Gerhard Merziger
Thomas Wirth

Repetitorium Höhere Mathematik

7. Auflage

HANSER

Trigonometrische Funktionen

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

doppelter Winkel

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

halber Winkel

$$\cos\frac{x}{2} =^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)}$$
$$\sin\frac{x}{2} =^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} =^* \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
$$\cot\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} =^* \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Symmetrie

$\cos(-x) = \cos x$	gerade Funktion
$\sin(-x) = -\sin x$	ungerade Funktion
$\tan(-x) = -\tan x$	ungerade Funktion
$\cot(-x) = -\cot x$	ungerade Funktion

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) \qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\sin x =^* \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}} \qquad \cos x =^* \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$$

* Vorzeichen je nach Quadranten!

Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$\cosh 0 = 1, \ \sinh 0 = 0, \ \tanh 0 = 0$$
$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x\,, \quad \sinh(-x) = -\sinh x\,, \quad \tanh(-x) = -\tanh x\,, \quad \coth(-x) = -\coth x$$

Additionstheoreme

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$
$$\sinh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}\,, \quad \text{für } \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \text{für } x \geq 1$$

Überlagerung von Schwingungen

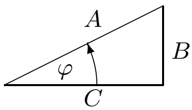
$$\boxed{A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \quad \text{(Quadranten beachten!)}$$

Spezialfall: $\boxed{B\cos\omega t + C \sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi)}$

$$B = A\sin\varphi$$
$$C = A\cos\varphi$$



$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{B}{C} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

Quadratische Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

allgemeine Binomialkoeffizienten

$r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, \ldots$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

$$\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1, \quad \binom{r}{1} = r$$

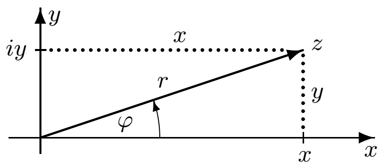
Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$dF = r\,dr\,d\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$



Rechnen mit Potenzen und Logarithmen

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

a^{x+y}	$= a^x a^y$	$\log_a xy$	$= \log_a x + \log_a y$
a^{-x}	$= \frac{1}{a^x}$	$\log_a \frac{1}{x}$	$= -\log_a x$
a^0	$= 1$	$\log_a 1$	$= 0$
$(a^x)^r$	$= a^{xr}$	$\log_a x^r$	$= r\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

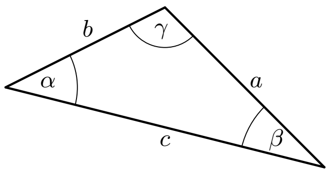
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{speziell: } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ falls } \gamma = 90^0$$

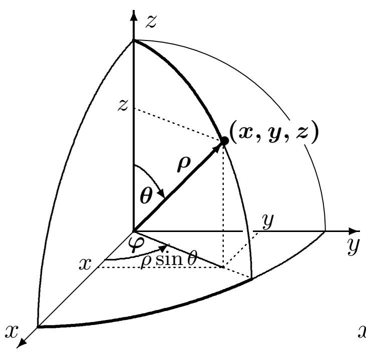


Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kugelkoordinaten

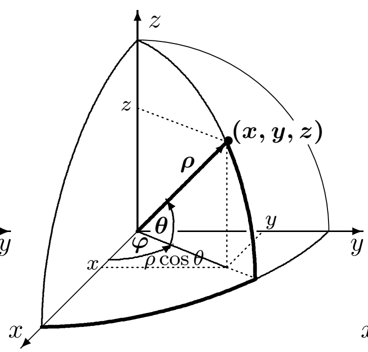
θ : Polabstand



$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta$$
$$dV = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

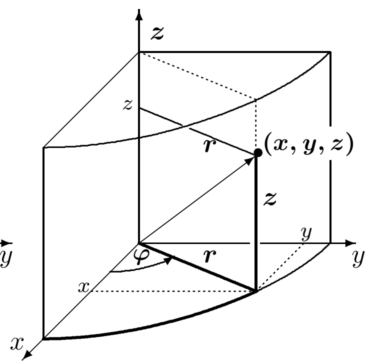
Kugelkoordinaten

θ : geographische Breite



$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\theta$$
$$dV = \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

Zylinderkoordinaten



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \cdots \qquad \text{für } |x| \le 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots \qquad \text{für } -1 < x \le 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots) \qquad \text{für } -1 \le x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots \qquad \text{für } |x| \le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

endliche geom. Reihe	$\sum_{n=0}^{k} x^n$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$	$= \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$	für $x \ne 1$
geometrische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$= \frac{1}{1-x}$	für $\|x\| < 1$
harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$	$= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$	konvergent $\iff$	$x > 1$
binomische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$	$= 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots$	$= (1+x)^r,$	$\|x\| \le 1,\ r > 0$; $\|x\| < 1,\ r < 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots = \frac{1}{e}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

wichtige Grenzwerte

$(n \to \infty,\quad a > 0)$

$\sqrt[n]{a} \to 1$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$	$\binom{a}{n} \to 0, \quad a > -1$
$\sqrt[n]{n} \to 1$	$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$	$\frac{a^n}{n!} \to 0$
$\sqrt[n]{n!} \to \infty$	$(1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1}$	$\frac{n^n}{n!} \to \infty$
$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$	$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$	$\frac{a^n}{n^k} \to \infty \quad \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$	$(1 - \frac{x}{n})^n \to e^{-x}$	$a^n n^k \to 0 \quad \begin{cases} \|a\| < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
		$n(\sqrt[n]{a} - 1) \to \ln a, \quad a > 0$

Differentiations– und Integrationsregeln

Produktregel: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

partielle Integration: $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

Vektorfunktionen

$\left(\lambda\vec{u}\right)' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}\,'$

$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)' = \vec{u}\,'\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v}\,'$

$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)' = \vec{u}\,'\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}\,'$

$\left(\vec{u}(\lambda(t))\right)' = \vec{u}\,'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)$

Kettenregel: $\left(y(x(t))\right)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y'(x(t))\cdot x'(t)$

Substitutionsregel: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$, dabei ist $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad x>1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2},\quad \lvert x\rvert<1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2},\quad \lvert x\rvert>1$
$\int g\,dx$	g

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\quad (n\neq -1)$ | $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$
$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$$
$$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$$
$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$$
$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$
$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$
$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$
$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$
$$\int x\ln x\,dx = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$
$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$
$$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$
$$\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$
$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$$
$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

Bezeichnungen: $X = ax^2+bx+c,\quad a>0,\quad \Delta = 4ac-b^2$

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right| & \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}},\quad |2ax+b|<\sqrt{-\Delta} & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arcoth}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}},\quad |2ax+b|>\sqrt{-\Delta} & \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{dx}{X}$$
$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)$$
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

REPETITORIUM

HÖHERE MATHEMATIK

Repetitio est mater studiorum

Gerhard Merziger
Thomas Wirth

7. Auflage, Ebook

Binomi Verlag **Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**

Telefon	**05105 6624000**
E–Mail	**verlag@binomi.de**
Internet	**www.binomi.de**

Zu beziehen beim Verlag

ISBN 978–3–923923–67-0

Hannover 04/21

Vorwort

Dieses Buch will angehenden Mathematikern, Physikern und Ingenieuren von Universitäten und Fachhochschulen eine Hilfe sein beim Bewältigen von

Vorlesungen **Übungen** **Klausuren**

Mathematische Verfahren und abstrakte Methoden werden erklärt und anhand einer Fülle von **vollständig behandelten Beispielen** erläutert.
Aus jahrelanger Erfahrung im Umgang mit Studierenden wissen die Autoren, wie wichtig **Beispiele** zum Verständnis sind.
Ein ausführlicher Index mit mehr als 1000 Stichwörtern erleichtert die Arbeit.

Auf Seiten, Beispiele, Aufgaben und Abschnitte wird innerhalb eckiger Klammern verwiesen: [Seite 210], [12.1], [Abschnitt 5.4] usw.

Wichtige Formeln, Begriffe und fast alle benötigten Integrale stehen auf den Umschlagseiten F1, F2, F3, F4.

Natürlich können wir trotz aller verwendeten Sorgfalt Fehler nicht ausschließen. Ein aktuelles Fehlerverzeichnis findet man auf www.binomi.de.

Teilen Sie uns bitte Kritik, Hinweise und Anregungen auf www.binomi.de mit.

Das **Repetitorium** arbeitet mit der **Formelsammlung**, zitiert durch **F+H**:

Merziger / Mühlbach / Wille / Wirth

FORMELN + HILFEN
HÖHERE MATHEMATIK

ISBN 3–923923–36–6 241 Seiten 15,80 €

Zitierte Literatur:

F+H	*Merziger/Mühlbach/Wille/Wirth*		Formeln + Hilfen
EM 1	*Merziger/Holz/Wille*	Repetitorium	Elementare Mathematik 1
EM 2	*Merziger/Holz/Wille*	Repetitorium	Elementare Mathematik 2
LA 1	*Wille*	Repetitorium	Lineare Algebra, Teil 1
LA 2	*Holz/Wille*	Repetitorium	Lineare Algebra, Teil 2
Alg	*Holz*	Repetitorium	Algebra
Ana 1	*Timmann*	Repetitorium	Analysis, Teil 1
Ana 2	*Timmann*	Repetitorium	Analysis, Teil 2
DGL	*Timmann*	Repetitorium	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Fun	*Timmann*	Repetitorium	Funktionentheorie
Top	*Timmann*	Repetitorium	Topologie und Funktionalanalysis

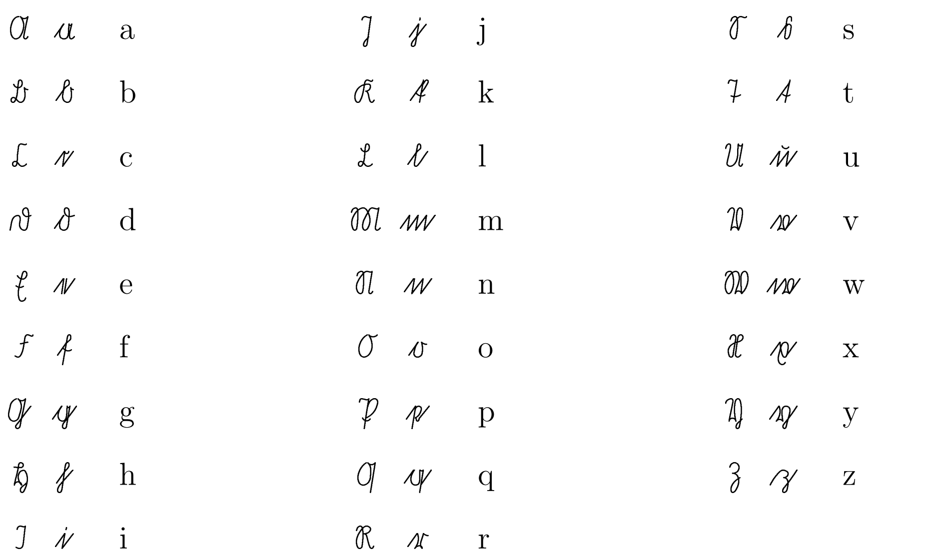
Überwiegend positive Kommentare von Studys und Dozentys zu diesen Büchern findet man unter **www.binomi.de**.

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet



Zeichenindex

$\vec{a}$	Vektor	120
$\lvert\vec{a}\rvert$	Betrag des Vektors $\vec{a}$	122
$\vec{a}\vec{b}$	Skalarprodukt, $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$	127
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt	133
$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$	Spatprodukt	136
$\vec{b}_{\vec{a}}$	Projektion von $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$	131
$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$	Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$	128
$\vert\vert$	parallel	$137, 147$
$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf	128
$(a_{i,j})$	Matrix	166
$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$	Matrix	166
$\begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$	Determinante	183
$f(x)$	Funktionswert, lies ”f von x”	24
$f'(x)$	1-te Ableitung, lies ”f Strich von x”	260
$f^{(n)}(x)$	n-te Ableitung, lies ”f n-Strich von x”	266
$\frac{df}{dx}$	1-te Ableitung, lies ”df nach dx”	260
dx, df	Differentiale	$261, 383$
f_x	f partiell nach x	374
$\operatorname{grad} f$	Gradient von f	$374, 376$
J_f	Jakobi-Matrix von f	376
$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$	Richtungsableitung	385
$a_n \to a$	die Folge (a_n) konvergiert gegen a	330
$\sum, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty}$	Summenzeichen	366
$\sqrt{}, \ \sqrt[n]{}$	Wurzel, n-te Wurzel	$48, 103$
$\int f(x)\,dx$	unbestimmtes Integral	285
$\int_a^b f(x)\,dx$	bestimmtes Integral	300
${}^{G}\!\iint$	Gebietsintegral, Doppelintegral	485
${}^{K}\!\iiint$	Raumintegral, Dreifachintegral	490

1 Grundbegriffe

1.1 Logische Grundlagen, Aussagen

Mathematik ist ohne Logik undenkbar; doch keine Angst, uns reichen hier einfache logische Prinzipien, die sich aus dem gesunden Menschenverstand erklären. Mathematik präsentiert sich in **Aussagen**, im Folgenden mit großen Buchstaben $A, B, \ldots$ bezeichnet.

Eine **Aussage** ist entweder **wahr** oder **falsch** — ein Drittes gibt es nicht!

1.1 *Beispiele für (mathematische) Aussagen:*

$3^2 > 2^3$,	ist eine wahre Aussage (ist richtig, gilt).
4 ist eine Primzahl,	ist eine falsche Aussage (ist falsch, gilt nicht).
Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge[1],	wahr oder falsch? Ein bis heute ungelöstes Problem!

Aus (einfachen) Aussagen kann man weitere (kompliziertere) Aussagen bilden:

Bezeichnung	Symbole	Lies	ist genau dann wahr, wenn
Negation	$\overline{A}$	nicht A	A falsch ist.
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B	A und B wahr sind.
Adjunktion	$A \vee B$	A oder B	A oder B wahr ist (oder beide).
Implikation	$A \Longrightarrow B$	aus A folgt B	A falsch oder B wahr ist [2].
Äquivalenz	$A \Longleftrightarrow B$	A äquivalent B	A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist.

Belegt man die Aussagen A und B mit *Wahrheitswerten* w für "wahr" und f für "falsch", so ergeben sich die Wahrheitswerte der abgeleiteten Aussagen wie folgt:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Ist die Aussage $A \Longleftrightarrow B$ wahr, benutzt man statt "$\Longleftrightarrow$" auch das Gleichheitszeichen "$=$", um längere Aussagen übersichtlicher zu schreiben.

Statt A äquivalent B, sagt man auch: A und B sind *gleichbedeutend*.

Bei mathematischen Schlüssen werden folgende Regeln häufig benutzt:

[1] Primzahlzwillinge sind z.B. 3,5 und 17,19 und 41,43, ...

[2] Merke: Ist die Voraussetzung falsch, ist jede Implikation (nicht das Ergebnis) richtig!

Logische Regeln

$\overline{\overline{A}} = A$		doppelte Verneinung einer Aussage
$(A \Longrightarrow B) = (\overline{A} \vee B) = (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$		Ersetzen der Implikation
$(A \Longleftrightarrow B) = \big((A \Longrightarrow B \ \wedge \ B \Longrightarrow A)\big) = (\overline{A} \Longleftrightarrow \overline{B})$		Ersetzen der Äquivalenz
$\overline{A \wedge B}$	$= \overline{A} \vee \overline{B}$	de Morgan'sche Regel
$\overline{A \vee B}$	$= \overline{A} \wedge \overline{B}$	de Morgan'sche Regel
$\overline{A \Longrightarrow B}$	$= A \wedge \overline{B}$	Verneinung der Implikation
$\overline{A \Longleftrightarrow B}$	$= (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$	Verneinung der Äquivalenz

1.2 *Die Aussage* $x^2 \geq x \Longrightarrow (x \leq 0) \vee (1 \leq x)$ *ist gleichbedeutend (äquivalent) mit der Aussage* $0 < x < 1 \Longrightarrow x^2 < x$.

Die beiden Aussagen sind von der Form $A \Longrightarrow B$ bzw. $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$, sie sind daher äquivalent.

1.3 *Man beweise* $\overline{A \Longrightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\boldsymbol{\overline{A \Longrightarrow B}}$	$\overline{B}$	$\boldsymbol{A \wedge \overline{B}}$
w	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	$\boldsymbol{f}$
w	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	$\boldsymbol{w}$
f	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	$\boldsymbol{f}$
f	f	w	$\boldsymbol{f}$	w	$\boldsymbol{f}$

$\overline{A \Longrightarrow B}$ und $A \wedge \overline{B}$ haben dieselbe Belegung mit Wahrheitswerten, die Aussagen sind also äquivalent.

Häufig enthalten Aussagen die *Quantoren* "**für alle** … " oder "**es gibt** … ".
Die Negation der Aussage:

"Für alle $x \in X$ gilt die Aussage $A(x)$." ist offensichtlich:
"Es gibt (mindestens) ein $x \in X$, für das $A(x)$ falsch ist."

Quantoren

$\forall x \in X,\ A(x)$	lies:	Für alle $x \in X$ gilt die Aussage $A(x)$.
$\exists x \in X,\ A(x)$		Es gibt ein $x \in X$, für das $A(x)$ gilt.

Negation:
$$\overline{\forall x \in X,\ A(x)} = \exists x \in X,\ \overline{A}(x)$$
$$\overline{\exists x \in X,\ A(x)} = \forall x \in X,\ \overline{A}(x)$$

1.4 *Man negiere folgende Aussagen:*

(a) $n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon$.

(b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $A(n, n_0)$ gilt.

(c) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon$. (Bedeutung?)

(a) Die Aussage $(n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon)$ ist eine Implikation: $(B \Longrightarrow C)$. Also:

$$\begin{array}{rcll} \overline{(B \Longrightarrow C)} & = & \overline{(\overline{B} \vee C)} & \text{(Ersetzen der Implikation)} \\ & = & \overline{\overline{B}} \wedge \overline{C} & \text{(de Morgan)} \\ & = & B \wedge \overline{C} & \text{(doppelte Verneinung)} \end{array}$$

Die Negation von $(n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon)$ ist also $(n \geq n_0 \wedge |a_n| \geq \epsilon)$.

(b)
$$\begin{array}{rcl} \overline{\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, \; A(n, n_0)} & = & \exists \epsilon > 0 \; \overline{\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, \; A(n, n_0)} \\ & = & \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \overline{\forall n \in \mathbb{N}, \; A(n, n_0)} \\ & = & \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N}, \; \overline{A}(n, n_0). \end{array}$$

(c) Bedeutung: (a_n) ist Nullfolge (siehe Seite 330). Formales Negieren ergibt:

$$\begin{array}{rl} & \overline{\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| < \epsilon)} \\ = & \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} \; (n \geq n_0 \; \wedge \; |a_n| \geq \epsilon) \quad = \quad (a_n) \text{ ist keine Nullfolge.} \end{array}$$

indirekter Beweis

Man beweist die Aussage $A \Longrightarrow B$, indem man aus der Annahme, dass die Behauptung B falsch sei, einen Widerspruch herleitet. Das heißt, man nimmt zur Voraussetzung A noch die Annahme $\overline{B}$ hinzu und führt die Aussage $A \wedge \overline{B}$ auf eine der drei folgenden Arten auf einen **Widerspruch** (Zeichen : #).

$A \wedge \overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$, also # (Widerspruch zur Voraussetzung A), [1.67]
$A \wedge \overline{B} \Longrightarrow B$, also # (Widerspruch zur Annahme $\overline{B}$), [1.52], [1.53]
$A \wedge \overline{B} \Longrightarrow F$, also # ($F$ steht für eine offensichtl. falsche Aussage), [1.66]

Ergibt sich aus $A \wedge \overline{B}$ (durch richtige Schlüsse) ein Widerspruch (etwas Falsches), muss $A \wedge \overline{B}$ falsch sein. Also muß, wenn A richtig ist, $\overline{B}$ falsch, also B richtig sein, d.h. aus A folgt B. Klingt kompliziert, ist aber logisch und wird häufig benutzt.

1.5 *Man zeige: $\sqrt{2}$ ist irrational.*

Die Aussage "$\sqrt{2}$ ist irrational" ist von der Form $A \Longrightarrow B$, wenn man sie als Kurzform folgender Aussage betrachtet:
"Aus den Rechenregeln für die reellen Zahlen folgt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist."

Indirekter Beweis:

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. $\sqrt{2}$ schreibt sich in gekürzter Bruchdarstellung: $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, mit $r, s \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ggT}(r, s) = 1$.

Man schließt nun folgendermaßen:

$$\sqrt{2} = \frac{r}{s} \Longrightarrow 2s^2 = r^2 \Longrightarrow 2|r^2 \Longrightarrow 2|r \text{ (da 2 Primzahl), etwa } r = 2t,$$
$$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{2t}{s} \Longrightarrow 2 = \frac{4t^2}{s^2} \Longrightarrow s^2 = 2t^2 \Longrightarrow 2|s^2 \Longrightarrow 2|s.$$

Also $2|r$ und $2|s \Longrightarrow \operatorname{ggT}(r, s) \neq 1$ # (zur Annahme). Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

1.2 Mathematische Grundlagen, Mengen

Selbst derjenige, der Mathematik nur als Hilfswissenschaft benutzt, benötigt einige Grundkenntnisse der Mengenlehre. Der Begriff einer Menge ist ein Grundbegriff der Mathematik, der nicht auf andere Begriffe zurückgeführt wird.

Es bedeuten:

$x \in M$: x ist Element der Menge M, kurz: x in M.
$x \notin M$: x ist nicht Element der Menge M, kurz: x nicht in M.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

(1) $M = \{a, b, \ldots, c\}$ (Durch Angabe der Elemente).
M ist die Menge, die genau die paarweise verschiedenen Elemente $a, b, \ldots, c$ enthält, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

(2) $M = \{x \in X \mid A(x)\}$ (Durch eine *definierende Eigenschaft*).
M ist die Menge, die genau die Elemente $x \in X$ enthält, für welche die Aussage A wahr ist. Ein "$\wedge$" in $A(x)$ ersetzt man häufig durch ein Komma ",".

Ist klar, um welche Menge X es sich handelt, schreibt man kurz: $\{x \mid A(x)\}$.

1.6 *Für folgende Mengen benutzt man Standardbezeichnungen:*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ = Menge der *natürlichen Zahlen*[3].

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = Menge der *ganzen Zahlen.*
$= \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z} \wedge s \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(r, s) = 1\}$ = Menge der *rationalen Zahlen.*

$\mathbb{R}$ = Menge der *reellen Zahlen*, siehe Seite 44.

$\mathbb{C}$ = Menge der *komplexen Zahlen*, siehe Seite 93.

1.7 *Beispiele für Mengen:*

$\{1\}$ = Menge, die nur das Element 1 enthält.

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -1 ist. Diese Menge enthält kein Element, sie ist leer.

$\emptyset$ = **leere Menge** = die Menge, die kein Element enthält.

$\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2x\}$
= Menge der *Lösungen* der Gleichung $x^3 - 2x = 0$.

$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot \vec{x} = 4\}$ = *Ebene* im Raum, siehe Seite 147.

$\{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ = *Einheitskreis* in der komplexen Ebene, Seite 97.

$\{f \mid f'(x) = 2x\} = \{f \mid f(x) = x^2 + c, c \in \mathbb{R}\}$
= Menge aller *Stammfunktionen* von $2x$.

[3] Falls es zweckmäßig ist, betrachtet man auch 0 als natürliche Zahl!

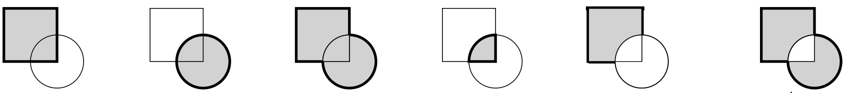
Man spricht von einer *endlichen* oder *unendlichen* Menge, je nachdem die Anzahl der Elemente der Menge eine natürliche Zahl ist oder nicht. Hier ist zweckmäßigerweise 0 eine natürliche Zahl, sonst wäre (nach unserer Definition) die leere Menge unendlich!

1.8 $\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < n^2\}$ ist eine endliche (einelementige) Menge, nämlich $\{3\}$.

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine unendliche Menge.

Bezeichnung	Lies	Bedeutung
$A \subseteq B$	A **Teilmenge** von B	$x \in A \Longrightarrow x \in B$
$A \subset B$	A **echte Teilmenge** von B	$A \subseteq B \ \wedge\ A \neq B$
$A = B$	A **gleich** B	$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$
$A \cup B$	**Vereinigung** von A und B	$= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$	**Durchschnitt** von A und B	$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
$A \setminus B$	**Differenz** von A und B	$= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Veranschaulichung mittels sogenannter *Venn–Diagramme*:



M N $M \cup N$ $M \cap N$ $M \setminus N$ $M \cup N \setminus M \cap N$
symmetrische Differenz

Für die symmetrische Differenz gilt: $M \cup N \setminus M \cap N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.

Rechenregeln für Mengen

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A.$$

Sind A, B Teilmengen der Menge X, dann gilt:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq X \setminus B \quad \Longleftrightarrow \quad B \subseteq X \setminus A.$$

de Morgansche Regeln $\left\{ \begin{array}{rcl} X \setminus (A \cup B) & = & (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \\ X \setminus (A \cap B) & = & (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{array} \right.$

Gleichheit von Mengen

$$A = B \Longleftrightarrow \Big((x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A) \Big) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn jedes Element der einen Menge zu der anderen gehört und umgekehrt.

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn die eine Menge Teilmenge der anderen Menge ist und umgekehrt.

1.9 (a) *Man zeige:* $A \subseteq B \iff A \cup B = B.$

(b) *Man zeige die de Morganschen Regeln:*

$$\begin{array}{rcl} X \setminus (A \cup B) & = & (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \\ X \setminus (A \cap B) & = & (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{array}$$

(a) Die Äquivalenz kann man durch zwei Implikationen ersetzen: Man spricht von einem Beweis "in zwei Richtungen":

(1) "$\Longrightarrow$" , Beweis von $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B$:

Unter der Voraussetzung $A \subseteq B$ ist die Gleichheit $A \cup B = B$ zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{lll} x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \subseteq B \vee x \in B \Rightarrow x \in B & \text{, also} & A \cup B \subseteq B \\ \quad x \in B \quad \Rightarrow \qquad\qquad x \in A \cup B & \text{, also} & B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = B.$$

(2) "$\Longleftarrow$" , Beweis von $A \cup B = B \Longrightarrow A \subseteq B$:

Unter der Voraussetzung $A \cup B = B$ ist zu zeigen, dass $A \subseteq B$ ist:

$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B = B$. Also ist jedes Element von A in B, also ist $A \subseteq B$.

Durch (1) und (2) ist gezeigt: $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

(b)
$$\begin{array}{rcl} x \in X \setminus (A \cup B) & \iff & x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\ & \iff & x \in X \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ & \iff & (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \\ & \iff & x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \\ x \in X \setminus (A \cap B) & \iff & x \in X \wedge x \notin (A \cap B) \\ & \iff & x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ & \iff & (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \\ & \iff & x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{array}$$

1.10 *Es seien A, B, C folgende Teilmengen von* $\mathbb{R}$*:*

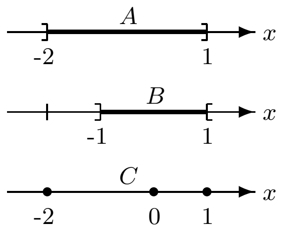
$A = \{x \mid -2 < x \leq 1\}$, $B = \{x \mid |x| < 1\}$, $C = \{x \mid x(x+2)(x-1) = 0\}$.

Man bestimme $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cap B = \underline{\underline{B}}$. Es ist $C = \{-2, 0, 1\}$ und folglich:

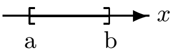
$A \cap B \cap C = B \cap \{-2, 0, 1\} = \underline{\underline{\{0\}}}$ und

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) = B \cup \{0, 1\} \\ &= \underline{\underline{\{x \mid -1 < x \leq 1\}}}. \end{aligned}$$

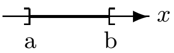


Häufig benutzte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die **Intervalle**. Man veranschaulicht sie auf der Zahlengeraden und unterscheidet folgende Typen:

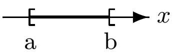
Beschränkte Intervalle:



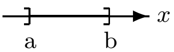
$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$: *abgeschlossenes* Intervall, die Randpunkte gehören dazu.



$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$: *offenes* Intervall, die Randpunkte gehören nicht dazu.



$[a, b[= \{x \mid a \le x < b\}$: linker Randpunkt gehört dazu, rechter Randpunkt gehört nicht dazu.



$]a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$: linker Randpunkt gehört nicht dazu, rechter Randpunkt gehört dazu.

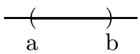
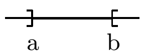
Unbeschränkte Intervalle:

$] - \infty, \infty[= \mathbb{R}$

$] - \infty, b] = \{x \mid x \le b\}$ speziell: $\mathbb{R}_{>0} =]0, \infty[= \{x \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_{\ge 0} = [0, \infty[= \{x \mid x \ge 0\}$

$]a, \infty[= \{x \mid x > a\}$

Schreibweisen: Wenn keine Missverständnisse – z.B. mit dem geordneten Paar (a, b), siehe Seite 23 – zu befürchten sind, schreibt man auch:

$]a, b[= (a, b)$, $]a, b] = (a, b]$ usw. und skizziert:  statt  usw.

1.3 Vollständige Induktion

Der stufenweise Aufbau der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beginnt mit der unendlichen Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Das Axiomensystem von **Peano** für die natürlichen Zahlen enthält das

wichtige **Induktionsaxiom**: Enthält eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und mit jedem k auch $k+1$, dann ist $A = \mathbb{N}$.

Will man nun zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen richtig ist, muss man beweisen, dass die Aussage für 1 richtig ist und dass sie, falls sie für k richtig ist, auch für $k + 1$ richtig ist.[4]

[4] Dann gilt sie für 1 und, da für 1, auch für 2, da für 2 auch für 3, usw.
Das Induktionsaxiom besagt, dass man so *alle* natürlichen Zahlen erhält und die Aussage folglich für *alle* natürlichen Zahlen richtig ist.

Vollständige Induktion

Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage über die natürliche Zahl n und sind die beiden folgenden Aussagen richtig:

		formal
1) Die Aussage gilt für 1.	1)	$A(1)$
2) Gilt die Aussage für k, so auch für $k+1$.	2)	$A(k) \Longrightarrow A(k+1)$

Dann gilt die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

1.11 *Für jede natürliche Zahl n gilt:* $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1) Die Aussage gilt für 1: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ist offensichtlich richtig.

2) Gilt die Aussage für k, ist also $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, so folgt:

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Also gilt die Aussage für 1 und – falls sie für k gilt – auch für $k+1$.

Obige Aussage gilt also für alle natürlichen Zahlen.

1.12 *Ist $x \geq -1$, so gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Bernoullische Ungl.)*

1) $A(1):\quad 1+x \geq 1+x$ ist richtig.

2) $A(k) \Longrightarrow A(k+1):\quad x \geq -1 \wedge (1+x)^k \geq 1+kx \Longrightarrow$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$, da $kx^2 \geq 0$ ist. Damit ist die Bernoullische Ungleichung bewiesen.

1.13 *Für $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.*

Hier ist eine Aussage für alle $n \geq 5$ zu beweisen. Man verfährt analog wie oben:

1) $A(5)$: $32 = 2^5 > 5^2 = 25 \quad \Longrightarrow$ die Aussage gilt für $n = 5$.

2) Für $k \geq 5$ gilt: $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$:

$k \geq 5 \wedge 2^k > k^2 \Longrightarrow 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > k^2 + k^2 \overset{(\star)}{\geq} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

$(\star)$ Benutzt wird 1.55 (a): $n \geq 3 \Longrightarrow n^2 > 2n+1$.

Gilt die Aussage also für ein $k \geq 5$, so gilt sie auch für $k+1$. Fertig.

1.14 *Auf den* Induktionsanfang*, d.h. auf den Nachweis, dass $A(1)$ oder $A(n_0)$ richtig ist, darf nicht verzichtet werden! Der* Induktionsschritt*, d.h. $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ lässt sich auch für die offensichtlich falsche Behauptung* $1+2+\cdots+n < \frac{n(n+1)}{2}$ *durchführen, siehe* 1.11*:*

$$1+2+\cdots+k < \frac{k(k+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1+2+\cdots+k+(k+1) < \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Gilt die Aussage für k, so auch für $k+1$. Natürlich findet man keinen Induktionsanfang, denn die Aussage gilt wegen 1.11 für keine natürliche Zahl!

Weitere Beispiele zur **vollständigen Induktion**: 1.55 – 1.58 auf Seite 40 – 42

1.15 (a) *Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive Zahlen und ist $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$, so gilt $\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$.*

(b) *Für das* **h***armonische,* **g***eometrische und* **a***rithmetische Mittel positiver Zahlen gilt* $\mathbf{h} \leq \mathbf{g} \leq \mathbf{a}$ *:* $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

(a) Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Ist die Aussage für n richtig und ist $x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} = 1$ so ist nach Voraussetzung $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n$
und also $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} \geq^{(\star)} n + 1$.

Beweis $(\star)$: $n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} \geq n + 1 \Longleftrightarrow x_n(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_{n+1}$.

Fall 1: Alle x_i sind gleich 1. Dann gilt $x_n(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_{n+1}$.

Fall 2: Nicht alle x_i sind gleich 1. Es gibt ein $x_i < 1$ und ein $x_j > 1$.
Sei $x_n > 1$ und $x_{n+1} < 1$. Dann gilt $x_n(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_{n+1}$.

(b) Sei $p := a_1 \cdots a_n$ und $x_k := \frac{a_k}{\sqrt[n]{p}}$. Dann ist $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$ und nach (a) gilt:

$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{p}} \geq n$, also $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$. Für die Kehrwerte gilt $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \Longrightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

<u>Alternativer Beweis</u> für $g \leq a$ (Interessante Anwendung des Induktionsbeweises): Benutzt wird, dass mit k auch 2^k gegen Unendlich geht. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile:

(1) Durch v.I. zeigt man, dass die Aussage für alle $n = 2^k$ gilt.
(2) Dann zeigt man: Gilt die Aussage für n, so auch für $n - 1$.

Man überlege, dass so obige Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt ist!

(1) Für $n = 1$, also $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Man benötigt im Laufe des Beweises die Aussage für $n = 2$: $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$:

$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Longleftrightarrow 0 \leq (a - b)^2$, richtig für $a, b \in \mathbb{R}$.

Ist nun $\sqrt[2^k]{x_1 \cdots a_{2^k}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}$, so gilt:

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^k+2^k}}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^k+2^k}}{2^k}}$$

$$\leq \frac{\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^k+2^k}}{2^k}}{2} \text{ (da } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ ist)} = \frac{a_1+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.$$

Also gilt die Aussage, falls n irgendeine Potenz von 2 ist.

(2) Ist $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, so gilt die Aussage auch für $n-1$, denn

$$\begin{aligned}\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} &= \sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}\cdot (a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}, \quad \text{da } \frac{1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n-1}}{n} \text{ ist.}\\ &\le \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}}}{n} \quad \text{nach Voraussetzung.}\end{aligned}$$

Also gilt $\quad (n-1)\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} \le a_1+\cdots+a_{n-1},$

und folglich $\quad \sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}} \le \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}.$

Damit ist obige Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen!

1.4 Kartesische Produkte

Sind A und B Mengen und ist $a \in A$ und $b \in B$, so nennt man (a,b) ein **geordnetes Paar**. Bei einem geordneten Paar (a,b) ist im Unterschied zu der Menge $\{a,b\}$ die *Reihenfolge* wesentlich.

Es ist $(a,b) = (c,d) \iff (a = c \wedge b = d)$. Also ist im allgemeinen $(a,b) \neq (b,a)$, während für die beiden Mengen gilt: $\{a,b\} = \{b,a\}$.

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

heißt **kartesisches Produkt** der Mengen A und B.

Entsprechend definiert man $A_1 \times \cdots \times A_n$, das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \cdots, A_n$, als Menge der geordneten n–Tupel $(a_1, \cdots, a_n)$.

1.16 *Man bilde das kartesische Produkt von $A = \{1,2\}$ und $B = \{a,b,c\}$:*

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in \{1,2\} \wedge y \in \{a,b,c\}\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}.$

1.17 *Beispiele kartesischer Produkte:*

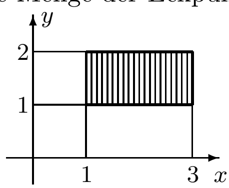
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ ist die x,y–Ebene.

$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ ist der dreidim. Raum.

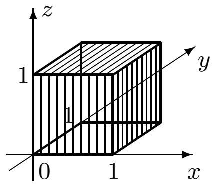
$[1,3] \times [1,2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2\}$ ist ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$.

$[0,1]^3 = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$ ist der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$.

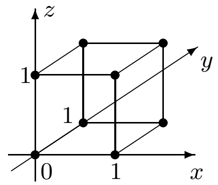
$\{0,1\}^3 = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ ist die Menge der Eckpunkte des Einheitswürfels im $\mathbb{R}^3$.



$[1,3] \times [1,2]$
Rechteck



$[0,1]^3$
Einheitswürfel



$\{0,1\}^3$
Ecken des Einheitswürfels

1.5 Abbildungen, Funktionen

Der Begriff der Abbildung oder Funktion ist ähnlich grundlegend wie der Begriff der Menge und wird hier nur erläutert.

Sind A, B zwei Mengen, so versteht man unter einer

Abbildung, Funktion f *von* A *nach* B, geschrieben: $f : A \to B$

eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ *genau* ein $y \in B$ zuordnet.

Man schreibt $f : x \mapsto y$ oder $y = f(x)$ und nennt:

A	**Definitionsbereich** oder Definitionsmenge,
$f(A)$	**Bildmenge** oder **Wertebereich** oder Wertevorrat,
x	**unabhängige** Veränderliche (Variable) oder Argument,
y	**abhängige** Veränderliche (Variable),
$y = f(x)$	**Funktionsgleichung**.

Ist $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$, so definiert man:

$f(A')$	$:= \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$	**Bildmenge** von A',
$f^{-1}(B')$	$:= \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$	**Urbildmenge** von B'.

Beachte:

f^{-1} ordnet *Teilmengen* von B *Teilmengen* von A zu, ist jedoch i.A. *keine* Abbildung von B nach A (siehe jedoch: Umkehrabbildung f^{-1}, falls f bijektiv ist, Seite 30).

Man spricht von einer "Funktion f" oder einer Funktion "$f(x)$" oder auch von einer Funktion "$y = f(x)$", z.B. von der Sinusfunktion oder der Funktion e^x oder von der Funktion $y = \sqrt{x}$.

1.18 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $f(x) = x^2$.
Man bestimme die Bildmengen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[-1, 2]$ *und* $]-1, 2]$,
sowie die Urbildmengen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[-2, 1]$ *und* $]0, 1]$.

$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f([-1, 2]) = f(]-1, 2]) = [0, 4]$.

$f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}([-2, 1]) = [-1, 1]$, $f^{-1}(]0, 1]) = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Gleichheit von Abbildungen (Funktionen)

$$\left.\begin{array}{l} f : \quad A \to B \\ \qquad \text{und} \\ g : \quad C \to D \end{array}\right\} \text{ sind } \textbf{gleich } (f = g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} A = C, \\ B = D \text{ und} \\ f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in A. \end{array}\right.$$

Damit zwei Funktionen gleich sind, müssen sowohl die *Definitionsbereiche*, als auch die *Wertebereiche* und (natürlich) die *Funktionswerte* für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich gleich sein !

Man sagt auch, f und g sind **identisch gleich**: $f \equiv g$.

1.19 *Welche der folgenden Funktionen sind gleich?*

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\end{cases},\quad g:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\end{cases},\quad h:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x^2}{x}\end{cases},\quad k:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x^2-x}{x-1}\end{cases}.$$

Keine zwei der angegebenen Funktionen sind gleich!

Aber: Ist $A\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, so stimmen alle Funktionen auf A überein!

Die Angabe von Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion ist wichtig, jedoch manchmal lästig. Folgende Verabredung erleichtert die Arbeit:

Definitionsbereich und Wertebereich

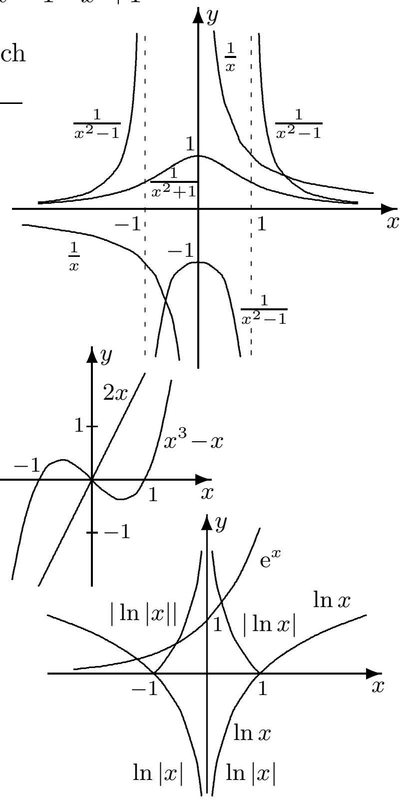
Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der *größtmögliche* Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.

Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die *Bildmenge* $f(D)$ des Definitionsbereiches gemeint.

1.20 *Man bestimme den Definitionsbereich D und Wertebereich $f(D)$ folgender Funktionen. Skizze?*

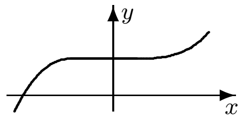
$2x,\ x^3-x,\ \mathrm{e}^x,\ \ln x,\ \tan x,\ \arctan x,\ \frac{1}{x},\ \frac{x}{x},\ \frac{1}{x^2-1},\ \frac{1}{x^2+1},\ \ln|x|,\ \big|\ln x\big|,\ \big|\ln|x|\big|.$

Funktion	Definitionsbereich D	Wertebereich $f(D)$
$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^3-x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{>0}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\pi+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\frac{x}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\{1\}$
$\frac{1}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\mathbb{R}\setminus]-1,0]$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$]0,1]$
$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\|\ln x\|$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$
$\|\ln\|x\|\|$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$



Eine Funktion $f : A \to B$, wobei $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sind[3], heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

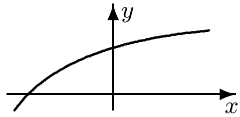


f monoton wachsend

streng monoton wachsend, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Entspechend wird (*streng*) *monoton fallend* definiert.



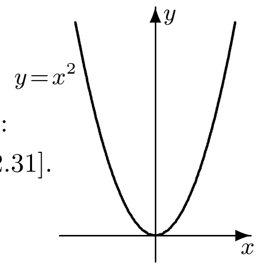
f streng mon. wachsend

1.21 *Man untersuche $y = x^2$ auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ auf Monotonie.*

$y = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ offensichtlich nicht monoton!

$y = x^2$ $(x \leq 0)$ ist streng monoton fallend,
denn (Rechnen mit Ungleich. Seite 47):
$a < b \leq 0 \Longrightarrow a^2 > ab \geq b^2 \Longrightarrow a^2 > b^2$. Ebenso zeigt man:

$y = x^2$ $(x \geq 0)$ ist streng monoton wachsend, siehe auch [2.31].



Beachte: Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend!

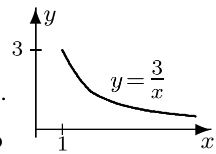
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *beschränkt*,
wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ (Schranke) gibt, mit $|f(x)| \leq S$ für alle $x \in A$.

Die reelle Funktion f ist also genau dann *beschränkt*, wenn die Funktionswerte in einem beschränkten Intervall liegen, z.B. im Intervall $[-S, S]$.

1.22 *Die Funktion $y = \dfrac{3}{x}$, $x \geq 1$ ist beschränkt.*

$x \geq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{3}{x} \leq 3$, also $|\frac{3}{x}| \leq 3$ für alle $x \geq 1$.

Oder: $f(x) = \frac{3}{x}$ ist für $x \geq 1$ positiv und monoton fallend, also liegen alle Funktionswerte zwischen $3 = f(1)$ und 0, also ist f beschränkt.



Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $A \subseteq \mathbb{R}^2$, so nennt man $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion einer bzw. zweier (reeller) Veränderlicher. Diese Funktionen lassen sich bekanntlich als *Kurven* in der (x, y)–Ebene bzw. als *Flächen* im (x, y, z)–Raum darstellen (veranschaulichen):

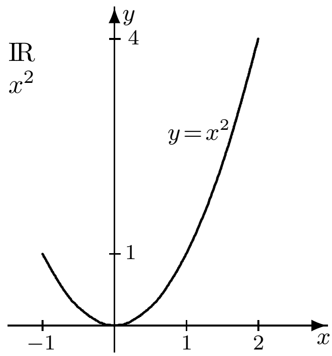
1.23 *Man stelle die Funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ als Kurve in der (x, y)–Ebene dar.*

Schreibweisen für diese Funktion: $f : \begin{cases} [-1, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$

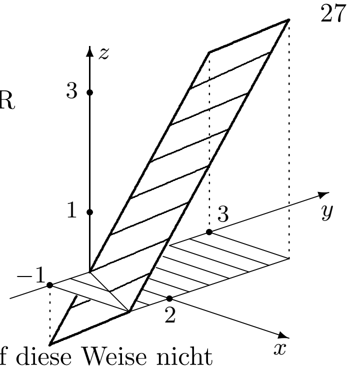
kurz: $f(x) = x^2$ oder $y = x^2$, für $-1 \leq x \leq 2$.

Die zugehörige Kurve in der (x, y)–Ebene,
d.h. der *Graph* der Funktion, ist die Menge:

$\{(x, y) \mid x \in [-1, 2] \, , \, y = x^2\}$,
also ein Teil der *Normalparabel* $y = x^2$.



[3]Wichtig, da $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ geordnet ist.

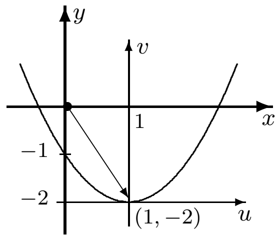


1.24 *Man stelle die Funktion $f : [0,2] \times [-1,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{1}{2}x + y$ als Fläche im Raum dar.*

Die zugehörige Fläche im (x,y,z)–Raum, d.h. der *Graph* der Funktion, ist die Menge: $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in [0,2] \times [-1,3]\,,\ z = \frac{1}{2}x + y\}$, also ein Teil der Ebene $E : x + 2y - 2z = 0$.

Funktionen von drei Veränderlichen lassen sich auf diese Weise nicht darstellen, da man dazu den $\mathbb{R}^4$, also den vierdimensionalen Raum, benötigt. Siehe jedoch Kapitel **15 Funktionen mehrerer Veränderlicher**.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Funktionen und Kurven in der Ebene (analog im Raum) ist die Verschiebung des Koordinatensystems:

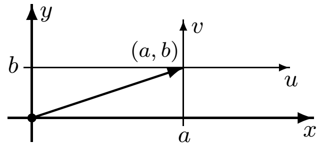


1.25 *Man skizziere $y = x^2 - 2x - 1$.*

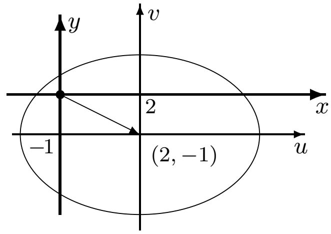
$y = x^2 - 2x - 1 \iff y + 2 = (x-1)^2$.
Setzt man $u = x - 1$ und $v = y + 2$, so erhält man:
$v = u^2$, die Normalparabel in der u,v–Ebene:

Verschiebung des Koordinatensystems

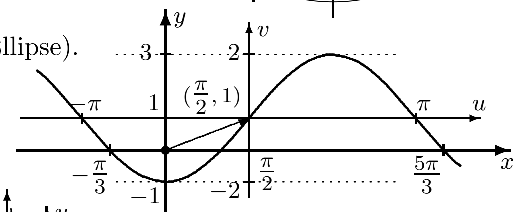
Setzt man $\begin{cases} u = x - a \\ v = y - b \end{cases}$, so liegt der Nullpunkt der u,v–Ebene im Punkt (a,b) der x,y–Ebene.



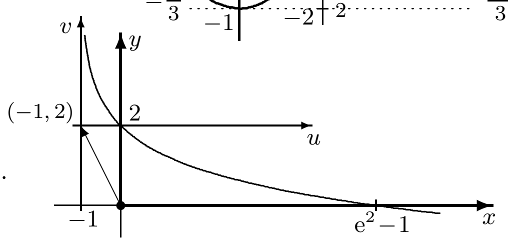
1.26 *Man skizziere:*
(a) $\{(x,y) \mid 4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y - 11 = 0\}$,
(b) $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$,
(c) $y = \ln \dfrac{e^2}{x+1}$.



(a) Quadratische Ergänzung liefert:
$4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y - 11 = 0$
$\iff \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$.
$\left.\begin{array}{l} u = x - 2 \\ v = y + 1 \end{array}\right\} \implies \dfrac{u^2}{9} + \dfrac{v^2}{4} = 1$, (Ellipse).



(b) $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$
$\iff y - 1 = 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$.
$\left.\begin{array}{l} u = x - \frac{\pi}{2} \\ v = y - 1 \end{array}\right\} \implies v = 2\sin u$.



(c) $y = \ln e^2 - \ln(x+1)$
$\iff y - 2 = -\ln(x+1)$.
$\left.\begin{array}{l} u = x + 1 \\ v = y - 2 \end{array}\right\} \implies v = -\ln u$.

Ist $f: A \to B$, so

- ist $f(A) \subseteq B$, wobei $f(A) \subset B$ echte Teilmenge von B sein kann.
  Bsp.: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, so gilt $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$.

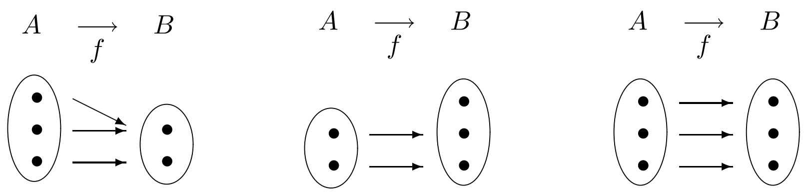
- ist jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zugeordnet, wobei jedoch *verschiedenen* Elementen von A durchaus das *gleiche* Element von B zugeordnet sein kann:
  Bsp.: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin x$, so gilt $\sin 0 = \sin \pi = \ldots = 0$.

surjektiv – injektiv – bijektiv

Eine Abbildung (Funktion) $f: A \to B$ heißt

				Stichwort:
surjektiv	$\iff$	$f(A) = B$	$\iff$	f ist Abbildung *auf*,
injektiv	$\iff$	$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	$\iff$	f *eineindeutig*,
bijektiv	$\iff$	f surjektiv und injektiv	$\iff$	f *eineindeutig auf*.

1.27 *Folgende Diagramme veranschaulichen diese Begriffe:*



f surjektiv, f nicht injektiv — f injektiv, f nicht surjektiv — f bijektiv, f injektiv und surjektiv

f ist nicht surjektiv,	wenn es *ein* Element aus B gibt, das *nicht* Funktionswert ist.
f ist nicht injektiv,	wenn es zwei *verschiedene* Elemente aus A mit *gleichem* Funktionswert gibt.

1.28 *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und ist $f: A \to B$, streng monoton wachsend, so ist f injektiv.*

$$
\begin{aligned}
x_1 \neq x_2 \quad &\Longrightarrow \quad (x_1 < x_2 \vee x_1 > x_2) \quad \Longrightarrow \quad \big(f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)\big) \\
&\Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \text{also ist } f \text{ injektiv.}
\end{aligned}
$$

Entsprechend sind streng monoton fallende Funktionen injektiv!
Monotonie allein reicht nicht für die Injektivität, siehe obige Bemerkung über konstante Funktionen, die sicher nicht injektiv sind (falls A mehr als ein Element hat).

1.29 *Sind folgende Funktionen surjektiv, injektiv, bijektiv?*

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$ (b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$

(c) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x \end{array} \right.$ (d) $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array} \right.$

(a) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0} \Longrightarrow f$ nicht surjektiv, f streng monoton wachsend $\Longrightarrow f$ injektiv.

(b) f ist surjektiv und injektiv (a), also bijektiv.

(c) f ist surjektiv, aber nicht injektiv, da $f(-1) = f(1) = 0$, siehe auch [1.20].

(d) f ist bijektiv, da surjektiv und streng monoton wachsend!

1.6 Umkehrfunktionen

Umkehrabbildung

Ist $f : A \to B$ eine *bijektive* Abbildung, so ist jedem $x \in A$ genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet und umgekehrt jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$, d.h.

Ist $f : A \to B$ eine *bijektive* Abbildung, so gibt es die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ mit $f^{-1}(y) = x$, falls $y = f(x)$ ist.

$f^{-1} : B \to A$ ist ebenfalls bijektiv und es ist $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$.

Beim Übergang von f zu f^{-1} wird der Wertebereich von f zum Definitionsbereich von f^{-1}, und aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$ wird die Funktionsgleichung $x = f^{-1}(y)$ für die Funktion f^{-1} (Auflösen nach x).

Da man üblicherweise die unabhängige Veränderliche mit x bezeichnet, schreibt man $y = f^{-1}(x)$ statt $x = f^{-1}(y)$. Diese *Vertauschung* von x und y bedeutet in der (x, y)–Ebene eine *Spiegelung* an der *Winkelhalbierenden* $y = x$.

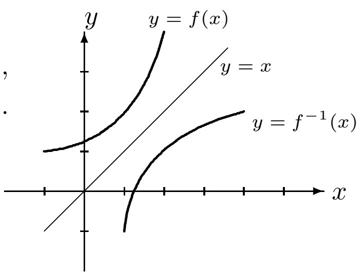
Die Graphen von f und f^{-1} liegen also symmetrisch zur Winkelhalbierenden.

Berechnung der Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv,
so erhält man $f^{-1} : B \to A$ durch:

1.) $y = f(x)$ nach x *auflösen*: $x = f^{-1}(y)$,
2.) x und y *vertauschen*: $y = f^{-1}(x)$.

Die Graphen von f und f^{-1} liegen *spiegelbildlich* zur Winkelhalbierenden $y = x$.



1.30 *Für folgende bijektive Funktionen berechne man die Umkehrfunktionen und gebe ihre Definitionsbereiche an.*

$$\text{(a)}\quad y=-2x+1,\quad \text{(b)}\quad y=\frac{x+1}{x},\quad \text{(c)}\quad y=\mathrm{e}^{3x-4}.$$

(a) $y=-2x+1 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}(1-y)$, also $\underline{y=\frac{1}{2}(1-x),\ x\in\mathbb{R}}$,

(b) $y=\frac{x+1}{x} \Longrightarrow xy=x+1 \Longrightarrow x=\frac{1}{y-1}$, also $\underline{y=\frac{1}{x-1},\ x\neq 1}$,

(c) $y=\mathrm{e}^{3x-4} \Longrightarrow 3x-4=\ln y \Longrightarrow x=\frac{1}{3}(4+\ln y)$, also $\underline{y=\frac{1}{3}(4+\ln x),\ x>0}$.

1.31 *Das folgende Beispiel verdeutlicht die Probleme, die beim Begriff Umkehrfunktion auftauchen:*

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\\ x\mapsto x^2\end{cases}\quad\left(\begin{array}{c}\text{nach Verabredung}\\ \text{kurz: } y=x^2\end{array}\right)\quad \begin{array}{c}\text{ist nicht bijektiv,}\\ \text{also nicht umkehrbar!}\end{array}$$

Beschränkt man den Definitionsbereich von f auf z.B. größtmögliche Intervalle, auf denen f bijektiv ist, so erhält man folgende umkehrbare Funktionen:

Funktion f	kurz:	Funktion f^{-1}	kurz:
$\begin{cases}\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$	$y=x^2,\ x\geq 0$	$\begin{cases}\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\\ x\mapsto\sqrt{x}\end{cases}$	$y=\sqrt{x},\ x\geq 0$
$\begin{cases}\mathbb{R}_{\leq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\\ x\mapsto x^2\end{cases}$	$y=x^2,\ x\leq 0$	$\begin{cases}\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\leq 0}\\ x\mapsto-\sqrt{x}\end{cases}$	$y=-\sqrt{x},\ x\geq 0$

Man beachte: Ist $f: A\to B$, dann ist

f^{-1} die Umkehrfunktion von f, falls f bijektiv ist, und definiert auf dem Wertebereich $f(A)=B$ von f.

$\frac{1}{f}$ die multiplikativ inverse Funktion der Funktion f und dort definiert, wo f definiert und ungleich Null ist: $\frac{1}{f}(x)=\frac{1}{f(x)}$, falls $f(x)\neq 0$ ist.

f^{-1} und $\frac{1}{f}$ bezeichnen also *verschiedene* Funktionen!

1.32 *Für* $f:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ *mit* $f(x)=\tan x$ *bestimme man* f^{-1} *und* $\frac{1}{f}$.

f ist bijektiv, also

$f^{-1}:\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\quad$ mit $f^{-1}(x)=\arctan x$.

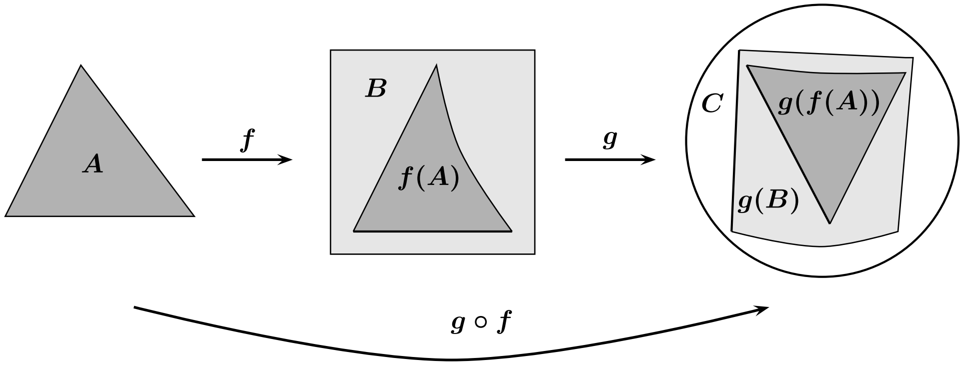
$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=0,\quad$ also

$$\frac{1}{f}:\ ]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\,\setminus\{0\}\ \to\ \mathbb{R}\setminus\{0\},\quad\text{mit } \frac{1}{f(x)}=\cot x.$$

1.7 Einsetzen (Verketten, Substituieren) von Funktionen

Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen, so ist jedem $x \in A$ zunächst durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet und diesem dann durch g das Element $g(f(x)) \in C$.
Das *Nacheinanderausführen* von f und g liefert also eine Funktion von A in C:

$$f : \begin{cases} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases} \text{ und } g : \begin{cases} B & \to & C \\ y & \mapsto & g(y) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f : \begin{cases} A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$



$g \circ f$ (Lies: g "Kuller" f) bedeutet: Erst f dann g anwenden!
$g \circ f\,(x) = g\big(f(x)\big)$

Man nennt $g \circ f$ die aus f und g zusammengesetzte Funktion. Zur Differentiation bzw. Integration zusammengesetzter Funktionen siehe Kettenregel bzw. Substitutionsregel!

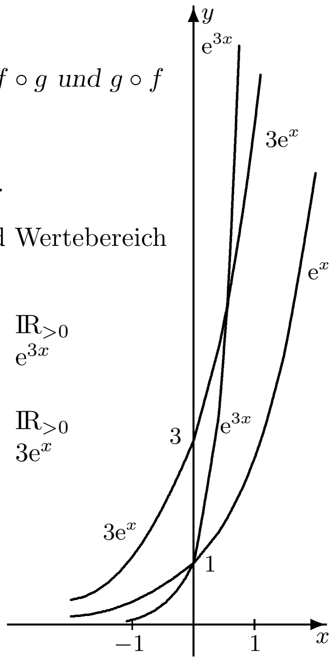
1.33 *Man verkette die Funktionen f und g zu $f \circ g$ und $g \circ f$ und skizziere sie!*

(a) $f(x) = \mathrm{e}^x, \;\; g(x) = 3x$

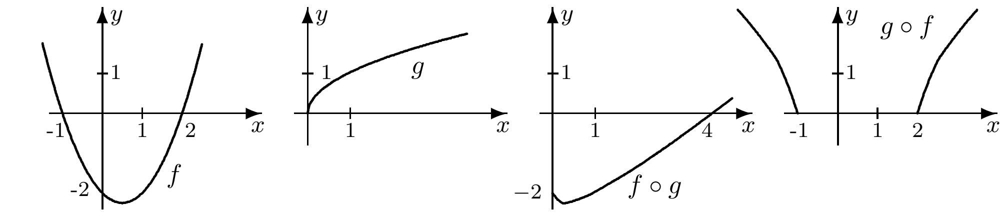
(b) $f(x) = (x+1)(x-2), \;\; g(x) = \sqrt{x}\,.$

(a) Es sei an die Verabredung über Definitions– und Wertebereich (Seite 25) erinnert!

$$\left.\begin{array}{l} f : \begin{cases} \mathrm{I\!R} & \to & \mathrm{I\!R}_{>0} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{cases} \\[2em] g : \begin{cases} \mathrm{I\!R} & \to & \mathrm{I\!R} \\ x & \mapsto & 3x \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} f \circ g : \begin{cases} \mathrm{I\!R} & \to & \mathrm{I\!R}_{>0} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{3x} \end{cases} \\[2em] g \circ f : \begin{cases} \mathrm{I\!R} & \to & \mathrm{I\!R}_{>0} \\ x & \mapsto & 3\mathrm{e}^x \end{cases} \end{array}$$

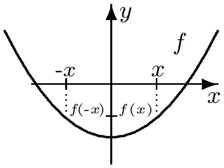


(b) $\begin{array}{l} f(x) = (x+1)(x-2) \\ g(x) = \sqrt{x}\,,\ x \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} (f \circ g)(x) = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2), \quad x \geq 0. \\ (g \circ f)(x) = \sqrt{(x+1)(x-2)}\,, \quad x \leq -1 \vee x \geq 2. \end{array}$



1.8 Gerade, ungerade Funktionen

Bei der Untersuchung von Funktionen, insbesondere bei der Veranschaulichung von reellen Funktionen in der Ebene (oder im Raum) spielen *Symmetrieeigenschaften* naturgemäß eine wichtige Rolle. Man unterscheidet *Achsensymmetrie* z.B. zur y–Achse und *Punktsymmetrie* (z.B. zum Nullpunkt).



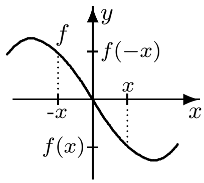
$f(-x) = f(x)$
f gerade

Gerade, ungerade Funktionen

Es sei $A = [-a, a] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to B$.

Gilt für alle $x \in A$:

$\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{array}$, dann heißt $\begin{array}{l} \boldsymbol{f} \textbf{ gerade}, \\ \boldsymbol{f} \textbf{ ungerade}. \end{array}$



$f(-x) = -f(x)$
f ungerade

Zerlegung in gerade + ungerade Funktion

Für jede auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f gilt $\boxed{f(x) = g(x) + u(x)}$

mit $g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ gerade und $u(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ ungerade.

Diese Zerlegung ist eindeutig bestimmt, siehe etwa [**A 1**], Seite 61.

1.34 *Man untersuche, ob folgende Funktionen gerade oder ungerade sind:*
x^2, $\sqrt[3]{x}$, $\cos x$, $\sin x$, e^x, $\cosh x$, $\sinh x$.

$f(x) = x^2$ ist gerade, weil $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ist.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist ungerade, weil $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ ist.

Aus der Definition von $\cos x$ und $\sin x$ folgt, daß

$\cos(-x) = \cos x$, also $\cos x$ gerade, und $\sin(-x) = -\sin x$, also $\sin x$ ungerade ist.

$e^{-1} \neq \pm e^1$, die e–Funktion ist weder gerade noch ungerade.

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist gerade, weil $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ ist.

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ist ungerade, weil $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$ ist.

Zerlegung der e–Funktion in geraden und ungeraden Anteil siehe 1.36.

Symmetrie

f gerade $\iff$ der Graph von f liegt symmetrisch zur y–Achse,
f ungerade $\iff$ der Graph von f liegt symmetrisch zum Nullpunkt.

Ist f ein *Polynom* oder eine *Potenzreihe*, so gilt:

f gerade $\iff$ f enthält nur gerade Potenzen von x,
f ungerade $\iff$ f enthält nur ungerade Potenzen von x (daher der Name).

1.35 *Hiermit erkennt man (Reihen siehe Umschlagseite* **F3***):*

gerade: $3 - x^2$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

ungerade: $4x - x^3$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

weder noch: $2x + x^2$, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

1.36 *Für jede auf* $\mathbb{R}$ *definierte Funktion* f *ist*

$$\left.\begin{array}{ll} g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} & \textit{gerade} \\ u(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2} & \textit{ungerade} \end{array}\right\}, \textit{ und} \quad f(x) = g(x) + u(x) \ \textit{(klar).}$$

$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$ also g gerade,
$u(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -u(x)$ also u ungerade.

Zerlegung der e–Funktion: $\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x$.

Zerlegung der Schwingung $2\sin(\omega t + \pi/3)$ mittels der Add.–Theoreme [**F 1**]:
$2\sin(\omega t + \pi/3) = \ldots = \cos\omega t + \sqrt{3}\,\sin\omega t =$ gerade+ungerade, (s. auch Seite 79).

Summe, Produkt, Quotient, Einsetzen

f, g gerade $\Longrightarrow$ $f+g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ f\circ g$ gerade

f, g ungerade $\Longrightarrow$ $\begin{cases} f+g,\ f\circ g & \text{ungerade} \\ f\cdot g,\ \frac{f}{g} & \text{gerade} \end{cases}$

f gerade, g ungerade $\Longrightarrow$ $\begin{cases} f\circ g,\ g\circ f & \text{gerade} \\ f\cdot g,\ \frac{f}{g} & \text{ungerade} \end{cases}$

f beliebig, g gerade $\Longrightarrow$ $f\circ g$ gerade.

1.37 *Haben folgende Funktionen Symmetrieeigenschaften?*

$f(x) = \cos x^3 \cdot \sinh \sqrt[3]{\mathrm{e}^{x^2+1}}$, $g(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$, $h(x) = 1 + |x+1|$.

Nach obigen Regeln sind $\cos x^3$ und $\sinh \sqrt[3]{\mathrm{e}^{x^2+1}}$ gerade, also ist auch das Produkt $f(x)$ gerade. Der Graph der Funktion f liegt symmetrisch zur y–Achse!

$g(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$ ist weder gerade noch ungerade,
setzt man aber $\quad x - 1 = u,\ y + 2 = v$, so gilt $v = \frac{1}{u}$.

Diese Funktion ist ungerade, der Graph also punktsymmetrisch zum Nullpunkt in der (u, v)–Ebene.
Also liegt der Graph von $y = -2 + \frac{1}{x-1}$ punktsymmetrisch zum Punkt $P = (1, -2)$.
Ebenso: $h(x) = 1 + |x + 1|$ liegt achsensymmetrisch zu der Geraden $x = -1$.

Gilt für eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen für alle Punkte des Definitionsbereiches $D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$f(-x, y) = f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad f(-x, y) = -f(x, y)$$

so heißt f *gerade* bzgl x bzw. *ungerade* bzgl. x. Entsprechendes gilt für die Variable y und für Funktionen von drei oder mehr Variablen.

1.38 *Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion* $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ *?*

Es ist: $f(-x, y) = \frac{(-x)^2 y}{(-x)^2+y^2} = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = f(x, y)$.
Ebenso sieht man: $f(x, -y) = -f(x, y)$ und $f(-x, -y) = -f(x, y)$.
Das heißt, siehe auch [1.63]: Der Graph von f im x, y, z–Raum liegt:

	zur y, z–Ebene		$f(-x, y) = f(x, y)$	
symmetrisch	zur x–Achse	, da	$f(x, -y) = -f(x, y)$	ist.
	zum Nullpunkt		$f(-x, -y) = -f(x, y)$	

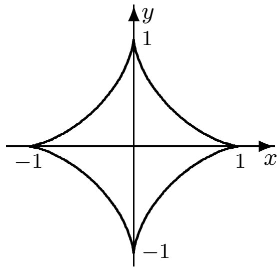
Die Funktionswerte von f ergeben sich aus den Funktionswerten von f im 1. Quadranten!

1.39 *Welche Symmetrieeigenschaften hat die Kurve* $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ *?*

Sei $K := \{(x, y) \mid x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$, siehe auch [1.63].
Wegen $(-a)^{2/3} = a^{2/3}$ gilt:
$(x, y) \in K \iff (-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in K$.

Die Kurve K liegt also symmetrisch zu beiden Achsen und zum Nullpunkt!

Da $f(x, y) = f(y, x)$ ist, liegt K symmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$, denn die Punkte (x, y) und (y, x) (Vertauschen von x und y) liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.
Analog: K liegt symmetrisch zur Geraden $y = -x$.
Astroide siehe auch [1.50].



Astroide
$\boldsymbol{x^{2/3} + y^{2/3} = 1}$

1.9 Grenzwerte von Funktionen

Da der Grenzwertbegriff der zentrale Begriff in der Differential– und Integralrechnung ist, kommt man an folgenden Definitionen nicht vorbei. Man versuche, sich die folgenden Begriffe anhand der Beispiele klar zu machen!!!
Zur praktischen Berechnung von Grenzwerten benutzt man oft:

Regel von l'Hospital, siehe Seite 273.
Potenzreihen, siehe Seite 344 ff, Umschlagseite **F3** oder **F+H**.

Grenzwert der Funktion f bei x_0

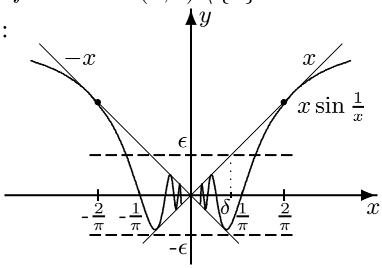
Es sei (a,b) ein offenes Intervall und $x_0 \in (a,b)$.
Ist $D = (a,b) \setminus \{x_0\} = \{x \in (a,b) \mid x \neq x_0\} = (a,x_0) \cup (x_0,b)$ und $f : D \to \mathbb{R}$, so hat f für $x \to x_0$ (oder: an der Stelle x_0, bei x_0) den **Grenzwert** y_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$.

$$\text{Schreibweise:} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff$ Die Funktionswerte $f(x)$ sind *beliebig* wenig von y_0 entfernt, wenn x *hinreichend* wenig von x_0 entfernt ist.

1.40 *Es sei* $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. *Man zeige:* $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Ist (a,b) ein offenes Intervall und $0 \in (a,b)$, so ist f auf $D = (a,b) \setminus \{0\}$ definiert.
Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle man $\delta = \epsilon$. Dann gilt:
Ist $x \in D \wedge |x - 0| = |x| < \delta = \epsilon$, so ist
$|x \sin \frac{1}{x} - 0| = |x \sin \frac{1}{x}| = |x| \cdot \underbrace{|\sin \frac{1}{x}|}_{\leq 1 \text{ für } x \neq 0} \leq |x| < \epsilon$.



Ist $D = (a, x_0)$ und ist $f : D \to \mathbb{R}$, so definiert man:
f hat für $x \to x_0$ den **linksseitigen Grenzwert** y_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$.

$$\text{Schreibweise:} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0.$$

Ist $D = (a, \infty)$ und ist $f : D \to \mathbb{R}$, so definiert man:
f hat für $x \to \infty$ den **Grenzwert** y_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x \in D \wedge x > s \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$.

$$\text{Schreibweise:} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = y_0.$$

Analog werden rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ definiert.

Der Grenzwert von f an der Stelle x_0 existiert genau dann, wenn rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert existieren und gleich sind:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0.$$

Existieren rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert, so braucht der Grenzwert nicht zu existieren, wie folgendes Beispiel zeigt:

1.41

Man bestimme ggf. die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0^-}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}$ *und* $\lim\limits_{x\to 0}$ *von*

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, (b) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$.

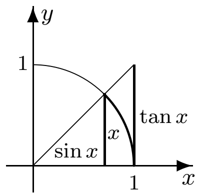
(a) f ist definiert in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und es gilt (Def. von $|x|$ siehe Seite 48):

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{, für } x > 0 \\ -1 & \text{, für } x < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1 \quad \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \text{ existiert nicht.}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to\infty}\arctan y = \underline{\frac{\pi}{2}}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to-\infty}\arctan y = \underline{-\frac{\pi}{2}}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, folglich existiert $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$ nicht.



1.42 *Man berechne* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Für $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ gilt: $\sin x \le x \le \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$\Longrightarrow \cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$, (siehe Rechnen mit Ungleichungen S. 47)

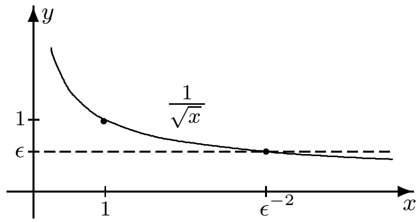
Aus $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ folgt $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Da $\dfrac{\sin x}{x}$ eine *gerade* Funktion (siehe Seite 33) ist, gilt auch $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Da links– und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, ist $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1}}$.

Einfacher: Regel von l'Hospital [12.20] oder Potenzreihen [14.44].

1.43 *Man zeige:* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.



Ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so wird $|f(x) - 0| = |\frac{1}{\sqrt{x}}| = \frac{1}{\sqrt{x}} < \epsilon$, falls $x > \frac{1}{\epsilon^2} = \epsilon^{-2}$ ist. Man setze z.B. $s = \epsilon^{-2}$.

Es ist mühsam, Grenzwerte durch Rückgang auf die Definition zu berechnen. Folgende Regeln können die Rechnungen sehr vereinfachen:

Grenzwertregeln

Der Grenzwert einer Summe (Differenz, Produkt, Quotient[6]) ist gleich der Summe (Differenz, Produkt, Quotient[6]) der Grenzwerte, wenn die einzelnen Grenzwerte existieren.

Wichtig: Regel von l'Hospital: *unbestimmte Ausdrücke* (Seite 273).
Grenzwertberechnung mittels Potenzreihen [14.44].

1.44 *Man berechne* (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)(3x-1)}{5x^2-2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{(\sqrt{x}+1)x}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)x}$.

(a) Kürzen durch x^2 ergibt: $\frac{(2x+3)(3x-1)}{5x^2-2} = \frac{(2+\frac{3}{x})(3-\frac{1}{x})}{5-\frac{2}{x^2}}$.

Grenzwertregeln: $$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)(3x-1)}{5x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(2+\frac{3}{x})}^{\to 2}\overbrace{(3-\frac{1}{x})}^{\to 3}}{\underbrace{5-\frac{2}{x^2}}_{\to 5}} = \frac{2\cdot 3}{5} = \underline{\underline{\frac{6}{5}}}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{(\sqrt{x}+1)x} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$, völlig unproblematisch.

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)x}$ existiert nicht. Lässt man jedoch die *uneigentlichen* Grenzwerte $\pm\infty$ zu, so gilt: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)x} = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)x} = -\infty$.

(d) Der Zähler lässt sich zerlegen in $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$, also:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)x} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)x} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{x} = \frac{\sqrt{1}+1}{1} = \underline{\underline{2}}.$$

1.10 Stetige Funktionen

Stetigkeit von f an der Stelle x_0

Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ **stetig**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

f ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$ $\Longleftrightarrow$ Die Funktionswerte sind *beliebig* wenig von $f(x_0)$ entfernt, wenn x *hinreichend* wenig von x_0 entfernt ist.

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt in D stetig, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

[6] keiner der auftretenden Nenner darf Null werden!

D kann Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder vom $\mathbb{R}^n$ sein. Falls jedoch nicht ausdrücklich anderes gesagt wird, ist $D \subseteq \mathbb{R}$.

1.45 $f(x) = \sqrt{x}$ *ist für jedes* $x_0 \geq 0$ *stetig.*

Nach [1.62] gilt: $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\,| \leq \sqrt{|x - x_0|}$ für $x, x_0 \geq 0$.
Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei $\delta := \epsilon^2$.
Ist nun $|x - x_0| < \delta = \epsilon^2$, so ist $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\,| \leq \sqrt{|x - x_0|} < \epsilon$.
Also ist $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x_0 \geq 0$ stetig. Da δ nur von ϵ und nicht von der Stelle x_0 abhängt, nennt man f für $x \geq 0$ *gleichmäßig stetig.*

Handlicher als die ϵ, δ–Definition ist folgendes Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, z.B. falls D ein offenes Intervall ist:

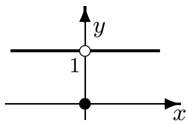
$$\boxed{f \text{ ist stetig bei } x_0 \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

- Existiert $f(x_0)$ nicht, wohl aber $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, so nennt man f an der Stelle x_0 *stetig ergänzbar*. Ergänzbar deshalb, weil man durch $f(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ die Funktion f zu einer an der Stelle x_0 stetigen Funktion erweitern (fortsetzen) kann.

- Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, so nennt man f an der Stelle x_0 *hebbar unstetig*. Hebbar deshalb, weil man durch Änderung von f an der Stelle x_0 durch $f(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ erreicht, dass f an der Stelle x_0 stetig wird.

1.46 *Man untersuche* $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *in* $\mathbb{R}$ *auf Stetigkeit.*

In $x_0 \neq 0$ ist f stetig, weil $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sgn}^2 x = 1 = \operatorname{sgn}^2 x_0$ ist.
In $x_0 = 0$ ist f unstetig, weil $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1 \neq 0 = \operatorname{sgn}^2 0$ ist.
f ist jedoch bei 0 hebbar unstetig, da $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1$ existiert.



$$\boxed{\textit{Die elementaren Funktionen sind dort, wo sie definiert sind, auch stetig.}}$$

Beachte: Zu einer Funktion gehört immer der Definitionsbereich!

Mit der verkürzten Aussage: "Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist überall stetig", ist die wahre Aussage gemeint: "Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist in ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig".

Falsch ist die Aussage: "Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist (bei 0) unstetig", denn unstetig kann eine Funktion nur dort sein, wo sie definiert ist.

Richtig dagegen: "Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist bei 0 nicht stetig ergänzbar".

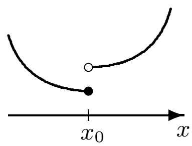
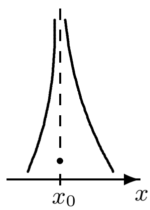
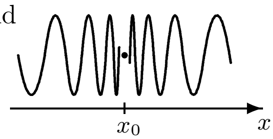
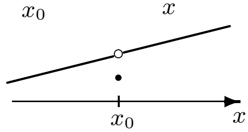
Will man kompliziertere Funktionen auf Stetigkeit untersuchen, geht man – genau wie bei der Berechnung von Grenzwerten – möglichst nicht auf die Definition zurück, sondern benutzt folgende Regeln für stetige Funktionen:

> **Rechnen mit stetigen Funktionen**
>
> Summe, Differenz, Produkt, Quotient[7] stetiger Funktionen sind stetig.
>
> Das Einsetzen einer stetigen Funktion in eine stetige Funktion ergibt wieder eine stetige Funktion.

Ist D ein offenes Intervall, so erhält man durch Negation (siehe: Logische Regeln, Seite 14) aus

$$f \text{ ist stetig bei } x_0 \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

eine Aussage darüber, wann genau f an einer Stelle $x_0 \in D$ unstetig ist:

> **Unstetigkeitsstellen**
>
> $$f \text{ unstetig bei } x_0 \in D \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$
>
> f ist also unstetig bei $x_0 \in D$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert oder, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, aber ungleich $f(x_0)$ ist (hebbare Unstetigkeitsstelle).
>
> Das ergibt folgende typische Unstetigkeitsstellen:
>
> 1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht, z.B. weil
>
>   a) f bei x_0 eine Sprungstelle hat,
>
> 
>
>
>   b) f bei Annäherung an x_0 unbeschränkt ist,
>
> 
>
>
>   c) f bei Annäherung an x_0 oszilliert und die Amplitude nicht gegen 0 geht.
>
> 
>
>
> 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, aber $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (hebbare Unstetigkeitsstelle).
>
> 
>

[7] keiner der auftretenden Nenner darf Null werden!

1.47 $$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , \text{ für } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ für } x = 0 \end{cases}$$ *ist an der Stelle 0 unstetig.*

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht (vegleiche 1.41), f hat bei 0 eine Sprungstelle.

1.48 *Lässt sich $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle 0 stetig ergänzen?*

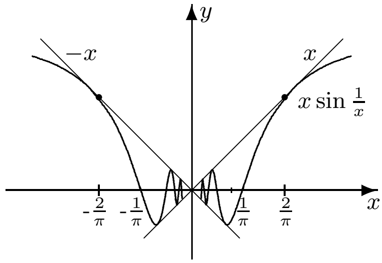
Nein, denn f ist in jedem Intervall, das 0 enthält, unbeschränkt.

1.49 *Lässt sich $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ an der Stelle 0 stetig ergänzen?*

Nein, denn $\sin\frac{1}{x}$ oszilliert für $x \to 0$ mit der Amplitude 1.

1.50 *Man zeige:* $$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$ *ist überall stetig.*

(a) Ist $x_0 \neq 0$, so ist f an der Stelle x_0 stetig, da $\frac{1}{x}$ dort als Quotient stetiger Funktionen stetig ist. Folglich ist auch $\sin\frac{1}{x}$ stetig (Einsetzen stetiger Funktionen ineinander) und deshalb $x\sin\frac{1}{x}$ (Produkt stetiger Funktionen).



(b) Bleibt $x_0 = 0$ zu untersuchen:
Wegen $0 \leq |x\cdot\sin\frac{1}{x}| = |x|\cdot|\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$
gilt $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$.
Siehe auch 1.40.

Also ist f auch an der Stelle 0 und folglich überall stetig! Zur Frage der Differenzierbarkeit der Funktion f siehe 12.1.

1.11 Aufgaben

1.51 *Negiere:* $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1 \in D\ \forall x_2 \in D,\ |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.
Was bedeutet diese Aussage, falls $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion ist?

1.52 *Man beweise indirekt: Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

1.53 *Man beweise indirekt: $\sqrt{x}$ ist streng monoton wachsend.*

1.54 *Man zeige: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (= symmetrische Differenz).*

1.55 (a) *Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt $n^2 > 2n + 1$.*

(b) *Für jede natürliche Zahl $n \geq 10$ gilt $2^n > n^3$.*

(c) *Für jede natürliche Zahl n gilt $\sum\limits_{j=0}^{n} j!j = (n+1)! - 1$.*

(d) *Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt $\prod\limits_{j=2}^{n}(1 - \frac{1}{j^2}) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$.*

1.56 *Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2.*

1.57 *Die rekursive Folge $a_0 = 4,\ a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ ist monoton fallend, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_{n+1} \leq a_n$* [14.10].

1.58 (a) *$y = x^n$ ist für $x \geq 0$ streng monoton wachsend.*

(b) *Ist n ungerade, so ist $y = x^n$ für alle x streng monoton wachsend.*

1.59 *Man formalisiere und negiere die Aussagen:*
(a) *f ist auf $[0,1]$ beschränkt.* (b) *f ist auf $[0,1]$ monoton fallend.*

1.60 *Man bestimme eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und $(0,1)$.*

1.61 *Man bestimme ggf. die Umkehrfunktionen:*
$\sin(2x-\frac{\pi}{2}),\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad \cosh(-\mathrm{e}^{-x}),\quad \ln\frac{x^2}{3},\ x<0,\quad \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}\,,\ x<0.$

1.62 *Für $a,b\ge 0$ gilt $|\sqrt{a}-\sqrt{b}\,|\le\sqrt{|a-b|}\,.$*

1.63 *Man skizziere die Kurven $|x|^a+|y|^a=1$ für $a=\frac{2}{3},\ 1,\ 2.$*

1.64 *Man bestimme Symmetrieeigenschaften der Fläche $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}.$*

1.65 *Man berechne ggf. folgende Grenzwerte:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}\,-2x$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}\,-\sqrt{x-\sqrt{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{[x]}\ ,\quad [x]=\begin{cases}\text{Gauß–Symbol,}\\ \text{größte ganze Zahl } \le x.\end{cases}$

1.66 *Man beweise indirekt: $a,b\ge 0\Longrightarrow\sqrt{ab}\,\le\dfrac{a+b}{2}.$*

1.67 *Man beweise indirekt: $|x|<1\Longrightarrow 4+2x-2x^2>0.$*

1.68 *Man zeige: Jedes Polynom $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ist punktsymmetrisch zu dem Punkt $(-\dfrac{b}{3a},p(-\dfrac{b}{3a}))$, dem Wendepunkt der Parabel 3. Ordnung.*

1.12 Lösungen

1.51 Die Aussage bedeutet, dass f auf D gleichmäßig stetig ist.
Bedenkt man: $\overline{A\Longrightarrow B}=\overline{\overline{A}\vee B}=A\wedge\overline{B}$, so erhält man als Negation:
$\exists\epsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x_1\in D\ \exists x_2\in D,\ |x_1-x_2|<\delta\wedge|f(x_1)-f(x_2)|\ge\epsilon,$
bedeutet: f ist auf D nicht gleichmäßig stetig.

1.52 Gäbe es nur endlich viele Primzahlen $p_1,\ldots,p_n$, so wäre $q:=p_1\cdots p_n+1$ durch keine der Primzahlen $p_1,\ldots,p_n$ ohne Rest teilbar, also eine (weitere) Primzahl, # zur Annahme.

1.53 $\sqrt{x}$ nicht streng monoton wachsend $\Longleftrightarrow\exists x_1,x_2,\ 0\le x_1<x_2,\ \sqrt{x_1}\,\ge\sqrt{x_2}\,>0.$ Aus $\sqrt{x_1}\,\ge\sqrt{x_2}\,>0$ folgt wegen der Monotonie von $y=x^2,\ x\ge 0$ [1.21]: $x_1\ge x_2$ # zur Annahme.

1.54 $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$
$\Longleftrightarrow(x\in A\setminus B)\vee(x\in B\setminus A)\Longleftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$

1.55 (a) $n\ge 3\Longrightarrow n-1\ge 2\Longrightarrow(n-1)^2\ge 4>2\Longrightarrow n^2-2n+1>2\Longrightarrow n^2>2n+1.$

(b) $2^{10}=1024>1000=10^3$ und $k\ge 10$ und $2^k>k^3\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\cdot2^k>2k^3=k^3+k^3=k^3+(k-1)k^2+(k-1)k+k\\&\ge k^3+3k^2+3k+1=(k+1)^3,\ \text{da } k-1\ge 3 \text{ ist.}\end{aligned}$$

Beim Induktionsschluss wurde nur $k-1\ge 3$, also $k\ge 4$ benutzt. Warum gilt die Aussage nicht für $n\ge 4$? Vergleiche 1.14.

(c) Für $n=0$ ist die Aussage richtig. Sei $\sum_{j=0}^{k}j!j=(k+1)!-1.$

Dann folgt $\sum_{j=0}^{k+1} j!j = (k+1)! - 1 + (k+1)!(k+1) = (k+2)! - 1$.

(d) Für $n = 2$ ist die Aussage richtig. Sei $\prod_{j=2}^{k}(1 - \frac{1}{j^2}) = \frac{k+1}{2k}$. Dann folgt $\prod_{j=2}^{k+1}(1 - \frac{1}{j^2}) = \prod_{j=2}^{k}(1 - \frac{1}{j^2})\,(1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = (\frac{k+1}{2k})(1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+2}{2(k+1)}$.

1.56 Durch vollst. Induktion ist zu zeigen: $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Für $n = 1$ ist die Aussage richtig. Ist $\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = k^2$, so gilt:

$\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1) = \sum_{j=1}^{k}(2j-1) + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

1.57 $a_2 = \sqrt{3 + a_1} = \sqrt{7} \le 4 = a_1$, also ist die Aussage $a_{n+1} \le a_n$ für $n = 1$ richtig. Gilt die Aussage für k, ist also $a_{k+1} \le a_k$. Dann schließt man:
$a_{k+1} \le a_k \Longrightarrow 3 + a_{k+1} \le 3 + a_k \Longrightarrow \sqrt{3 + a_{k+1}} \le \sqrt{3 + a_k} \Longrightarrow a_{k+2} \le a_{k+1}$.
Monotonie der $\sqrt{\ }$, siehe 1.53. Gilt die Aussage für k, so auch für $k+1$.

Also ist $a_{n+1} \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. (a_n) ist monoton fallend.

1.58 (a) $y = x^n,\ x \ge 0$ ist streng monoton wachsend, Beweis durch v.I.:
Für $n = 1$ (oder $n = 2$, 1.21) ist die Aussage richtig!
Ist $0 \le a < b$ und $a^k < b^k$, so folgt $a^k a < b^k a$ und $ab^k < bb^k$, also $a^{k+1} < b^{k+1}$.
(b) Ist n ungerade, so ist $y = x^n$ eine ungerade Funktion und
$a < b \le 0 \Longrightarrow 0 \le -b < -a \Longrightarrow (-b)^n < (-a)^n \Longrightarrow -b^n < -a^n \Longrightarrow a^n < b^n$.
Also ist $y = x^n$ (n ungerade) auch für negative x streng monoton wachsend!

1.59

f ist auf $[0,1]$ beschränkt	$\Longleftrightarrow$	$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in [0,1],\ \lvert f(x)\rvert \le S$.
f ist auf $[0,1]$ unbeschränkt	$\Longleftrightarrow$	$\forall S \in \mathbb{R}\ \exists x \in [0,1],\ \lvert f(x)\rvert > S$.
f ist auf $[0,1]$ monoton fallend	$\Longleftrightarrow$	$\forall a, b \in [0,1],\ a < b \Rightarrow f(a) \ge f(b)$.
f ist auf $[0,1]$ nicht monoton fallend	$\Longleftrightarrow$	$\exists a, b \in [0,1],\ a < b \wedge f(a) < f(b)$.

1.60 $\arctan x$ ist bijektiv zwischen $\mathbb{R}$ und $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also ist $\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \arctan x)$ bijektiv zwischen $\mathbb{R}$ und $(0,1)$.

1.61 $2x - \frac{\pi}{2}$ ist bijektiv zwischen $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\sin x$ ist bijektiv zwischen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $[-1,1]$. Also ist $\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ bijektiv zwischen $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[-1,1]$.
$y = \sin(2x - \frac{\pi}{2}),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = \arcsin y \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin y$
$\Longrightarrow$ Umkehrfunktion: $\underline{y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin x,\ -1 \le x \le 1.}$

$-e^{-x}$ ist bijektiv zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_{<0}$.

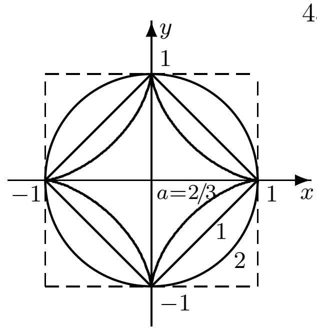
Die Umkehrfunktion von $y = \cosh x,\ x < 0$ ist $y = -\operatorname{arcosh} x,\ x > 1$. Also:

$y = \cosh(-e^{-x}) \Longrightarrow$ Umkehrfunktion: $\underline{y = -\ln \operatorname{arcosh} x,\ x > 1}$.

$y = \ln \frac{x^2}{3},\ x < 0 \Longrightarrow$ Umkehrfunktion: $\underline{y = -\sqrt{3e^x},\ x \in \mathbb{R}}$.

$y = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}},\ x < 0 \Longrightarrow$ Umkehrfunktion: $\underline{y = -\frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2},\ 0 < x < 1}$.

1.62 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \ge b \ge 0$, dann gilt:
$a \ge b \Longrightarrow ab \ge b^2 \Longrightarrow \sqrt{ab} \ge b \Longrightarrow 2\sqrt{ab} \ge 2b \Longrightarrow -b \ge -2\sqrt{ab} + b$
$\Longrightarrow \lvert a - b\rvert = a - b \ge a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Longrightarrow \sqrt{\lvert a - b\rvert} \ge \lvert\sqrt{a} - \sqrt{b}\rvert$.



1.63 $|x|^a + |y|^a = 1$, für $a = \frac{2}{3},\ 1,\ 2$:
Die Kurven liegen symmetrisch
zu beiden Achsen und den Winkelhalbierenden!
Siehe auch Astroide ($a = \frac{2}{3}$), [1.39].

1.64 Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ liegt symmetrisch zu einer Geraden (Ebene), wenn jeder Punkt der Fläche durch Spiegeln (siehe Seite 153) an der Geraden (Ebene) in einen zur Fläche gehörenden Punkt übergeht:

$$\begin{aligned}
f(-x,y) &= \frac{1}{-xy} = -f(x,y) \Longrightarrow \text{der Graph von } f \text{ symmetrisch zur y–Achse,}\\
f(x,-y) &= \frac{1}{x(-y)} = -f(x,y) \Longrightarrow \text{der Graph von } f \text{ symmetrisch zur x–Achse,}\\
f(-x,-y) &= \frac{1}{(-x)(-y)} = f(x,y) \Longrightarrow \text{der Graph von } f \text{ symmetrisch zur z–Achse,}\\
f(y,x) &= \frac{1}{yx} = f(x,y) \Longrightarrow \text{der Graph von } f \text{ symm. zur Ebene } y = x\\
f(-y,-x) &= \frac{1}{(-y)(-x)} = f(x,y) \Longrightarrow \text{der Graph von } f \text{ symm. zur Ebene } y = -x.
\end{aligned}$$

1.65 (a) $\frac{2}{5}$ (b) Erweitern mit $\sqrt{4x^2 - 2x + 3} + 2x$ ergibt Grenzwert $= -\frac{1}{2}$ (c) 0

(d) $\frac{x+\sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x} \to 1 + 0 = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$ (e) 1, wie (b)

(f) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ (g) ex. nicht!

(h) $x-1 \le [x] \le x \Longrightarrow \underbrace{\frac{x}{x} \le \frac{x}{[x]} \le \frac{x}{x-1}}_{\to 1} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{[x]} = 1$ (Quetschlemma, Seite 331.)

1.66 Ann.: $\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2}$
$\Longrightarrow 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \Longrightarrow 0 > (a-b)^2$ # (falsch, kein Quadrat ist negativ!)

1.67 Ann.: $4 + 2x - 2x^2 \le 0 \Longrightarrow \frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \le 0$
$\Longrightarrow \frac{3}{2} \le |x - \frac{1}{2}| \Longrightarrow x \le -1 \vee x \ge 2$ # (zur Voraussetzung $-1 < x < 1$.)

1.68 Verschiebung des Koordinatensystems (Seite 27):

$$\begin{matrix} u = x - (-\frac{b}{3a}) \\ v = y - p(-\frac{b}{3a}) \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} x = u - \frac{b}{3a} \\ y = v + p(-\frac{b}{3a}) \end{matrix} \quad \text{liefert}$$

$$\underline{v + p(-\tfrac{b}{3a})} = y = p(x) = \underline{a(u - \tfrac{b}{3a})^3 + b(u - \tfrac{b}{3a})^2 + c(u - \tfrac{b}{3a}) + d}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{v = au^3 - \frac{b^2}{3a}u.}}$$

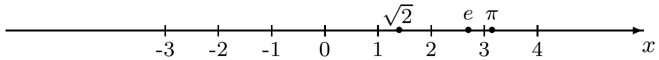
Im u,v–System ist p eine *ungerade* Funktion, der Graph also *punktsymmetrisch* zum Nullpunkt.

Der Nullpunkt im u,v–System ist der Punkt $(-\frac{b}{3a}, p(-\frac{b}{3a}))$ im x,y–System.

2 Reelle Zahlen

2.1 Brüche, Potenzen, Wurzeln

Die Menge der Zahlen x auf der Zahlengeraden wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.



Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so besteht stets genau eine der drei Ordnungsrelationen:

$a < b$	a kleiner als b, a liegt links von b auf der Zahlengeraden.
$a = b$	a ist gleich b.
$a > b$	a größer als b, a liegt rechts von b auf der Zahlengeraden.

Ist $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$ (Transitivität).
Statt "$a < b$ oder $a = b$" schreibt man "$a \leq b$" (a kleiner oder gleich b).

Die rationalen (und die reellen) Zahlen liegen *dicht* auf der Zahlengeraden, d.h. zwischen je zwei verschiedenen rationalen (reellen) Zahlen liegen stets unendlich viele weitere rationale (reelle) Zahlen.

2.1 *Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist $a < b$, so liegt z.B. die unendliche Menge* $\{a + \frac{b-a}{n} \mid n = 2, 3, \ldots\}$ zwischen a und b.

Jede reelle Zahl ist ein (endlicher oder unendlicher) Dezimalbruch, wobei die rationalen Zahlen genau die endlichen oder periodischen Dezimalbrüche sind.

2.2 (a) *Man verwandle folgende unendlichen periodischen Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche:* $x = 0.\overline{15}$, $y = 0.0\overline{072}$, $z = 1.32\overline{5}$.

(b) *Man zeige:* $0.\overline{9} = 1$. (c) *Man berechne* $2 \cdot 0.\overline{7}$.

(a) $$x = 0.\overline{15} \implies \begin{array}{rcr} 100x &=& 15.\overline{15} \\ -\quad x &=& -0.\overline{15} \\ \hline 99x &=& 15.00 \end{array} \implies x = \frac{15}{99} = \underline{\underline{\frac{5}{33}}}.$$

$$\begin{array}{rr} 1000y = & 7.2\overline{072} \\ -\quad y = & -0.0\overline{072} \\ \hline 999y = & 7.2000 \end{array} \implies \begin{array}{l} y = \dfrac{72}{9990} \\ y = \underline{\underline{\dfrac{4}{555}}} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 10z = & 13.25\overline{5} \\ -z = & -1.32\overline{5} \\ \hline 9z = & 11.930 \end{array} \implies z = \underline{\underline{\frac{1193}{900}}}$$

(b) Für $x = 0.\overline{9}$ gilt: $$\begin{array}{rcl} 10x &=& 9.999\ldots \\ -x &=& -0.999\ldots \\ \hline 9x &=& 9.000\ldots \end{array} \implies \underline{\underline{x = 1}}.$$

Oder mit der geometrischen Reihe, Seite 337:

$$0.\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \underline{\underline{1}}.$$

(c) $$0.\overline{7} = \frac{7}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9} \quad \text{also} \quad 2 \cdot 0.\overline{7} = 2 \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{9} = \underline{\underline{1.\overline{5}}}.$$

Für das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln (falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind, $\sqrt{x}$ ist in $\mathbb{R}$ z.B. nur für $x \geq 0$ definiert) gelten folgende Regeln:

$x^u \cdot x^v = x^{u+v}$	$(x^u)^v = x^{u\cdot v}$	$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$(x\cdot y)^u = x^u \cdot y^u$
$\dfrac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$	$\sqrt[v]{x^u} = x^{u/v}$		$\left(\dfrac{x}{y}\right)^u = \dfrac{x^u}{y^u}$

Erfahrungsgemäß führen Unsicherheiten beim Rechnen mit Brüchen, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen (siehe Seite 86) immer wieder zu ärgerlichen Fehlern in Klausuren!

Zur vertiefenden Wiederholung siehe auch **EM 1**.

2.3 *Man berechne* $(2^3)^2$ *und* $2^{(3^2)}$*:*

$(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$ und $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

2.4 *Man vereinfache* $(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}\,)^2 \cdot x^{-1}$ *durch Ausmultiplizieren:*

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}\,)^2 \cdot x^{-1} &= (x^{3/4} + x^{1/2})^2 x^{-1} &&= (x^{6/4} + 2x^{3/4+1/2} + x)x^{-1}\\ &= x^{3/2-1} + 2x^{5/4-1} + 1 &&= \sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + 1\end{aligned}$$

2.5 *Für welche* $x > 0$ *gilt* $x^{(n^{-1})} > (x^n)^{-1}$*?*

Es ist $x^{(n^{-1})} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ und $(x^n)^{-1} = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Also gilt:
$x^{(n^{-1})} > (x^n)^{-1} \iff \sqrt[n]{x} > \frac{1}{x^n} \iff x^n\,\sqrt[n]{x} > 1 \iff x^{n+1/n} > 1 \iff x > 1.$

2.2 Fakultät, Binomialkoeffizienten

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n bezeichnet man mit $\underline{n!}$ (lies: $\underline{n\text{–Fakultät}}$). Aus Zweckmäßigkeitsgründen setzt man zusätzlich $0! = 1$.

$$\boxed{n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} n! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\\ 0! &= 1\end{aligned}}$$

2.6 *Man berechnet:* $1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \cdots$

Mit dem Taschenrechner erhält man z.B.: $13! = 6\,227\,020\,800$.
Die Fakultäten größerer Zahlen lassen sich näherungsweise mit der *Stirlingschen Formel* (siehe **F+H**, 7) berechnen: $n! \approx (\frac{n}{e})^n \cdot \sqrt{2\pi n}$, z.B. $13! \approx 6\,187\,239\,471$.

Die als Faktoren der Potenzen des Binoms $(a+b)$ auftretenden Koeffizienten heißen **Binomialkoeffizienten**:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a + b\\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\\
\cdots & \qquad\qquad \cdots
\end{aligned}$$

$$(a+b)^n = \underbrace{1}_{\binom{n}{0}} a^n + \underbrace{n}_{\binom{n}{1}} a^{n-1}b + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}}_{\binom{n}{2}} a^{n-2}b^2 + \cdots + \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} a^{n-k}b^k + \cdots + \underbrace{1}_{\binom{n}{n}} b^n.$$

Für den Koeff. von $a^{n-k}b^k$ in der Potenz $(a+b)^n$ schreibt man kurz: $\binom{n}{k}$, lies: "n über k".

Binomialkoeffizienten

$n = 0, 1, 2, \ldots \quad k = 1, 2, \ldots$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

z.B.:

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$$

$$\binom{3}{5} = \frac{3\cdot2\cdot1\cdot0\cdot(-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 0$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\binom{0}{k} = \frac{0\cdot(-1)\cdots(-k+1)}{k!} = 0$$

binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Die Binomialkoeffizienten berechnet man mit dem **Pascalschen Dreieck**:

$n=0$							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		**6**	+	**4**		1		
5		1		5		10		**10**		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

. . . .

$$(a+b)^6 = \mathbf{1}\,a^6 + \mathbf{6}\,a^5b + \mathbf{15}\,a^4b^2 + \mathbf{20}\,a^3b^3 + \mathbf{15}\,a^2b^4 + \mathbf{6}\,ab^5 + \mathbf{1}\,b^6$$

wichtige Formeln

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$	$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ $\mathbf{6} + \mathbf{4} = \mathbf{10}$	Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = \binom{5}{2}$	Symmetrie des Pascalschen Dreiecks

2.7 Setzt man in der binomischen Formel $a = 1$ und $b = 1$, bzw. $b = -1$, so gilt:

(1) $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$, z.B.: $2^4 = 16 = 1+4+6+4+1$.

(2) $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$: $\quad 0 = 1-4+6-4+1$.

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ ist nur für nicht negative ganze Zahlen n definiert. Man erweitert ihn jedoch so, dass er für beliebige reelle Zahlen r einen Sinn erhält:

allgemeine Binomialkoeffizienten

$r \in \mathbb{R} \qquad k = 1, 2, \dots$

$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$

$\binom{r}{0} = 1$ und $\binom{r}{1} = r$

z.B.:

$$\begin{aligned}
\binom{5}{3} &= \tfrac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10, \\
\binom{1.4}{3} &= \tfrac{1.4\cdot0.4\cdot(-0.6)}{3!} = -0.056, \\
\binom{-2}{3} &= \tfrac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{3!} = -4, \\
\binom{\pi}{2} &= \tfrac{\pi\cdot(\pi-1)}{2!} \approx 3.364.
\end{aligned}$$

allgemeine binomische Formel, binomische Reihe

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = \binom{r}{0} + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

2.8

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{0.5} \\
&= \binom{0.5}{0} + \binom{0.5}{1} x + \binom{0.5}{2} x^2 + \binom{0.5}{3} x^3 + \binom{0.5}{4} x^4 + \cdots \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 \pm \cdots, \quad \text{für } -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

2.3 Ungleichungen, Beträge

Ist $a < b$, so ist

$a + c \ < \ b + c$, für alle $c \in \mathbb{R}$	Addition einer bel. Zahl auf beiden Seiten.
$a \cdot c \ \lesseqgtr \ b \cdot c$, falls $c \gtrless 0$	Multiplikation mit beliebiger $\substack{\text{pos.}\\\text{neg.}}$ Zahl.
$\frac{1}{a} \ \gtrless \ \frac{1}{b}$, falls $ab \gtrless 0$	Bilden der Reziproken auf beiden Seiten, falls a, b $\substack{\text{gleiches}\\\text{ungleiches}}$ Vorzeichen haben.

Diese Regeln gelten auch, wenn "$<$" durch "$\le$" ersetzt wird!

2.9

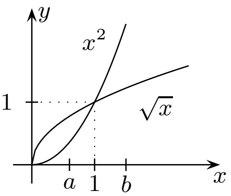
$-2 < 3 \implies -7 < -2$	Addition von -5 auf beiden Seiten.
$-1 < 3 \implies -5 < 15$	Multiplikation beider Seiten mit 5.
$-1 \le 3 \implies 2 \ge -6$	Multiplikation beider Seiten mit -2.
	Bilden der Reziproken auf beiden Seiten:
$-1 < 3 \implies -1 < \frac{1}{3}$	-1 und 3 haben ungleiches Vorzeichen.
$5 \le 7 \implies \frac{1}{5} \ge \frac{1}{7}$	5 und 7 haben gleiches Vorzeichen.

$a < b$ und $c < d \implies a + c < b + d$ — Addition gleich gerichteter Ungleichungen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \le a < b \quad \begin{aligned} &\implies a^n < b^n \\ &\implies \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{aligned}$$

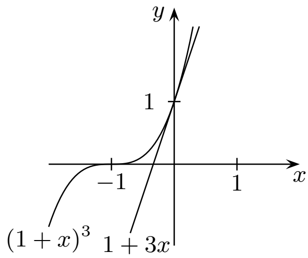
Monotonie von Potenz / Wurzel



Bernoullische Ungleichung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

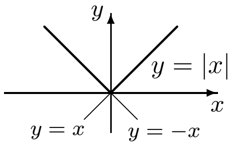
$$x \geq -1 \Longrightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$$
$$0 \neq x \geq -1 \Longrightarrow (1+x)^n > 1+nx$$



Der (absolute) **Betrag** $|x|$ von $x \in \mathbb{R}$ wird folgendermaßen definiert:

Betrag $|x|$

Für $\begin{array}{lcl} x > 0 & & |x| = x \\ x = 0 & \text{ist} & |x| = 0 \\ x < 0 & & |x| = -x \end{array}$



oder mit $\leq$:

Betrag $|x|$

Für $\begin{array}{lcl} x \geq 0 & \text{ist} & |x| = x \\ x \leq 0 & & |x| = -x \end{array}$

Geometrisch gesehen, ist $|x|$ der **Abstand** der Zahl x auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt und $|x-a|$ der **Abstand** der Zahl x von der Zahl a.

2.10 $|5| = 5$, $|-1| = 1$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|x^2| = x^2$

$\sqrt{x^2} = |x|$ und nicht etwa $= x$; denn z.B. $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.

2.11 Es gelten folgende Äquivalenzen, $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = 1 \iff x = 1 \text{ oder } x = -1,$$
$$|x| = a \iff x = a \text{ oder } x = -a \text{ , für } a \geq 0,$$
$$|x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Rechnen mit Beträgen

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \text{und} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{für } b \neq 0$$
$$|a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2$$

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b| \qquad \textbf{Dreiecksungleichung}$$

Ungleichungen und Beträge benutzt man, um *Gebiete* auf der Zahlengeraden, in der Ebene oder im Raum zu charakterisieren, über die Integrale (mehrfache Integrale) zur Berechnung von Inhalten, Schwerpunkten, Trägheitsmomenten usw. gebildet werden.

Ungleichungen, in denen Betragstriche vorkommen, löst man, indem man diese durch **Fallunterscheidungen** (gemäß der Definition von $|x|$) beseitigt.

2.12 *Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $|x-1| < 2$?*

(a) **Fallunterscheidung** zur Beseitigung der Betragstriche:

(Eine einfachere Lösungsmöglichkeit zeigt [2.13].)

1\. Fall: $x-1 \geq 0$, dann ist $|x-1| = x-1$ und die Ungleichung heißt $\underline{x-1<2}$.
2\. Fall: $x-1 \leq 0$, dann ist $|x-1| = -(x-1)$ und die Ungl. heißt $\underline{-(x-1)<2}$.

Durch Umformen erhält man:

1\. Fall: Ist $x \geq 1$, so löst x die Ungleichung, wenn $\underline{x<3}$ ist.
2\. Fall: Ist $x \leq 1$, so löst x die Ungleichung, wenn $\underline{x>-1}$ ist.

1\. Fall: Lösungsmenge: $1 \leq x < 3$
2\. Fall: Lösungsmenge: $-1 < x \leq 1$

Zusammenfassend erhält man:

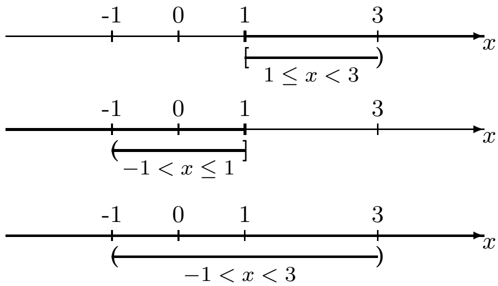
x löst die Ungleichung $|x-1|<2$ genau dann, wenn $\underline{\underline{-1<x<3}}$ ist.

Veranschaulichung auf der Zahlengeraden:

1\. Fall: $x \geq 1$
Lösungsmenge:

2\. Fall: $x \leq 1$
Lösungsmenge:

$x \in \mathbb{R}$
<u>Gesamtlösungsmenge:</u>



(b) Ausnutzen der Äquivalenz $|a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2$:
$|x-1|<2 \iff (x-1)^2<4 \iff x^2-2x+1<4 \iff x^2-2x-3<0$
$\iff -1<x<3$, da $x^2-2x-3=0 \iff x_1=-1,\ x_2=3$ und die Parabel $y=x^2-2x-3$ genau zwischen ihren Nullstellen negative Funktionswerte hat.

Geometrisch bedeutet $\lvert a-b\rvert$ den **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden, speziell $\lvert a\rvert = \lvert a-0\rvert$ den **Abstand** von a zum Nullpunkt.

Folglich ist die vorige Aufgabe noch einfacher zu lösen:

2.13 Die Ungleichung $|x-1|<2$ lösen, heißt demnach, alle x bestimmen, deren **Abstand** von der Zahl 1 auf der Zahlengeraden kleiner als 2 ist, und das sind natürlich genau die Zahlen zwischen -1 und 3, also $-1<x<3$.

2.14 *Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $|x+2| \leq |x-1|$?*

Fallunterscheidungen zur Beseitigung der Betragstriche:

1\. Fall: $x+2 \geq 0$ und $x-1 \geq 0 \iff x \geq -2$ und $x \geq 1 \iff x \geq 1$.
2\. Fall: $x+2 \geq 0$ und $x-1 \leq 0 \iff x \geq -2$ und $x \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 1$.
3\. Fall: $x+2 \leq 0$ und $x-1 \geq 0 \iff x \leq -2$ und $x \geq 1 \iff x \in \emptyset$.
4\. Fall: $x+2 \leq 0$ und $x-1 \leq 0 \iff x \leq -2$ und $x \leq 1 \iff x \leq -2$.

Der 3. Fall braucht nicht weiter verfolgt zu werden.

Unterscheidet man die verbleibenden drei Fälle, so erhält man drei Ungleichungen ohne Betragstriche für die jeweiligen Gebiete:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{1. Fall:} & 1 \le x: & |x+2| \le |x-1| \Longleftrightarrow & x+2 \le x-1 & \Longleftrightarrow 2 \le -1 & \Longleftrightarrow^1 x \in \emptyset \\
\text{2. Fall:} & -2 \le x \le 1: & |x+2| \le |x-1| \Longleftrightarrow & x+2 \le -(x-1) & \Longleftrightarrow 2x \le -1 & \Longleftrightarrow x \le -1/2 \\
\text{4. Fall:} & x \le -2: & |x+2| \le |x-1| \Longleftrightarrow & -(x+2) \le -(x-1) & \Longleftrightarrow -2 \le 1 & \Longleftrightarrow^1 x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Zusammenfassend ergibt sich: x löst die Ungleichung $|x+2| \le |x-1|$

$$
\begin{array}{lccccc}
\Longleftrightarrow & (x \ge 1 \text{ und } x \in \emptyset) & \text{oder} & (-2 \le x \le 1 \text{ und } x \le -1/2) & \text{oder} & (x \le -2 \text{ und } x \in \mathbb{R}) \\
\Longleftrightarrow & x \in \emptyset & \text{oder} & -2 \le x \le -1/2 & \text{oder} & x \le -2 \\
\Longleftrightarrow & & & \underline{\underline{x \le -1/2}} & &
\end{array}
$$

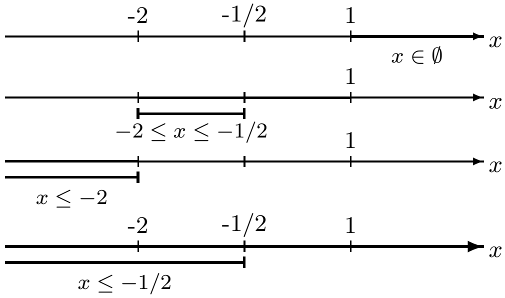
Veranschaulichung auf der Zahlengeraden:

1. Fall: $x \ge 1$ Lösungsmenge:

2. Fall: $-2 \le x \le 1$ Lösungsmenge:

4. Fall: $x \le -2$ Lösungsmenge:

$x \in \mathbb{R}$ Gesamtlösungsmenge:



Durch die vier Fallunterscheidungen wird die Zahlengerade in drei Gebiete eingeteilt, in denen sich die Ungleichung ohne Betragstriche schreiben und durch einfache Umformungen lösen lässt.

Die Gesamtlösungsmenge ergibt sich als Vereinigung der Lösungsmengen in den Teilgebieten.

- Folgende Überlegungen führen erheblich schneller zum Ziel:

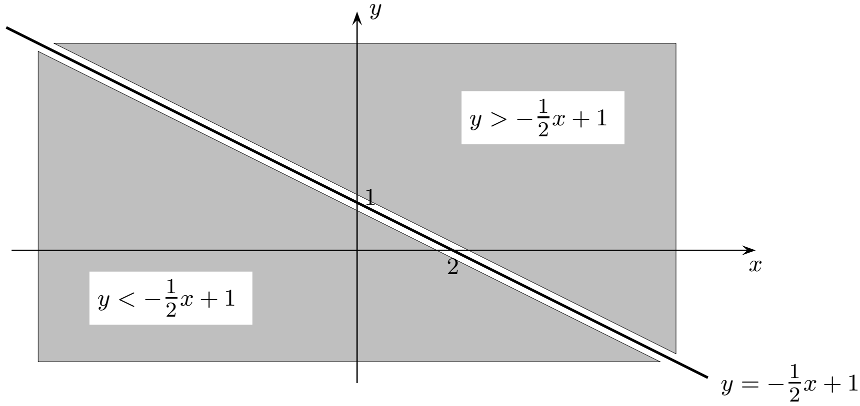
(a) Weil $|a-b|$ der **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden ist, löst x genau dann die Ungleichung $|x+2| \le |x-1|$, wenn der Abstand von x bis -2 kleiner oder gleich ist dem Abstand von x bis 1.
Also erfüllen genau die x die Ungleichung, die kleiner oder gleich $-\frac{1}{2}$ sind.

(b) **Quadrieren** der Ungleichung liefert:
$|x+2| \le |x-1| \iff (x+2)^2 \le (x-1)^2 \iff x^2+4x+4 \le x^2-2x+1$
$\iff 6x \le -3 \iff \underline{\underline{x \le -\frac{1}{2}}}$.

Lösungsmengen von Ungleichungen mit zwei Variablen (beispielsweise x, y) sind Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.

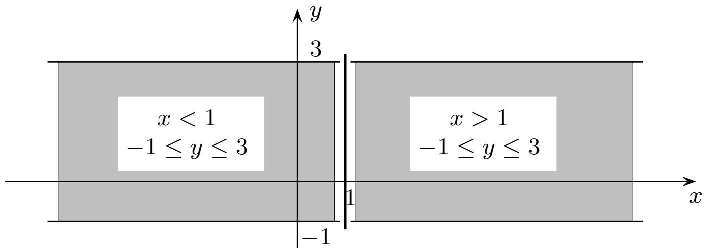
[1] Die Ungleichung $x+2 \le x-1$ ist für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt; denn wäre sie für ein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, so wäre $2 \le -1$. Also ist $x+2 \le x-1 \iff x \in \emptyset$. Die Ungleichung $-(x+2) \le -(x-1)$ ist dagegen für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt; denn sie ist gleichbedeutend mit $-2 \le 1$.

2.15 *Für welche $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ gilt die Ungleichung $y > -\frac{1}{2}x + 1$ bzw. $y < -\frac{1}{2}x + 1$?*



Für die Punkte $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ $\begin{array}{c}\text{über}\\ \text{auf}\\ \text{unter}\end{array}$ der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + 1$ gilt $y \begin{array}{c}>\\ =\\ <\end{array} -\frac{1}{2}x + 1$.

2.16 *Für welche $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ gilt $x > 1$ bzw. $x < 1$ und $-1 \le y \le 3$?*

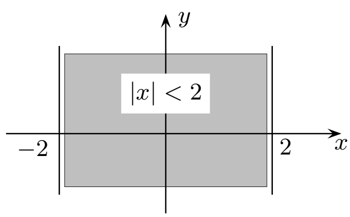


Für die Punkte $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ $\begin{array}{c}\text{rechts von}\\ \text{auf}\\ \text{links von}\end{array}$ der Geraden $x = 1$ gilt $x \begin{array}{c}>\\ =\\ <\end{array} 1$.

Man löst zunächst die zugehörigen **Gleichungen**, indem man "$\le$" bzw. "$<$" durch "$=$" ersetzt. Die gesuchten Gebiete findet man dann durch Überlegung (Einsetzen von Punkten, Probieren,...).

2.17 *Für welche $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ gilt $|x| \le 2$?*

Die zugehörige Gleichung ist $|x| = 2$, d.h. $x = 2$ oder $x = -2$.
Die Grenzgeraden sind also die Geraden $x = 2$ und $x = -2$.
Für $(0, 0)$ ist die Ungleichung erfüllt! Also ist die Lösungsmenge die Menge zwischen den Geraden.
$|x|$ ist der Abstand des Punktes (x, y) von der y–Achse. Es sind also die $(x, y) \in \mathrm{I\!R}^2$ gesucht, deren Abstand von der y–Achse kleiner oder gleich 2 ist!



2.18 *Für welche* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *gilt* $\big||x| + |y|\big| \leq 3$ *?*

Vorbetrachtung (1) Da $|x| + |y| \geq 0$ ist, gilt $\big||x| + |y|\big| = |x| + |y|$.
(2) Symmetrieeigenschaften:

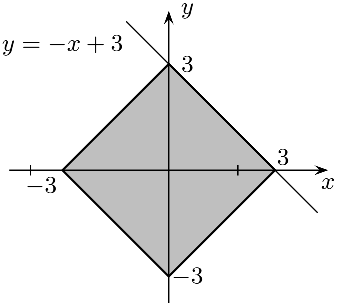
Es ist $|x| = |-x|$ und $|y| = |-y|$. Wenn also für (x, y) die Ungleichung gilt, dann gilt sie auch für $(-x, y)$, $(x, -y)$ und $(-x, -y)$.
Die Lösungsmenge liegt also symmetrisch zu den beiden Achsen! Man braucht also nur den **ersten Quadranten**, d.h. den Fall $x \geq 0$, $y \geq 0$ zu untersuchen.

Also $x \geq 0$, $y \geq 0$ (1. Quadrant):

In diesem Fall ist $|x| = x$ und $|y| = y$.

Die Ungleichung $|x| + |y| \leq 3$ geht über in die Ungleichung $x + y \leq 3$, also in $y \leq -x + 3$.

Die **Grenzgerade** ist $y = -x + 3$.
Im ersten Quadranten erfüllen genau die Punkte, die unter oder auf der Geraden $y = -x + 3$ liegen, die Ungleichung $|x| + |y| \leq 3$.
Aus den oben erwähnten Symmetriegründen erhält man nebenstehende Gesamtlösungsmenge.



2.19 *Für welche* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *gilt* $|x + 1| + |y - 2| \leq 2$ *?*

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{, für } x+1 \geq 0 \text{ , d.h., für } x \geq -1, \\ -(x+1) & \text{, für } x+1 \leq 0 \text{ , d.h., für } x \leq -1. \end{cases}$$

$$|y-2| = \begin{cases} y-2 & \text{, für } y-2 \geq 0 \text{ , d.h., für } y \geq 2, \\ -(y-2) & \text{, für } y-2 \leq 0 \text{ , d.h., für } y \leq 2. \end{cases}$$

Man hat also die folgenden 4 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $x + 1 \geq 0$ und $y - 2 \geq 0$,
2. Fall: $x + 1 \geq 0$ und $y - 2 \leq 0$,
3. Fall: $x + 1 \leq 0$ und $y - 2 \geq 0$,
4. Fall: $x + 1 \leq 0$ und $y - 2 \leq 0$.

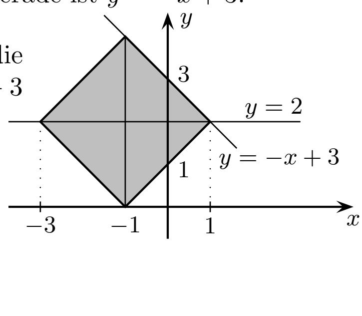
Aus Symmetriegründen braucht man nur den <u>1. Fall</u> zu untersuchen und erhält die Gesamtlösungsmenge durch Spiegelung der Lösungsmenge, die man im 1. Fall erhält, an den Geraden $x = -1$ und $y = 2$. Also

1. Fall: $x + 1 \geq 0$ und $y - 2 \geq 0$:

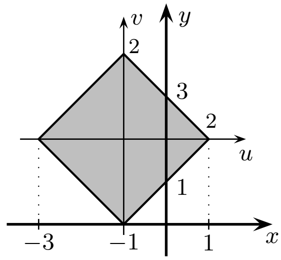
Die Ungleichung $|x + 1| + |y - 2| \leq 2$ geht über in die Ungleichung
$x + 1 + y - 2 \leq 2$, also in $y \leq -x + 3$. Die Grenzgerade ist $y = -x + 3$.

Wenn also $x + 1 \geq 0$, $y - 2 \geq 0$ ist, erfüllen genau die Punkte, die unter oder auf der Geraden $y = -x + 3$ liegen (Probieren!), die Ungleichung.

Aus den oben genannten Symmetriegründen erhält man nebenstehende Gesamtlösungsmenge:



Diese Überlegungen vereinfachen sich erheblich, wenn man $x+1 = u$, $y-2 = v$ substituiert.Man geht durch Parallelverschiebung des Achsenkreuzes (siehe Seite 27) zu einem neuen Koordinatensystem — dem u, v–System — über, dessen Ursprung bei $(-1, 2)$ im x, y–System liegt.



Bei dieser Transformation geht die Ungleichung $|x+1| + |y-2| \leq 2$ über in $|u| + |v| \leq 2$, deren Lösungsmenge aus dem vorigen Beispiel bekannt ist.
Damit hat man aber auch die Lösungsmenge von $|x+1| + |y-2| \leq 2$ im x, y–System!

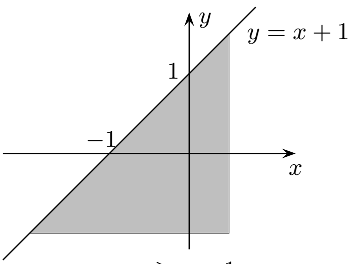
Systeme von Ungleichungen

löst man, indem man die einzelnen Ungleichungen löst und den Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen bildet.

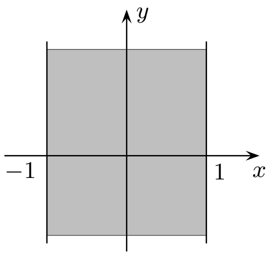
2.20 *Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gelten (gleichzeitig) folgende Ungleichungen?*

$$x \geq y - 1, \qquad |x| \leq 1, \qquad y \geq x^2 - 1.$$

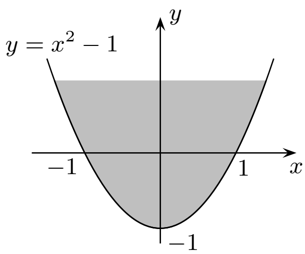
Als Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen erhält man:



$x \geq y - 1$
$y \leq x + 1$



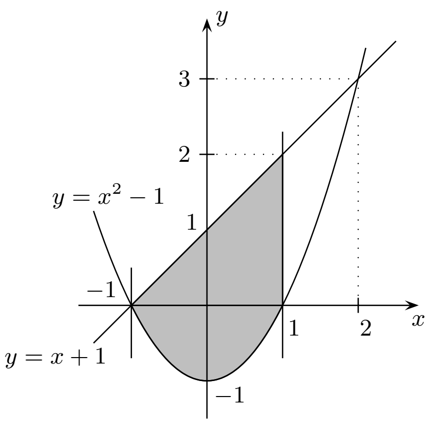
$|x| \leq 1$
$-1 \leq x \leq 1$



$y \geq x^2 - 1$

Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems ist der **Durchschnitt** der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen:

$$\begin{aligned} y &\leq x + 1 \\ |x| &\leq 1 \\ y &\geq x^2 - 1 \end{aligned}$$



2.4 Aufgaben

2.21 *Man löse folgende Ungleichungen bzw. Ungleichungssysteme und skizziere ihre Lösungsmenge auf der Zahlengeraden:*

(**1**) $3|x-1|<4$ (**2**) $|x-1|\geq 2$ (**3**) $\big||x|-|2|\big|<1$

(**4**) $\big||x|+1\big|\geq 3$ (**5**) $\sqrt{|x+1|}<2$ (**6**) $x^2+2x-3<0$

(**7**) $\frac{x}{|x+3|}<\frac{1}{x-1}$ (**8**) $\frac{1}{x}<\frac{1}{x+1}$ (**9**) $\begin{array}{l}|x-3|<2\\ |x+1|\leq\frac{9}{2}\end{array}$

2.22 *Man löse folgende Ungleichungen bzw. Ungleichungssysteme und skizziere ihre Lösungsmenge in der x,y–Ebene:*

(**1**) $y+2x-3<\frac{1}{2}y-x+4$ (**2**) $|x|<|y|$ (**3**) $3|x-1|<4$

(**4**) $y-1\geq x^2-2x$ (**5**) $\begin{array}{l}y\leq x+1\\ y\geq -2x+1\end{array}$ (**6**) $\begin{array}{l}y\geq x^2\\ y\leq |x|\end{array}$

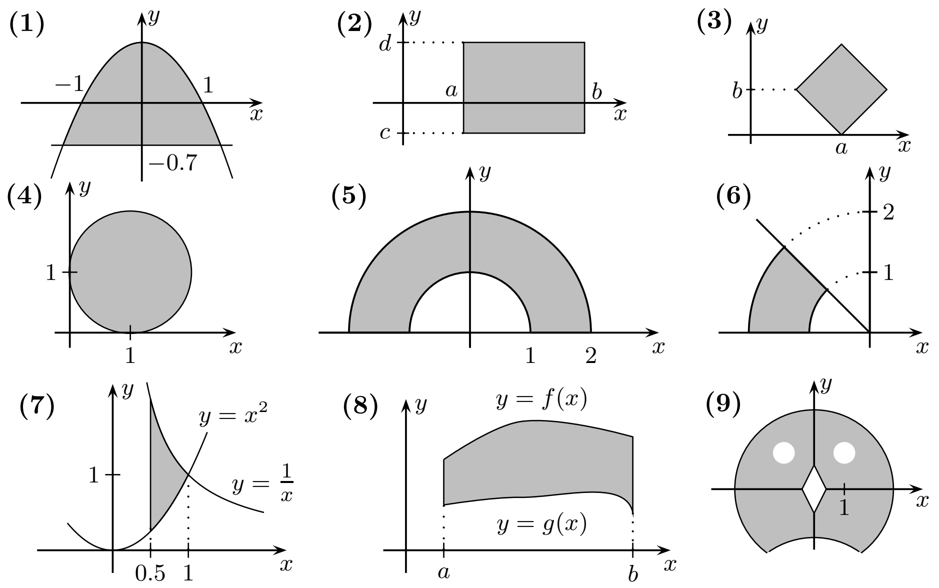
(**7**) $\begin{array}{l}y\leq\cos x\\ x\geq 0\\ y\geq\sin x\\ x\leq 2\pi\end{array}$ (**8**) $\begin{array}{l}y\leq\sqrt{1-x^2}\\ y\geq-\sqrt{1-x^2}\\ xy>0\end{array}$ (**9**) $\frac{x}{y}\leq\frac{y}{x}$

Im Folgenden seien r,φ Polarkoordinaten:

(**10**) $r\leq 1$ (**11**) $\frac{\pi}{2}\geq\varphi\geq\frac{\pi}{4}$ (**12**) $\begin{array}{c}2\leq r\leq 3\\ \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}\end{array}$

(**13**) $\begin{array}{c}r=2\\ \sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\end{array}$ (**14**) $\begin{array}{c}-1\leq y\leq 3\\ 2<x\leq 4\end{array}$

2.23 *Man charakterisiere folgende Gebiete (mit Rand) durch Ungleichungen und verwende gegebenenfalls zur Vereinfachung Polarkoordinaten!*



2.24 *Man teile die Strecke der Länge a im* **goldenen Schnitt**.