrwert des Ersatzwiderstandes einer Parallelschaltung ist gleich der Summe der Kehrwerte sämtlicher Teilwiderstände.

Die Gl. (2.10) ergibt mit der Gl. (1.20) den **Ersatzleitwert** G_e :

$$G_e = G_1 + G_2 + G_3 \quad (2.11)$$

Der Ersatzleitwert einer Parallelschaltung ist gleich der Summe sämtlicher Teilleitwerte.

Beispiel 2.3

Drei Widerstände $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 75 \Omega$ und $R_3 = 150 \Omega$ liegen parallel an der Spannung $U = 150 \text{ V}$. Wie groß sind der Ersatzwiderstand R_e und der Gesamtstrom I ? Welche Teilströme I_1 , I_2 und I_3 fließen dabei?

Wir setzen die Leitwerte $G_1 = 1/R_1 = 20 \text{ mS}$, $G_2 = 13,33 \text{ mS}$ und $G_3 = 6,67 \text{ mS}$ in die Gl. (2.11) ein und erhalten:

$$G_e = 40 \text{ mS}$$

Der Ersatzwiderstand ist:

$$R_e = \frac{1}{G_e} = 25 \Omega$$

Den Gesamtstrom I und die Teilströme berechnen wir mit der Gl. (1.20):

$$I = G_e U = 40 \text{ mS} \cdot 150 \text{ V} = 6 \text{ A}$$

$$I_1 = G_1 U = 3 \text{ A}; \quad I_2 = 2 \text{ A}; \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

Wie das Beispiel zeigt, ist der Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung stets kleiner als der kleinste Teilwiderstand.

Schreibt man eine der Gln. (2.7) oder die Gl. (2.9) mithilfe des Leitwerts und dividiert zwei dieser Gleichungen durcheinander, so erhält man den Quotienten zweier Ströme; so gilt zum Beispiel:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} \quad (2.12)$$

Die Ströme einer Parallelschaltung verhalten sich wie die Leitwerte, durch die sie fließen. Diese Aussage, die als **Stromteilerregel** bezeichnet wird, gilt wegen $I = G_e U$ auch für den Ersatzleitwert G_e einer Parallelschaltung:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_e} \quad (2.13)$$

Jeder Zweigstrom verhält sich zum Gesamtstrom einer Parallelschaltung wie der Zweigleitwert zum Ersatzleitwert.

Beispiel 2.4

Durch den Teilwiderstand $R_1 = 100 \Omega$ einer Parallelschaltung von mehreren Widerständen, die den Gesamtstrom $I = 1,2 \text{ A}$ aufnimmt, fließt der Teilstrom $I_1 = 0,5 \text{ A}$. Welchen Gesamtleitwert G_e hat die Schaltung?

Wir setzen $G_1 = 10 \text{ mS}$ und die Ströme in die Gl. (2.13) ein und erhalten: $G_e = 24 \text{ mS}$

Beispiel 2.5

Durch zwei parallel geschaltete Widerstände R_1 und R_2 soll der Gesamtstrom $I = 0,1 \text{ A}$ fließen. Dabei soll in $R_1 = 100 \Omega$ die Leistung $P_1 = 0,36 \text{ W}$ entstehen. Welchen Wert muss der Widerstand R_2 erhalten?

Wir berechnen zunächst den Teilstrom I_1 :

$$P_1 = R_1 I_1^2; \quad I_1 = 0,06 \text{ A} = 60 \text{ mA}$$

Den Teilstrom I_2 berechnen wir mit der Knotengleichung:

$$I_2 = I - I_1 = 0,04 \text{ A}$$

Mit der Gl. (2.12) ergibt sich:

$$G_2 = \frac{I_2}{I_1} G_1 = \frac{I_2}{I_1 R_1} = 6,67 \text{ mS}$$

Der gesuchte Widerstand ist $R_2 = 150 \Omega$.

2.3 Maschensatz

2.3.1 Maschengleichung

Eine **Masche** (*mesh*) ist ein beliebiger, in sich geschlossener Weg, der sowohl über Leiter als auch über Spannungspfeile geführt sein kann. In einer elektrischen Schaltung lassen sich im Allgemeinen mehrere Maschen bilden; dies gilt auch für den einfachen Stromkreis (Bild 2.1).

Als **Maschengleichung** bezeichnet man die Summe aller Spannungen, die zu einer Masche gehören. So ist z.B. die Gl. (2.1) eine Maschengleichung des einfachen Stromkreises (Bild 2.1). Wir stellen sie so um, dass sämtliche Größen auf einer Seite stehen, und erhalten für $U = U_A$ und $I = I_A$:

$$R_i I + U - U_q = 0 \quad (2.14)$$

Die stromabhängige Spannung (z. B. $R_i I$) an einem Widerstand wird **Spannungsfall** genannt.

Für die Spannungen einer Masche setzt man an:

$$\sum U = 0 \quad (2.15)$$

Damit diese Gleichung mit der Gl. (2.14) übereinstimmt, ordnet man der Masche einen **Umlaufsinn** zu und vereinbart, dass diejenigen Spannungen, deren Bezugssinn *nicht* mit dem Umlaufsinn übereinstimmt, mit *geändertem* Vorzeichen in die Gl. (2.15) einzusetzen sind.

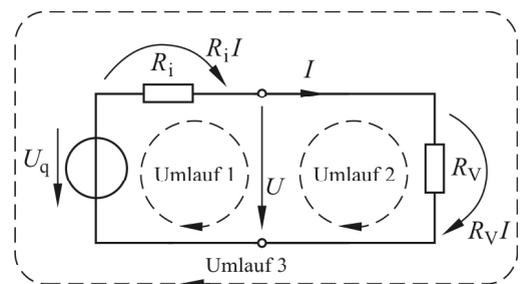


Bild 2.4 Schaltung 2.1 mit möglichen Maschen

Beispiel 2.6

Wir wollen sämtliche Maschengleichungen für die im Bild 2.4 dargestellte Schaltung ermitteln.

Beim Umlauf 1 werden der Spannungsfall $R_1 I$ und die Klemmenspannung U im Bezugssinn durchlaufen, sie werden daher positiv in die Gl. (2.15) eingesetzt.

Die Quellenspannung U_q wird beim Umlauf 1 entgegen dem Bezugssinn durchlaufen, sie wird daher negativ in die Gl. (2.15) eingesetzt:

$$R_1 I + U - U_q = 0$$

Beim Umlauf 2 wird der Spannungsfall $R_V I$ im Bezugssinn und die Klemmenspannung U entgegen dem Bezugssinn durchlaufen:

$$R_V I - U = 0$$

Beim Umlauf 3 werden die Spannungsfälle $R_1 I$ und $R_V I$ im Bezugssinn und die Quellenspannung U_q entgegen dem Bezugssinn durchlaufen:

$$R_1 I + R_V I - U_q = 0$$

Der durch die Gl. (2.15) beschriebene Zusammenhang wird **Maschensatz** genannt. Vielfach ist hierfür auch die Bezeichnung **2. KIRCHHOFFScher Satz** gebräuchlich. Dieser Satz ist die zweite Gleichgewichtsbedingung der Elektrotechnik; er verlangt, dass sämtliche Spannungen auf einem geschlossenen Weg »im Gleichgewicht« sind.

Der einfache, unverzweigte Stromkreis ist der Sonderfall einer Masche, weil dabei überall auf dem Umlaufweg derselbe Strom fließt. Im Allgemeinen trifft man jedoch auf einem Umlauf unterschiedliche Ströme an.

Beispiel 2.7

In den Zweigen der Masche (Bild 2.5), die Teil einer größeren Schaltung ist, fließen die Ströme $I_1 = 0,14$ A und $I_2 = 0,08$ A. Wir wollen die Spannung U_{AB} berechnen.

Zunächst setzen wir die Maschengleichung an:

$$R_1 I_1 + U_{AB} - R_2 I_2 - U_q = 0$$

Damit berechnen wir: $U_{AB} = 17,4$ V

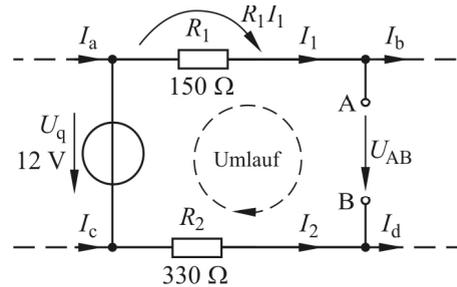


Bild 2.5 Schaltung zum Beispiel 2.7

2.3.2 Potenzial

Da eine Spannung U stets zwischen zwei Punkten wirkt, kann bei Kenntnis sämtlicher Spannungen in einer Schaltung bezüglich eines einzelnen Punktes dieser Schaltung nichts ausgesagt werden. Ein ähnliches Problem tritt z.B. bei der Höhenbestimmung im Gelände auf, bei der lediglich Höhendifferenzen gemessen werden. Um die absolute Höhe angeben zu können, muss ein Nullpunkt willkürlich festgelegt werden (z.B. $NHN = 0$ am Pegel Amsterdam).

Jedem einzelnen Punkt einer Schaltung kann eine Größe zugeordnet werden, die als **Potenzial** (*potential*) φ (griech. Buchstabe phi) bezeichnet wird. Eine Spannung U ist eine Potenzialdifferenz. So gilt z.B. für die Spannung U_{AB} im Bild 2.5:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B \quad (2.16)$$

In einer Schaltung bzw. einem Gerät kann *einem* beliebigen Punkt, der **Bezugspunkt** genannt wird,

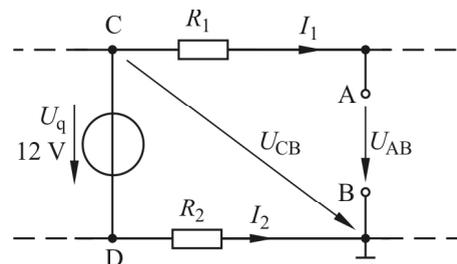


Bild 2.6 Schaltung vom Beispiel 2.7 mit Bezugspotenzial im Punkt B

das **Bezugspotenzial** $\varphi = 0$ V zugeordnet werden. Dieser Punkt wird auch **Masse** genannt; er wird vielfach mit dem Gehäuse des Geräts leitend verbunden, welches mit Erde leitend verbunden („geerdet“) wird. Dadurch wird verhindert, dass zwischen Gehäuse und Umgebung eine gefährliche Spannung auftreten kann (s. Kap. 18).

Der Punkt mit dem Potenzial $\varphi = 0$ wird in einer Schaltung durch das Zeichen \perp gekennzeichnet. Die Spannung zwischen einem Punkt der Schaltung und dem Bezugspunkt ist gleich dem Potenzial dieses Punktes.

Beispiel 2.8

In der Schaltung 2.6 ist der Punkt B geerdet. Welche Potenziale haben die übrigen Punkte?

Zunächst setzen wir $\varphi_B = 0$ in die Gl. (2.16) ein und erhalten:

$$\varphi_A = U_{AB} = 17,4 \text{ V}$$

Dann setzen wir an:

$$U_{DB} = \varphi_D - \varphi_B = R_2 I_2 = 26,4 \text{ V}$$

Mit $\varphi_B = 0$ ergibt sich: $\varphi_D = 26,4 \text{ V}$

Schließlich setzen wir an:

$$U_{CD} = U_q = \varphi_C - \varphi_D = 12 \text{ V}$$

Mit $\varphi_D = 26,4 \text{ V}$ ergibt sich: $\varphi_C = 38,4 \text{ V}$

2.3.3 Reihenschaltung von Widerständen

Bei einer **Reihenschaltung** (*series connection*) von Eintoren wird jedes Eintor vom gleichen Strom I durchflossen. Das Bild 2.7 zeigt als Beispiel die Reihenschaltung von drei Widerständen.

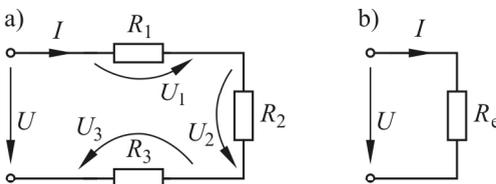


Bild 2.7 Reihenschaltung von drei Widerständen (a) und Ersatzwiderstand (b)

Die drei Widerstände lassen sich rein rechnerisch zu einem **Ersatzwiderstand** R_e zusammenfassen, der vom Strom I durchflossen wird und an der Spannung U liegt:

$$U = R_e I \quad (2.17)$$

Wir lösen die Maschengleichung

$$R_1 I + R_2 I + R_3 I - U = 0 \quad (2.18)$$

nach U auf und erhalten durch einen Koeffizientenvergleich mit der Gl. (2.17):

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.19)$$

Der Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung von Widerständen ist gleich der Summe sämtlicher Teilwiderstände.

Die Teilspannungen der Schaltung 2.7 lassen sich als Produkte mit dem Faktor I angeben:

$$U_1 = R_1 I; \quad U_2 = R_2 I; \quad U_3 = R_3 I \quad (2.20)$$

Bei der Division von je zwei dieser Gleichungen kürzt sich der Strom heraus. Man erhält z. B. für die Teilspannungen U_1 und U_2 :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (2.21)$$

Die Spannungen einer Reihenschaltung verhalten sich wie die Widerstände, an denen sie abfallen. Diese Aussage, die als **Spannungsteilerregel** bezeichnet wird, gilt auch für den Ersatzwiderstand R_e der Reihenschaltung:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_e} \quad (2.22)$$

Beispiel 2.9

Zwei in Reihe geschaltete Widerstände $R_1 = 130 \Omega$ und R_2 liegen an der Gesamtspannung $U = 35 \text{ V}$. Welchen Wert muss R_2 für $U_1 = 12,3 \text{ V}$ erhalten?

Wir setzen $U_2 = U - U_1 = 22,7 \text{ V}$ in die Gl. (2.21) ein und berechnen: $R_2 = 239,9 \Omega$

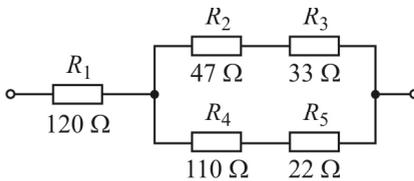
2.4 Ersatzschaltungen

2.4.1 Ersatzwiderstand

Befinden sich in einer Schaltung zwischen zwei Klemmen ausschließlich Widerstände, so können sie durch ihren **Ersatzwiderstand** ersetzt werden, der sich problemlos ermitteln lässt, wenn man die parallel geschalteten Widerstände einerseits und die in Reihe geschalteten Widerstände andererseits Schritt für Schritt zusammenfassen kann.

Beispiel 2.10

Wir wollen den Ersatzwiderstand der Schaltung ermitteln.



Zunächst fassen wir die in Reihe geschalteten Widerstände R_2 und R_3 zum Ersatzwiderstand $R_{e23} = 80 \Omega$ sowie R_4 und R_5 zum Ersatzwiderstand $R_{e45} = 132 \Omega$ zusammen.

Dann addieren wir deren Leitwerte und erhalten den Leitwert G_{ep} der Parallelschaltung:

$$G_{ep} = G_{e23} + G_{e45} = 12,5 \text{ mS} + 7,58 \text{ mS} = 20,08 \text{ mS}$$

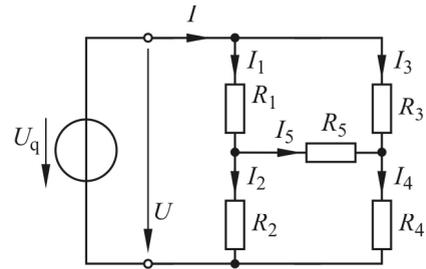
Der gesuchte Ersatzwiderstand ist die Summe von R_1 und $R_{ep} = 1/G_{ep}$:

$$R_e = R_1 + R_{ep} = 120 \Omega + 49,81 \Omega = 169,81 \Omega$$

Wenn das beschriebene Vorgehen nicht zum Ziel führt, schaltet man zweckmäßig eine Quelle an die Schaltung und berechnet mit Maschen- und Knotengleichungen den Gesamtstrom I als Funktion der Gesamtspannung U , womit sich der Ersatzwiderstand $R_e = U/I$ bestimmen lässt.

Beispiel 2.11

Wir wollen den Ersatzwiderstand $R_e = U/I$ der Brückenschaltung für die Werte $R_1 = R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$ sowie $R_5 = 2,2 \text{ k}\Omega$ berechnen.



Die Knotengleichungen

$$I - I_1 - I_3 = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_5 = 0$$

$$I_3 + I_5 - I_4 = 0$$

und die Maschengleichungen

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - U = 0$$

$$R_3 I_3 + R_4 I_4 - U = 0$$

$$R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0$$

stellen ein lineares Gleichungssystem dar, das wir für $U = 10 \text{ V}$ mit dem Mathematikprogramm MATLAB lösen. Mit dem Strom I berechnen wir den Ersatzwiderstand:

$$R_e = U/I = 1231,884 \Omega$$

2.4.2 Ersatzquelle

Enthält eine Schaltung zwischen zwei Klemmen außer Widerständen auch eine oder mehrere Quellen, so kann diese Schaltung durch eine **Ersatzquelle** ersetzt werden. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

- die Schaltung wird durch eine lineare Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_{qe} und dem Innenwiderstand R_{ie} ersetzt (Bild 2.8a); man bezeichnet dies auch als **THÉVENIN-Theorem**.
- die Schaltung wird durch eine lineare Stromquelle mit dem Quellenstrom I_{qe} und dem Innenleitwert G_{ie} ersetzt (Bild 2.8b); man spricht dabei auch vom **NORTON-Theorem**.

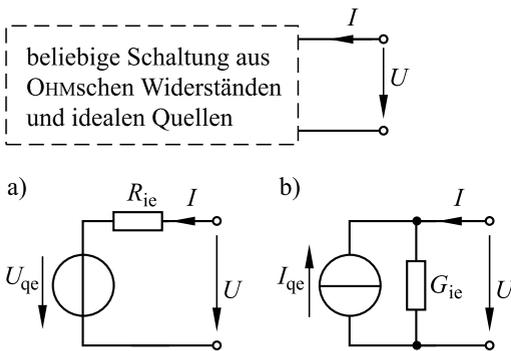


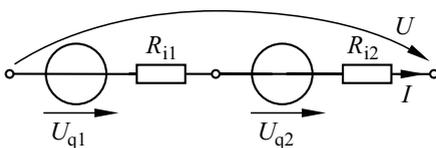
Bild 2.8 Teil einer linearen Schaltung zwischen zwei Knoten und Ersatzquellen:
 (a) lineare Spannungsquelle, (b) lineare Stromquelle

Die Quellenspannung U_{qe} der Ersatzquelle ist die Leerlaufspannung U_0 des zu ersetzenden Schaltungsteils. Entsprechend ist der Quellenstrom I_{qe} der Ersatzquelle gleich dem Kurzschlussstrom I_k des zu ersetzenden Schaltungsteils. Da nur *eine* der beiden Größen benötigt wird, bestimmt man zweckmäßig diejenige, die sich einfacher ermitteln lässt.

Der Innenwiderstand R_{ie} bzw. der Innenleitwert G_{ie} der Ersatzquelle kann dadurch bestimmt werden, dass man sich die zu ersetzende Schaltung *quellenfrei* denkt: Jede ideale Spannungsquelle wird durch einen Kurzschluss und jede ideale Stromquelle durch eine Unterbrechung des Leiterweges ersetzt. Der Widerstand zwischen den Klemmen der quellenfreien Schaltung ist der Innenwiderstand R_{ie} ; entsprechend ist der Leitwert zwischen den Klemmen der quellenfreien Schaltung gleich dem Innenleitwert G_{ie} .

Beispiel 2.12

Zwei Batterien $U_{q1} = 1,5 \text{ V}$; $R_{i1} = 0,02 \text{ }\Omega$ und $U_{q2} = 1,2 \text{ V}$; $R_{i2} = 0,03 \text{ }\Omega$ sind in Reihe geschaltet. Wir wollen die Kenngrößen der Ersatzquellen berechnen.



Für Leerlauf ($I = 0$) ergibt die Maschengleichung $U_{q1} + U_{q2} - U = 0$ die Leerlaufspannung $U = U_0$ der Reihenschaltung. Diese Leerlaufspannung ist die Quellenspannung der Ersatzquelle:

$$U_{qe} = U_0 = U_{q1} + U_{q2} = 2,7 \text{ V}$$

Nun denken wir uns die Reihenschaltung quellenfrei und ersetzen jede ideale Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung. Dabei bleibt die Reihenschaltung der Innenwiderstände übrig:

$$R_{ie} = R_{i1} + R_{i2} = 0,05 \text{ }\Omega$$

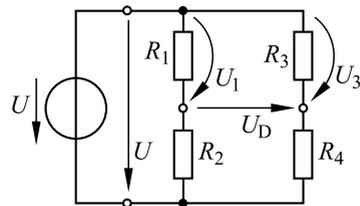
Der Innenleitwert ist $G_{ie} = 1/R_{ie} = 20 \text{ S}$. Der Quellenstrom der Ersatzquelle ist:

$$I_{qe} = G_{ie} U_{qe} = 54 \text{ A}$$

Wie schon im Abschnitt 1.5.3 erläutert, sind die Ersatzspannungsquelle und die Ersatzstromquelle gleichwertig. Deshalb ist es im Allgemeinen nicht erforderlich, beide Ersatzquellen zu bestimmen, und man begnügt sich mit derjenigen Quelle, deren Größen sich einfacher ermitteln lassen.

Beispiel 2.13

Wir wollen die Ersatzquelle der von einer idealen Spannungsquelle gespeisten Brückenschaltung ermitteln.



Zunächst berechnen wir die Spannungen U_1 und U_3 mit der Spannungsteilerregel:

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad U_3 = U \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

Die Ersatzquellenspannung U_{qe} ist die Diagonalspannung U_D der unbelasteten Brücke.