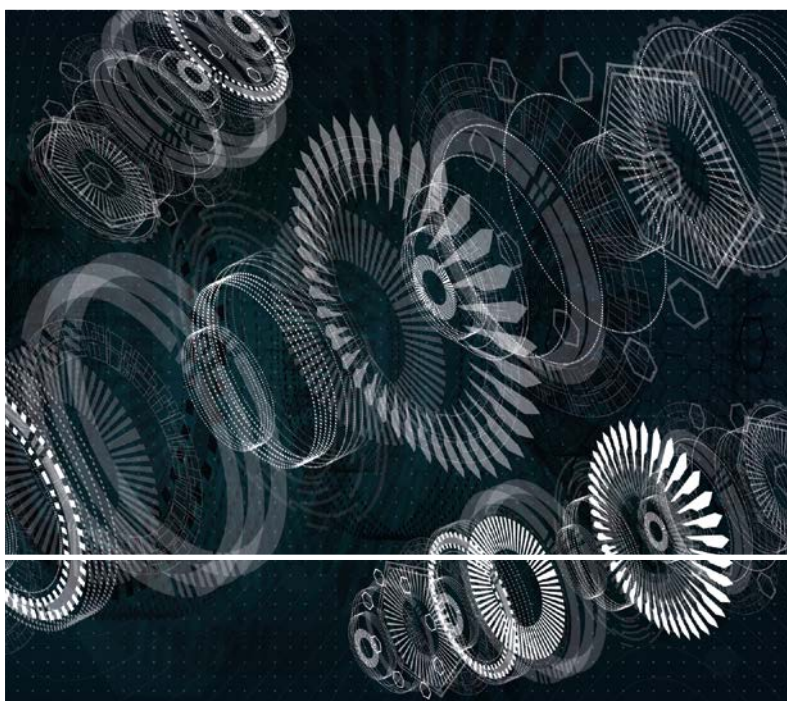


Wolfgang H. Müller
Narges Panjalipoursangari
Ana Stankovic

Übungsaufgaben zur **Technischen Mechanik**



4., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Disclaimer zur Barrierefreiheit

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Dazu gehört auch, dass Bilder oder Tabellen für blinde und sehbehinderte Menschen zugänglich gemacht werden. Dies geschieht durch zusätzliche beschreibende Texte (Alternativtexte), die in den Daten integriert sind. Die Alternativtexte können von assistiven Technologien (z. B. Screenreadern) vorgelesen werden. Bei der Erstellung dieser Texte kommt eine KI zum Einsatz. Die inhaltliche Verantwortung liegt weiterhin bei den Lektor:innen und Autor:innen.

Müller / Panjalipoursangari / Stankovic
Übungsaufgaben zur Technischen Mechanik



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Wolfgang H. Müller
Narges Panjalipoursangari
Ana Stankovic

Übungsaufgaben zur Technischen Mechanik

4., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Die Autor:innen:

Dr.-Ing. habil. Ferdinand Ferber, em., Universität Paderborn

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller, Technische Universität Berlin

M. Sc. Narges Panjalipoursangari, Technische Universität Berlin

M. Sc. Ana Stankovic, Technische Universität Berlin



Print-ISBN: 978-3-446-48163-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-48459-7

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2026 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

Vilshofener Straße 10 | 81679 München | info@hanser.de

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Shutterstock / SergeyBitos

Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Inhalt

Vorwort	XIII
1 Statik	1
1.1 Grundbegriffe	1
1.1.1 Einordnung und Gliederung der Mechanik	1
1.1.2 Zum Kraftbegriff	2
1.1.3 Einteilung der Kräfte	3
1.1.4 Das Schnitt- und Wechselwirkungsprinzip	5
1.2 Kräfte in einem Angriffspunkt	5
1.2.1 Lineare Gleichungssysteme und zugehörige Lösungsverfahren ...	5
1.2.2 Trigonometrisches Grundwissen	11
1.2.3 Ein zentrales Kräftesystem: Pendelstützen mit im Knoten angreifenden Lasten	13
1.2.4 Zentrale Kräftegruppe: Öse	16
1.2.5 Zentrale Kräftegruppe an der Umlenkrolle	18
1.2.6 Zentrale Kräftegruppe: Ozeandampfer im Schlepp	20
1.2.7 Gewichte an Pendelstützen mit angreifender Kraft	22
1.3 Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers	23
1.3.1 Mehrscheibensystem unter Eigengewicht I	23
1.3.2 Mehrscheibensystem unter Eigengewicht II	26
1.3.3 Scheibe in der Ebene	29
1.3.4 Hebebühne unter äußerer Last	34
1.3.5 Dreidimensionales Stabwerk	37

1.3.6	Kräfte- und Momentengleichgewicht am Hebel	40
1.3.7	Statisch bestimmt gelagerte Platte	41
1.3.8	Hebel im mechanischen Gleichgewicht	46
1.3.9	Tetraeder unter externer Last	47
1.3.10	Allgemeine Kräftegruppe im Raum: Seiltrommel	50
1.4	Der Schwerpunkt	53
1.4.1	Grundwissen an Differenzial- und Integralrechnung	53
1.4.2	Flächenschwerpunkt	60
1.4.3	Berechnung der Schwerpunkte von Rotationskörpern mithilfe der 1. Guldinschen Regel	63
1.4.4	Träger unter externen Lasten I	66
1.4.5	Träger unter externen Lasten II	69
1.4.6	Rahmen unter Lastverteilungen	71
1.4.7	Schwerpunkt eines asymmetrischen Trägerprofils	75
1.4.8	Berechnung der Oberfläche eines Rotationskörpers mithilfe der 2. Guldinschen Regel	76
1.4.9	Lagerreaktionen am Balken unter Streckenlast	78
1.4.10	Tragwerk unter Dreieckslast	80
1.4.11	Gerber-Träger unter Punkt- und Gleichstreckenlast	82
1.4.12	Flächenmittelpunkt	85
1.4.13	Inhomogene Kreisscheibe mit Aussparung	87
1.4.14	Halbkreisscheibe mit rechteckiger Aussparung	89
1.5	Lager-, Trag- und Fachwerke	91
1.5.1	Stabkräfte in einem Baukran	91
1.5.2	Kräfte in einem Stabwerk	92
1.5.3	Kranausleger	95
1.5.4	Belastetes Fachwerk	99
1.5.5	Fachwerkscheibe	103
1.5.6	Fachwerkrahmen mit an einem Seil hängender Last	105
1.6	Der biegesteife Träger	108
1.6.1	Schnittgrößen am eingespannten Träger unter Last I	108
1.6.2	Schnittgrößen am eingespannten Träger unter Last II	111
1.6.3	Schnittgrößen am gelenkig gelagerten Träger unter örtlich variabler Streckenlast I	113
1.6.4	Schnittgrößen am gelenkig gelagerten Träger unter örtlich variabler Streckenlast II	115

1.6.5	Schnittgrößen am abgeknickten Träger I	118
1.6.6	Schnittgrößen am abgeknickten Träger II	122
1.6.7	Schnittgrößen am gekrümmten Träger I	126
1.6.8	Balken mit Streckenlast I	130
1.6.9	Schnittlasten am zweiteiligen Träger	133
1.6.10	Schnittgrößen am gekrümmten Träger II	140
1.6.11	Tragwerk mit Streckenlast I	141
1.6.12	Balken mit Streckenlast II	146
1.6.13	Tragwerk mit Streckenlast II	149
1.7	Reibungsprobleme	154
1.7.1	Coulombsche Reibung zwischen Keil und Klotz	154
1.7.2	Reibung zwischen Leiter und Wand	158
1.7.3	Einfluss unterschiedlicher Reibungskräfte auf eine angelehnte Leiter	160
1.7.4	Selbstsperrung durch Hebelwirkung	163
1.7.5	Papierrolle	165
1.7.6	Malergerüst	169
1.7.7	Vertikal verschiebbare Bühne zwischen zwei Wänden	171
1.7.8	Waschmaschinentrommel	173
1.7.9	Kletterhalterung	176
2	Festigkeitslehre	181
2.1	Einführung, Begriffe	181
2.1.1	Versagen von Strukturen	181
2.2	Zug- und Druckbeanspruchung	185
2.2.1	Parallelschaltung elastischer Stäbe	185
2.2.2	Verlängerung eines Drahtseils unter Eigengewicht	188
2.2.3	Zweifach eingespannter Stab	189
2.2.4	Thermospannungen in einem eingespannten Stab	190
2.2.5	Wärmespannungen in hintereinander geschalteten Stäben	191
2.2.6	Symmetrisch parallel geschaltete elastische Stäbe unter thermischer Last	193
2.2.7	Parallel geschaltete Stäbe unter thermischer Last	196
2.2.8	Stäbe unter Eigengewicht	198

2.3	Schubbeanspruchung und Hookesches Gesetz	202
2.3.1	Zusammenhang zwischen Elastizitäts- und Schermodul	202
2.4	Biegebeanspruchung des Balkens	204
2.4.1	Flächenträgheitsmoment eines sechseckigen Stabquerschnitts	204
2.4.2	Flächenträgheitsmoment eines zusammengesetzten Trägerprofils	208
2.4.3	Spannungsnachweis eines Trägers unter schiefer Biegung	209
2.4.4	Flächenträgheitsmoment für ein technisches Profil	212
2.4.5	Flächenträgheitsmoment für ein Rechteckhohlprofil	214
2.5	Schub infolge Querkraft beim Biegeträger	216
2.5.1	Spannungsnachweis für einen symmetrisch belasteten Träger mit Lamelle	216
2.5.2	Spannungsnachweis für einen Träger mit Lamelle	220
2.5.3	Spannungsnachweis für ein Kastenprofil	225
2.5.4	Spannungsnachweis für einen Doppel-T-Träger unter Querlast ...	229
2.5.5	Spannungsnachweis für eine Lasttraverse	233
2.5.6	Spannungsnachweis für ein U-Profil	236
2.6	Die elastische Linie des Biegeträgers (Biegelinie)	244
2.6.1	Durchbiegung des Mastes einer Windkraftanlage	244
2.6.2	Biegelinie eines beidseitig eingespannten Trägers	248
2.6.3	Durchbiegung eines abgestuften Trägers	253
2.6.4	Durchbiegung bei komplexer Lastverteilung	258
2.7	Axiale Verdrehung/Torsion	260
2.7.1	Auslegung dreier Trägerprofile unter Torsion	260
2.7.2	Torsion rechteckiger Querschnitte	262
2.8	Zusammengesetzte Beanspruchung	263
2.8.1	Träger unter Biege- und Torsionsbelastung	263
2.8.2	Das Grundproblem des Mohrschen Spannungskreises	266
2.8.3	Scheibe im ebenen Spannungszustand	267
2.9	Stabilitätsprobleme	270
2.9.1	Auslegung auf gleiche Knicksicherheit	270
2.9.2	Gleiche Sicherheit zweier Knickstäbe	271
2.9.3	Auslegung auf vorgegebene Knicksicherheit	273
2.9.4	Hintereinandergeschaltete Knickstäbe	275
2.9.5	Die exakte Lösung des 1. Eulerfalls	278

3	Dynamik	285
3.1	Punktförmige Masse	285
3.1.1	Ein Marschflugkörper	285
3.1.2	Kreisbewegung	288
3.1.3	Kinematik eines Massenschwerpunkts	291
3.1.4	Kinematik eines Zusammenstoßes	294
3.1.5	Kinematik kombinierter Bewegungen	296
3.1.6	Dynamik des Schleuderballs	297
3.1.7	Dynamik der Überschlagschiffschaukel	300
3.1.8	Die Coriolis-Kraft	304
3.1.9	Dynamik des Raketenschlittens im Looping	307
3.1.10	Gebremste Flugbewegung im Erdschwerefeld	316
3.1.11	Stoß mit Verlust	320
3.1.12	Arbeit längs der schiefen Ebene	321
3.2	Die Dynamik von Massenpunktsystemen	330
3.2.1	Abbremsen eines Düsenjägers auf einem Flugzeugträger	330
3.2.2	Doppelter Flaschenzug vektoriell gerechnet	332
3.2.3	Fallendes Seil und fallende Kette	337
3.3	Die Dynamik des starren Körpers	341
3.3.1	Starrkörperkinematik	341
3.3.2	Momentanpol	343
3.3.3	Starrkörperkinematik kommunizierender Walzen	345
3.3.4	Eine Hebevorrichtung	347
3.3.5	Bewegung eines Gymnastikreifens	350
3.3.6	Eine beschwingte Schlittenfahrt	356
3.3.7	Massenträgheitsmomente eines Kegelstumpfes	358
3.3.8	Ein Fallrad	360
3.3.9	Massenträgheitsmomente eines Kegels	362
3.3.10	Bewegung einer Tänzerwalze	364
3.3.11	Massenträgheitsmoment von Voll- und Hohlkugel	366
3.3.12	Die Bewegung des Rades oder die Rota Aristotelis	367
3.4	Schwingungen	374
3.4.1	Ein schwingfähiges Mehrkörpersystem	374
3.4.2	Das verstellbare Uhrpendel	376

3.4.3	Pendel mit Drehfeder	377
3.4.4	Stab mit Drehfeder und Dämpfer	379
3.4.5	Passive Entstörung eines Messgeräts	385
3.4.6	Schwingungstilgung beim Zweimassenschwinger	387
3.4.7	Schwingender Starrkörper	389
3.4.8	Gekoppelte Scheibenbewegung	391
4	Kontinuumsmechanik	395
4.1	Bilanzgleichung der Masse	395
4.1.1	Beweisidee zum Gaußschen Satz	395
4.2	Bilanzgleichung des Impulses	396
4.2.1	Spannungstensor und Fließspannung	396
4.2.2	Koordinatentransformationen	398
4.2.3	Hauptspannungen	402
4.2.4	Fließkriterium im Hauptspannungsraum	408
4.2.5	Die Mohrschen Kreise	410
4.2.6	Euklidische Transformationen	414
4.2.7	Invarianz der Bilanzgleichungen	418
4.3	Einfache Materialgleichungen	421
4.3.1	Die Bernoullische Höhenformel	421
4.3.2	Kompressible Flüssigkeiten	423
4.3.3	Angeströmte Platte im Gleichgewicht	425
4.3.4	Kompressibilität in Festkörpern	429
4.3.5	Wasserstrahl	430
4.4	Bilanzgleichungen des Drehimpulses	433
4.4.1	Eigenschaften und Anwendungen des total antimetrischen Tensors	433
4.4.2	Der total antimetrische Tensor und seine Anwendung beim Spatprodukt	435
4.4.3	Der total antimetrische Tensor und seine Anwendung beim Doppelkreuzprodukt	436
4.4.4	Eine Anwendung des antimetrischen Tensors	437
4.5	Einführung in die lineare Elastizitätstheorie	439
4.5.1	Lösung der Schwingungsgleichung für eine Gitarrensaite	439
4.5.2	Balkenschwingung	444

4.5.3	Erzwungene Longitudinalschwingung	449
4.5.4	Saitenschwingung	451
4.5.5	Erzwungene Balkenschwingung	454
4.5.6	Scherung eines Klotzes aus linear-elastischem Material	458
4.6	Einführung in die Hydromechanik	461
4.6.1	Ein mit Wasser gefüllter Eimer in Rotation	461
4.6.2	Kommunizierende Röhren	463
4.6.3	Regulierter Wassertank	465
4.6.4	Couette-Strömung	467
4.6.5	Hagen-Poiseuille-Strömung	470
4.6.6	Hydrostatischer Druck: Wassertank	471
5	Energiemethoden	475
5.1	Energiebilanz	475
5.1.1	Die Wärmeleitungsgleichung	475
5.1.2	Wärmeleitung in einem vorgewärmten Balken	476
5.1.3	Kolben im Schwerfeld	485
5.2	Entropiebilanz und 2. Hauptsatz	490
5.2.1	Entropie des idealen Gases	490
5.2.2	Entropieproduktion beim fallenden Kolben	491
5.3	Die Sätze von Castigliano, Betti und Maxwell	493
5.3.1	Eine Anwendung des 1. Satzes von Castigliano I	493
5.3.2	Eine Anwendung des 1. Satzes von Castigliano II	497
5.3.3	Eine Anwendung des 1. Satzes von Castigliano III	500
5.3.4	Anwendung der Sätze von Castigliano I	502
5.3.5	Anwendung der Sätze von Castigliano II	506
5.3.6	Formänderungsenergie am Balken unter Querkraftbelastung	509
5.3.7	Anwendung der Sätze von Betti und Maxwell auf statisch unbestimmte Systeme	511
5.3.8	Formänderungsenergie am konkreten Belastungsfall	516
5.4	Energiefunktionale und ihre Extrema	521
5.4.1	Eine Anwendung der Variationsrechnung: Die Brachistochrone ...	521
5.5	Das Prinzip der virtuellen Verschiebung (PdvV)	526
5.5.1	Berechnung von Gleichgewichtslagen mithilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung	526

5.5.2	Nürnberger Schere	528
5.5.3	Fachwerk	529
5.5.4	Tragwerk und PdvV	530
5.5.5	Gerber-Träger und PdvV	532
5.6	Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK)	536
5.6.1	Anwendung des Prinzips der virtuellen Kraft in Fachwerken	536
5.6.2	Beispiel zum (PdvK): Reine Normalkraftbelastung in Fachwerken	539
5.6.3	Absenkung eines Punkts auf einem Balken auf zwei Stützen	542
5.6.4	Deformation in einem Viertelkreisbogen	544
5.6.5	Absenkung einer Kreiswelle	545
5.6.6	Behandlung eines einfach statisch unbestimmten Systems mithilfe des Prinzips der virtuellen Kraft	547
5.6.7	Zweifach statisch unbestimmter Träger unter Gleichstreckenlast ..	550
5.7	Dynamische Energieprinzipie	554
5.7.1	Gedämpfte schwingende Walze	554
5.7.2	Gedämpftes Starrkörpersystem	557
5.7.3	Multistarrkörpersystem	560

Vorwort

*L'exemple est un dangereux leurre;
Où la guêpe a passé, le moucheron demeure.*

Jean de la Fontaine (1621 – 1695) in „Fables (II, XVI)“

Diese Aufgabensammlung soll das Lehrbuch *Müller/Ferber; Technische Mechanik für Ingenieure* ergänzen und den Studenten Übungsmaterial bereitstellen, um den zu den jeweiligen Kapiteln gehörigen Stoff unmittelbar zu vertiefen. Die Übungen sind parallel zu unseren Vorlesungen an der Universität Paderborn, der Heriot-Watt University in Edinburgh und an der Technischen Universität Berlin entstanden. Insbesondere gehen die Aufgaben zu den Kapiteln 3 bis 10 auf Notizen und Vorlesungen von Herrn Professor Helmut Wild, Paderborn, zurück, dem wir für seine Anregungen herzlich danken. Weiterhin gebührt Herrn Kollegen Prof. Dr.-Ing. Albert Duda Dank für eine erste Durchsicht des Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge.

Vom Stoffumfang her sind unsere Übungen auf zwei Semesterwochenstunden ausgelegt. Sicherlich werden sich bei Verwendung der Aufgaben in der täglichen Lehre viele weitere Wünsche einstellen. Zum Beispiel haben wir es in dieser Auflage des Übungsbuches versäumt, Aufgaben zum Thema *D'Alembertsche* und *Lagrangesche* Mechanik bereitzustellen. In diesem Zusammenhang können wir vorläufig nur empfehlen, die mit dem *Newtonschen* Konzept ausführlich bearbeiteten Aufgaben der Kapitel 14 und 15 mit diesen Methoden entsprechend durchzurechnen und die präsentierte Lösung unter anderen Gesichtspunkten wiederzuentdecken. Ferner sind manche Abschnitte im Moment etwas unterbesetzt, wie zum Beispiel die Kapitel 11 bis 13, also die Themen Knickstab und Punktkinematik und -kinetik. Unser Ziel ist es, während der kommenden Semester hierzu im Stil des Buches weitere ausgearbeitete Aufgaben auf unserer webpage anzubieten: <http://mechanik.tu-berlin.de/mueller/lehre.htm>. Hier werden wir auch über die zu erwartenden Druckfehler berichten und Informationen in Form einer permanent zu aktualisierenden Errataliste anbieten.

Wir wurden auch mehrfach darauf angesprochen, warum wir unsere Leser denn duzen. Darauf ist zu erwidern, dass selbst wenn wir dies täten, es keineswegs diminutiv, deklassierend oder gar kommunistisch-klassenkämpferisch gemeint wäre. Vielmehr jedoch gebrauchen wir Ausdrücke wie „Stelle auf“, „Erarbeite“, etc. im Sinne eines kategorischen Imperativs und meinen eigentlich „Man stelle auf“, „Man erarbeite“. Um vorzubeugen: Letztere Erklärung ist durchaus im nicht-antifeministischen Sinne zu verstehen!

Abschließend bedanken wir uns herzlich für die angenehme Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Carl Hanser Verlag, der das Werden dieses Buches aufmerksam begleitet hat und mit Rat und Tat stets aktiv und äußerst hilfreich zur Seite stand.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Sommer 2004

Vorwort zur 2. Auflage

... deinde quia longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.

Lucius Annaeus Seneca (1 – 65) in „Epistulae morales ad Lucilium (I, VI [5])“

Nachdem wir unser Lehrbuch der modularen Struktur angepasst haben, war eine entsprechende Korrektur des Aufgabenbuches überfällig. Diese Lücke haben wir hiermit geschlossen. Parallel zum Lehrbuch findet man in fünf Kapiteln gegliedert Aufgaben zu den an der Technischen Universität Berlin für die Studierenden der Ingenieurwissenschaften angebotenen Modulen Statik, Festigkeitslehre, Dynamik, Kontinuumsmechanik und Energiemethoden.

Weiterhin wurden die Aufgaben thematisch nach den im Kapitel jeweils folgenden Unterpunkten sortiert. Wir stellen nicht ohne Stolz fest, dass zu jedem Unterkapitel Übungsaufgaben bereitstehen. Außerdem ist zu vermelden, dass im Rahmen der beiliegenden CD dem starken Wunsch der Studierenden Rechnung getragen wurde, sog. „Quickies“ üben zu können. Diese Kurz- oder auch Theoriefragen stellen erfahrungsgemäß in der Klausur eine sehr große Hürde dar und werden, obwohl sie es nach überlegtem Studium des Lehrbuches nicht sein sollten, als extrem schwierig empfunden. Entsprechend groß ist die Furcht, sich nicht darauf vorbereiten zu können. Dieses wird nun möglich.

Abschließend gilt unser Dank noch allen unseren studentischen Helfern, nämlich den Damen und Herren cand.-ing. Matti Blume, Claudia Gertheinrich, Stefan Jannikoy, Anna Japs, Saskia Krech, Felix-Joachim Müller, den wissenschaftlichen Mitarbeitern Dipl.-Ing.'s Emek Abali, Andreas Brandmair und Holger Worrack, Herrn Dipl.-Ing.

Guido Harneit für die Rechneradministration und Softwareunterstützung sowie – wie immer last but not least – Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Carl Hanser Verlag.
Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2009

Vorwort zur 3. Auflage

Книги читай, однако помни — книга книгой, а своим мозгом двигай!

Максим Горький (1868 – 1936)

In der vorliegenden 3. Auflage unseres Aufgabenbuches haben wir zunächst einmal versucht, alle durch Assistenten und Studenten bisher gefundenen Druck- und Rechenfehler auszumerzen. Es ist zu vermuten, dass trotz dieser Anstrengung nicht alle beseitigt wurden. Darüber hinaus haben wir uns sehr bemüht, neue Fehler einzubauen, denn insbesondere zu den Kapiteln über Kontinuumsmechanik und Energiemethoden sind weitere Aufgaben hinzugekommen. Folglich gilt es das obige Zitat zu beherzigen und selber zu denken, denn nur selber rechnen macht schlau, und man soll ja nicht alles glauben, was in den Büchern steht.

Für die Mitarbeit an der neuen Auflage möchten wir Assistenten und studentischen Hilfskräften danken, insbesondere den Herren Dr.-Ing. B. Emek Abali, Matti Blume, Anton Köllner, M. Eng. (Hons) und Felix Reich, M. Sc. und Herrn Dipl.-Ing. Guido Harneit für die Rechneradministration und Softwareunterstützung. Für viel Verständnis und Geduld während der Anfertigung dieses Buches ist außerdem Frau Ute Eckardt vom Hanser Verlag Dank zu sagen.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2015

Vorwort zur 4. Auflage

Tempora mutantur, et nos mutamur in illis

Publius Ovidius Naso (–43 bis –17), Fasti

In der vorliegenden 4. Auflage haben die beiden wissenschaftlichen Assistentinnen, Frau Narges Panjalipoursangari, M.Sc. und Frau Ana Stankovic, M.Sc. die zahlreichen während ihres letzten Kursdurchlaufs neu erdachten Übungsaufgaben mit eingebracht. Unser Fachgebietstutor, Herr Jonas R. Hanschke hat dabei wertvolle Arbeit beim Umstellen von Latex in Word geleistet. Dafür unseren Dank.

Die Neuauflage bringt Veränderungen. Zunächst einmal ist das veränderte Layout dem European Accessibility Act (EAA), zu verdanken, was bedeutet, dass E-Books so aufbereitet sein müssen, dass sie auch von Menschen mit Behinderungen, insbesondere mit Seh- oder Leseeinschränkungen, uneingeschränkt genutzt werden können. Das ist lobenswert, und wir hoffen, dass es hilft.

In jedem Fall für viel Verständnis, Geduld und Hilfe während der Anfertigung dieses Buches möchten wir Frau Natalia Silakova und Frau Christina Kubiak vom Hanser Verlag besonderen Dank sagen.

Die Autoren im Oktober 2025

1

Statik

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Einordnung und Gliederung der Mechanik

Problemstellung

Die Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik, das mit der Entwicklung der Analytischen bzw. Rationalen Mechanik im letzten Jahrhundert einen gewissen Abschluss erreicht hat. Stelle die sogenannte **Analytische Mechanik** und die **ingenieurwissenschaftliche** Mechanik einander gegenüber und definiere die **Technischen Mechanik**.

Lösung



Bild 1.1 Die Mechanik als Teilgebiet der Physik



Bild 1.2 Fachliche Gliederung der Mechanik



Bild 1.3 Aspekte einer technischen Konstruktion

1.1.2 Zum Kraftbegriff

Problemstellung

Die Kraft ist eine sogenannte primitive, d. h. ursprüngliche Größe. Erläutere anhand geeigneter Beispiele diese Behauptung.

Lösung

- Kraft ist das Resultat geistiger Abstraktion, basierend auf unserer täglichen Erfahrung.
- Kräfte lassen sich nicht unmittelbar beobachten.
- Die Wirkung der Kräfte lässt auf ihre Existenz schließen.

**Bild 1.4**

Erfahrung und geistige Abstraktion lassen das Gefühl der Kraftwirkung aufkommen

**Bild 1.5**

Man kann Kräfte fühlen

**Bild 1.6**

Man kann Kräfte aufprägen

1.1.3 Einteilung der Kräfte

Problemstellung

Wir teilen die Kräfte in die sogenannten **Einzelkräfte**, in **Linienkräfte** oder **Streckenlasten**, in **Volumenkräfte**, in **Oberflächenkräfte** und **eingeprägte Kräfte** ein. Erläutere diese Klassifikation anhand geeigneter Beispiele.

Lösung

Die folgenden Beispiele zeigen jeweils typische technische Problemstellungen, zu deren mathematischer Behandlung die genannten Kräftearten verwendet werden.

**Bild 1.7**

Einzelkraft

**Bild 1.8**

Linienkraft oder Streckenlast

**Bild 1.9**

Volumenkraft

**Bild 1.10**

Oberflächenkraft

(nach <http://www.talsperrenleitzentrale-ruhr.de>)

1.1.4 Das Schnitt- und Wechselwirkungsprinzip

Problemstellung

Freimachen bzw. Freischneiden bedeutet, dass die Reaktionskräfte in einem Körper dadurch sichtbar gemacht werden, dass man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst. Erläutere dieses Konzept anhand einfacher Beispiele.

Lösung

Die in der Mechanik überaus wichtige Technik des Freischnitts wird am folgenden Beispiel von *Wilhelm Busch* auf amüsante Weise verdeutlicht. Man beachte, dass *Busch* sich in seiner Jugend in Hannover als Maschinenbaustudent eingeschrieben hatte, diese Tätigkeit jedoch bald aufgab, um sich der Malerei und Dichtkunst zuzuwenden. Offenbar war der Freischnitt zu diesem Zeitpunkt ihm jedoch bereits vermittelt worden.

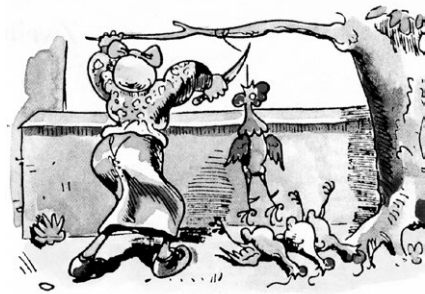


Bild 1.11
Der Freischnitt

1.2 Kräfte in einem Angriffspunkt

1.2.1 Lineare Gleichungssysteme und zugehörige Lösungsverfahren

Problemstellung

Benenne und diskutiere wichtige Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zeige ihre Bedeutung in der Technischen Mechanik anhand einfacher Beispiele auf.

Lösung

Bei der Bestimmung von Schnittgrößen (z. B. Lagerkräften und -momenten) ist es oft notwendig, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Anders ausgedrückt sind besagte

Schnittgrößen die Unbekannten, die als Funktion gegebener mechanischer Größen, wie eingepprägter Kräfte, Drehmomente oder Abmessungen, berechnet werden sollen. In dieser Übersichtsaufgabe wird an die gängigen Verfahren zum Lösen solcher linearen Gleichungssysteme erinnert. Für ein tiefergehendes Studium bzw. für einen Beweis sei auf die einschlägigen Kapitel in Mathematiklehrbüchern verwiesen.

Zur allgemeinen Struktur eines linearen Gleichungssystems für zwei Unbekannte ist folgendes zu sagen. Gegeben sind die Größen a, b, c, d, A, B und gesucht sind x, y in den folgenden zwei Formeln:

$$ax + by = A \quad (1.1)$$

$$cx + dy = B \quad (1.2)$$

Gemäß der Regeln für das Rechnen mit Matrizen, kann man hierfür alternativ auch schreiben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie die gegebenen Größen, nämlich die aus den gegebenen Größen a, b, c, d bestehende **2×2-Koeffizientenmatrix**, die Spalte der **Unbekannten** x, y und die wiederum gegebene, aus A, B bestehende, sogenannte **rechte Seite**, sehr klar auseinander hält. Sie hat auch noch den weiteren Vorteil, dass das zugehörige Lösungsschema sich formal sehr einfach auf eine größere Anzahl von Unbekannten übertragen lässt. Doch davon gleich mehr. Wenn man weiß, wie man (zweireihige) Determinanten berechnet, dann findet man aus Formel 1.3 sofort die Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{A d - B b}{a d - b c} \quad (1.4)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{B a - A c}{a d - b c} \quad (1.5)$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix steht also jeweils im Nenner, und im Zähler wurde zur Bestimmung der n -ten Unbekannten in der n -ten Spalte der Koeffizientenmatrix die rechte Seite eingesetzt. Für diejenigen, die sich in der Berechnung von Determinanten noch nicht gut auskennen, ist die explizite Lösung in obiger Gleichung ebenfalls mit angegeben.

Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Unbekannte x_i , $i = 1, \dots, N$, $N = 1, 2, 3, \dots$ gelingt wie folgt:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = A_i$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$

wobei das quadratische Zahlenschema a_{ij} sowie die rechte Seite A_i gegeben sind und alle x_j durch eben diese Größen berechnet werden sollen. Die Lösung ausgedrückt durch n -reihige Determinanten lautet:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & A_1 & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & A_2 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & A_N & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nj} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}} \quad (1.6)$$

$j = 1, \dots, N$

Man muss zur Bestimmung der j -ten Unbekannten also lediglich in der Determinante der Koeffizientenmatrix an der gleichnamigen Spalte die rechte Seite einsetzen und danach durch die Determinante besagter Koeffizientenmatrix teilen. Dies ist die sogenannte *Cramersche Regel*. Bevor wir uns mit alternativen Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beschäftigen, soll die angegebene allgemeine Lösungsmethode am Beispiel eines einfachen Stabwerkes illustriert werden. Für das in Bild 1.12 gezeichnete Stabwerk ist die allgemeine Lösung für die Stabkräfte mithilfe einer zwei-reihigen Determinante gesucht.

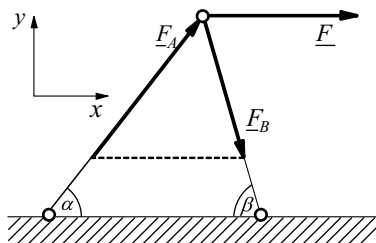


Bild 1.12

Pendelstützensystem unter äußerer Last

Zuerst werden die Gleichgewichtsbedingungen in Bezug auf das dargestellte kartesische Koordinatensystem aufgestellt:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Bx} + F = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_{By} = 0$$

Auf den ersten Blick scheint es so, als ob vier unbekannte Kraftgrößen zu bestimmen sind. Dies täuscht jedoch, denn die Stabkräfte müssen in Richtung der Stabachsen wirken, d. h. ihre Komponenten sind nicht unabhängig und es gilt:

$$F_{Ax} = F_A \cos(\alpha)$$

$$F_{Ay} = F_A \sin(\alpha)$$

$$F_{Bx} = F_B \cos(\beta)$$

$$F_{By} = F_B \sin(\beta)$$

Damit lässt sich unser Gleichungssystem wie folgt umschreiben:

$$F_A \cos(\alpha) + F_B \cos(\beta) = -F$$

$$F_A \sin(\alpha) - F_B \sin(\beta) = 0$$

Einsetzen des linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten in die Lösung (Formel 1.4 und Formel 1.5) führt auf die gesuchten Stabkräfte:

$$F_A = \frac{\begin{vmatrix} -F & \cos(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \end{vmatrix}} = -\frac{F \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)}$$

$$F_B = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -F \\ \sin(\alpha) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \end{vmatrix}} = -\frac{F \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)}$$

Die *Cramersche* Gleichung hat den Nachteil etwas abstrakt zu sein und setzt die Kenntnis von Determinanten voraus. Man muss sie jedoch nicht zwingend zur Lösung von linearen Gleichungen verwenden. Alternativ sind folgende **Lösungsmethoden** für lineare Gleichungssysteme zu nennen:

- Additionsverfahren,
- Einsetzverfahren,

- Gleichsetzungsverfahren,
- grafische Verfahren.

In unserem Überblick beginnen wir mit dem **Additionsverfahren**, das wiederum am einfachsten Fall des Systems (Formel 1.1, Formel 1.2 und Formel 1.3) erläutert wird. Der Trick besteht darin, durch Multiplikation einer Gleichung mit einem geeigneten Faktor und anschließender Addition beider Formeln, eine der Unbekannten zu eliminieren:

$$\left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ c x + d y = B \end{array} \right\} \cdot \left(-\frac{a}{c} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ -a x - \frac{d a}{c} y = -\frac{a B}{c} \end{array} \right\} \Bigg|_+ \\ \Rightarrow y \left(b - \frac{d a}{c} \right) = A - \frac{a B}{c} \Rightarrow y = \frac{A c - B a}{b c - a d}$$

Man setzt diese Lösung nun in eine der beiden ursprünglichen Formeln ein und ermittelt die verbliebene Unbekannte:

$$x = \frac{1}{a} (A - b y) = \frac{1}{a} \left(A - \frac{A b c - B a b}{b c - a d} \right) = \frac{B b - A d}{b c - a d}$$

Als nächstes diskutieren wir eine beliebige „Fußgängermethode“ zur Lösung linearer Gleichungssysteme, das **Einsetzverfahren**, bei dem eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst wird, die man dann in die verbliebenen Formeln einsetzt, und dies so lange wiederholt, bis nur noch eine Unbekannte übrigbleibt, nach der man umstellt:

$$\begin{aligned} a x + b y &= A \Rightarrow x = \frac{1}{a} (A - b y) \\ c x + d y &= B \Rightarrow \frac{c}{a} (A - b y) + d y = B \\ \Rightarrow y &= \frac{B a - A c}{a d - b c} \\ \Rightarrow x &= \frac{B a - A c}{a d - b c} \end{aligned}$$

Es folgt das **Gleichsetzungsverfahren**, bei dem zunächst beide Formeln nach derselben Unbekannten aufgelöst werden. Beide Ergebnisse setzt man dann gleich, um daraus dann die verbliebene Unbekannte zu ermitteln. Bei mehr als zwei Unbekannten ist dies entsprechend zu wiederholen:

$$\left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ c x + d y = B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{a} (A - b y) \\ x = \frac{1}{c} (B - d y) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} (A - b y) = \frac{1}{c} (B - d y) \\ \Rightarrow y = \frac{B a - A c}{a d - b c}$$

$$\Rightarrow x = \frac{B a - A c}{a d - b c}$$

Zum Schluss folgen **grafische Verfahren**, die eine recht anschauliche Interpretation der Lösung von Gleichungssystemen zulassen, allerdings nur in zwei Dimensionen, d. h. nur für zwei Unbekannte praktisch durchgeführt werden können. Man interpretiert die Formeln (Formel 1.1, Formel 1.2 und Formel 1.3) einfach als Geradengleichungen in der Ebene:

$$\left. \begin{array}{l} a x + b y = A \\ c x + d y = B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -\frac{a}{b}x + \frac{A}{b} \\ y = -\frac{c}{d}x + \frac{B}{d} \end{array}$$

Je nach Größenverhältnissen der Steigungen a/b , c/d und der Achsenabschnitte A/b , B/d kann es nun geschehen, dass beide Geraden sich in einem Punkt schneiden (Bild 1.13, erste und dritte Skizze), zusammenfallen (vierte Skizze) oder parallel zueinander sind (zweite Skizze), d. h., dass eine eindeutige, unendlich viele oder keine Lösung existieren.

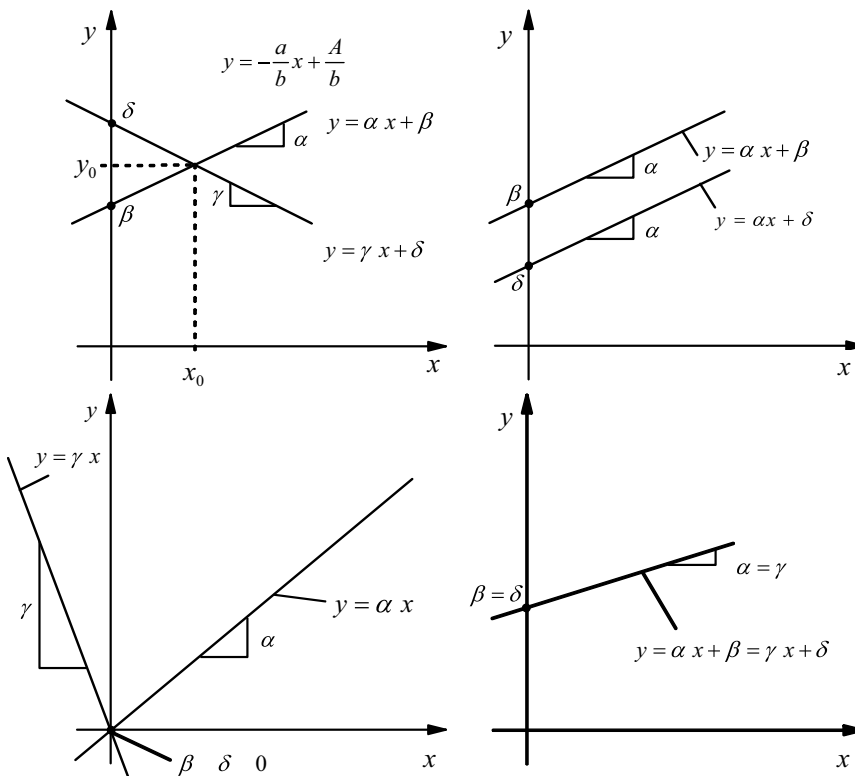


Bild 1.13 Zur zeichnerischen Interpretation der Lösungsmenge zweier linearer Gleichungen

Anders gesagt: Das lineare Gleichungssystem für zwei Unbekannte lässt sich anschaulich als Schnitt zweier Geraden in der (x,y) -Ebene interpretieren, die

- sich in einem Punkt schneiden (der Schnittpunkt repräsentiert die gesuchte Lösung (x_0, y_0));
- parallel zueinander sind (dann existiert keine Lösung);
- sich im Koordinatenursprung schneiden (in diesem Fall existiert nur die triviale Lösung $(x_0 = 0, y_0 = 0)$);
- aufeinander fallen (dann existieren unendlich viele Lösungen und man spricht von linear abhängigen Formeln, die vielfache voneinander sind).

Damit wären wir bei einem weiteren Thema, nämlich der Existenz von Lösungen und der Eindeutigkeit derselben, wenn es sich um mehr als zwei Unbekannte handelt. Man kann zeigen, dass diese Frage mit dem Verschwinden der Nennerdeterminante aus der allgemeinen Lösung (Formel 1.6) zusammenhängt, denn möglicherweise wird die Lösung für verschwindenden Nenner singulär. Zur genauen Beantwortung dieses Problems sei jedoch auf die mathematische Literatur verwiesen.

1.2.2 Trigonometrisches Grundwissen

Problemstellung

Wie sind die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck definiert? Wie lauten der Sinus- und der Kosinussatz und wozu lassen sich beide vorzugsweise verwenden?

Lösung

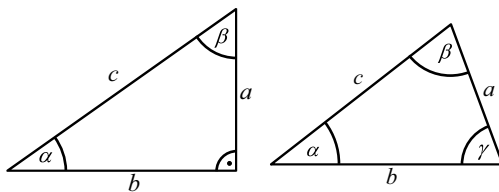


Bild 1.14 Rechtwinkliges und beliebiges Dreieck mit Bezeichnungen

Da es in der Technischen Mechanik um die zuverlässige Auslegung von Konstruktionen geht, spielt die Geometrie derselben eine wesentliche Rolle. Aber auch die Grundgröße der Mechanik, nämlich die Kraft, wird oft in bestimmten Richtungen in ihre Komponenten zerlegt. Bei der Rechnung wird daher immer wieder von geometrischen Grundregeln Gebrauch gemacht, die hier zusammengestellt werden. Wir betrachten

zunächst den Fall eines rechtwinkligen Dreiecks (vgl. Bild 1.14) und erinnern an Formeln wie den Lehrsatz des *Pythagoras*:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

an die Gleichung für die Fläche des **rechtwinkligen** Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} a b$$

und an die Definitionsgleichungen für die trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$

Als nächstes interessieren Beziehungen, die für ein **beliebiges** Dreieck gelten, wie der **Sinussatz**:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (1.7)$$

und der **Kosinussatz**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma) \quad (1.8)$$

Die Frage ist, wann der Sinus- und wann der Kosinussatz nutzbringend eingesetzt werden sollten. Aus Formel 1.8 erkennt man, dass der Kosinussatz von Vorteil ist, falls drei Seiten gegeben sind und ein Winkel gesucht ist, was in Bild 1.15 links angedeutet ist:

$$\gamma = \arccos \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 a b} \right)$$

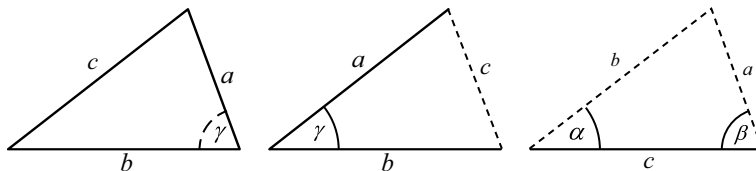


Bild 1.15 Anwendungen des Sinus- und Kosinussatzes

Auch hilft er weiter, wenn zwei Seiten zwischen einem Winkel gegeben sind und die dritte Seite gesucht ist (Bild 1.15, Mitte):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma)}$$

Hingegen ist der Sinussatz (Formel 1.7) von Vorteil, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben und die beiden anderen Seiten gesucht sind (Bild 1.15, rechts):

$$a = c \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

$$b = c \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

1.2.3 Ein zentrales Kräftesystem: Pendelstützen mit im Knoten angreifenden Lasten

Problemstellung

Zwei Pendelstäbe werden im gemeinsamen Knoten durch die Kräfte F_1 bis F_4 wie in Bild 1.16 dargestellt belastet. Ermittle mithilfe der angegebenen Werte die in den Stäben wirkenden Kräfte. Dabei sind zeichnerische und rechnerische Lösungswege (Polygonzugsverfahren mit Dreiecksberechnung sowie Aufspalten der Kraftkomponenten in einem rechtwinkligen kartesischen System) zu üben. Gegeben sind: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\delta = 60^\circ$, $\varepsilon = 30^\circ$, $|F_1| = 40 \text{ kN}$, $|F_2| = 30 \text{ kN}$, $|F_3| = 50 \text{ kN}$ und $|F_4| = 20 \text{ kN}$.

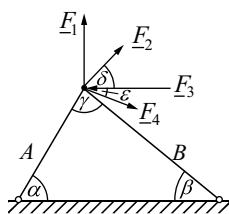


Bild 1.16

Pendelstäbe unter am Knoten angreifenden Lasten

Lösung

Bevor an die eigentliche Lösung des Problems gegangen wird, sei bemerkt, dass sich der noch fehlende Winkel γ aus der Winkelsumme am Dreieck bestimmen lässt:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 80^\circ$$

Wir erläutern zuerst die **rein zeichnerische Lösung**, bei der es sich empfiehlt, das folgende Schema einzuhalten. Gemäß der Additionsregel für Vektoren bestimmt man als erstes die Resultierende der Kräfte $\underline{F}_1 - \underline{F}_4$. Dies ist in Bild 1.17 (links) qualitativ erläutert. Beachte, dass wenn man sich einen Kräftemaßstab definiert und die vorgegebenen Kräfte und Winkel mit Geodreieck sauber einträgt, es ohne große Rechnung gelingt, die gesuchten Stabkräfte abzulesen. Dabei ist wesentlich, die Resultierende $\underline{F}_R$ in Richtung der Stabachsen A und B korrekt zu zerlegen. Das resultierende Kräfteck muss geschlossen sein (Kräftegleichgewicht). Hieraus lässt sich die Richtung und Größe der Kräfte in den Stäben, also $\underline{F}_A$ und $\underline{F}_B$, bestimmen (vom Knoten weg-zeigende Kraft = Zugkraft, in den Knoten hinein-zeigende Kraft = Druckkraft). Auch dies ist qualitativ in Bild 1.17 (rechts) dargestellt.

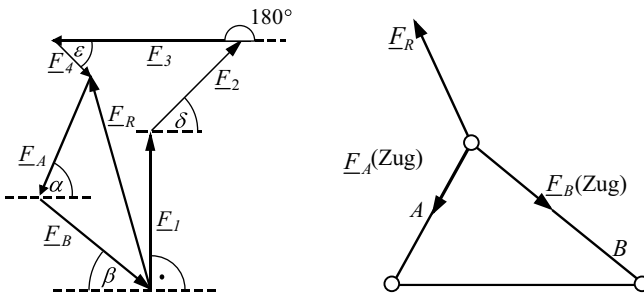


Bild 1.17 Zur zeichnerischen Lösung des Problems

Ein bei vielen angreifenden Kräften etwas mühseliger anzuwendendes, rechnerisches Verfahren ist das **Polygonzugsverfahren**. Hierbei werden die Kräfte sukzessive zueinander addiert. Bei jedem Schritt wird also eine neue Dreiecksberechnung nötig. Im vorliegenden Fall ist wie folgt vorzugehen. Zunächst wird die aus den Kräften $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ resultierende Kraft $\underline{F}_{12}$ bestimmt: Bild 1.18 (erstes Bild).

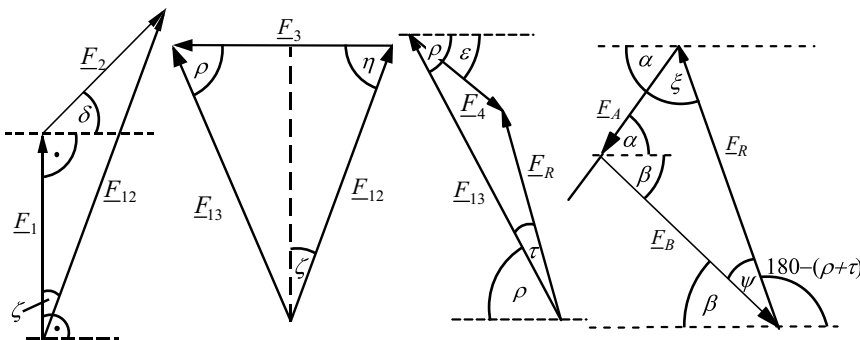


Bild 1.18 Berechnung von Kraftgrößen per Dreieckskonstruktion

Mit dem Kosinussatz ermittelt man ihre Länge:

$$|\underline{F}_{12}| = \sqrt{|\underline{F}_1|^2 + |\underline{F}_2|^2 - 2 |\underline{F}_1| |\underline{F}_2| \cos(90^\circ + \delta)} = 67,7 \text{ kN}$$

und der Sinussatz hilft, den Richtungswinkel festzulegen:

$$\frac{|\underline{F}_2|}{\sin(\zeta)} = \frac{|\underline{F}_{12}|}{\sin(90^\circ + \delta)} \Rightarrow \sin(\zeta) = \frac{|\underline{F}_2|}{|\underline{F}_{12}|} \sin(90^\circ + \delta) \Rightarrow \zeta = 12,8^\circ$$

Nun wird die resultierende Kraft $\underline{F}_{13}$ aus den Kräften $\underline{F}_{12}$ und $\underline{F}_3$ ermittelt: Bild 1.18 (zweites Bild). Mit dem Kosinussatz ermittelt man wieder die Länge:

$$|\underline{F}_{13}| = \sqrt{|\underline{F}_{12}|^2 + |\underline{F}_3|^2 - 2 |\underline{F}_{12}| |\underline{F}_3| \cos(90^\circ - \zeta)} = 74,7 \text{ kN}$$

und der Sinussatz hilft auch diesmal, den Richtungswinkel festzulegen:

$$\frac{|\underline{F}_{13}|}{\sin(\eta)} = \frac{|\underline{F}_{12}|}{\sin(\rho)} \Rightarrow \sin(\rho) = \frac{|\underline{F}_{12}|}{|\underline{F}_{13}|} \sin(90^\circ - \zeta) = 0,884 \Rightarrow \rho = 62,1^\circ$$

Nun wird die Gesamtresultierende $\underline{F}_R$ ermittelt (vgl. Bild 1.18, drittes Bild) und zwar wieder mit dem Kosinussatz:

$$|\underline{F}_R| = \sqrt{|\underline{F}_{13}|^2 + |\underline{F}_4|^2 - 2 |\underline{F}_{13}| |\underline{F}_4| \cos(\rho - \varepsilon)} = 58,7 \text{ kN}$$

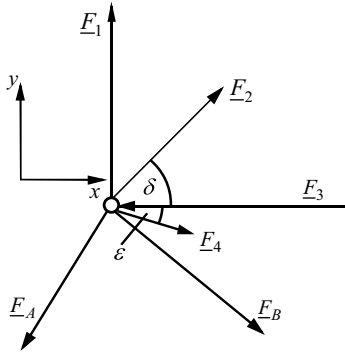
und dem Sinussatz:

$$\frac{|\underline{F}_4|}{\sin(\tau)} = \frac{|\underline{F}_R|}{\sin(\rho - \varepsilon)} \Rightarrow \sin(\tau) = \frac{|\underline{F}_4|}{|\underline{F}_R|} \sin(\rho - \varepsilon) \Rightarrow \tau = 10,4^\circ$$

Nun werden in einem letzten Schritt die gesuchten Stabkräfte $\underline{F}_A$ und $\underline{F}_B$ ermittelt: Bild 1.18 (viertes Bild). Es muss sich ein geschlossenes Krafteck zwischen $\underline{F}_A$, $\underline{F}_B$ und $\underline{F}_B R$ ergeben, um Gleichgewicht zu garantieren. Das erklärt die gewählte Pfeilspitzenrichtung bei $\underline{F}_A$ und $\underline{F}_B$. Zweimalige Anwendung des Sinussatzes liefert:

$$|\underline{F}_A| = \frac{\sin(\psi)}{\sin(\alpha + \beta)} |\underline{F}_R| = 32,0 \text{ kN}$$

$$|\underline{F}_B| = \frac{\sin(\xi)}{\sin(\alpha + \beta)} |\underline{F}_R| = 43,9 \text{ kN}$$

**Bild 1.19**

Berechnung von Kraftgrößen mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems

Die wohl schlagkräftigste Methode zur rechnerischen Bestimmung von Kräften ist die Berechnung mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems. Hierzu schneiden wir am Knoten frei, indem wir die beiden unbekannten Stabkräfte $\underline{F}_A$ und $\underline{F}_B$ zusätzlich zu den vorgegebenen Kräften wie in Bild 1.19 gezeigt ansetzen. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung ergibt:

$$\sum F_x = 0: \quad F_2 \cos(\delta) + F_4 \cos(\varepsilon) - F_3 + F_B \cos(\beta) - F_A \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_2 \sin(\delta) - F_4 \sin(\varepsilon) + F_1 - F_B \sin(\beta) - F_A \sin(\alpha) = 0$$

Dies sind zwei Formeln für die beiden Unbekannten, die wir per Einsetzungsverfahren auflösen, um folgendes Endergebnis zu erhalten:

$$F_A = -32,00 \text{ kN}$$

$$F_B = 43,97 \text{ kN}$$

1.2.4 Zentrale Kräftegruppe: Öse

Problemstellung

An einer Öse greifen die Kräfte $F_1 = 2,5 \text{ kN}$ und $F_2 = 2,0 \text{ kN}$ an. Die Wirkungsrichtung der Kraft F_2 wird durch den Winkel $\beta = 30^\circ$ beschrieben. In welcher Richtung α muss die Kraft F_1 an der Öse angreifen, damit an der Belastungsstelle nur eine vertikale Kraft wirkt? Wie groß sind die Reaktionskräfte in der Öse?

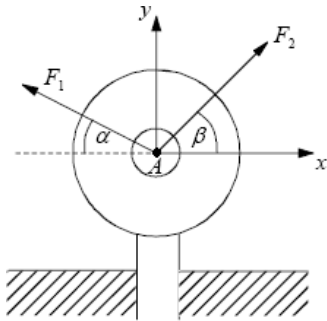


Bild 1.20
Öse in der Wand

Lösung

Die Lösung erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst der Freischnitt. Er ist in Bild 1.21 zu sehen. Die Öse wurde als zweiwertiges Lager interpretiert, und die dazugehörigen Freischnittkräfte wurden in ihrer Richtung willkürlich im Punkt A angetragen. Es handelt sich also in toto um eine zentrale Kräftegruppe, d. h. alle Kräfte gehen durch einen Punkt, und es gibt keine Momentenwirkung.

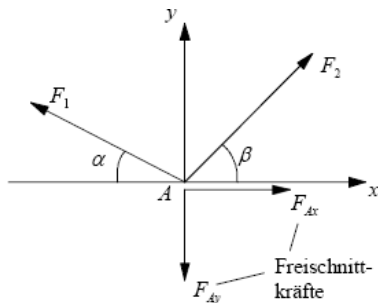


Bild 1.21
Freischnitt

Als nächstes wird der Freischnitt formelmäßig ausgewertet. Es muss Kräftegleichgewicht herrschen und die Summe aller Kräfte in horizontaler bzw. in vertikaler Richtung verschwinden:

$$\sum F_x = 0: -F_1 \cos(\alpha) + F_2 \cos(\beta) + F_{Ax} = 0 \quad (1.9)$$

$$\sum F_y = 0: F_1 \sin(\alpha) + F_2 \sin(\beta) - F_{Ay} = 0 \quad (1.10)$$

Laut Aufgabenstellung ist gefordert, dass als Reaktion in der Öse nur vertikale Kräfte (also Kräfte in y-Richtung) wirken sollen, also:

$$F_{Ax} = 0$$

Mithin folgt aus Formel 1.9:

$$-F_1 \cos(\alpha) + F_2 \cos(\beta) = 0$$

Wir berechnen nun den Neigungswinkel wie folgt (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet):

$$\cos(\alpha) = \frac{F_2}{F_1} \cos(\beta) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{F_2}{F_1} \cos(\beta) \right)$$

Hieraus ermitteln wir den Winkel im Bogenmaß sowie in Grad:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{2 \text{ kN}}{2,5 \text{ kN}} \cos(30^\circ) \right) = \cos^{-1}(0,69) \approx 0,81 = 0,81 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 46^\circ$$

Zum Abschluss wird noch die Reaktionskraft in y-Richtung mithilfe von Formel 1.10 ermittelt:

$$F_{Ay} = F_1 \sin(\alpha) + F_2 \sin(\beta) = [2,5 \sin(46^\circ) + 2 \sin(30^\circ)] \text{ kN} = 2,8 \text{ kN}$$

1.2.5 Zentrale Kräftegruppe an der Umlenkrolle

Problemstellung

Wie in Bild 1.22 zu sehen, wird ein Gewicht $G = 1 \text{ kN}$ an einem über eine Rolle gelegten Seil und zwei Pendelstützen (1 und 2) im Gleichgewicht gehalten. Mithilfe geeigneter Freischnitte und Gleichgewichtsbedingungen sind die Kräfte im Seil und in den Pendelstützen zu ermitteln. Die Gewichte der Rolle, der Stäbe und des Seils sollen in der Analyse vernachlässigt werden.

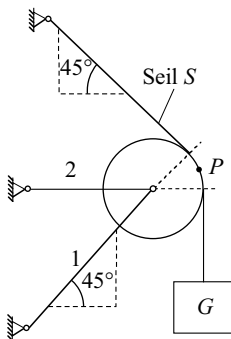


Bild 1.22

Gewicht mit Seil über durch Pendelstützen gehaltener Umlenkrolle

Lösung

Es werden zuerst sukzessive das Gewicht, das aufliegende Seil und die Rolle freigeschnitten: Bild 1.23.

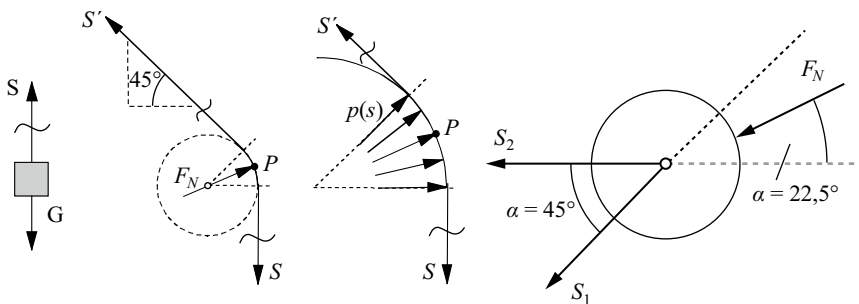


Bild 1.23 Freischnitte am Gewicht, am Seil und an der Rolle

Beim Seil ist zu beachten, dass die senkrecht zum Rollenrand stehenden Druckkräfte symmetrisch sind und im Punkte P zu einer dem Winkel $\alpha/2 = 45^\circ/2 = 22,5^\circ$ stehenden Gesamtnormalkraft zusammengefasst werden können:

$$\int_S p_N(s) \, ds = F_N$$

Wäre die Druckkraftverteilung nämlich nicht symmetrisch, so ergäbe sich ein Drehmoment, das die Rolle zum Drehen anregt und gerade dieses soll ja nicht geschehen. Beim Freischnitt der Pendelstützen wurde angenommen, dass sie unter Zug stehen. Ob das so ist, wird die sich nun anschließende Rechnung über die Gleichgewichtsbedingungen zeigen. Da es sich bei allen drei freigeschnittenen Teilsystemen um zentrale Kräftegruppen handelt, genügt es, lediglich das Kräftegleichgewicht zu betrachten. Für das freigeschnittene Seil mit angehängtem Gewicht ergibt sich:

$$\sum F_y = 0: S - G = 0 \quad \Rightarrow \quad S = G$$

Beim freigeschnittenen Seil gibt es zwei unabhängige Krafrichtungen:

$$\sum F_x = 0: -S' \cos(\alpha) + F_N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (1.11)$$

$$\sum F_y = 0: S' \sin(\alpha) + F_N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - S' = 0 \quad (1.12)$$

Wir multiplizieren die erste dieser Formeln mit $\sin(\alpha)$ und die zweite mit $\cos(\alpha)$. Sodann werden beide Ergebnisse addiert, womit es gelingt, S' zu eliminieren. Es verbleibt:

$$F_N \left[\sin(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] = S \cos(\alpha)$$

wofür man mit dem Additionstheorem:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

auch schreiben darf:

$$F_N = S \frac{\cos(\alpha)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = G \frac{\cos(\alpha)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = 0,765 \, G$$

Dieses Ergebnis wird nun in Formel 1.11 eingesetzt um die noch unbekannte Seilkraft S zu errechnen. Man beachte, dass diese nicht gleich S angesetzt wurde. Dieses kommt nun heraus und man darf sagen, dass an der reibungsfreien Rolle das Seil die Kraft einfach umlenkt:

$$S' = S \frac{\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \cos(\alpha)} = S$$

Nun wenden wir uns noch der freigeschnittenen Rolle zu und finden, dass:

$$\sum F_x = 0: -S_2 - F_N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - S_1 \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum F_y = 0: -S_1 \sin(\alpha) - F_N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

Es gelingt hieraus, die Kräfte in den Pendelstützen zu ermitteln:

$$S_1 = -F_N \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\alpha)} = -G \frac{\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\alpha) \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = -G \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = (1 - \sqrt{2}) \, G = -0,414 \, G$$

$$\begin{aligned} S_2 &= -F_N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - S_1 \cos(\alpha) = -F_N \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) \right] \\ &= -F_N \left[\frac{\sin(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \right] \\ &= -G \frac{\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \sin(\alpha)} = -G (\sqrt{2} - 1) \approx -0,414 \, G \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Stäbe als Zugstäbe angesetzt wurden, wie im Freischnitt zu sehen ist. Die Rechnung zeigt jedoch, dass es sich um Druckstäbe handelt (negative Vorzeichen).

1.2.6 Zentrale Kräftegruppe: Ozeandampfer im Schlepp

Problemstellung

Ein Ozeandampfer wird von drei Schleppern gezogen. In den drei Seilen wirkt die gleiche Zugkraft $F = 20 \, \text{kN}$. Die Wirkungsrichtungen der Kräfte werden durch die Winkel $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ beschrieben. Welche resultierende Zugkraft F_A wirkt auf den Ozeandampfer?

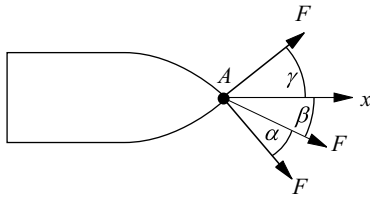


Bild 1.24
Ozeandampfer

Lösung

Wir beginnen mit einem Freischnitt im Punkt A, wobei die Schnittkrafttrichtung willkürlich angenommen wird, etwa so wie in Bild 1.25 gezeigt.

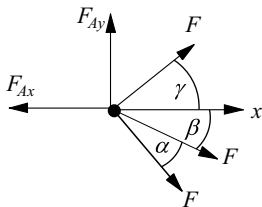


Bild 1.25
Freischnitt

Es handelt sich um eine zentrale Kräftegruppe und entsprechend schreiben wir die Gleichgewichtsbedingungen wie folgt:

$$\sum F_x = 0: -F_{Ax} + F \cos(\gamma) + F \cos(\beta) + F \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{Ay} + F \sin(\gamma) - F \sin(\beta) - F \sin(\alpha + \beta) = 0$$

Mithin ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= F[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)] \\ &= 20 \text{ kN}[\cos(25^\circ) + \cos(10^\circ) + \cos(20^\circ)] = 56,62 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= F[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta) - \sin(\gamma)] \\ &= 20 \text{ kN}[\sin(25^\circ) + \sin(10^\circ) - \sin(20^\circ)] = 5,09 \text{ kN} \end{aligned}$$

Der Betrag der Schleppkraft ergibt sich somit zu:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 56,85 \text{ kN}$$

1.2.7 Gewichte an Pendelstützen mit angreifender Kraft

Problemstellung

Aus den drei in Bild 1.26 dargestellten gewichtslosen Pendelstäben 1, 2, 3 der Länge l wird ein Gelenkviereck gebildet. Die Gelenke sind reibungsfrei. An den Gelenken C und D hängen die Gewichte G_1 und G_2 . Durch eine im Punkt D angreifende Kraft P mit horizontaler Wirkungsline soll erreicht werden, dass die Stäbe 1 und 2 um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt sind. Man berechne die dazu notwendige Kraft P sowie alle Stabkräfte. Gegeben sind $\alpha = 45^\circ$, $l = 1$ m, $G = 100$ N, $G_1 = G$ und $G_2 = 2G$.

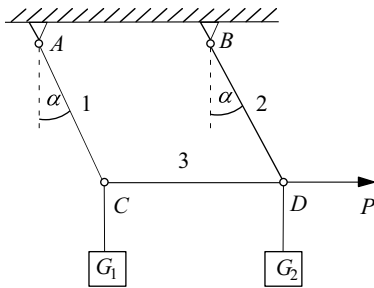


Bild 1.26

Gewichte an Pendelstützen mit angreifender Kraft P

Lösung

Zur Lösung wird zunächst freigeschnitten und zwar im Knoten C und im Knoten D , so wie in Bild 1.27 dargestellt. Es resultiert in beiden Fällen eine zentrale Kräftegruppe. Man beachte, dass die Kräfte in den Pendelstützen als vom Knoten wegweisend angesetzt wurden, also die Pendelstützen als Zugstäbe angenommen wurde, wie man es auch anschaulich erwarten würde.

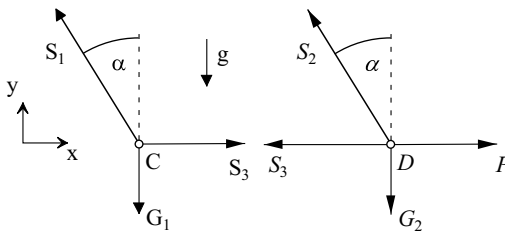


Bild 1.27 Freischnitt in den Knoten C und D

Es wird nun Kräftegleichgewicht für beide Knoten formuliert. Dabei ist es gleichgültig bei welchem Freischnitt man beginnt, denn bei beiden sind jeweils zwei Unbekannte im Spiel, die man hoffen kann mit den zugehörigen beiden Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_1 \sin(\alpha) + S_3 = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad S_1 \cos(\alpha) - G_1 = 0$$

Auflösen nach S_1 und S_3 ergibt unter Beachtung von $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$S_1 = \frac{G_1}{\cos(\alpha)} = \frac{200}{\sqrt{2}} \text{ N}$$

$$S_3 = S_1 \sin(\alpha) = \frac{G_1}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) = G_1 \tan(\alpha) = 100 \text{ N}$$

Man beachte, dass S_1 und S_3 positiv sind, d. h. die Kräfte wirken tatsächlich in der im Freischnitt eingezeichneten Richtung. Kräftegleichgewicht im Knoten D erfordert nun, dass:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_2 \sin(\alpha) - S_3 + P = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad S_2 \cos(\alpha) - G_2 = 0$$

Wir lösen nach den verbliebenen Unbekannten auf, also nach S_2 sowie nach P :

$$S_2 = \frac{G_2}{\cos(\alpha)} = \frac{400}{\sqrt{2}} \text{ N}$$

$$P = S_2 \sin(\alpha) + S_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + S_3 = 200 \text{ N} + 100 \text{ N} = 300 \text{ N}$$

1.3 Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers

1.3.1 Mehrscheibensystem unter Eigengewicht I

Problemstellung

Das dargestellte Mehrscheibensystem (Bild 1.28) ist durch Eigengewichte wie dargestellt belastet und wird durch einen Pendelstab im Gleichgewicht gehalten. Es ist soweit wie nötig freizuschneiden und die Stützkkräfte sind in den Punkten A bis E zu berechnen. Für die Rechnung ist bei allen Lagerfugen Reibungsfreiheit anzunehmen.

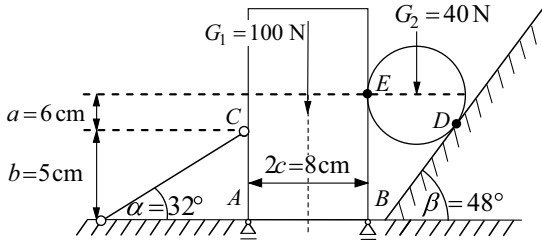


Bild 1.28 Mehrscheibensystem unter Eigenlast

Lösung

Beim Freischneiden (vgl. Bild 1.29) des Untersystems 1 (Walze) ist zu beachten, dass die Abstützung zur Wand bzw. zum Klotz in Normalenrichtung erfolgt, d. h. die Schnittkräfte F_D und F_E zeigen beide radial in Richtung des Zentrums der Walze. Eine umgekehrte Kraftrichtung anzunehmen wäre unsinnig, denn schließlich muss die Kreisscheibe abgestützt werden. Aber selbst eine falsch gewählte Pfeilrichtung würde sich in der Rechnung durch ein negatives Vorzeichen der Stützkraft bemerkbar machen. Die beiden einwertigen Lager des Untersystems 2 (Schrank) führen aufgrund der zugelassenen horizontalen Gleitrichtung auf vertikal gerichtete Kraftpfeile F_A und F_B . Die Pendelstütze bei C hingegen führt auf eine in Achsrichtung weisende Kraft F_C , da längs ihrer Achse keine weiteren Kräfte eingeleitet werden. Bemerkenswert ist, dass die Kraft F_E am Klotz in die umgekehrte Richtung als bei der Kreisscheibe zeigt. Dies ist nötig, damit sich die Schnittkräfte beim Zusammenfügen der Systeme wieder aufheben (Prinzip „actio = reactio“).

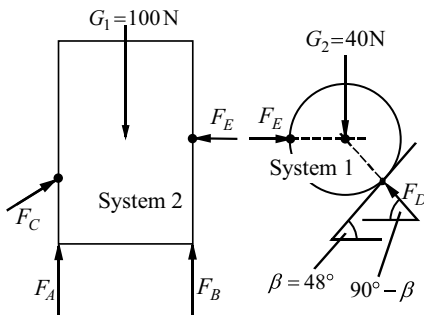
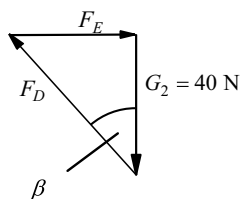


Bild 1.29

Freischnitt des Mehrscheibensystems

Erst nach Freischneiden darf mit der Berechnung der Schnittkräfte begonnen werden. Fünf Unbekannte gilt es zu ermitteln, nämlich F_A , F_B , F_C , F_D und F_E . Auf den ersten Blick eine nicht unerhebliche Zahl. Aber da es sich um zwei Systeme handelt, gibt es aber auch eine entsprechende Anzahl an Gleichgewichtsbedingungen. Beim Untersystem 1 handelt es sich um ein zentrales Kräftesystem, denn alle Kräfte gehen durch einen zentralen Punkt, eben durch das Zentrum der Walze. Für einen solchen Fall ist

lediglich zu garantieren, dass die Kräftesummen in horizontaler und in vertikaler Richtung verschwinden. Die Momentenbedingung hingegen ist identisch erfüllt. Mit- hin gewinnt man nur zwei Formeln zur Bestimmung der Unbekannten. Hingegen trägt das Untersystem 2 mit drei Gleichgewichtsbedingungen bei. Es handelt sich also insgesamt um ein statisch bestimmtes System, d. h., mit den Gleichgewichtsbedingun- gen der Statik allein kommt man bereits zur Lösung.

**Bild 1.30**

Zeichnerische Lösung des Problems

Wir beginnen mit der Auswertung für das Untersystem 1. Da sich die Kräfte in einem Punkt schneiden, ist es günstig, die Methode des Kräfteparallelogramms bei der Lösung einzusetzen: Bild 1.30. Die Regeln für Winkelfunktionen führen auf:

$$F_E = G_2 \tan(90^\circ - \beta) = 44,4 \text{ N} \quad (1.13)$$

Und weiter:

$$F_D = \frac{G_2}{\cos(90^\circ - \beta)} = 59,8 \text{ N} \quad (1.14)$$

Beachte, dass Zahlenwerte erst zum Schluss eingesetzt wurden, um die Rechnung möglichst weitgehend kontrollierbar zu machen. Selbstverständlich wäre es auch möglich gewesen, bei Wahl einer geeigneten Krafteinheit einen Kräfteplan zu zeich- nen und daraus per Lineal die Zahlenwerte einfach abzulesen. Und genauso gut kann man mit einem kartesischen Koordinatensystem in horizontaler und vertikaler Rich- tung arbeiten:

$$\sum F_x = 0: \quad F_E - F_D \cos(90^\circ - \beta) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_D \sin(90^\circ - \beta) - G_2 = 0$$

woraus mit dem Einsetzverfahren für lineare Gleichungssysteme die Lösung (For- mel 1.13 und Formel 1.14) folgt. Im Untersystem 2 arbeiten wir von Anfang an in karte- sischer Darstellung, um die Gleichgewichtsbedingungen auszuwerten:

$$\sum F_x = 0: \quad F_C \cos(\alpha) - F_E = 0$$

$$\sum M^{(A)} = 0: \quad F_B \cdot 2c - F_C \cos(\alpha) b - G_1 c + F_E (a + b) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -G_1 + F_C \sin(\alpha) + F_A + F_B = 0$$

Man beachte, dass es im vorliegenden Fall gelungen ist, in aufsteigender Reihenfolge der Formeln immer nur eine neue Unbekannte ins Spiel zu bringen, womit die Lösung durch einfaches Umstellen ohne Einsetzverfahren möglich wird. Dies muss nicht bei jedem Problem gelingen, aber aus rechenökonomischen Gründen sollte man stets danach streben, möglichst einfache Formeln für die Unbekannten aufzustellen. Man erhält der Reihe nach:

$$F_C = \frac{F_E}{\cos(\alpha)} = 52,4 \text{ N}$$

$$F_B = F_C \cos(\alpha) \frac{b}{2c} + \frac{G_1}{2} - F_E \frac{a+b}{2c} = 16,7 \text{ N}$$

$$F_A = G_1 - F_C \sin(\alpha) - F_B = 55,5 \text{ N}$$

Die positiven Vorzeichen zeigen an, dass alle Kräfte Richtungen korrekt angesetzt wurden.

1.3.2 Mehrscheibensystem unter Eigengewicht II

Problemstellung

Ein Mehrscheibensystem ist durch sein Eigengewicht wie dargestellt belastet und wird durch ein System von Pendelstäben im Gleichgewicht gehalten. Das System ist soweit wie möglich freizuschneiden und die Stützkkräfte den Punkten A bis D zu berechnen. Bei der Rechnung sind alle Lagerfugen als reibungsfrei anzunehmen.

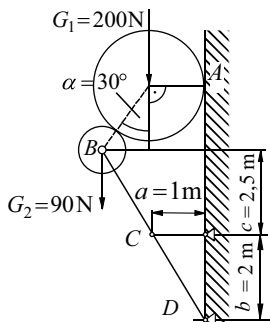


Bild 1.31

Mehrscheibensystem unter Eigenlast

Lösung

Wir beginnen vor der eigentlichen Rechnung mit dem Freischneiden (Bild 1.32). Im Falle der Walze (Untersystem 1) ist zu beachten, dass die Abstützung zur Kreisscheibe bzw. zur Wand in Normalenrichtung erfolgt, d. h., die Schnittkräfte F_A und F_B zeigen auf das Zentrum der Walze. Andere Krafrichtungen als die gezeigten anzunehmen wäre unsinnig, denn schließlich muss die Kreisscheibe abgestützt werden. Was wäre, wenn man irrtümlich die Pfeilspitzen falsch herum antrüge? Nichts, denn diesmal irrt der Schriftsteller *Curt Goetz* und sein Dr. med. *Hiob Prätorius* und der Bazillus der menschlichen Dummheit kommt aufgrund der Mathematik nicht zum Zuge! Eine falsch gewählte Pfeilrichtung macht sich in der Rechnung lediglich durch ein negatives Vorzeichen bemerkbar.

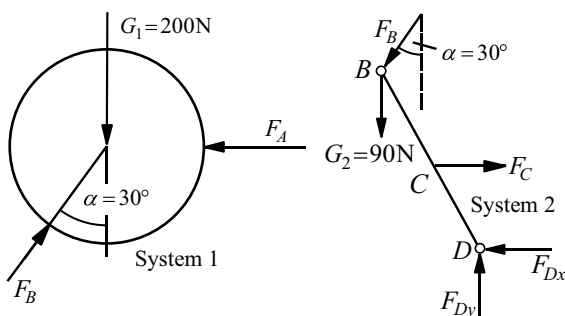


Bild 1.32 Systemfreischnitt

Der Kraftpfeil F_B für die Pendelstütze mit Kreisscheibe (Untersystem 2) zeigt aufgrund des Prinzips „*actio = reactio*“ in die umgekehrte Richtung als bei der Kreisscheibe, und das ist sinnvoll, denn schließlich müssen sich die Schnittkräfte beim Zusammenfügen der Systeme gerade aufheben. Außerdem ist bemerkenswert, dass die Stütze BD nicht rein axial belastet wird, also keine Pendelstütze im eigentlichen Sinne, sondern einen Biegebalken darstellt. Die Kraft F_C ist horizontal einzuleiten, denn die in der Eingangsskizze aber nicht im Freischnitt gezeigte horizontale Pendelstütze bei C ist rein axial belastet. Damit wird es nötig, im Punkt D eine Stützkraft F_D anzubringen, die nicht in Achsenrichtung weist. Erst nach Freischneiden kann mit der Berechnung der Stützkkräfte (oder besser: Schnittkräfte) begonnen werden. Im vorliegenden Fall gibt es fünf Unbekannte, nämlich F_A , F_B , F_C , F_{Dx} und F_{Dy} . Aber es handelt sich auch um zwei Systeme, und es gibt entsprechend viele Gleichgewichtsbedingungen. Beim Untersystem 1 handelt es sich um ein zentrales Kräftesystem, denn alle Kräfte gehen durch einen zentralen Punkt, eben das Zentrum der Walze. In diesem Fall ist lediglich zu garantieren, dass die Kräftesummen in horizontaler und in vertikaler Richtung verschwinden, die Momentenbedingung hingegen ist identisch erfüllt. Mithin gewinnt man zwei Formeln zur Bestimmung der Unbekannten. Hingegen ist das Untersys-

tem 2, d. h. die Stütze BD , mit drei Gleichgewichtsbedingungen auszuwerten. Zusammenfassend darf man sagen, dass die hier gezeigten Systeme statisch bestimmt sind und man mit den Gleichgewichtsbedingungen der Statik allein zur Lösung kommt.

Wir beginnen mit der Auswertung für Untersystem 1. Da sich die Kräfte in einem Punkt schneiden, bietet die zeichnerische Methode des schließenden Kräfte Dreiecks einfach durchzuführen: Bild 1.33.

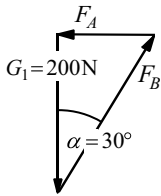


Bild 1.33

Methode des Kräfte Dreiecks

Die Regeln für Winkelfunktionen führen auf:

$$F_A = G_1 \tan(\alpha) = 115 \text{ N} \quad (1.15)$$

Und weiter:

$$F_B = \frac{G_1}{\cos(\alpha)} = 231 \text{ N} \quad (1.16)$$

Beachte, dass Zahlenwerte erst zum Schluss eingesetzt wurden, um die Rechnung möglichst weitgehend kontrollieren zu können. Selbstverständlich wäre es auch möglich gewesen, bei Wahl einer geeigneten Krafteinheit einen Kräfteplan zu zeichnen und daraus per Lineal die Zahlenwerte einfach abzulesen. Und genauso gut kann man mit einem kartesischen Koordinatensystem in horizontaler und vertikaler Richtung arbeiten:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_A + F_B \sin(\alpha) = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_B \cos(\alpha) - G_1 = 0$$

woraus mit dem Einsetzverfahren für lineare Gleichungssysteme die obige Lösung (Formel 1.15 und Formel 1.16) folgt.

Nun wechseln wir zum Untersystem 2, wo wir von Anfang an in kartesischer Darstellung arbeiten, um die Gleichgewichtsbedingungen auszuwerten:

$$\sum F_y = 0: \quad -F_B \cos(\alpha) - G_2 + F_{Dy} = 0$$

$$\sum M^{(D)} = 0: \quad [G_2 + F_B \cos(\alpha)] \frac{a(b+c)}{b} + F_B \sin(\alpha) (b+c) - F_C b = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_B \sin(\alpha) + F_C - F_{Dx} = 0$$

Man beachte, dass es im vorliegenden Fall gelungen ist, in aufsteigender Reihenfolge der Formeln immer nur eine neue Unbekannte ins Spiel zu bringen, womit eine Lösung durch einfaches Umstellen ohne Einsetzverfahren möglich wird. Dies muss nicht bei jedem Problem gelingen, aber aus rechenökonomischen Gründen sollte man stets danach streben, möglichst einfache Formeln für die Unbekannten aufzustellen. Man erhält der Reihe nach:

$$F_{Dy} = G_1 + G_2 = 290 \text{ N}$$

$$F_C = [G_2 + F_B \cos(\alpha)] \frac{a(b+c)}{b^2} + F_B \sin(\alpha) \frac{b+c}{b} = 586 \text{ N}$$

$$F_{Dx} = -F_B \sin(\alpha) + F_C = 471 \text{ N}$$

Die positiven Vorzeichen zeigen, dass alle Kräfte Richtungen korrekt angesetzt wurden.

1.3.3 Scheibe in der Ebene

Problemstellung

Es ist durch Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen nachzuweisen, dass die dreiecksförmige Scheibe mit den Seitenlängen a und b im Gleichgewicht gehalten wird, wenn gilt:

$$\underline{F}_1 = F(\underline{e}_x - \underline{e}_y), \underline{F}_2 = F(-\underline{e}_x - \underline{e}_y), \underline{F}_3 = 2F\underline{e}_y, \underline{M}_0 = 2Fa\underline{e}_z.$$

Die Kräftebilanz ist skalar zu berechnen.

Die Momentenbilanz ist auf drei Arten zu berechnen:

- um den Punkt A : vektorielle Betrachtung.
- um den Koordinatenursprung O skalar: kartesische Aufspaltung der Kräfte.
- um den Punkt B : skalar: Fällen des Lots.

$\underline{M}_0$ und $\underline{F}_1$ sind so zu bestimmen, dass der Körper im Gleichgewicht gehalten wird, wenn gilt $\underline{F}_2 = F(-\sqrt{2}\underline{e}_x - 2\sqrt{2}\underline{e}_y)$ und $\underline{F}_3 = 3\sqrt{2}F\underline{e}_y$.

Geg.: a, b, F

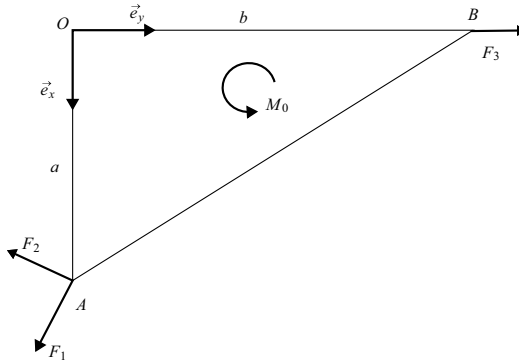


Bild 1.34 Körper in der Ebene unter Last

Lösung

Für die vektorielle Betrachtung werden die Kräfte und Momente in der gegebenen kartesischen Basis dargestellt. In diesem Fall setzt sich die Basis aus den Orthonormalvektoren $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ zusammen. Es lässt sich für den Gleichgewichtszustand allgemein formulieren, dass die Summe aller n Kräfte und m Momente um jeden beliebigen Punkt S im System verschwinden muss:

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \underline{0} \quad (1.17)$$

$$\sum_{i=1}^m \underline{M}_i^{(S)} = \underline{0}$$

Es wird mit der Bilanzierung der Kräfte begonnen.

Um die Summe der Kräfte zu bestimmen, werden die gegebenen Kräfte in Formel 1.17 eingesetzt. Dabei können die Komponenten in x - und y -Richtung auch getrennt betrachtet werden. Da es sich um ein ebenes Problem handelt, haben die Kräfte keinen Anteil in z -Richtung, sodass für diese Komponente die Identität mit Null gewährleistet ist.

$$\sum_{i=1}^3 F_{i,x} = F - F = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i,y} = 2F - F - 2F = 0$$

Für die Kräftebilanz sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Zur Prüfung des Momentengleichgewichts kann zwischen drei Methoden unterschieden werden. Grundsätzlich sind alle drei Betrachtungsweisen ähnlicher Natur und gleichwertig; alle Vorgehensweisen sollen jedoch aufgezeigt werden, um ein Verständnis dafür zu vermitteln, wann welche Methode am besten geeignet ist.

Zunächst wird das Moment im Punkt A mithilfe der vektoriellen Betrachtung unter Verwendung des Kreuzproduktes bestimmt. Hierfür sind die Abstandsvektoren jedes Angriffspunktes zum Punkt A aufzustellen und mit den jeweiligen Kraftvektoren im Kreuzprodukt zu multiplizieren. Wenn eine Kraft direkt im Punkt A angreift, entspricht der Abstandsvektor dem Nullvektor, wodurch das resultierende Moment zu null wird.

Da das Kreuzprodukt antikommutativ ist, ist darauf zu achten, dass die folgende Konvention eingehalten wird: Der Hebelarm zeigt vom Bezugspunkt S zum Kraftangriffspunkt T und wird bei der Berechnung des Kreuzproduktes an erster Stelle verwendet.

$$\underline{M}^{(S)} = \underline{r}_{ST} \times \underline{F}_T$$

$$\begin{aligned} \sum \underline{M}^{(A)} &= \underline{0} \times \underline{F}_1 + \underline{0} \times \underline{F}_2 + \underline{r}_{AB} \times \underline{F}_3 + \underline{M}_0 \\ &= \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2Fa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2Fa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2Fa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auch hier zeigt sich, dass die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.

Das Momentengleichgewicht im Punkt O wird mithilfe der kartesischen Aufspaltung der Kräfte und der Aufstellung der entsprechenden Hebelarme, wie in Bild 1.35 dargestellt, untersucht. Da es sich um ein ebenes Problem handelt, muss nur die z-Komponente des Moments betrachtet werden.

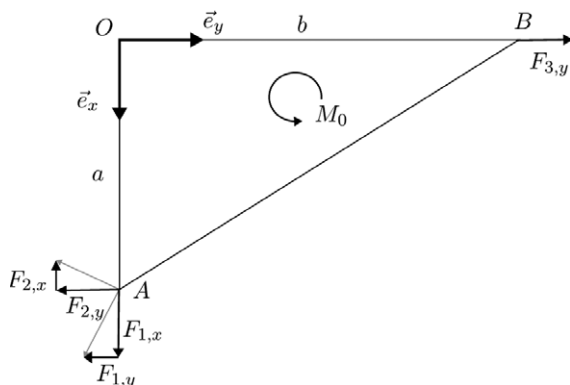


Bild 1.35 Kartesische Aufspaltung der Kräfte in A

Kraftkomponenten, deren Wirkungslinien durch den betrachteten Punkt verlaufen, haben keinen Hebelarm und tragen daher nicht zum Momentengleichgewicht bei, hier $F_{1,x}$, $F_{2,x}$, $F_{3,y}$. Weiterhin ist für jede Kraftkomponente zu prüfen, ob sie das System im positiven oder negativen Drehsinn drehen würde. Danach wird das Vorzeichen der Gleichung bestimmt.

$$\sum M_z^{(O)} = -F_{1,y} \cdot a - F_{2,y} \cdot a + M_0 = -Fa - Fa + 2Fa = 0$$

Zuletzt soll gezeigt werden, dass auch bezüglich des Punktes B ein Momentengleichgewicht vorliegt. Dazu werden die Kräfte in A nicht aufgeteilt, sondern es wird geometrisch bestimmt, welche Hebelarme die jeweiligen Kräfte haben.

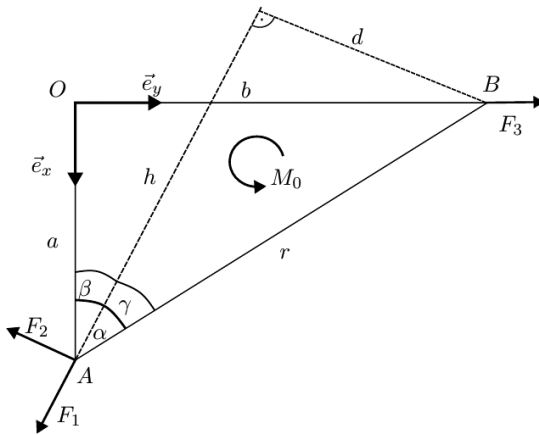


Bild 1.36 Geometrische Bestimmung der Hebelarme

Wie in Bild 1.36 zu sehen ist, hat die Kraft $\underline{F}_1$ den Hebelarm d bezüglich des Punktes B und $\underline{F}_2$ den Hebelarm h . Dabei werden zur späteren Berechnung die Beträge der Kräfte genutzt, sodass $|\underline{F}_1| = F_1 = \sqrt{2}F$ und $|\underline{F}_2| = F_2 = \sqrt{2}F$. Die Drehrichtung muss genauso wie davor bei jeder Kraft einzeln überprüft und im Vorzeichen des Momentengleichgewichts notiert werden.

$$\sum M_z^{(B)} = F_1 \cdot d - F_2 \cdot h + M_0$$

Die Hebelarme werden mithilfe geometrischer Beziehungen bestimmt. Dazu wird mit dem Satz von Pythagoras die Hilfsgröße $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ eingeführt. Es kann weiterhin festgestellt werden, dass:

$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$\sin \gamma = \frac{d}{r}$$

Der Winkel β ist ein Wechselwinkel mit dem Winkel der Kraft F_1 . Da die Komponenten dieser Kraft gleich groß sind, lässt sich der Winkel zu 45° bestimmen. Für die Hebelarme kann dann mithilfe von Additionstheoremen geschrieben werden:

$$h = \cos(\alpha - \beta) \cdot r = r \cos \alpha \cos \beta + r \sin \alpha \sin \beta = r \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$d = \sin(\alpha - \beta) \cdot r = r \sin \alpha \cos \beta - r \cos \alpha \sin \beta = r \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

Weiterhin kann $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$ gesetzt und in das Momentengleichgewicht eingesetzt werden, sodass r wegfällt und sich wie zu erwarten auch im Punkt B ein Momentengleichgewicht einstellt:

$$\sum M_z^{(B)} = \sqrt{2}F \cdot r \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) - \sqrt{2}F \cdot r \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) + M_0 = 0$$

Über Kräftegleichgewichte in x - und y -Richtung können direkt die Komponenten von $\underline{F}_1$ bestimmt werden, damit Kräftegleichgewicht herrscht:

$$\sum F_x = 0 = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = F_{1,x} - \sqrt{2}F \quad \Rightarrow F_{1,x} = \sqrt{2}F$$

$$\sum F_y = 0 = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = F_{1,y} - 2\sqrt{2}F + 3\sqrt{2}F \quad \Rightarrow F_{1,y} = -\sqrt{2}F$$

$$\underline{F}_1 = F (\sqrt{2}\underline{e}_x - \sqrt{2}\underline{e}_y)$$

Im nächsten Schritt wird $\underline{M}_0$ über eine vektorielle Momentenbilanz bestimmt werden. Als Bezugspunkt eignet sich Punkt A , da sich die Wirkungslinien von $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ kreuzen. Beide Kräfte erzeugen in diesem Punkt kein Moment, da der Hebelarm $\underline{0}$ ist.

Hinweis: Für $\underline{F}_3$ wird ein anderer Wert verwendet.

$$\begin{aligned} \sum \underline{M}^{(A)} &= \underline{r}_{AB} \times \underline{F}_3 + \underline{M}_0 \\ &= \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2}F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sqrt{2}aF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{2}aF \end{pmatrix}$$

1.3.4 Hebebühne unter äußerer Last

Problemstellung

Die dargestellte, aus Stäben und einer Hydraulik bestehende Hebebühne wird mit 5 kN belastet. Gesucht ist die Presskraft der Hydraulik P sowie alle Auflager- und Gelenkkräfte. Zu diesem Zweck soll soweit wie nötig freigeschnitten und alle relevanten Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

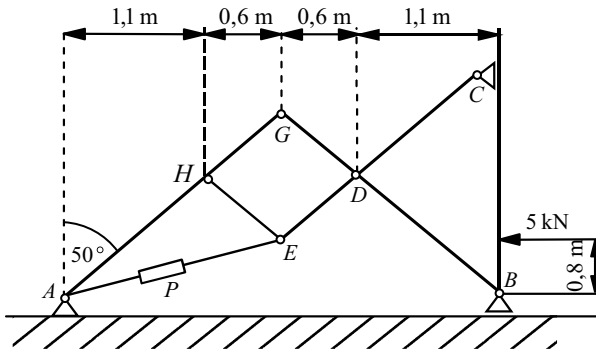


Bild 1.37 Hebebühne

Lösung

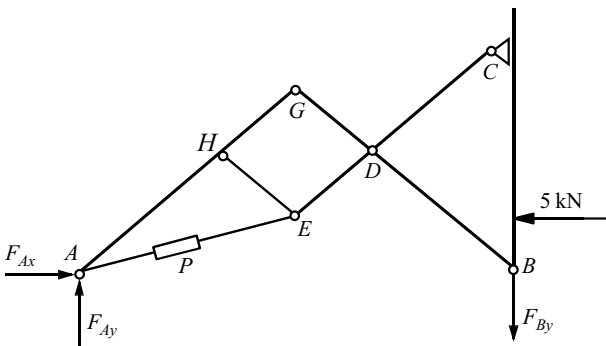


Bild 1.38 Freischnitt der Lager

Bevor die einzelnen Stäbe freigeschnitten werden, ist es ratsam, in einem ersten Schritt die Auflager in den Punkten A und B zu behandeln, d.h. das Stabsystem als Ganzes anzusehen und sich von unbekannten Kraftgrößen so weit wie möglich zu befreien. Der Freischnitt der Lager erfolgt wie üblich (links ein zweiwertiges, rechts ein einwertiges Lager). Die Pfeilrichtung wurde willkürlich gewählt. Ihre Richtigkeit

erweist die nachstehende Rechnung. Als Gleichgewichtsbedingungen notieren wir nämlich:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0: \quad F_{By} = 5 \text{ kN} \cdot \frac{0,8}{3,4} = 1,18 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} = F_{By}$$

Mithin sind die Auflagerreaktionen keine Unbekannten mehr.

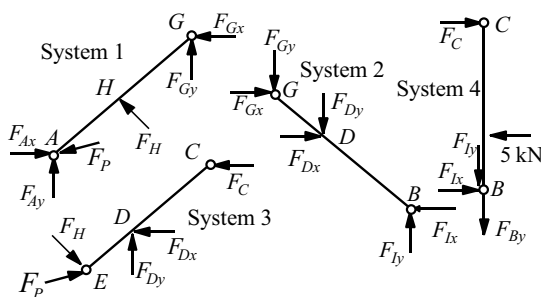


Bild 1.39 Freischnitt der Untersysteme

Bild 1.39 zeigt den Freischnitt in vier Untersysteme. Zu beachten ist folgendes. Die Hydraulikkraft F_P zeigt in Richtung der Stabachse AE . Die Kräfte zwischen H und E zeigen in Achsrichtung des zugehörigen Pendelstabes. Bei C liegt ein einwertiges Lager vor, die Freischnittkraft ist horizontal zu legen. Für die Gelenke sind zwei unabhängige Schnittkräfte anzusetzen. Die anderen Stäbe sind als Balken belastet, und daher gibt es an ihren Enden zwei voneinander unabhängige Schnittkräfte, deren Resultierende nicht in Stabachsrichtung weist. Insbesondere ist im Punkt B zu beachten, dass vom unteren Ende des Systems 2 kommend zwei unabhängige Kräfte F_{Ix} und F_{Iy} eingeleitet werden. Es gilt das „actio = reactio“-Prinzip, d. h. zu jedem Ende gibt es ein Gegenende mit Kraftpfeilen, die in entgegengesetzter Richtung zu diejenigen am anderen Ende zeigen. Wir zählen als nächstes alle Unbekannten. Es gibt folgende Verbindungskräfte:

$$F_H, F_{Gx}, F_{Gy}, F_{Dx}, F_{Dy}, F_C, F_{Ix}, F_{Iy}, F_P$$

und die drei bereits bekannten Lagerkräfte:

$$F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By}$$

Für jedes der oben gezeigten Untersysteme lassen sich drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen. Mithin handelt es sich um ein statisch bestimmtes System, denn in der zur Überprüfung dieses Tatbestandes nützlichen Formel:

$$3 \cdot n = r + v \quad (1.18)$$

dürfen wir notieren, dass gilt:

$$n = 4 \text{ (Anzahl der Untersysteme),}$$

$$r = 4 \text{ (Anzahl der Lagerreaktionen),}$$

$$v = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (Anzahl der Reaktionen an Verbindungen),}$$

und man muss feststellen, dass Formel 1.18 erfüllt ist.

Bei der konkreten Berechnung aller verbliebenen Unbekannten empfiehlt sich folgende Vorgehensweise: Man beginne mit Untersystem 4, wo drei unbekannte Kräfte vorliegen, nämlich F_C , F_{Ix} , F_{Iy} und notiere die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ix} = \dots$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_C = \dots$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \Rightarrow F_{Iy} = \dots$$

Als nächstes betrachten wir nun Untersystem 3 mit den 4 Unbekannten F_p , F_H , F_{Dx} , F_{Dy} . Mit der Bedingung $\sum M^{(D)} = 0$ folgt eine erste Gleichung für F_s , F_H . Danach wählen wir Scheibe 1 mit den 4 Unbekannten F_p , F_H , F_{Gx} , F_{Gy} und erhalten mit der Bedingung $\sum M^{(G)} = 0$ die zweite Gleichung für F_p , F_H . Wenn wir nun wieder Scheibe 3 mit den zwei Unbekannten F_{Dx} , F_{Dy} betrachten, so dürfen wir schreiben:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

woraus sich $F_{Dx} = \dots$ und $F_{Dy} = \dots$ ermitteln lassen.

Abschließend betrachten wir wieder Scheibe 1 mit den beiden Unbekannten F_{Gx} , F_{Gy} und verwenden die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

woraus sich $F_{Gx} = \dots$ und $F_{Gy} = \dots$ ermitteln lassen.

1.3.5 Dreidimensionales Stabwerk

Problemstellung

Das unten dargestellte dreidimensionale Stabwerk, bestehend aus den Stäben A, B und C, wird durch die Kräfte F_1 (in x-Richtung), F_2 (in y-Richtung) und F_3 (in z-Richtung) belastet. Gesucht sind die in den Stäben wirkenden Kräfte.

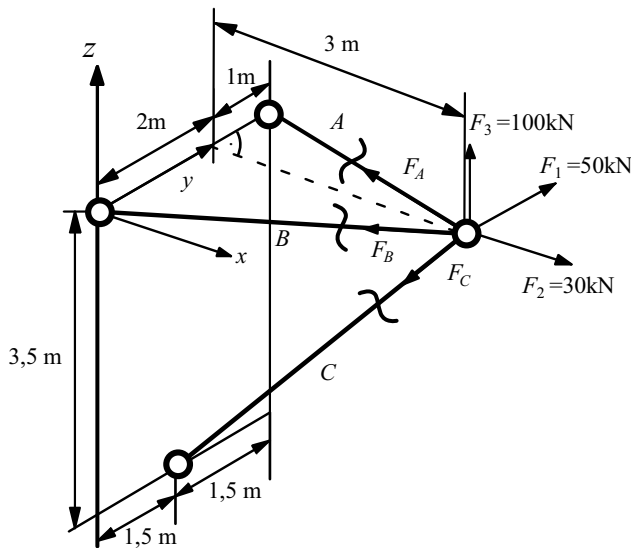


Bild 1.40 Dreidimensionales Stabwerk unter Last

Lösung

In einem ersten Schritt wird der oben dargestellte Knoten freigeschnitten. Es resultieren die drei unbekannten Stabkräfte F_A , F_B und F_C , die als Zugkräfte angenommen werden (Pfeilrichtung weg vom Knoten). Zur Berechnung der drei unbekannten Schnittkräfte sind drei Formeln notwendig. Dieses sind die drei Kräftegleichgewichtsbedingungen der Statik. Die Momentengleichungen spielen keine Rolle, denn offenbar wirkt bei dem vorgegebenen System eine zentrale Kräftegruppe. Also:

$$\sum F_x = 0 \quad (1.19)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (1.20)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (1.21)$$

Das dreidimensionale kartesische Koordinatensystem wählen wir so, wie in Bild 1.41 dargestellt. Mit seiner Hilfe (*Pythagoras*) ermittelt man auch die Stablängen wie folgt:

$$l_A = \sqrt{1^2 + 3^2} \text{ m} = 3,16 \text{ m}$$

$$l_B = \sqrt{2^2 + 3^2} \text{ m} = 3,61 \text{ m}$$

$$l_C = \sqrt{3^2 + 3,5^2 + 0,5^2} \text{ m} = 4,64 \text{ m}$$

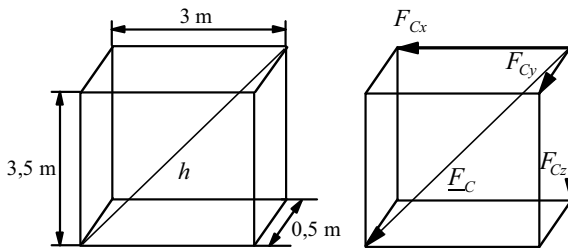


Bild 1.41 Zur Geometrie des Orts- und Krafraums

Die Situation ist übrigens analog zum zweidimensionalen Stabwerk, wo galt (siehe Bild 1.42):

$$\cos(\alpha) = \frac{F_{Ax}}{F_A}$$

mit

$$\cos(\alpha) = \frac{l_{Ax}}{l_A}$$

d. h.

$$F_{Ax} = \frac{l_{Ax}}{l_A} F_A$$

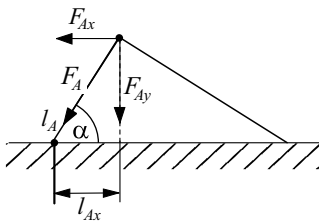


Bild 1.42

Zweidimensionales Stabwerk

Entsprechend ist hier:

$$\frac{F_{Cx}}{F_C} = \frac{3,0 \text{ m}}{l_C}$$

$$\frac{F_{Cy}}{F_C} = \frac{(2,0 - 1,5) \text{ m}}{l_C}$$

$$\frac{F_{Cz}}{F_C} = \frac{3,5 \text{ m}}{l_C}$$

$$\Rightarrow F_{Cx} = \frac{3}{4,64} F_C = 0,647 F_C$$

$$\Rightarrow F_{Cy} = \frac{0,5}{4,64} F_C = 0,108 F_C$$

$$\Rightarrow F_{Cz} = \frac{3,5}{4,64} F_C = 0,754 F_C$$

$$\frac{F_{Bx}}{F_B} = \frac{3,0 \text{ m}}{l_B}$$

$$\frac{F_{By}}{F_B} = \frac{2,0 \text{ m}}{l_B}$$

$$\frac{F_{Bz}}{F_B} = \frac{0,0 \text{ m}}{l_B}$$

$$\Rightarrow F_{Bx} = \frac{3}{3,61} F_B = 0,831 F_B$$

$$\Rightarrow F_{By} = \frac{2}{3,61} F_B = 0,554 F_B$$

$$\Rightarrow F_{Bz} = 0$$

$$\frac{F_{Ax}}{F_A} = \frac{3,0 \text{ m}}{l_A}$$

$$\frac{F_{Ay}}{F_A} = \frac{1,0 \text{ m}}{l_A}$$

$$\frac{F_{Az}}{F_A} = \frac{0,0 \text{ m}}{l_A}$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = \frac{3}{3,16} F_A = 0,949 F_A$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = \frac{1}{3,16} F_A = 0,316 F_A$$

$$\Rightarrow F_{Az} = 0$$

Aus Formel 1.19, Formel 1.20 und Formel 1.21 folgt nachstehendes Gleichungssystem:

$$-F_{Ax} - F_{Bx} - F_{Cx} + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -0,949 F_A - 0,831 F_B - 0,647 F_C + 30 \text{ kN} = 0$$

$$F_{Ay} - F_{By} - F_{Cy} + F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,316 F_A - 0,554 F_B - 0,108 F_C + 50 \text{ kN} = 0$$

$$0 + 0 - F_{Cz} + F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -0,754 F_C + 100 \text{ kN} = 0$$

Die letzte Gleichung ergibt sofort:

$$F_C = +\frac{100}{0,754} \text{ kN} = 132,63 \text{ kN}$$

was in die beiden anderen Formeln eingesetzt ergibt:

$$-0,949 F_A - 0,831 F_B = 55,81 \text{ kN}$$

$$0,316 F_A - 0,554 F_B = -35,68 \text{ kN}$$

Und hieraus ergibt sich:

$$F_A = -76,83 \text{ kN}$$

$$F_B = 20,58 \text{ kN}$$

1.3.6 Kräfte- und Momentengleichgewicht am Hebel

Problemstellung

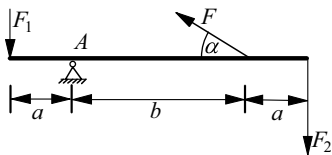


Bild 1.43
Hebel unter Last

Für den unter Wirkung äußerer Kräfte stehenden Hebel ist die Größe der Kraft F so zu bestimmen, dass Momentengleichgewicht herrscht. Danach sollen in einem zweiten Schritt die Lagerkräfte/-reaktionen ermittelt werden. Gegeben sind: $F_1 = 1 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$, $a = 0,25 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$.