Gerhard Merziger
Michael Holz
Detlef Wille

Repetitorium Elementare Mathematik 1

Methoden, Beispiele, Aufgaben, Lösungen

2. Auflage

HANSER

FORMELSAMMLUNG

Bruchrechnung

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \underset{\overleftarrow{\textbf{Kürzen}}}{\overset{\overrightarrow{\textbf{Erweitern}}}{=}} \frac{\boldsymbol{a\cdot c}}{\boldsymbol{b\cdot c}}$$

Addition Nenner gleichnamig machen! $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},\ \text{speziell}\ \frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}}$

bei ganzzahligem Nenner: **Hauptnenner** (= kgV der Nenner), z.B. $\frac{4}{6}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$.

Multiplikation Zähler mit Zähler / Nenner mit Nenner multiplizieren! $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \text{speziell}\ \frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}}$

Division mit Kehrwert multiplizieren! $\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\ \text{speziell}\ a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}\ \text{und}\ \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}}$

Größenvergleich Sind $b,d>0$, so gilt $\boxed{\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}\iff ad\geq bc}$ $b,d>0$ lässt sich durch evtl. Erweitern mit -1 erreichen.

Prozentrechnung

% ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{1}{100}$.

$$\boxed{p\% = \frac{p}{100}}$$

G	Grundwert
$p\%$	Prozentsatz
W	Prozentwert

$$\boxed{\boldsymbol{W} \begin{aligned} &\boldsymbol{= G\cdot p\%}\\ &\boldsymbol{= G\cdot \frac{p}{100}}\end{aligned}}$$

$175\% = 175\cdot\frac{1}{100}=\frac{175}{100}=1.75$

$0.19=\frac{19}{100}=19\cdot\frac{1}{100}=19\%$

$\frac{3}{7}\approx 0.4286=\frac{42.86}{100}=42.86\%$

Dreisatz

15 Liter Benzin kosten 18€ .

(a) Wieviel€ zahlt man für 52 Liter?
(b) Wieviel Liter erhält man für 40€ ?

(a) Für 1 Liter zahlt man $\frac{18}{15}$€ und für 52 Liter zahlt man $52\cdot\frac{18}{15}$€ .

(b) Für 1€ erhält man $\frac{15}{18}$ Liter und für 40€ erhält man $40\cdot\frac{15}{18}$ Liter.

Potenzen

mit ganzen Exponenten
$a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{a^n := \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\ \text{Faktoren}} \quad a^0 := 1 \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}}$$

mit rationalen Exponenten
$a\in\mathbb{R}, a>0$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}}$$

Potenzrechengesetze

$\boxed{a^n\cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$ $\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$ $\boxed{a^n\cdot b^n = (ab)^n}$

Potenzen und Logarithmen (a Basis, mit $0 < a \neq 1$)

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^0 = 1$$
$$(a^x)^r = a^{xr} = (a^r)^x$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x = \log_a x^{-1}$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a x^r = r \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x\,,\ x > 0$$
$$\log_a(a^x) = x\,,\ x \in \mathbb{R}$$

Logarithmen zu verschiedenen Basen

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Wurzeln ($m, n, q \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0$)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

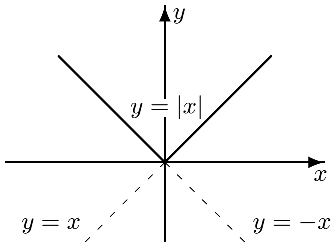
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

Betrag

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x & \text{, für } x \geq 0 \\ -x & \text{, für } x < 0 \end{cases}}$$



$|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$

$|xy| = |x| \cdot |y|$ und $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für $y \neq 0$.

$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

Auf der Zahlengeraden ist

$\lvert x\rvert$	der **Abstand** der Zahl x vom Nullpunkt,
$\lvert x-a\rvert$	der **Abstand** der Zahl x von der Zahl a.

Merke
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Quadratische Gleichung

***p*, *q*–Formel**	***a*, *b*, *c*–Formel**
$x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Vietascher Wurzelsatz:

$x_1 + x_2 = -p$ = **Summe** der Nullstellen
$x_1 \cdot x_2 = q$ = **Produkt** der Nullstellen

n–Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

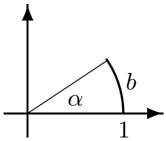
Allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Umrechnung: Gradmaß – Bogenmaß

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem

- ⋆ **Winkel α** in Grad und der
- ⋆ **Länge b** des zugehörigen Kreisbogens am **Einheitskreis**, bzw. **Verhältnis b** der Bogenlänge eines Winkels zu seinem Radius.



$$\boxed{\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{b}{\pi}}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}\, b \qquad b = \frac{\pi}{180^\circ}\, \alpha$$

lies: $\alpha^\circ = b$ rad

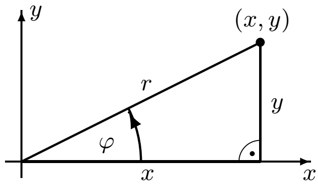
$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,\text{rad} \approx 0.017\,\text{rad}$$
$$1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.296^\circ$$

Benutzt man einen Taschenrechner, vergewissere man sich, ob er auf Winkel im Gradmaß (DEG) oder im Bogenmaß (RAD) eingestellt ist.

Umformung

kartesische Koord.
x, y

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$



$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Polarkoordinaten
r, φ

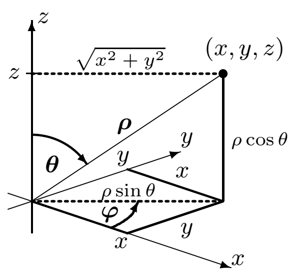
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ Quadranten beachten!

Umformung

kartesische Koord.
x, y, z

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \rho \cos\theta$$



Kugelkoordinaten
ρ, θ, φ

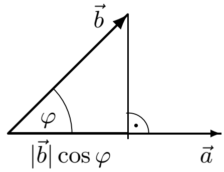
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ Quadranten beachten!

Skalarprodukt

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\end{cases}}$$



Länge von $\vec{a}$: $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

es ist $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ und $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$

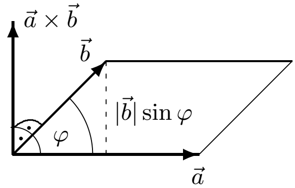
Winkel[1] zwischen $\vec{a}, \vec{b}$: $\quad \cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Senkrechtstehen[1]: $\quad \vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

[1] nur sinnvoll für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

Vektorprodukt

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2\\ a_3b_1 - a_1b_3\\ a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}}$$



$\vec{a}\times\vec{b}$ steht **senkrecht** auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \;=\;$ **Flächeninhalt** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

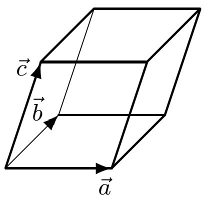
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**.

Spatprodukt

$$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= \langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{c},\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{c},\vec{a}\rangle$$



zyklische Vertauschungen ändern das Spatprodukt nicht!

Berechnung mit Regel von **Sarrus** siehe Seite 215.

$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle \begin{cases} > 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c} \end{cases}$ bilden ein **Rechtssystem**.

$\phantom{\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle} \; = 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind **lin. abhängig** (liegen in einer Ebene).

$\phantom{\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle} \; < 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden ein **Linkssystem**.

$|\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle| \;=\;$ **Volumen** des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten **Spats**.

$\frac{1}{6}|\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle| \;=\;$ **Volumen** des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten **Tetraeders**.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig $\iff \boldsymbol{\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = 0} \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ liegen in einer Ebene.

REPETITORIUM

ELEMENTARE MATHEMATIK 1

Repetitio est mater studiorum

Gerhard Merziger
Michael Holz
Detlef Wille

2. Auflage, Ebook

Binomi Verlag , Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon	05105 6624000
E–Mail	verlag@binomi.de
Internet	www.binomi.de

Zu beziehen beim Verlag, www.binomi.de

ISBN **978–3–923 923–65–6**

Hannover 04/21

REPETITORIUM

ELEMENTARE MATHEMATIK 1

Repetitio est mater studiorum

Gerhard Merziger
Michael Holz
Detlef Wille

REPETITORIUM
ELEMENTARE MATHEMATIK

Teil 1

Grundbegriffe
Beweise
Zahlen
Natürliche Zahlen
ggT, kgV
Euklidischer Algorithmus
Vollständige Induktion
Rationale Zahlen
Prozentrechnung
Reelle Zahlen
Potenzen
Logarithmen
Binomische Formeln
Pascalsches Dreieck
Koordinatensysteme
Geometrie
Dreieckskonstruktionen
Dreiecksberechnungen
Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel
Gleichungen
Quadratische Gleichungen
Matrizen
Determinanten
Lineare Gleichungssysteme
Ungleichungen
Vektorrechnung
Skalarprodukt
Vektorprodukt
Spatprodukt
Geraden und Ebenen im Raum
Finanzmathematik
Dualsystem
Hexadezimalsystem

Teil 2

Polynome
Rationale Funktionen
Trigonometrische Funktionen
Exponentialfunktionen
Logarithmusfunktionen
Folgen
Reihen
Geometrische Reihe
Harmonische Reihe
Grenzwerte
Differentialrechnung
Ableitungen
Technik des Differenzierens
Kurvendiskussionen
l'Hospital
Extremwertaufgaben
Integralrechnung
Technik des Integrierens
Partielle Integration
Integration durch Substitution
Hauptsatz
Flächenberechnungen
Komplexe Zahlen
Zahlenebene
Betrag
Multiplikation, Division
Potenzen, Wurzeln
Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$
Kombinatorik
Wahrscheinlichkeiten
Zufallsvariable
Verteilungen
Statistik

Vorwort

Dieses Buch führt Teil 1 dieses Repetitoriums fort und will Studierenden an Universitäten und Fachhochschulen in allen Studiengõngen, die Mathematikkenntnisse voraussetzen, aber auch Schülern bei der Abiturvorbereitung helfen, mathematische Kenntnisse aus dem Oberstufenbereich aufzufrischen und zu ergänzen.

Eine gründliche Vorbereitung auf ein Studium ist zu empfehlen, da wichtige mathematische Bereiche auch in Leistungskursen nicht abgedeckt aber in Vorlesungen hõufig vorausgesetzt werden.

Aus jahrelanger Erfahrung im Umgang mit Studierenden wissen die Autoren, dass **Beispiele** zum Verständnis unverzichtbar sind. Dieses Repetitorium ist zum Selbststudium bestens geeignet! Mathematische Sachverhalte werden an

mehr als **1000 völlig durchgerechneten Beispielen** erklärt und durch
mehr als **500 Skizzen** erläutert.

Ein ausführlicher Index mit ca. 1000 Stichwörtern erleichtert die Arbeit.

Auf Seiten, Beispiele, Aufgaben und Abschnitte, sowie auf die unten zitierte Literatur wird innerhalb eckiger Klammern verwiesen:
[Seite 210], [12.1], [Abschnitt 5.4], sowie [EM 1, 2.13], [HM, Seite 337] usw.

Wichtige Formeln und Begriffe stehen auf den Umschlagseiten F1, F2, F3, F4.

Natürlich können wir trotz aller verwendeten Sorgfalt Fehler nicht ausschließen. Ein aktuelles Fehlerverzeichnis findet man auf www.binomi.de.

Wir freuen uns auf Ihre Kritik, Hinweise und Anregungen. Sie erreichen uns auf www.binomi.de.

Die Autoren

Zitierte Literatur:

EM 1	*Merziger/Holz/Wille*	Repetitorium Elementare Mathematik 1
EM 2	*Merziger/Holz/Timmann/Wille*	Repetitorium Elementare Mathematik 2
FH	*Merziger/Mühlbach/Wille/Wirth*	Formeln + Hilfen Höhere Mathematik
HM	*Merziger/Wirth*	Repetitorium Höhere Mathematik
VK	*Wille*	Mathematik–Vorkurs
LA 1	*Wille*	Repetitorium Lineare Algebra, Teil 1
Ana 1	*Timmann*	Repetitorium Analysis, Teil 1

Weiterführende Literatur:

Holz/Wille	Repetitorium Lineare Algebra, Teil 2
Timmann	Repetitorium Analysis, Teil 2
Holz	Repetitorium Algebra
Timmann	Repetitorium Gewöhnliche Differentialgleichungen
Timmann	Repetitorium Funktionentheorie
Timmann	Repetitorium Topologie und Funktionalanalysis

Überwiegend positive Kommentare von Studierenden und Dozenten zu diesen Büchern findet man auf www.binomi.de. Hier richten Sie Ihre Fragen direkt an die Autoren!

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mü
N	ν	nü
Ξ	ξ	xi
O	o	omicron
Π	π	pi
R	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	üpsilon
Φ	φ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

A	a	a
B	b	b
C	c	c
D	d	d
E	e	e
F	f	f
G	g	g
H	h	h
I	i	i
J	j	j
K	k	k
L	l	l
M	m	m
N	n	n
O	o	o
P	p	p
Q	q	q
R	r	r
S	s	s
T	t	t
U	u	u
V	v	v
W	w	w
X	x	x
Y	y	y
Z	z	z

1 Grundbegriffe

1.1 Logische Grundlagen, Aussagen

Mathematik ist ohne Logik undenkbar. Hier reichen einfache logische Prinzipien, die sich aus dem gesunden Menschenverstand erklären. Mathematik präsentiert sich in **Aussagen**, im Folgenden mit großen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.

Eine **Aussage** ist entweder **wahr** oder **falsch** — ein Drittes gibt es nicht!

Zum Beispiel sind Befehlssätze und Fragesätze keine Aussagen.

1.1 *Beispiele für (mathematische) Aussagen:*

$3^2 > 2^3$	ist eine wahre Aussage (ist richtig, gilt).
4 ist eine Primzahl	ist eine falsche Aussage (ist falsch, gilt nicht).
Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.	Wahr oder falsch? Ein bis heute ungelöstes Problem! [1)]

Keine Aussagen sind z.B.:
Berechne die Zahl 2^9! Ist 4 eine Primzahl? $17 - 26$

Aus (einfachen) Aussagen kann man weitere (kompliziertere) Aussagen bilden:

Bezeichnung	Symbole	Lies	ist genau dann wahr, wenn
Negation	$\neg A$	nicht A	A falsch ist.
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B	A wahr und B wahr ist.
Adjunktion	$A \vee B$	A oder B	A wahr oder B wahr oder beide.
Implikation	$A \Longrightarrow B$	aus A folgt B	A falsch oder B wahr ist.
Äquivalenz	$A \Longleftrightarrow B$	A äquivalent B	A, B beide wahr oder beide falsch.

Ist $A \Longleftrightarrow B$ wahr, so schreibt man auch $A \equiv B$.

Belegt man die Aussagen A und B mit Wahrheitswerten $\boldsymbol{w}$ für "wahr" und $\boldsymbol{f}$ für "falsch", so ergeben sich die Wahrheitswerte der abgeleiteten Aussagen wie folgt:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Hier wird „oder“ stets als nichtausschließendes oder verwendet, d.h. die Aussage $A \vee B$ ist auch wahr, wenn beide Aussagen A, B wahr sind.

$A \Longrightarrow B$: A heißt Voraussetzung (Prämisse) und B Folgerung (Konklusion). Merke: Ist die Voraussetzung A falsch, so ist jede Implikation $A \Longrightarrow B$ wahr!

Ist A wahr und $A \Longrightarrow B$ wahr, so ist B wahr. Ist die Voraussetzung A eine wahre Aussage, so kommt man durch richtige Schlüsse zu einer wahren Aussage B.

1) Primzahlzwillinge sind z.B. 3,5 und 17,19 und 41,43 usw.

1.2 *Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?*

(a) $\neg\, 2\cdot 2=4$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (c) $2\cdot 2=5 \vee \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$

(d) $2\cdot 2=5 \wedge \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$ (e) $\frac{1}{2}<\frac{2}{5} \Longrightarrow \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$ (f) $\frac{1}{2}<\frac{2}{5} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$

(a)	$\neg\, 2\cdot 2=4$	falsch	, da	$2\cdot 2=4$ wahr ist.
(b)	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	wahr	, da	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
(c)	$2\cdot 2=5 \vee \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$	wahr	, da	$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$ wahr ist, denn $\frac{1}{2}<\frac{3}{5} \Longleftrightarrow 5<6$.
(d)	$2\cdot 2=5 \wedge \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$	falsch	, da	$2\cdot 2=5$ falsch ist.
(e)	$\frac{1}{2}<\frac{2}{5} \Longrightarrow \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$	wahr	, da	$\frac{1}{2}<\frac{2}{5}$ falsch ist, denn $\frac{1}{2}<\frac{2}{5} \Longleftrightarrow 5<4$.
(f)	$\frac{1}{2}<\frac{2}{5} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{3}{5}$	falsch	, da	$\frac{1}{2}<\frac{2}{5}$ falsch und $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$ wahr ist.

Sprechweisen

Gilt $A \Longleftrightarrow B$, d.h. $A \equiv B$, sagt man:	Gilt $A \Longrightarrow B$, sagt man:
A ist äquivalent (gleichbedeutend) zu (mit) B.	Aus A folgt B.
A gilt **genau dann, wenn** B gilt.	A ist **hinreichend** für B.
A ist **notwendig und hinreichend** für B.	B ist **notwendig** für A.

Vereinbarung: $\neg$ bindet stärker als $\wedge, \vee$ und $\wedge, \vee$ binden stärker als $\Longrightarrow, \Longleftrightarrow$.

$\neg A \wedge B \;\equiv\; (\neg A)\wedge B$ und $\neg A \wedge B \Longrightarrow A \vee B \;\equiv\; \big((\neg A)\wedge B\big) \Longrightarrow (A\vee B)$.

Logische Regeln

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	doppelte Verneinung
$A \Longrightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$	Ersetzen der Implikation [1.3]
$A \Longrightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Longrightarrow \neg A$	Kontraposition [1.4]
$A \Longleftrightarrow B$	$\equiv$	$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$	Ersetzen der Äquivalenz
	$\equiv$	$\neg A \Longleftrightarrow \neg B$	
$\neg(A\wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	de Morgansche Regel
$\neg(A\vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	de Morgansche Regel [1.5]
$\neg(A \Longrightarrow B)$	$\equiv$	$A \wedge \neg B$	Verneinung der Implikation [1.6]
$\neg(A \Longleftrightarrow B)$	$\equiv$	$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$	Verneinung der Äquivalenz
$A\wedge(B\vee C)$	$\equiv$	$(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	Distributivgesetz
$A\vee(B\wedge C)$	$\equiv$	$(A\vee B)\wedge(A\vee C)$	Distributivgesetz

Außer diesen Regeln gelten die Kommutativgesetze für $\vee$ und $\wedge$, es ist also $A\vee B \equiv B\vee A$ und $A\wedge B \equiv B\wedge A$.

Ferner gelten die Assoziativgesetze für Konjunktion $\wedge$ und Adjunktion $\vee$, also $A\wedge(B\wedge C) \equiv (A\wedge B)\wedge C \equiv A\wedge B\wedge C$ und $A\vee(B\vee C) \equiv (A\vee B)\vee C \equiv A\vee B\vee C$.

Deshalb braucht man bei Konjunktion bzw. Adjunktion von mehr als zwei Aussagen keine Klammern zu setzen.

Beweis von Äquivalenzen mittels Wahrheitstafeln

Ausgehend von den vier möglichen Wahrheitswertbelegungen für A und B zeigt man, dass die Wahrheitswerte der Aussagen, deren Äquivalenz zu zeigen ist, übereinstimmen.

1.3 *Man zeige* $A \Longrightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B$ *(Ersetzung der Implikation).*

A	B	$\boldsymbol{A \Longrightarrow B}$	$\neg A$	$\boldsymbol{\neg A \vee B}$
w	w	$\boldsymbol{w}$	f	$\boldsymbol{w}$
w	f	$\boldsymbol{f}$	f	$\boldsymbol{f}$
f	w	$\boldsymbol{w}$	w	$\boldsymbol{w}$
f	f	$\boldsymbol{w}$	w	$\boldsymbol{w}$

$A \Longrightarrow B$ und $\neg A \vee B$ haben stets dieselben Wahrheitswerte. Die Aussagen sind also äquivalent.

1.4 *Man zeige* $A \Longrightarrow B \quad \equiv \quad \neg B \Longrightarrow \neg A$ *(Kontraposition).*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\boldsymbol{A \Longrightarrow B}$	$\boldsymbol{\neg B \Longrightarrow \neg A}$
w	w	f	f	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
w	f	f	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
f	w	w	f	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
f	f	w	w	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$

$A \Longrightarrow B$ und $\neg B \Longrightarrow \neg A$ haben stets dieselben Wahrheitswerte. Die Aussagen sind also äquivalent.

1.5 *Man zeige* $\neg(A \vee B) \quad \equiv \quad \neg A \wedge \neg B$ *(de Morgansche Regel).*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\boldsymbol{\neg(A \vee B)}$	$\boldsymbol{\neg A \wedge \neg B}$
w	w	f	f	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
w	f	f	w	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
f	w	w	f	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
f	f	w	w	f	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$

$\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ haben stets dieselben Wahrheitswerte. Die Aussagen sind also äquivalent.

1.6 *Man zeige* $\neg(A \Longrightarrow B) \quad \equiv \quad A \wedge \neg B$ *(Verneinung der Implikation)*

(a) *mittels Wahrheitstafel.*
(b) *mittels Umformungen auf Grund bekannter Regeln.*

(a) Mittels Wahrheitstafel:

A	B	$\neg B$	$A \Longrightarrow B$	$\boldsymbol{\neg(A \Longrightarrow B)}$	$\boldsymbol{A \wedge \neg B}$
w	w	f	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
w	f	w	f	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$
f	w	f	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$
f	f	w	w	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{f}$

$\neg(A \Longrightarrow B)$ und $A \wedge \neg B$ haben stets dieselben Wahrheitswerte. Die Aussagen sind also äquivalent.

(b) Mittels Umformungen aufgrund bekannter Regeln:

$$\begin{aligned} \neg(A \Longrightarrow B) &\equiv \neg(\neg A \vee B), && \text{Ersetzen der Implikation,} \\ &\equiv \neg\neg A \wedge \neg B, && \text{de Morgansche Regel,} \\ &\equiv A \wedge \neg B, && \text{doppelte Verneinung.} \end{aligned}$$

1.7 *Die Aussage $x^2 \geq x \implies (x \leq 0) \vee (1 \leq x)$ ist gleichbedeutend (äquivalent) mit der Aussage $0 < x < 1 \implies x^2 < x$.*

Ist A die Aussage $x^2 \geq x$ und B die Aussage $(x \leq 0) \vee (1 \leq x)$, so ist $\neg A$ die Aussage $x^2 < x$ und $\neg B$ die Aussage $0 < x < 1$. Die beiden Implikationen sind von der Form $A \implies B$ bzw. $\neg B \implies \neg A$, sie sind daher äquivalent.

Häufig enthalten Aussagen die **Quantoren** "**für alle** ... " oder "**es gibt** ... ".
Die Negation der Aussage:

"Für alle $x \in X$ gilt die Aussage $A(x)$." ist offensichtlich:
"Es gibt (mindestens) ein $x \in X$, für das $A(x)$ falsch ist."

Quantoren

$\forall x \in X : \; A(x)$	lies:	Für alle $x \in X$ ist $A(x)$ wahr.
$\exists x \in X : \; A(x)$		Es gibt ein $x \in X$, für das $A(x)$ wahr ist.

Negation

$\neg\forall x \in X : A(x)$	$\equiv \; \exists x \in X : \neg A(x)$	Es gibt ein $x \in X$, für das $A(x)$ falsch ist.
$\neg\exists x \in X : A(x)$	$\equiv \; \forall x \in X : \neg A(x)$	Für alle $x \in X$ ist $A(x)$ falsch.

1.8 *Es sei $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.*
Man negiere folgende Aussagen. Welche Aussagen sind wahr?

(a) $\forall x \in X : \; x^2 \leq 1$.

(b) $\forall x \in X : \; \frac{1}{x} > 1$.

(c) $\forall x \in X : \; 2x + 1 \geq -3 + 4x$.

(a) $\forall x \in X : \; x^2 \leq 1$ ist wahr. Die Negation $\exists x \in X : \; x^2 > 1$ ist falsch.

(b) $\forall x \in X : \; \frac{1}{x} > 1$ ist falsch, da für $x = 1 \in X$ gilt: $\frac{1}{1} = 1$.
Die Negation $\exists x \in X : \; \frac{1}{x} \leq 1$ ist wahr, da $1 \in X$ und $\frac{1}{1} \leq 1$.

(c) $\forall x \in X : \; 2x + 1 \geq -3 + 4x$ wahr, da $2x + 1 \geq -3 + 4x \iff 4 \geq 2x \iff x \leq 2$.
Die Negation $\exists x \in X : \; 2x + 1 < -3 + 4x$ ist folglich falsch.

1.2 Beweismethoden

Direkter Beweis

Man beweist die Aussage $A \implies B$, indem mit der Voraussetzung A die Behauptung B durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und logischen Regeln bewiesen wird.

1.9 *Man zeige: Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so ist n^2 ungerade.*

Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so lässt sich n darstellen als $n = 2k + 1$, wobei k eine natürliche Zahl oder 0 ist. Die erste binomische Formel liefert nun: $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Also ist n^2 ungerade.

1.10 *Man zeige* $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$.

Erweitern mit $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3}$ und Hauptnennerbildung ergibt direkt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{3}{6}\sqrt{2} + \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}.$$

Beweis durch Kontraposition

$$\boldsymbol{A \Longrightarrow B \qquad \equiv \qquad \neg B \Longrightarrow \neg A}$$

1.11 *Man zeige durch Kontraposition:*
Ist n^2 eine ungerade natürliche Zahl, so ist n ungerade.

$A \Longrightarrow B$	n^2 ungerade	$\Longrightarrow$	n ungerade	zu beweisende Aussage
$\neg B \Longrightarrow \neg A$	n nicht ungerade	$\Longrightarrow$	n^2 nicht ungerade	Kontraposition
$\neg B \Longrightarrow \neg A$	**n gerade**	$\Longrightarrow$	**n^2 gerade**	äquivalente Aussage

Ist n gerade, so hat n die Form $n = 2k$, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Es folgt die Behauptung direkt: $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, also ist n^2 gerade.

Indirekter Beweis

Man beweist die Aussage $A \Longrightarrow B$, indem man aus der Annahme, dass die Behauptung B falsch ist, einen Widerspruch herleitet.
Man nimmt also zu der Voraussetzung A (wozu natürlich vieles gehört, das nicht extra aufgeführt wird, z.B. bereits bewiesene Aussagen) noch die Annahme $\neg B$ hinzu und führt die Aussage $A \wedge \neg B$ auf eine der drei folgenden Arten zu einem **Widerspruch** (Zeichen : #).

$A \wedge \neg B \Longrightarrow \neg A$, also #	Widerspruch zur Voraussetzung A, [1.12]
$A \wedge \neg B \Longrightarrow B$, also #	Widerspruch zur Annahme $\neg B$, [1.14]
$A \wedge \neg B \Longrightarrow F$, also #	F steht für eine offensichtl. falsche Aussage, [1.13].

Ergibt sich aus $A \wedge \neg B$ (durch richtige Schlüsse) ein Widerspruch (etwas Falsches), muss $A \wedge \neg B$ falsch sein. Also muss, wenn A richtig ist, $\neg B$ falsch, also B richtig sein, d.h. $A \Longrightarrow B$ ist wahr. Klingt kompliziert, ist aber logisch und wird häufig benutzt.

1.12 *Man zeige indirekt:*
Ist n eine natürliche Zahl und n^2 gerade, so ist auch n gerade.
Formal: $n \in \mathbb{N} \wedge n^2$ gerade $\Longrightarrow n$ gerade.

Annahme: n ist ungerade.
Ist n ungerade, so folgt aus [1.9], dass n^2 ungerade ist, # zur Voraussetzung.
Man erhält einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass n^2 gerade ist! Also ist die Annahme falsch und ihre Negation wahr. Damit ist die Behauptung bewiesen.

1.13 *Man zeige* $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$: (a) *direkt,* (b) *indirekt.*

(a) $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$ (Multiplikat. mit $8 \cdot 7$) $\iff 7 \cdot 7 > 6 \cdot 8 \iff 49 > 48$, offensichtlich richtig.

(b) Annahme $\frac{7}{8} \leq \frac{6}{7}$. Dann gilt: $\frac{7}{8} \leq \frac{6}{7} \iff 7 \cdot 7 \leq 6 \cdot 8 \iff 49 \leq 48$, #.
Also ist die Negation der Annahme richtig und die Behauptung damit bewiesen.

1.14 *Man beweise indirekt:* $\sqrt{2}$ *ist irrational (d.h. nicht rational).*

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. $\sqrt{2}$ schreibt sich in gekürzter Bruchdarstellung:
$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$ (ggT siehe [Abschnitt 3.3]).

Man schließt nun folgendermaßen, wobei benutzt wird, siehe [Seite 40]:
$(*)$ Teilt eine Primzahl ein Produkt, so teilt sie mindestens einen Faktor.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Longrightarrow 2n^2 = m^2 \Longrightarrow 2 \mid m^2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 2 \mid m \text{ (da 2 Primzahl), etwa } m = 2t,$$
$$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{2t}{n} \Longrightarrow 2 = \frac{4t^2}{n^2} \Longrightarrow n^2 = 2t^2 \Longrightarrow 2 \mid n^2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 2 \mid n.$$

Also folgt $2 \mid m$ und $2 \mid n$ im Widerspruch zur Annahme $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$.

Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, führt auf einen Widerspruch und ist folglich falsch. Damit ist bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational, also irrational ist.

1.15 *Ist p eine Primzahl, so ist* $\sqrt{p}$ *irrational.*

Man kopiert obigen Beweis wörtlich, indem man lediglich 2 durch p ersetzt.

1.16 *Man beweise indirekt: Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Annahme: Es gibt nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \cdots, p_n$.

Da jede natürliche Zahl ≥ 2 das Produkt von Primzahlen ist [Seite 40],
muss $n = p_1 \cdots p_n + 1$ von einer der Primzahlen $p_1, \cdots, p_n$ geteilt werden.
n lässt aber bei Division durch jede der Primzahlen $p_1, \cdots, p_n$ den Rest 1, wird also von keiner der Primzahlen $p_1, \cdots, p_n$ geteilt. Widerspruch!

Die Annahme ist falsch. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

1.17 *Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Man zeige:*

(a) *Ist n keine Primzahl, so hat n einen Primfaktor $p \leq \sqrt{n}$.*
(b) *Hat n keinen Primfaktor $p \leq \sqrt{n}$, so ist n eine Primzahl.*

Die beiden Aussagen sind offensichtlich äquivalent, da sie durch Kontraposition ineinander übergehen. In [3.10] wird (b) einschließlich Umkehrung gezeigt.
Hier der indirekte Beweis von (a). Benutzt wird der Satz über die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen [Seite 40].

(a) Annahme:
n hat keinen Primfaktor $p \leq \sqrt{n}$, d.h. für jeden Primfaktor p von n ist $p > \sqrt{n}$.
Ist n keine Primzahl, hat die Primfaktorzerlegung von n mindestens zwei Primfaktoren p und q, die nach Voraussetzung beide $> \sqrt{n}$ sind. Also folgt
$n \geq p \cdot q > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, also $n > n$, Widerspruch!

1.3 Mengen

Die Mathematik formuliert ihre Ergebnisse in mengentheoretischer Sprache. Dabei sind Menge und Element grundlegende Begriffe. Wichtige Schreibweisen sind:

$\boldsymbol{x \in M}$:	x ist Element der Menge M,	kurz:	x in M, x aus M.
$\boldsymbol{x \notin M}$:	x ist kein Element der Menge M,	kurz:	x nicht in M.

Mengen

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen M zu definieren:

1. $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ durch **explizite Angabe aller Elemente**.
M ist die Menge, die genau die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ hat, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

2. $M = \{x \mid E(x)\}$ durch eine **definierende Eigenschaft**.
M ist die Menge, die genau die Elemente x aus einer vorgegebenen Grundmenge G enthält, die die Eigenschaft $E(x)$ haben, für die also die Aussage $E(x)$ wahr ist.
Oft gibt man die Grundmenge an und schreibt $M = \{x \in G \mid E(x)\}$.

$a \in \{x \mid E(x)\} \iff E(a)$ und $a \in \{x \in G \mid E(x)\} \iff a \in G \wedge E(a)$

1.18 *Für folgende Mengen benutzt man Standardbezeichnungen:*

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ Menge der **Primzahlen.**

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen.**

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der **ganzen Zahlen.**

$\mathbb{Q} = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in \mathbb{Z},\ s \neq 0\}$ Menge der **rationalen Zahlen.**

$\mathbb{R}$ Menge der **reellen Zahlen**, s. [Kap. 5].

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ Menge der **komplexen Zahlen**, s. [**EM2**].

$\emptyset$ **leere Menge**, das ist diejenige Menge, die keine Elemente hat.

1.19 *Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?*

(a) $17 \in \mathbb{P}$, (b) $2^{100} \in \mathbb{N}$, (c) $-5 \in \mathbb{Z}$, (d) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$,

(e) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, (f) $-\frac{3}{9} \in \mathbb{Q}$, (g) $\pi \in \mathbb{R}$, (h) $\frac{\sqrt{2}-2}{7} \in \mathbb{Q}$.

(a) 17 ist eine Primzahl, es gilt $17 \in \mathbb{P}$; die Aussage ist wahr.

(b) Da $2 \in \mathbb{N}$ und Produkte natürlicher Zahlen wieder natürliche Zahlen sind, gilt auch $2^{100} \in \mathbb{N}$. Übrigens: 2^{100} hat im Dezimalsystem 31 Stellen, siehe [2.22].

(c) -5 ist eine ganze Zahl, $-5 \in \mathbb{Z}$ ist wahr.

(d) $\frac{2}{3}$ ist eine rationale, aber keine ganze Zahl, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$ ist falsch, es gilt $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

(e) $\sqrt{2}$ ist nicht rational [1.14]. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ist falsch, es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(f) $-\frac{3}{9} = \frac{-3}{9}$ ist Quotient ganzer Zahlen, denn $-3 \in \mathbb{Z},\ 9 \in \mathbb{Z}$. $-\frac{3}{9} \in \mathbb{Q}$ ist wahr.

(g) Die Kreiszahl $\pi = 3.14159\ldots$ ist eine reelle Zahl, also ist $\pi \in \mathbb{R}$ wahr.

(h) Summe und Produkt rationaler Zahlen sind wieder rationale Zahlen, s. [Kap. 4].
$\frac{\sqrt{2}-2}{7} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} - 2 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ #, nach [1.14] ist $\sqrt{2}$ irrational.
Die Annahme $\frac{\sqrt{2}-2}{7} \in \mathbb{Q}$ führt also auf den Widerspruch $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Damit ist $\frac{\sqrt{2}-2}{7} \notin \mathbb{Q}$ indirekt bewiesen, die Aussage $\frac{\sqrt{2}-2}{7} \in \mathbb{Q}$ ist falsch.

1.20 *Welche Elemente haben die folgenden Mengen?*
Welche Mengen sind endlich, welche unendlich?

Eine Menge heißt unendlich, wenn sie unendlich viele Elemente besitzt.

(a) $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$,
(b) $M_2 = \{x \in \mathbb{P} \mid x \leq 10\}$,
(c) $M_3 = \{x \in N \mid x \text{ ist gerade}\}$,
(d) $M_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$,
(e) $M_5 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } 12\}$,
(f) $M_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$,
(g) $M_7 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$,
(h) $M_8 = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$.

(a) $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ ist die Menge, die genau die Elemente 2, 3, 5, 7 hat. Als Menge mit genau vier Elementen ist sie endlich.

(b) $a \in M_2 \iff a \in \mathbb{P} \wedge a \leq 10$.
M_2 enthält genau die Primzahlen, die ≤ 10 sind, also $M_2 = \{2, 3, 5, 7\}$.
Da M_1 und M_2 dieselben Elemente haben, gilt $M_1 = M_2$. M_2 ist endlich.

(c) $M_3 = \{2, 4, 6, \ldots\}$ besteht aus den unendlich vielen geraden natürlichen Zahlen.

(d) M_4 enthält genau die reellen Zahlen x mit $0 \leq x \leq 1$, ist also das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$, siehe [Abschnitt 5.5].
M_4 ist unendlich, da sie die unendlich vielen Brüche $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ enthält.

(e) $a \in M_5 \iff a \in \mathbb{N} \wedge a$ teilt 12.
M_5 hat daher genau diejenigen natürlichen Zahlen als Elemente, die Teiler von 12 sind, also 1, 2, 3, 4, 6, 12. Als Menge mit genau sechs Elementen ist M_5 endlich.

(f) $x \in M_6 \iff x \in \mathbb{R} \wedge 2x^2 + x - 1 = 0$.
Als Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ erhält man mittels p, q-Formel [Seite 181] -1 und $\frac{1}{2}$. Also ist $M_6 = \{-1, \frac{1}{2}\}$ eine endliche Menge.

(g) Die Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ sind -1 und $\frac{1}{2}$.
Da $-1 \in \mathbb{Z}$ und $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ gilt, ist $M_7 = \{-1\}$ eine endliche Menge.

(h) Die Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ sind -1 und $\frac{1}{2}$.
Da -1 und $\frac{1}{2}$ keine natürlichen Zahlen sind, folgt $M_8 = \emptyset$.
Die leere Menge $\emptyset$ hat 0 Elemente, M_8 ist also endlich.

Gleichheit von Mengen, Teilmengenbeziehung

Bezeichnung	Lies	Bedeutung
$M = N$	M **gleich** N	$x \in M \Longleftrightarrow x \in N$
$M \subseteq N$	M **Teilmenge** von N	$x \in M \Longrightarrow x \in N$
$M \subset N$	M **echte Teilmenge** von N	$M \subseteq N \ \wedge\ M \neq N$

$M = N \iff M \subseteq N \wedge N \subseteq M$ — Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie gegenseitig ineinander enthalten sind!

Statt $M \subseteq N$ schreibt man auch $N \supseteq M$, statt $M \subset N$ auch $N \supset M$.

1.21 *Für die Gleichheit von Mengen kommt es nicht darauf an, wie diese definiert sind, sondern nur darauf, welche Elemente sie enthalten, z.B. ist*

(a) $\{1, 2, 2\} = \{2, 1, 1\} = \{1, 2\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{P} \mid x \text{ gerade}\} = \{2\}$.

(a) Alle drei Mengen haben genau die Elemente 1 und 2, sind also gleich.

(b) 2 ist die einzige gerade Primzahl, die Mengen sind also gleich.

1.22 *Man zeige die Gleichheit folgender Mengen:*

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 6n + 8 = 0\}$ *und* $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n = n^2\}$.

Beide Mengen sind gleich der Menge $\{2, 4\}$:

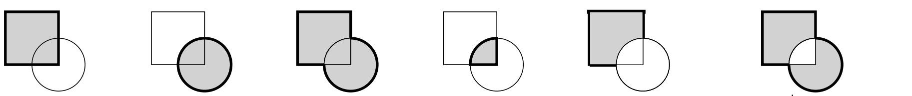
(i) $M = \{2, 4\}$: Die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ hat genau die Lösungen 2 und 4, also $\underline{M = \{2, 4\}}$.

(ii) $N = \{2, 4\}$: Da $2^2 = 2^2$ und $2^4 = 4^2$ ist, gilt $2, 4 \in N$ und folglich $\{2, 4\} \subseteq N$.
Bleibt zu zeigen, dass 2 und 4 die einzigen Elemente von N sind:
$1 \notin N$ wegen $2^1 \neq 1^2$ und $3 \notin N$ wegen $8 = 2^3 \neq 3^2 = 9$.
Für alle $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$ [3.52], d.h. für $n \geq 5$ ist $n \notin N$, folglich $\underline{N = \{2, 4\}}$.
Also gilt $\underline{M = N = \{2, 4\}}$.

Mengenbildungen

Bezeichnung	Lies	Bedeutung
$M \cup N$	**Vereinigung** von M und N	$= \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$
$M \cap N$	**Durchschnitt** von M und N	$= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$
$M \setminus N$	**Differenz** von M und N	$= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

Veranschaulichung mittels sogenannter **Venn–Diagramme**:

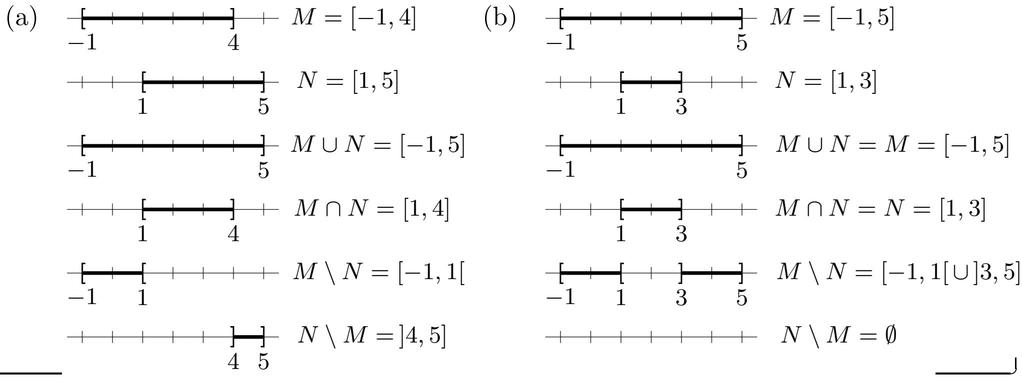


M N $M \cup N$ $M \cap N$ $M \setminus N$ $M \cup N \setminus M \cap N$
symmetrische Differenz

Für die symmetrische Differenz gilt: $M \cup N \setminus M \cap N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.

1.23 *Man bestimme für die Intervalle* [Abschnitt 5.5] *M und N jeweils*
$M \cup N, \quad M \cap N, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M.$

(a) $M = [-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} |\ -1 \leq x \leq 4\}, \quad N = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x \leq 5\}.$
(b) $M = [-1, 5] = \{x \in \mathbb{R} |\ -1 \leq x \leq 5\}, \quad N = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x \leq 3\}.$



Potenzmenge

$\boldsymbol{\mathcal{P}(M)} = \{X \mid X \subseteq M\}$ heißt **Potenzmenge** von M.
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M.
Hat M genau m Elemente, so hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ genau 2^m Elemente!

1.24 *Man bestimme die Potenzmenge von* (a) $M = \{1, 2, 3\}$,
(b) $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Teilmengen von M haben 0, 1, 2 oder 3 Elemente:

Elementanzahl	Teilmengen von M
0	$\emptyset$
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$
2	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
3	M

$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ hat $2^3 = 8$ Elemente.

(b) Dasselbe Verfahren führt auch für N zum Ziel.

Benutzt man $M \subseteq N$, also $\mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{P}(N)$, so schließt man einfacher:

Für die Teilmengen Z von N gibt es zwei Möglichkeiten: $4 \notin Z$ oder $4 \in Z$.

Die Mengen Z mit $4 \notin Z$ haben wir gerade bestimmt als Teilmengen von M.
Die Mengen Z mit $4 \in Z$ erhält man offensichtlich, indem man zu den Teilmengen von M jeweils das Element 4 hinzufügt.

$\mathcal{P}(N)$ hat also doppelt so viele Elemente wie $\mathcal{P}(M)$, also $2 \cdot 2^3 = 2^4$. Es gilt:

$\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(M) \cup \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$

Geordnete Paare

$\boldsymbol{(a,b)}$ heißt geordnetes Paar.

a, b heißen Komponenten (Koordinaten) des geordneten Paares (a, b).

Zwei geordnete Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten übereinstimmen: $(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$.

(a, b) und $\{a, b\}$ sind zu unterscheiden, so gilt z.B.: $(1,2) \neq (2,1)$, $\{1,2\} = \{2,1\}$

Analog: Geordnete Tripel (a, b, c) und geordnete n–Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Kartesische Produkte

$\boldsymbol{M \times N} = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ heißt **kartesisches Produkt** von M und N.

Das kartesische Produkt $M \times N$ ist die Menge der geordneten Paare (x, y), deren erste Komponente x aus M und deren zweite Komponente y aus N ist.

Man setzt $M \times M = M^2$, $M \times M \times M = M^3$ usw. So bezeichnet

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die sogenannte x, y-Ebene und

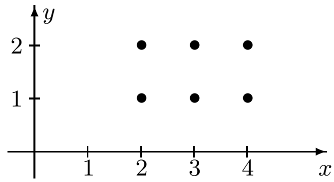
$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ den dreidimensionalen Anschauungsraum.

1.25 *Man bestimme für $M := \{2, 3, 4\}$ und $N := \{1, 2\}$ die Menge $M \times N$ und skizziere sie in der x, y-Ebene.*

Für jedes $x \in M$ enthält $M \times N$ die beiden Paare $(x, 1)$ und $(x, 2)$. Damit ist

$$M \times N = \{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}.$$

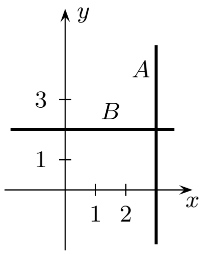
Die 6 Punkte bilden ein **Gitter** in der Ebene.

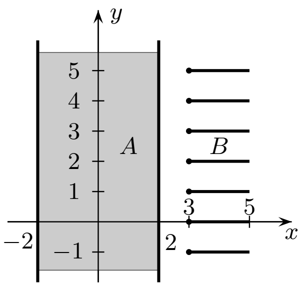


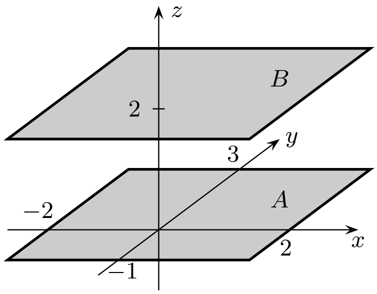
Gitter $\{2,3,4\} \times \{1,2\}$

1.26 *Man skizziere folgende kartesischen Produkte:*

(a) $A = \{3\} \times \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \times \{2\}$ (b) $A = [-2, 2] \times \mathbb{R}$, $B = [3, 5[\times \mathbb{Z}$ (c) $A = [-2, 2] \times [-1, 3] \times \{0\}$, $B = [-2, 2] \times [-1, 3] \times \{2\}$







1.27 *Sei* $M = [0,1]$ *und* $N = \{0,1\}$. *Man bestimme*

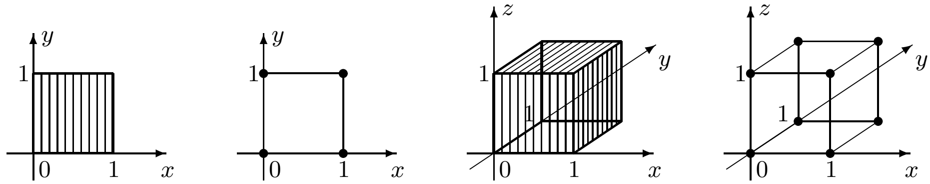
(a) $M^2 = [0,1]^2$, (b) $N^2 = \{0,1\}^2$,
(c) $M^3 = [0,1]^3$, (d) $N^3 = \{0,1\}^3$.

(a) $M^2 = [0,1]^2$ ist die Menge aller geordneten Paare (x,y) mit $x, y \in [0,1]$.
$[0,1]^2$ ist das Einheitsquadrat in der Ebene.

(b) $N^2 = \{0,1\}^2 = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$.
Die Elemente von N^2 sind die 4 Ecken des Einheitsquadrats.

(c) $M^3 = [0,1]^3$ ist die Menge aller geordneten Tripel (x,y,z) mit $x,y,z \in [0,1]$.
$[0,1]^3$ ist der Einheitswürfel im Raum.

(d) $$\begin{aligned} N^3 &= \{0,1\}^3 \\ &= \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}. \end{aligned}$$
Die Elemente von N^3 sind die 8 Ecken des Einheitswürfels.



(a) $\mathbf{[0,1]^2}$ Einheitsquadrat

(b) $\mathbf{\{0,1\}^2}$ 4 Ecken des Einheitsquadrats

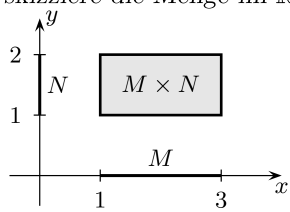
(c) $\mathbf{[0,1]^3}$ Einheitswürfel

(d) $\mathbf{\{0,1\}^3}$ 8 Ecken des Einheitswürfels

1.28 *Sei* $M = [1,3] = \{x \in \mathbb{R} | \, 1 \leq x \leq 3\}$ *und* $N = [1,2] = \{x \in \mathbb{R} | \, 1 \leq x \leq 2\}$.
Man bestimme alle Elemente von $M \times N$ *und skizziere die Menge im* $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M \times N &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |1 \leq x \leq 3,\, 1 \leq y \leq 2\} \\ &= [1,3] \times [1,2]. \end{aligned}$$

Das kartesische Produkt zweier Intervalle ist ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$.



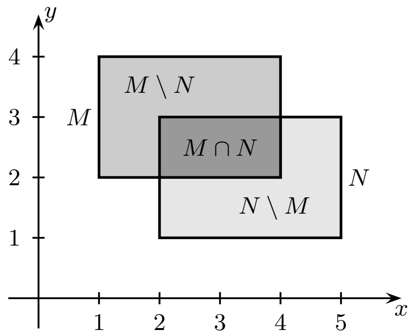
1.29 *Im* $\mathbb{R}^2$ *seien die Mengen* $M = [1,4] \times [2,4]$ *und* $N = [2,5] \times [1,3]$ *gegeben.*
Man bestimme $M \cap N$, $M \cup N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$.

$M = [1,4] \times [2,4]$ und
$N = [2,5] \times [1,3]$
sind nach [1.28] Rechtecke im $\mathbb{R}^2$.

$M \cap N$
$= [1,4] \times [2,4] \;\cap\; [2,5] \times [1,3]$
$= [2,4] \times [2,3]$ ist ein Rechteck.

$M \cup N$ ist die Menge der Punkte, die in einem der beiden Rechtecke liegen.

$M \setminus N$ und $N \setminus M$ siehe Skizze.



2 Zahlen

2.1 Grundrechenarten

Die wichtigsten Zahlenmengen

			Menge der
$\mathbb{N}$	$=$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	natürlichen Zahlen,
$\mathbb{N}_0$	$=$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	nichtnegativen ganzen Zahlen,
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q}$	$=$	$\{\frac{r}{s} \mid r, s \in \mathbb{Z},\ s \neq 0\}$	rationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$			reellen Zahlen, siehe [Kap. 5].
$\mathbb{C}$	$=$	$\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$	komplexen Zahlen, siehe [**EM2**].

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}$$

Die vier Grundrechenarten

Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren

In jeder der o. a. Mengen kann man beliebig addieren und multiplizieren.

In $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ kann man beliebig addieren, subtrahieren und multiplizieren.

In $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind alle vier Grundrechenarten bis auf Division durch 0 erlaubt.

Ist M eine der oben genannten Zahlenmengen und sind $a, b \in M$, so ist auch $a + b \in M$ und $a \cdot b \in M$.

In $\mathbb{N}$ kann man nicht beliebig subtrahieren. Die Differenz zweier Elemente von $\mathbb{N}$ muss keine natürliche Zahl sein, so ist $2 - 6 = -4 \notin \mathbb{N}$. Dies motiviert die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, denn die Differenz zweier ganzer Zahlen ist eine ganze Zahl. Letzteres gilt entsprechend für $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

In $\mathbb{Z}$ kann man nicht beliebig dividieren. $\frac{a}{b}$ heißt **Quotient** der Zahlen a und b, auch gelesen als ***a* dividiert durch *b***. Wenn man von Division spricht, ist immer klar, dass durch 0 nicht dividiert werden darf, da die Division durch 0 zu Widersprüchen führt.

Der Quotient zweier von Null verschiedener ganzer Zahlen ist nicht notwendig eine ganze Zahl; so ist $\frac{-2}{3} \notin \mathbb{Z}$. Dies motiviert die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bzw. der Brüche, siehe [Kapitel 4], denn jeder Quotient zweier rationaler Zahlen, dessen Nenner $\neq 0$ ist, ist wieder eine rationale Zahl. Letzteres gilt entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Klammerrechnung geht vor jede andere Rechnung

$((14+7)-8))\cdot(19-(17-3)) = (21-8)\cdot(19-14) = 13\cdot 5 = \underline{65}.$

Punktrechnung geht vor Strichrechnung

$a+b\cdot c = a+(b\cdot c), \quad a-b:c = a-(b:c) \quad$ usw.

$28-3\cdot 7 = 28-21 = \underline{7},\ 4-12:4 = 4-3 = \underline{1},\ 34:17-6 = 2-6 = \underline{-4}.$

Klammerrechnung geht vor jede andere Rechnung bedeutet, dass geklammerte Teilausdrücke zuerst berechnet werden, von innen nach außen.

Punktrechnung geht vor Strichrechnung bedeutet, dass **·** und **:** stärker binden als **+** und **−**. So lassen sich Klammern sparen, z.B. $3+(2\cdot 4) = 3+2\cdot 4$.

2.1 *Man berechne:*

(a) $2+3\cdot 5$ *und* $(2+3)\cdot 5$,

(b) $(40-4):(2+4)$, $(40-4):2+4$ *und* $40-4:2+4$,

(c) $25:5+((11+17-18):5+9\cdot 3)\cdot 2+6:(3+(26-23))$.

(a) $2+3\cdot 5 = 2+15 = \underline{17}$ und $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = \underline{25}$.

(b) $(40-4):(2+4) = 36:6 = \underline{6}$,
$(40-4):2+4 = 18+4 = \underline{22}$ und
$40-4:2+4 = 40-2+4 = \underline{42}$.

(c) $25:5+((11+17-18):5+9\cdot 3)\cdot 2+6:(3+(26-23)) = 5+29\cdot 2+6:6 = \underline{64}$.

Grundgesetze der Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\cdot b &= b\cdot a \end{aligned} \qquad \text{Kommutativgesetze für + und ·}$$

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \end{aligned} \qquad \text{Assoziativgesetze für + und ·}$$

$$\begin{aligned} a\cdot(b+c) &= a\cdot b+a\cdot c \\ (b+c)\cdot a &= b\cdot a+c\cdot a \end{aligned} \qquad \text{Distributivgesetze}$$

Die Kommutativgesetze besagen, dass man in Summen bzw. Produkten die Summanden bzw. Faktoren beliebig vertauschen darf. Die Assoziativgesetze besagen, dass es egal ist, wie man Summen oder Produkte klammert. Man lässt daher die Klammern einfach weg, es ist $a+b+c = a+(b+c) = (a+b)+c$ usw.

Eines der Distributivgesetze kann man weglassen, da es wegen der Kommutativgesetze aus dem anderen folgt.

Den Multiplikationspunkt **·** lässt man häufig weg, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind. Man schreibt $2x$, ab, $a(b+c)$ statt $2\cdot x$, $a\cdot b$, $a\cdot(b+c)$. Der Unterschied zwischen 23 und $2\cdot 3$ ist natürlich zu beachten!

Sprechweisen	
Ausmultiplizieren	Übergang von $a \cdot (b+c)$ zu $a \cdot b + a \cdot c$,
Ausklammern, Faktorisieren	Übergang von $a \cdot b + a \cdot c$ zu $a \cdot (b+c)$.

So ergibt Ausmultiplizieren $x \cdot (x^3 - 3x^2 + 5x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2$. Bei dem Ausdruck $x^4 - 3x^3 + 5x^2$ kann man sowohl x ausklammern, $x^4 - 3x^3 + 5x^2 = x \cdot (x^3 - 3x^2 + 5x)$, als auch x^2 ausklammern, $x^4 - 3x^3 + 5x^2 = x^2(x^2 - 3x + 5)$.
Das Ausklammern ist der wichtigere Prozess, da bei der Betrachtung von mathematischen Termen ein Produkt meist aussagekräftiger ist als eine Summe.

Da Vorzeichenfehler bei der Anwendung der Rechenregeln am häufigsten sind, fügen wir direkt die folgenden Regeln an.

Vorzeichenregeln

$-(-a) = a$	$-a = (-1) \cdot a$
$-(a+b) = -a-b$	$-(a-b) = -a+b$

2.2 *Mit den obigen Regeln kann man vernünftig* rechnen, *u.a. erlauben sie bei sogenannten Kettenaufgaben den Verzicht auf Klammersetzung sowie Rechenvereinfachungen.*

$23 - 11 + 17 + 20 - 9 = (23 + 17) + 20 - (11 + 9) = \underline{40}$,
$7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 21 \cdot 8 \cdot 20 = 42 \cdot 8 \cdot 10 = \underline{3360}$,
$14 - (-7) + 8 - 4 = 10 + 15 = \underline{25}$.

2.3 *Man multipliziere folgende Ausdrücke aus:*

(a) $-3(4a - 3(b - 2a - 2(a - 3b)))$,
(b) $-(a-b)(b-a)$,
(c) $(2x + y - 3z)(4a - 2b)$.

(a) $-3(4a - 3(b - 2a - 2(a - 3b))) = -3(4a - 3b + 6a + 6a - 18b) = \underline{-48a + 63b}$,
(b) $-(a-b)(b-a) = -(ab - a^2 - b^2 + ba) = \underline{a^2 - 2ab + b^2}$,
(c)
$$\begin{aligned}(2x + y - 3z)(4a - 2b) &= (2x + y - 3z)2(2a - b)\\ &= 2(4ax - 2bx + 2ay - by - 6az + 3bz)\\ &= \underline{8ax - 4bx + 4ay - 2by - 12az + 6bz}.\end{aligned}$$

2.4 *Man klammere bei den folgenden Ausdrücken aus:*

(a) $3a^2xy - 2bxy + 6ax^2y^2$,
(b) $-6a^2bc + 8ab^2c + 4abc^2$,
(c) $7x^2y + 49xy - 21x$.

(a) $3a^2xy - 2bxy + 6ax^2y^2 = \underline{xy(3a^2 - 2b + 6axy)}$,
(b) $-6a^2bc + 8ab^2c + 4abc^2 = \underline{2abc(-3a + 4b + 2c)} = \underline{-2abc(3a - 4b - 2c)}$,
(c) $7x^2y + 49xy - 21x = 7(x^2y + 7xy - 3x) = x(7xy + 49y - 21) = \underline{7x(xy + 7y - 3)}$.

2.5 *Man faktorisiere* $21x^2a^2b - 63xa^2 + 49xab$ *auf verschiedene Arten.*

Die auftretenden ganzen Zahlen $21, 63, 49$ haben den gemeinsamen Teiler 7 (siehe [Seite 47]), die Produkte x^2a^2b, xa^2, xab haben xa als gemeinsamen Faktor.

Man kann $7, -7, x, -x, a, -a, 7x, -7x, \ldots$ ausklammern und erhält z.B.:

$$\begin{aligned} 21x^2a^2b - 63xa^2 + 49xab &= 7(3x^2a^2b - 9xa^2 + 7xab) \\ &= -xa(-21xab + 63a - 49b) \\ &= \underline{7xa(3xab - 9a + 7b)}. \end{aligned}$$

2.6 *Man berechne die Nullstellen des Polynoms* $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.
Hinweis: *Faktorisieren, Nullstellen der Faktoren berechnen!*

Polynome werden ausführlich in [Abschnitt 10.4] behandelt. Man beachte:
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist!
Gelingt es, einen Faktor der Form $x - a$ auszuklammern, ist also
$p(x) = (x - a)q(x)$, so ist $p(a) = 0$, folglich hat $p(x)$ die Nullstelle a.

Faktorisieren ergibt: $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$.

<u>$p(x)$ hat also die (doppelten) Nullstellen 0 und 1</u>.

2.7 *Man faktorisiere folgende Ausdrücke:*

(a) $3a(2x + y) - 2b(2x + y)$, (b) $4a(x - y) + 2b(y - x)$,
(c) $7xy + y - 7xx - x$, (d) $x^3 + x^2y - x - y$.

(a) $3a(2x + y) - 2b(2x + y) = \underline{(3a - 2b)(2x + y)}$,

(b) $4a(x - y) + 2b(y - x) = 4a(x - y) - 2b(x - y) = \underline{(4a - 2b)(x - y)}$,

(c) $7xy + y - 7xx - x = 7x(y - x) + (y - x) = \underline{(7x + 1)(y - x)}$,

(d) $x^3 + x^2y - x - y = x^2(x + y) - (x + y) = \underline{(x^2 - 1)(x + y)}$,
oder $= x(x^2 - 1) + y(x^2 - 1) = (x + y)(x^2 - 1) = \underline{(x^2 - 1)(x + y)}$.

2.8 *Ein Hörsaal mit mittlerem Aufgang hat* 23 *Reihen. Die Reihen links vom Aufgang haben* 8, *die rechts vom Aufgang* 13 *Plätze. Man berechne die Gesamtzahl der Plätze auf zwei Weisen. Welches Rechengesetz steckt dahinter?*

(1) Links vom Aufgang befinden sich $8 \cdot 23$, rechts vom Aufgang $13 \cdot 23$ Plätze, das sind $8 \cdot 23 + 13 \cdot 23 = 184 + 299 = \underline{483}$ Plätze. Oder

(2) Jede Reihe hat $8 + 13$ Plätze, das sind insgesamt $(8 + 13) \cdot 23 = 21 \cdot 23 = \underline{483}$ Plätze. Es ist $(8 + 13) \cdot 23 = 8 \cdot 23 + 13 \cdot 23 = \underline{483}$ nach dem Distributivgesetz.

2.9 *Man addiere die Zahlen von* 1 *bis* 100 *durch geeignetes Zusammenfassen je zweier Summanden mit derselben Summe (siehe auch* [3.28]*).*

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 99 + 100 \\ &\quad = 1 + 100 + 2 + 99 + \cdots + 50 + 51 \\ &\quad = (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51)\ , \text{ alle 50 Klammern ergeben je 101.} \\ &\quad = 101 + 101 + \cdots + 101 = 50 \cdot 101 = \underline{5\,050}. \end{aligned}$$

2.2 Summen und Produkte

Sei n eine natürliche Zahl, für jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq n$ sei eine reelle Zahl a_k gegeben. Dann nennt man

$$a_1 \;,\; a_2 \;,\; a_3 \;,\; \ldots \;,\; a_n$$

eine **endliche Zahlenfolge** oder auch kurz **endliche Folge**.

Der Wert $\boldsymbol{a_k}$ heißt $\boldsymbol{k}$**-tes Glied** der Folge, $\boldsymbol{n}$ heißt **Länge** der Folge.

So ist 9 das fünfte Glied der Folge $1, 3, 5, 7, 9, 11$, die Länge der Folge ist 6, die Glieder sind $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, $a_6 = 11$.

Streng genommen ist eine solche Folge eine Funktion, siehe [**EM2**], die jeder natürlichen Zahl k mit $1 \leq k \leq n$ eine reelle Zahl $f(k)$ zuordnet, wobei man den Ausdruck a_k zur Bezeichnung des Funktionswertes $f(k)$ an der Stelle k verwendet. k nennt man auch einen **Index**.
Oft beginnt man auch bei $k = 0$, verwendet also Folgen $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Endliche Folgen

Eine endliche Folge $a_1, \ldots, a_n$ ist gegeben:

(a) Durch Angabe aller Glieder $a_1, \ldots, a_n$,

(b) Explizit durch Angabe eines Bildungsgesetzes $a_k = f(k),\; k = 1, \ldots, n$,

(c) Rekursiv durch Angabe von $\left\{ \begin{array}{l} a_1 \text{ und eines Bildungsgesetzes} \\ a_{k+1} = f(a_k),\; k = 1, \ldots, n-1. \end{array} \right.$

2.10 *Für die gegebenen Folgen bestimme man sowohl ein explizites als auch ein rekursives Bildungsgesetz.*

(a) $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.$ (b) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.$ (c) $1, 3, 7, 15, 31.$

(d) $2, 5, 8, 11, 14, 17.$ (e) $-8, -3, 2, 7, 12.$ (f) $1, -1, 1, -1, 1, -1.$

(a) $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ ist die Folge der 7 geraden Zahlen von 2 bis 14.
Explizit: $\underline{a_k = 2k}$, $k = 1, \ldots, 7$, liefert $a_1 = 2 \,,\, a_2 = 4 \,,\, \ldots \,,\, a_7 = 14$.
Rekursiv: $\underline{a_1 = 2,\; a_{k+1} = a_k + 2}$, $k = 1, \ldots, 6$, liefert $a_1 = 2 \,,\, \ldots \,,\, a_7 = 14$.

(b) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ ist die Folge der Zweierpotenzen von $1 = 2^0$ bis $64 = 2^6$.
Explizit: $\underline{a_k = 2^k}$, $k = 0, \ldots, 6$, liefert $a_0 = 1, a_1 = 2, \ldots, a_6 = 64$.
Rekursiv: $\underline{a_0 = 1,\; a_{k+1} = 2a_k}$, $k = 0, \ldots, 5$, liefert $a_0 = 1, a_1 = 2, \ldots, a_6 = 64$.

(c) $1, 3, 7, 15, 31$: Man erkennt aus (b):
Explizit: $\underline{a_k = 2^k - 1}$, $k = 1, \ldots, 5$, liefert $a_1 = 1 \,,\, a_2 = 3 \,,\, \ldots \,,\, a_5 = 31$.
Rekursiv: $\underline{a_1 = 1,\; a_{k+1} = 2a_k + 1}$, $k = 1, \ldots, 4$, liefert $a_1 = 1 \,,\, \ldots \,,\, a_5 = 31$.

(d) $2, 5, 8, 11, 14, 17$: Die Differenz benachbarter Folgenglieder ist 3, also:
Explizit: $\underline{a_k = 2 + 3k}$, $k = 0, \ldots, 5$, liefert $a_0 = 2 \,,\, a_1 = 5 \,,\, \ldots \,,\, a_5 = 17$.
Rekursiv: $\underline{a_0 = 2,\; a_{k+1} = a_k + 3}$, $k = 0, \ldots, 4$, liefert $a_0 = 2 \,,\, \ldots \,,\, a_5 = 17$.

(e) $-8, -3, 2, 7, 12$. Die Differenz benachbarter Folgenglieder ist 5, also:

Explizit: $\underline{a_k = -8 + 5k}$, $k = 0, \ldots, 4$, liefert $a_0 = -8, a_1 = -3, \ldots, a_4 = 12$.
Rekursiv: $\underline{a_1 = -8,\ a_{k+1} = a_k + 5}$, $k = 1, \ldots, 4$, liefert $a_1 = -8, \ldots, a_5 = 12$.

(f) $1, -1, 1, -1, 1, -1$. Ein explizites Bildungsgesetz sieht man leicht.

Explizit: $\underline{a_k = (-1)^k}$, $k = 0, \ldots, 5$, liefert $a_0 = 1\,,\ a_1 = -1\,,\ \ldots\,,\ a_5 = -1$.

Aus der Differenz ± 2 benachbarter Folgenglieder leitet man ab:

Rekursiv: $\underline{a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k + 2(-1)^k}$, $k = 1, \ldots, 5$.

2.11 *Für die Folge* $1, 3, 0, 4, -1, 5$ *bestimme man ein rekursives Bildungsgesetz.*
Hinweis: *Differenzenfolge, was wäre das nächste Glied der Folge?*

$1, 3, 0, 4, -1, 5$. Die Differenzenfolge $2, -3, 4, -5, 6$ wird durch -7 fortgesetzt.
Also wird die Folge durch $5 - 7 = -2$ fortgesetzt.
Die Differenzen haben die Form $(-1)^k k$, $k = 2, \ldots, 6$.
So ergibt sich $a_7 = 5 - 7 = a_6 + (-1)^7 7 = -2$ und man erhält:

Rekursiv: $\underline{a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k + (-1)^{k+1} \cdot (k+1)}$, $k = 1\,,\ \ldots\,,\ 5$.

2.12 *Für die Folge* $1, 4, 10, 22, 46$ *bestimme man sowohl ein explizites als auch ein rekursives Bildungsgesetz.*
Hinweis: *Differenzenfolge, was wäre das nächste Glied der Folge?*

(1) $1, 4, 10, 22, 46$. Die Differenzenfolge ist $3, 6, 12, 24$ und wird durch 48 fortgesetzt.
Also wird die Folge durch $46 + 48 = 94$ fortgesetzt.

Die Differenzen $a_{k+1} - a_k$ haben die Form $3 \cdot 2^{k-1}$, $k = 1, \ldots, 4$. Man erhält:
Rekursiv: $\underline{a_1 = 1,\ a_{k+1} = a_k + 3 \cdot 2^{k-1}}$, $k = 1, \ldots, 4$.

Durch "Rückwärtseinsetzen" gewinnt man ein explizites Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + 3 \cdot 2^3 = a_3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = a_2 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 \\ &= a_1 + 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = 1 + 3(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \\ &= 1 + 3(2^4 - 1)\ \text{, endl. geometr. Reihe [3.31] } 1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Explizit: $\underline{a_k = 1 + 3(2^{k-1} - 1)}$ oder $\underline{a_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 2}$, für $k = 1, \ldots, 5$.

(2) Folgende rekursive Darstellung ist evtl. einfacher zu erkennen:
$a_1 = 1$ und $a_{k+1} = 2a_k + 2 = 2(a_k + 1)$, $k = 1, \ldots, 5$.

Aus ihr erhält man durch "Rückwärtseinsetzen" ein explizites Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned} a_k &= 2a_{k-1} + 2 \\ &= 2(2a_{k-2} + 2) + 2 \\ &= 2^2 a_{k-2} + 2^2 + 2\ \text{, man sieht, wie es weitergeht:} \\ &= 2^3 a_{k-3} + 2^3 + 2^2 + 2 = \cdots = 2^{k-1} a_{k-(k-1)} + 2^{k-1} + \cdots + 2^2 + 2 \\ &= 2^{k-1} a_1 + 2^{k-1} + \cdots + 2^2 + 2 = 2^{k-1} + (2^{k-1} + \cdots + 2^2 + 2)\ \text{, da } a_1 = 1, \\ &= 2^{k-1} + 2 \cdot (2^{k-2} + \cdots + 2 + 1) = 2^{k-1} + 2(2^{k-1} - 1)\ \text{, geom. Reihe, also} \end{aligned}$$

Explizit: $\underline{a_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 2}$, für $k = 1, \ldots, 5$.

Summen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ und **Produkte** $\prod_{k=1}^{n} a_k$

Ist $a_1, \dots, a_n$ eine endliche Folge, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{die } \textbf{Summe} \text{ der Zahlen } a_1, \dots, a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \qquad \text{das } \textbf{Produkt} \text{ der Zahlen } a_1, \dots, a_n,$$

lies: Summe (bzw. Produkt) a_k von $k = 1$ bis n.

Entsprechend wird, für $m \leq n$, definiert:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n \,.$$

2.13 *Schreibe folgende Ausdrücke mit* $\sum$ *bzw.* $\prod$.

(a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$,

(b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$,

(c) $2+4+6+8+10+12+14$,

(d) $1+3+5+7+9+11+13$,

(e) $2+4+8+16+32+64+128$,

(f) $1-2+3-4 \pm \cdots + 99 - 100$,

(g) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + \frac{10}{11}$,

(h) $x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \pm \cdots + x^{10} - x^{11}$,

(i) $(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)(x-10)$,

(k) $(1+2)\cdot(2+3)\cdot(3+4)\dots(8+9)\cdot(9+10)$,

(l) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$,

(m) $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{4} + \frac{3\cdot 4}{5} + \cdots + \frac{9\cdot 10}{11}$.

(a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \sum_{k=1}^{10} k$,

(b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \prod_{k=1}^{7} k$,

(c) $2+4+6+8+10+12+14 = \sum_{k=1}^{7} 2k$ Summe der ersten 7 geraden Zahlen,

(d) $1+3+5+7+9+11+13 = \sum_{k=1}^{7}(2k-1) = \sum_{k=0}^{6}(2k+1)$
Summe der ersten 7 ungeraden Zahlen,

(e) $2+4+8+16+32+64+128 = 2^1+2^2+2^3+3^4+2^5+2^6+2^7 = \sum_{k=1}^{7} 2^k,$

(f) $1-2+3-4\pm\dots+99-100 = \sum_{k=1}^{100}(-1)^{k+1}k,$

(g) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+\frac{10}{11} = \sum_{k=1}^{5}\frac{2k}{2k+1},$

(h) $x^2-x^3+x^4-x^5\pm\dots+x^{10}-x^{11} = \sum_{k=2}^{11}(-1)^k x^k =$

$= \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{10}(-x)^{k+1},$

(i) $(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)(x-10) = \prod_{k=1}^{10}(x-k),$

(k) $(1+2)\cdot(2+3)\cdot(3+4)\dots(8+9)\cdot(9+10) = \prod_{k=1}^{9}(k+(k+1)),$

(l) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = \sum_{k=1}^{12} 1,$

(m) $\frac{1\cdot 2}{3}+\frac{2\cdot 3}{4}+\frac{3\cdot 4}{5}+\dots+\frac{9\cdot 10}{11} = \sum_{k=1}^{9}\frac{k(k+1)}{k+2}.$

2.14 *Schreibe folgende Ausdrücke ohne* $\sum$ *bzw.* $\prod$.

(a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1),$ (b) $\sum_{k=3}^{12}k^2,$ (c) $\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\frac{1}{k},$ (d) $\sum_{k=3}^{11}(-2),$

(e) $\prod_{k=1}^{5}(k+1),$ (f) $\prod_{k=3}^{7}(k+k^2),$ (g) $\prod_{k=1}^{4}\frac{2k+1}{k},$ (h) $\prod_{k=2}^{7}5.$

(a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1) = 2+3+4+5+6,$

(b) $\sum_{k=3}^{12}k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2,$

(c) $\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10},$

(d) $\sum_{k=3}^{11}(-2) = (-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2).$

k läuft von 3 bis 11, also durchläuft k genau 9 natürliche Zahlen. Es wird daher die Zahl -2 neunmal als Summand hingeschrieben.

(e) $\prod_{k=1}^{5}(k+1) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6,$

(f) $\prod_{k=3}^{7}(k+k^2) = (3+3^2)(4+4^2)(5+5^2)(6+6^2)(7+7^2),$

(g) $\prod_{k=1}^{4}\frac{2k+1}{k} = \frac{3}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{4},$

(h) $\prod_{k=2}^{7}5 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5.$

k läuft von 2 bis 7, also durchläuft k genau 6 natürliche Zahlen. Es wird daher die Zahl 5 sechsmal als Faktor hingeschrieben.

2.15 *Berechne für die Folge* $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ a_5 = 8,\ a_6 = 11$

(a) $\sum_{k=1}^{6} a_k$, (b) $\prod_{k=1}^{6} a_k$, (c) $\sum_{k=4}^{6} a_k$, (d) $\prod_{k=1}^{3} a_{2k}$, (e) $\sum_{k=1}^{6} 2a_k$, (f) $\prod_{k=2}^{4} a_k^2$.

(a) $\sum_{k=1}^{6} a_k = a_1 + \cdots + a_6 = 1+4+5+7+8+11 = \underline{36},$

(b) $\prod_{k=1}^{6} a_k = a_1\cdots a_6 = 1\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 11 = \underline{12\,320},$

(c) $\sum_{k=4}^{6} a_k = a_4 + a_5 + a_6 = 7+8+11 = \underline{26},$

(d) $\prod_{k=1}^{3} a_{2k} = a_2\cdot a_4\cdot a_6 = 4\cdot 7\cdot 11 = \underline{308},$

(e) $\sum_{k=1}^{6} 2a_k = 2\sum_{k=1}^{6} a_k = 2\cdot 36 = \underline{72}$, siehe (a),

(f) $\prod_{k=2}^{4} a_k^2 = a_2^2\cdot a_3^2\cdot a_4^2 = 4^2\cdot 5^2\cdot 7^2 = (4\cdot 5\cdot 7)^2 = 140^2 = \underline{19\,600}.$

Man erhält $\sum_{k=1}^{n} a_k$, indem man alle Glieder der Folge $a_1, \ldots, a_n$ addiert, oder auch indem man für den sog. **Laufindex** k sukzessive die Zahlen $1, \ldots, n$ einsetzt und die so entstehenden Zahlen a_k addiert. Der Laufindex kann beliebig benannt werden, verboten ist in diesem Fall nur n, das ja konstant ist.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{n} a_j}$$