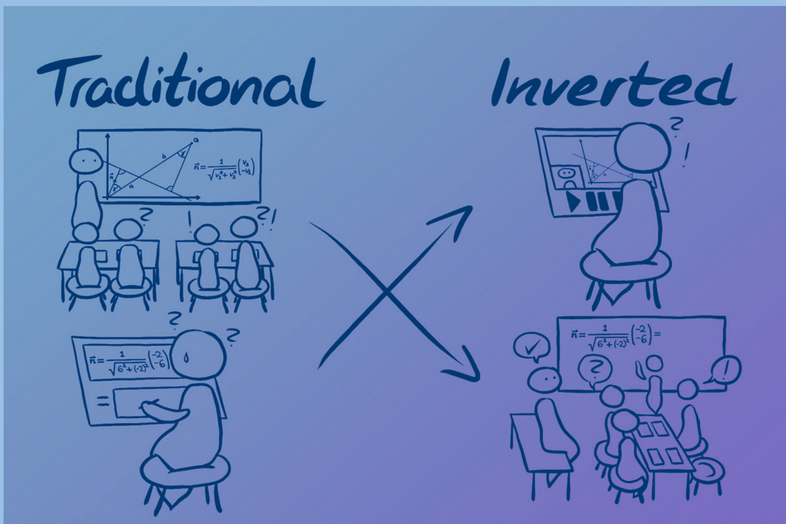
Paul Wolf · Sophie Kersting ·
Stefan Friedenberg · Fíona Mahlberg

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ingenieurmathematik

Ein Lehrbuch für Online- und Präsenzlehre mit der Inverted-Classroom-Methode im ersten Semester



$$\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle := \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

HANSER

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Wolf/Kersting/Friedenberg/Mahlberg

Ingenieurmathematik

Weiterführend gibt es das Lehrbuch für das zweite Semester:

Wolf/Kersting/Friedenberg, *Ingenieurmathematik*. *Ein Lehrbuch für Online- und Präsenzlehre mit der Inverted-Classroom-Methode im zweiten Semester,* 2021

Paul Wolf
Sophie Kersting
Stefan Friedenberg
Fíona Mahlberg

Ingenieurmathematik

Ein Lehrbuch für Online- und Präsenzlehre mit der
Inverted-Classroom-Methode im ersten Semester

HANSER

Die Autoren:

Dr. Paul Wolf, Hochschule Stralsund, Dozent für Mathematik und Statistik, Hochschuldidaktiker, freiberuflicher Statistik-Berater (wolf-statistik.de)

Sophie J. Kersting, Universität Greifswald, Mathematikerin

Prof. Dr. Stefan Friedenberg, Hochschule Stralsund, Professor für Mathematik

Fíona Mahlberg, HAW Hamburg, Ingenieurin für Erneuerbare Energien

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
www.fsc.org

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelmotiv: © Sophie Kersting
Satz: Dr. Paul Wolf
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47616-5
E-Book-ISBN 978-3-446-47726-1

Vorwort

Hinweise für Lehrende

Bereits vor der Corona-Pandemie hatte die Inverted-Classroom-Methode an Beliebtheit gewonnen und ist nun mit besonderem Fokus auf die Online-Lehre ein wichtiges Hilfsmittel im Didaktik-Werkzeugkasten geworden. Die Idee lässt sich wie folgt kurz zusammenfassen: Die Vorlesung in Form von reiner Wissensdarstellung wird über Videos und weitere Materialien in das Selbststudium verschoben, während die Aufarbeitung bzw. Besprechung und Vertiefung der einzelnen Themen aktiv und gemeinsam mit den Studierenden im sogenannten Plenum geschieht. Obgleich die Idee einfach ist, stellt jedoch die konkrete Umsetzung – insbesondere hinsichtlich des zeitlichen Vorbereitungsaufwandes für Lehrende – eine deutliche Hürde dar. Wir haben festgestellt, dass es zwar viele Erläuterungen und theoretische Betrachtungen der ICM gibt, jedoch verhältnismäßig wenig direkt nutzbare Materialien und konkrete Tipps für die Mathematik der Ingenieurstudiengänge.

Im Jahr 2021 haben wir unser erstes Buch zur Ingenieurmathematik mit der Inverted-Classroom-Methode veröffentlicht ([Wolf21a], ISBN 978-3-446-47133-7), welches den Fokus auf das zweite Semester gelegt hat. Weiterhin wurden dort auch die Inverted-Classroom-Methode (ICM) als solche vorgestellt sowie einige Tipps zur technischen Umsetzung gegeben. In diesem Buch, das als Ergänzung des ersten gesehen werden darf, wird es in erster Linie um klassische Inhalte des ersten Semesters gehen (z. B. Mengenbegriff, komplexe Zahlen und Differentialrechnung in $\mathbb{R}$).

Dieses Buch und die zugehörigen Materialien richten sich gleichermaßen an Lehrende wie Studierende. Mithilfe dieses Gesamtpaketes an Lehrmaterialien wird die genannte Hürde gesenkt und der Einstieg in die Inverted-Classroom-Methode erleichtert. Wir empfehlen Lehrenden, die die ICM zum ersten Mal ausprobieren wollen, mit Studierenden des zweiten Semesters zu starten, da diese bereits das Lernen an Hochschulen gewohnt sind und eventuell schon in anderen Fächern Erfahrungen mit ICM gesammelt haben. Auch aus diesem Grund haben wir unser erstes Buch dem zweiten Semester gewidmet und ergänzen die Materialien nun um die Inhalte für das erste Semester. Je nach Studienordnung kann es natürlich notwendig sein, Inhalte der beiden Bücher zu tauschen oder zu ergänzen.

Es sei betont, dass die ICM sehr individuell angepasst und ausgeführt werden kann bzw. soll. Sowohl die Umsetzung von ICM als auch die Wahl der Inhalte und deren Vorstellung hängen stets von den Erfahrungen und Vorlieben der einzelnen Dozentinnen und Dozenten ab.

Wir liefern mit diesem Buch umfangreiche Materialien für die Mathematikveranstaltung der Ingenieurstudiengänge im ersten Semester. Ein Unterschied zu vielen Lehrbüchern besteht darin, dass das Buch wie eine Vorlesungsreihe aufgebaut ist. Der Start einer Vorlesung wird markiert (z. B. „Vorlesung 3“, ggf. auch mit Hinweisen auf Begleitmaterialien, wie z. B. Einleitungspräsentationen) und bei einigen Vorlesungen findet sich zu Beginn eine kurze Anregung für eine Wiederholung der wichtigsten Inhalte der vorausgegangenen Vorlesung. Die Längen der Vorlesungseinheiten orientieren sich an klassischen 90-Minuten Tafel-Vorlesungen, daher startet bzw. endet eine Vorlesung realistischerweise nicht unbedingt auch am Anfang eines Buch-Kapitels. Von großer Nützlichkeit für die Plenumsveranstaltungen, welche in der ICM die klassische Vorlesung ersetzen, sind die zahlreichen Verständnisaufgaben und Quizze, die an passenden Stellen zu finden sind. Die Lösungen sind, wie alle weiteren zusätzlichen Materialien, im Online-Bereich[1] zu diesem Buch einsehbar. Nach ungefähr jeder zweiten Vorlesung werden Präsenzaufgaben gestellt, die während einer Plenumsveranstaltung (ob online oder tatsächlich im Hörsaal bzw. Seminarraum) bearbeitet und anschließend besprochen werden sollten. Die Zeitangaben sind lediglich Richtwerte und beziehen sich auf die Bearbeitungszeit von Studierenden. Als Erfahrungswerte können sie natürlich je nach Studiengang und Kohorte unterschiedlich ausfallen. Wir empfehlen, die Studierenden aufzufordern, dass sie möglichst zu jedem im Skript vorgestellten Beispiel noch ein eigenes entwickeln sollen, das dann gemeinsam besprochen bzw. gelöst werden kann. Insgesamt sind dann die Plenumsveranstaltungen didaktisch sinnvoll vorbereitet. Die zusätzlich bereitgestellten (wöchentlichen) Hausaufgaben und deren Lösungen runden schließlich das Paket an Übungsaufgaben ab und können entweder tatsächlich als bewertete Hausaufgaben (Vorschläge für Punktvergabe stehen an jeder Aufgabe) oder als weitere Übungsmaterialien, wie z. B. für Tutorien, eingesetzt werden.

Neben Lösungen zu den Verständnisfragen sowie den Präsenz- und Hausaufgaben finden sich weitere Materialien im Online-Bereich zu diesem Buch. Dazu gehören die entsprechenden GeoGebra-Dateien[2], Einleitungsfolien, eine Probeklausur und Tabellen. Zudem bietet der Erstautor Videos an, die er für seine Vorlesung (Mathematik für E-Technik) erstellt hat. Die Videos sind dabei bewusst technisch so einfach gehalten, dass eine Nachahmung problemlos möglich ist. Die Lösungen zu den Hausaufgaben sind ausschließlich für Lehrende gedacht und befinden sich daher im Hanser Dozenten-Bereich[3]. Einzelne Grafiken im Buch wurden mit [R] unter Nutzung des Paketes [ggplot2] erzeugt. Auf Nachfrage kann der entsprechende Code zur Verfügung gestellt werden.

1 *https://plus.hanser-fachbuch.de/*

2 Die Dateien wurden mit GeoGebra Classic V5 erstellt. GeoGebra ist kostenfrei sowie leicht zu bedienen und daher auch bereits zum Studienstart im ersten Semester direkt einsetzbar: *https://www.geogebra.org/*

3 *https://dozentenportal.hanser.de/*

Neben kurzen, motivierenden Einleitungsfolien mit Anmerkungen zu Anwendungsbezügen finden sich an zahlreichen Stellen im Buch – insbesondere innerhalb der Verständnisaufgaben – konkrete Anwendungen der E-Technik und des Maschinenbaus. Mitunter werden evaluierte Anwendungsaufgaben aus [Wolf16] ganz oder teilweise eingebracht. Aus umfangreichen Studien (wie z. B. [Wolf21a]) ist bekannt, dass Anwendungsaufgaben insbesondere für Studierende interessant sind, die ihr Studium aufgrund von Fachinteresse aufgenommen haben. Aber auch für diese Studierenden kann es eine doppelte Hürde darstellen, wenn neue Inhalte mit eventuell noch unbekanntem oder gerade erst gelernten Fachbezügen vermischt werden. Aus diesen Gründen, und weil die Materialien für die mathematische Ingenieursausbildung allgemein genutzt werden sollen, sind die Anwendungsaufgaben bewusst einfach gehalten und enthalten alle notwendigen Formeln (wie z. B. $U = RI$), sodass zwar der Bezug zu den Ingenieurwissenschaften klar wird, jedoch der Fokus auf den mathematischen Inhalten bleibt. Grundsätzlich sei (mit Verweis auf [Wolf17]) betont, dass die curriculare und insbesondere zeitliche Abstimmung der Mathematik- und der Fachveranstaltungen essenziell ist, wenn die Relevanz der gelehrten Inhalte sowie die Verzahnung der Fächer deutlich gemacht werden soll. Aus diesem Grund werden manchmal Inhalte in diesem Buch bereits früher angesprochen, bevor sie mit angebrachter Ausführlichkeit hergeleitet werden können. So wird das Lösen von kleinen linearen Gleichungssystemen und die Berechnung von einfachen Determinanten schon früh im ersten Semester in der Statik benötigt, könnte aber ohne einen Vorgriff nicht rechtzeitig in der Mathematikveranstaltung behandelt werden. Hier weicht das Buch an manchen Stellen von einem „typischen“ Aufbau ganz bewusst ab. Eine Optimierung an die Studienordnungen aller Hochschulen kann natürlich nicht geleistet werden. Wie wohl es in jeder Mathematikveranstaltung des ersten Semesters immer schwer ist, das Vorwissen der Studierenden richtig einzuschätzen und mit einer teils großen Heterogenität der Vorkenntnisse umzugehen. In diesem Buch versuchen wir, eine Balance dazwischen zu finden, welche Konzepte (zumindest kurz) erklärt werden sollten und welche als Schulinhalte vorausgesetzt werden müssen. Dies kann natürlich auch von Dozentinnen und Dozenten an die jeweiligen Studierenden angepasst werden.

Uns ist bewusst, dass nicht alle Dozentinnen und Dozenten Beweise in den Mathematikveranstaltungen für Ingenieurstudierende behandeln. Wir selbst halten diese für wichtige Elemente der mathematischen Ausbildung, die das abstrakte Denkvermögen schulen sowie neue Ideen und Herangehensweisen vermitteln sollen. Für uns ist die Mathematik auch für sich als eigene Disziplin innerhalb einer Service-Veranstaltung vermittelbar, ohne die Studierenden zu überfordern. Daher finden sich in diesem Buch an einigen Stellen auch Beweise, wobei wir auf zu technische Herleitungen weitestgehend verzichtet haben. Bei Bedarf können die Beweise übersprungen oder entsprechend ersetzt werden.

Wir nutzen die im englischsprachigen Raum sowie in der Programmierung üblichen Dezimaltrennzeichen, d. h. 1,25 wird als 1.25 notiert. Auf Tausendertrennzeichen können wir in diesem Buch verzichten, sodass keine Verwechslungsgefahr besteht.

Die Materialien wurden nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, können aber natürlich dennoch kleinere Fehler enthalten.
Über Hinweise freuen wir uns!

Studien- und Lerntipps für Studierende

Dieses Buch und dessen Begleitmaterialien[4] eignen sich auch zum Selbststudium. Sie entfalten ihren vollen Nutzen jedoch am besten im Rahmen einer entsprechenden Veranstaltung.

Der Übergang von der Schule oder dem Arbeitsleben an die Hochschule kann mitunter schwerfallen. Daher möchten wir im Folgenden einige grundlegende Tipps zum Lernen von Mathematik an Hochschulen geben, da insbesondere in den ersten Semestern von den Studienanfängerinnen und Studienanfängern große Hürden zu nehmen sind. Dies betrifft tatsächlich nicht nur Studierende, deren Mathematikkenntnisse Lücken aufweisen, sondern auch diejenigen, denen das Lernen an der Schule besonders leicht gefallen ist. Bitte lassen Sie sich nicht davon täuschen, wenn die Inhalte zu Beginn des Studiums noch vermeintlich einfach erscheinen. Es kommt häufig schnell der Punkt, an dem dies schlagartig wechselt und wenn man diesen verpasst, so wird es schwer, wieder aufzuholen. Die Themen der Mathematik bauen bekanntlich teils stark aufeinander auf.

Speziell im Inverted-Classroom-Setting ist es wichtig, dass Sie die Videos und sonstigen Materialien rechtzeitig vor der nächsten Vorlesung (Plenumstreffen) gesehen haben. Hier genügt es nicht, die Videos nebenbei beim Kochen, in doppelter Geschwindigkeit oder gar parallel zu anderen Videos laufen zu lassen. Dies ist in etwa so zielführend, wie sich das Skript unter das Kopfkissen zu legen. Wenn Sie nach dem Schauen des Videos keine Fragen notiert haben und sich nicht mit den Verständnisfragen aktiv beschäftigt haben, dann können Sie davon ausgehen, dass Ihre Vorbereitung nicht ausreicht, um etwas aus dem folgenden Plenumstreffen mitzunehmen. Das war dann leider völlige Zeitverschwendung. Also nutzen Sie Ihre Zeit effektiv: Entfernen Sie alles, was Sie ablenkt (Smartphone am besten abschalten oder in einen anderen Raum legen!) und legen Sie einen Zeitraum fest, der ausschließlich zum Lernen gedacht ist. Eine bekannte Zeitmanagement-Methode, die Sie im Internet finden können, ist die Pomodoro-Technik. Dies wird nicht nur Ihr Studium effizienter und angenehmer gestalten, sondern Ihnen auch mehr Freizeit schenken, die Sie sonst entweder durch unnötige Zeitverschwendung verlieren würden oder aufgrund schlechten Gewissens nicht genießen könnten.

Wir möchten auf etwas hinweisen, was den wenigsten Studierenden (und mitunter auch Lehrenden) bekannt sein dürfte. Studierende sind von der Schule eine gänzlich andere Art des Lesens gewohnt, als es bei Expertinnen und Experten der Fall ist, wie in Eye-Tracking-Studien festgestellt wurde (vgl. [Panse16], [Wolf20]). In der Schule wurde häufig das lineare Lesen trainiert und man soll (z. B. im Englischunterricht) einzelne unbekannte Wörter aus dem Kontext heraus verstehen. Dieses Verhalten ist gänzlich ungeeignet für wissenschaftliche und insbesondere mathematiklastige Texte. Expertinnen und Experten springen ständig mit ihrem Blick im Text zwischen Formeln und bereits Gelesenem hin und her, um so die neuen Inhalte mit dem bekannten Wissen zu verknüpfen.

4 *https://plus.hanser-fachbuch.de/*

Diese Umstellung benötigt Zeit und Übung, daher möchten wir Sie hier dafür sensibilisieren. Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel:

„Eine natürliche Zahl n ist gerade genau dann, wenn $\exists\, k \in \mathbb{N}:\ \ n = 2k$."

Wenn Sie innerhalb eines Kapitels diesen Satz lesen, wie einen Abschnitt aus einer Tageszeitung, so werden Sie wenig bis gar nichts aufnehmen (außer, Sie haben den Inhalt, um den es geht, bereits früher schon kennengelernt). In mathematischen und wissenschaftlichen Texten werden viele abstrakte Informationen sehr präzise und stark komprimiert gegeben. Es werden zudem ggf. Ihnen noch unbekannte Symbole verwendet, deren Bedeutung sich nicht aus dem Kontext erschließen lässt. Wenn Sie in diesem Beispiel nicht wissen, was die Symbole $\exists$, $\in$ und $\mathbb{N}$ bedeuten, so haben Sie kaum eine Chance, den Inhalt zu begreifen. Mathematik ist die Sprache der Naturwissenschaften und beim Erlernen von einer Sprache gehört es dazu, die Symbole und die Grammatik zu verinnerlichen, sonst kann man kaum etwas verstehen und erst recht nicht sich selbst ausdrücken. In diesem Sinne ist es also wichtig, dass Sie sich selbst beim Lesen bremsen. Wir unterstützen Sie in diesem Buch darin, indem wir die Texte ständig durch kleine Verständnisfragen unterbrechen und Sie auffordern, das gerade Besprochene entweder an Beispielen anzuwenden oder sich gezielt weitere Gedanken dazu zu machen. Abseits dessen empfehlen wir grundsätzlich, dass Sie jedes Beispiel nach dem Lesen einmal zudecken und versuchen, es selbst zu rechnen. Sie werden feststellen, dass dieses Vorgehen Ihr Verständnis und Ihre Rechenfähigkeiten ungemein stärken wird und dass Sie ganz nebenbei sich damit wunderbar auf Hausaufgaben und letztlich die Klausur vorbereiten. Mathematik macht dann Freude und ist motivierend, wenn man die Inhalte versteht, sie anwenden kann und den eigenen Kompetenzzuwachs bemerkt.

Studierende fragen sich häufig, warum die Definitionen und Aussagen der Mathematik so „merkwürdig" aufgeschrieben daherkommen. Dies liegt an der hohen Präzision, die notwendig ist, wenn man exakt arbeiten will. Betrachten wir dazu ein Beispiel. Angenommen, wir wollen eindeutig definieren, was ein Rechteck ist. Man könnte sagen, dass ein Rechteck aus vier Punkten besteht, die mit Linien verbunden sind. Jetzt könnten aber diese vier Punkte auch auf einer Gerade liegen, was dann eben kein Rechteck ergeben würde. Nun korrigieren wir die Definition und fordern, dass nur jeweils zwei Punkte auf einer Gerade liegen dürfen. Jetzt könnten wir aber die Punkte wieder so unglücklich miteinander verbinden, dass alles Mögliche außer einem Rechteck dabei heraus kommt. In einem nächsten Schritt könnten wir z. B. die Winkel zwischen den Geraden einschränken, um diese unzureichende Definition zu verbessern. Das mag jetzt vielleicht etwas künstlich wirken, aber umso komplizierter die Inhalte werden, desto notwendiger ist es, absolut präzise und eindeutig zu definieren. Diese Präzision ist einer der entscheidenden Vorteile der Mathematik als Sprache der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Übrigens ist dieser Prozess, den wir am Rechteck simuliert haben, ein völlig natürlicher in der Geschichte gewesen. Selten war eine Definition vom ersten Tage an perfekt und auch bei heutiger Forschung gibt es ständig Anpassungen. Grundsätzlich ist eine Definition auch nicht „wahr" oder „falsch", sondern im besten Fall nützlich und im schlechtesten Fall unpräzise bzw. uneindeutig. Letztlich müssen Definitionen gewissermaßen auswendig gelernt werden, da es auf jedes Detail ankommt. Allerdings sorgen der häufige Umgang und die Rechenübungen dafür, dass das Auswendiglernen meist nebenher geschieht. Mit ein wenig mehr Erfahrung in der Hochschulmathematik kann man auch Muster in den Definitionen erkennen, sodass man sie sich zumindest in Grundzügen wieder herleiten kann, wenn man zuvor Verständnis für den Sinn und Zweck der jeweiligen Definition erlangen konnte. Wir empfehlen dennoch, sich eine Art Vokabelliste von Symbolen, Definitionen und Sätzen anzufertigen.

Den Umgang mit Definitionen erlernen Sie am besten, wenn Sie diese auf Beispiele anwenden und sich Nicht-Beispiele überlegen. Bleiben wir bei den geraden Zahlen: Warum ist laut Definition beispielsweise die natürliche Zahl $n = 14$ gerade? Das liegt daran, weil wir eine natürliche Zahl $k = 7$ angeben können, sodass tatsächlich $n = 2k$, also $14 = 2 \cdot 7$ gilt. Ein Nicht-Beispiel wäre nun die Zahl $n = 3$, zu der wir eben keine *natürliche* Zahl k finden können, sodass $3 = 2k$ ist (denn $k = \frac{3}{2}$ würde zwar die Gleichung erfüllen, ist jedoch keine natürliche Zahl). Durch das Ausdenken eigener Beispiele und Nicht-Beispiele werden Sie Ihr Verständnis deutlich verbessern, da Sie nun aktiv mit den Inhalten arbeiten, anstatt sie lediglich passiv an sich vorbeifliegen zu lassen. Wie Sie eventuell gerade bemerkt haben, müssen Sie die Symbole und Fachbegriffe kennen, um überhaupt Beispiele entwickeln zu können. Sie entdecken dabei also ganz selbstständig Ihre eigenen Wissens- und Verständnislücken und können diese mit Hilfe von Büchern, Internet, Kommilitoninnen und Kommilitonen sowie Lehrenden schließen.

Nach Definitionen folgen in der Mathematik üblicherweise mathematische Sätze (Theoreme), die Eigenschaften der zuvor definierten Objekte untersuchen. So könnten wir beispielsweise feststellen, dass das Produkt zweier gerader Zahlen wieder gerade ist. Häufig bieten wir dazu auch einen Beweis an, der zeigt, weshalb die Behauptung tatsächlich stimmt. Zum Erlernen empfehlen wir, auch hier wieder eigene Beispiele zum Theorem zu überlegen. So ist $4 \cdot 6 = 24$ ein Beispiel zu der Aussage, dass „gerade mal gerade" wieder eine gerade Zahl ergibt. Den Beweis sollten Sie nachvollziehen, denn er liefert die Gründe, warum Aussagen gelten und schärft unser Verständnis für die Zusammenhänge. Solch tiefes Verständnis versetzt Sie in die Lage, bekanntes Wissen auf neue Inhalte anzuwenden und neue Ideen zu entwickeln, was ja letztlich die Aufgabe von Ingenieurinnen und Ingenieuren ist.

Es gibt je nach Schulbildung große Lücken zwischen dem Vorwissen und dem im Studium verlangten Grundwissen (Bruchrechnung und der Umgang mit Gleichungen sind hier nur zwei Beispiele). Daher raten wir Ihnen, eventuell angebotene Vorkurse und Brückenkurse zu nutzen, Tutorien und Vorlesungen zu besuchen und die (Haus-)Aufgaben zunächst selbstständig zu lösen und erst dann ggf. in einer Lerngruppe zu besprechen. Wir bemerken leider häufiger, dass es in Lerngruppen eine Person gibt, die bereits viel verstanden hat, die Aufgaben schnell löst und die anderen dann mehr oder weniger mitzieht. Achten Sie in Lerngruppen daher darauf, dass man sich tatsächlich nur unterstützt und nicht die Arbeit und damit das Verständnis den anderen vorenthält.

Wir nutzen die im englischsprachigen Raum sowie in der Programmierung üblichen Dezimaltrennzeichen, d. h. 1,25 wird als 1.25 notiert. Auf Tausendertrennzeichen können wir in diesem Buch verzichten, sodass keine Verwechslungsgefahr besteht.

Die Materialien wurden nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, können aber natürlich dennoch kleinere Fehler enthalten. Über Hinweise freuen wir uns.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg im Studium!

Paul Wolf, Sophie Kersting, Stefan Friedenberg & Fíona Mahlberg Im Januar 2023

Literatur

[Panse16] Panse, A. & Paravicini, W. (2016). Leseverhalten und Rationalität von Studienanfängerinnen und -anfängern. *BzM 2016*, WTM-Verlag, Münster, 735–742

[R] R Core Team (2022). R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing*. Vienna, Austria. *https://www.R-project.org/*.

[ggplot2] Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York.

[Wolf16] Wolf, P. & Biehler, R. (2016). Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium, *khdm-Report*, Nr. 04-16. Universitätsbibliothek Kassel, Kassel.

[Wolf17] Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge – Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr*. Springer Spektrum, Wiesbaden.

[Wolf20] Wolf, P., Sydow, S., Pieper, J. & Friedenberg, S. (2020). Der Blick fürs Wesentliche – Eye-Tracking-Studie zu Lesestrategien von Rechnernetz-Grafiken. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung* (Occasional Papers), 86–108

[Wolf21a] Wolf, P. (2021). Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung anwendungsorientierter Mathematikaufgaben für Ingenieurstudienanfänger im ersten Studienjahr. In R. Biehler, A. Eichler, R. Hochmuth, S. Rach, & N. Schaper (Eds.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik: praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsbasiert*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

[Wolf21b] Wolf, P., Kersting, S. & Friedenberg, S. (2021). *Ingenieurmathematik – Ein Lehrbuch für Online- und Präsenzlehre mit der Inverted-Classroom-Methode im zweiten Semester*. Hanser Verlag, München.

Inhalt

1 Einige fundamentale Grundlagen

Vorlesung 1 + Folien (Organisatorisches)

Die Mathematik ist die Sprache der Natur- und Ingenieurwissenschaften, denn technische und physikalische Phänomene lassen sich nur mit ihr effizient und universal verständlich beschreiben bzw. modellieren. So können Wellen und Schwingungen sowie der Zerfallsprozess einer radioaktiven Substanz oder die Gesetze des Elektromagnetismus mittels mathematischer Gleichungen beschrieben werden. Diese Beispiele machen es deutlich, dass die Mathematik unverzichtbar ist für Ingenieurinnen und Ingenieure. Ohne die notwendigen Mathematikkenntnisse würde es Ihnen kaum möglich sein, den Fachvorlesungen Ihres Studiengangs, wie z. B. Technische Mechanik oder Regelungstechnik, zu folgen und Inhalte nachhaltig verstehen zu können. Selbst, wenn Computer einen Großteil der mathematischen Arbeit für Sie später erledigen werden, so benötigen Sie dennoch ein solides mathematisches Hintergrundwissen, um Ergebnisse verifizieren sowie Fehler identifizieren und beheben zu können.

Wir behandeln in diesem Kapitel in aller Kürze die wichtigsten Grundlagen, die Sie im weiteren Verlauf des Semesters benötigen. Viele der Inhalte wurden üblicherweise bereits in der Schule und/oder im Mathematik-Vorkurs ausführlich geübt, weshalb dieses Kapitel an manchen Stellen recht knapp gehalten ist.

1.1 Zahlbereiche, Rechengesetze, binomische Formeln

Die Zahlenräume bzw. **Zahlbereiche** haben sich im Laufe der Menschheitsgeschichte entwickelt. So werden negative Zahlen benötigt, um Schulden darstellen zu können, und Brüche ermöglichen den Umgang mit Anteilen. Bereits in der Antike war ausgehend von geometrischen Betrachtungen (Dreieck, Kreis) bekannt, dass es Zahlen gibt, die sich nicht durch einen Bruch darstellen lassen, wie z. B. die Kreiszahl π oder die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen $a = b = 1$ (was zu $c = \sqrt{2}$ führt). Als Symbole nutzen wir heute:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ für die **natürlichen** Zahlen, bzw. inkl. der Null: $\mathbb{N}_0 = \{\mathbf{0}, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ für die **ganzen** Zahlen. Es ist $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N}_0$.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$ für die **rationalen** Zahlen (Brüche).
- $\mathbb{I}$ für die nicht als Bruch darstellbaren, also **irrationalen**, Zahlen $\left(\sqrt{2}, \pi, e, \ldots\right)$
- $\mathbb{R}$ für die **reellen** Zahlen, welche lediglich alle vorhergehenden vereinen.

Einige Beispiele finden sich in Bild 1.1. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, welche u. a. das Wurzelziehen aus negativen Zahlen möglich machen, erweitern den Raum der reellen Zahlen. Dies thematisieren wir in einem späteren Kapitel ausführlich.

Mit dem Symbol $\in$ können wir mitteilen, in welchem Zahlenraum sich ein Objekt befindet bzw. aus welcher Menge es stammen soll. Fordern wir beispielsweise, dass $x \in \mathbb{N}$ („x sei Element der natürlichen Zahlen“), so darf x nur eine natürliche Zahl sein, wie z. B. die Anzahl an Studierenden in einer Veranstaltung. Mit $\notin$ kann das Gegenteil ausgedrückt werden, so gilt beispielsweise $\pi \notin \mathbb{N}$ („Pi ist kein Element der natürlichen Zahlen“).

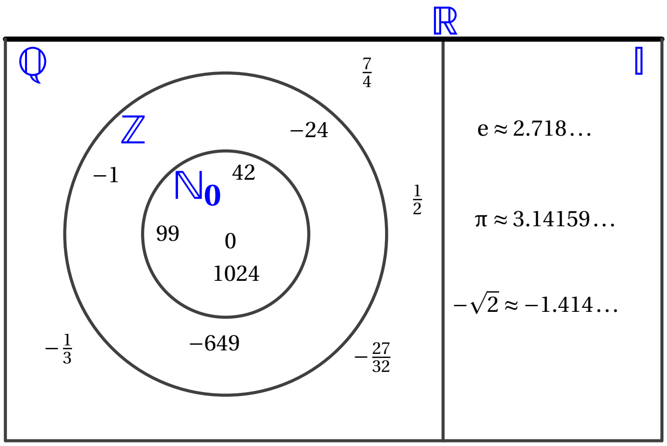


Bild 1.1 Visualisierung der Zahlbereiche $\mathbb{N}_0$ bis $\mathbb{R}$

Verständnisfrage 1
Wählen Sie zwei natürliche Zahlen a, b so, dass alle folgenden Forderungen gleichzeitig erfüllt werden:

- $a - b \in \mathbb{Z}$, aber gleichzeitig $\notin \mathbb{N}_0$
- $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, aber gleichzeitig $\notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{a \cdot b} \in \mathbb{I}$

1.1.1 Grundlegende Rechengesetze

Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$, so gelten die bekannten Gesetze:

- **Assoziativgesetz:** $(a + b) + c = a + (b + c)$, analog mit $\cdot$ statt $+$

- **Kommutativgesetz:** $a + b = b + a$, analog mit $\cdot$ statt $+$
- **Distributivgesetz:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Das Wort „analog“ wird in der Mathematik gerne als Synonym für „genauso“ oder „auf ähnliche Weise“ verwendet. Im Falle des Kommutativgesetzes soll es hier ausdrücken, dass das Gesetz genauso auch für die Multiplikation gilt (also $a \cdot b = b \cdot a$).

Die Gesetze können natürlich auch bei komplexeren Ausdrücken genutzt werden. So kennen Sie aus der Schule das Ausmultiplizieren von zwei Klammern („Jedes mit jedem“):

$$(x + y)(b + c) = (x + y)b + (x + y)c = xb + yb + xc + yc$$

Hier wurde das Distributivgesetz also zweimal nacheinander angewendet.

Auch an die **Vorzeichenregeln** bei der Multiplikation wollen wir uns erinnern (vgl. Tab. 1.1). Diese ist so zu verstehen, dass beispielsweise das Produkt zweier negativer Zahlen wieder positiv ist: $(-3) \cdot (-4) = 12$.

·	+	−
+	+	−
−	−	+

Tabelle 1.1 Vorzeichentabelle zur Multiplikation in $\mathbb{R}$

Beispiel:
Beim Distributivgesetz unterscheidet man üblicherweise zwischen ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}(x - 3y)(-x - 2z) &= (x - 3y) \cdot (-x) + (x - 3y) \cdot (-2z) \\ &= -x^2 + 3xy - 2xz + 6yz\end{aligned}$$

und ausklammern

$$3x^2 - 6xy + 5(x - 2y) = 3x(x - 2y) + 5(x - 2y) = (x - 2y)(3x + 5)$$ ▲

Es ist allgemein üblich, auf das Produktzeichen zu verzichten ($a \cdot b = ab$). Wir werden es daher nur verwenden, wenn wir die Multiplikation hervorheben oder eventuelle Missverständnisse vermeiden wollen.

Verständnisfrage 2
In einem Skript zu Grundlagen der Elektrotechnik (Thema Spannungsteiler) findet man folgende Termumformung (Teilspannung U, Strom I, Widerstände R_1, R_2):

$$\left(I + \frac{U}{R_2}\right)R_1 + U = U\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) + IR_1$$

Überführen Sie die linke in die rechte Seite und geben Sie bei jeder Umformung an, welches der Gesetze (Assoz., Komm., Distr.) Sie verwendet haben.

1.1.2 Binomische Formeln

Aus der Schule sind die drei **binomischen Formeln** bekannt. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Diese lassen sich direkt aus den vorher besprochenen Rechenregeln herleiten. Die zweite Formel weisen wir wie folgt nach:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) \overset{\text{Distr.}}{=} a^2 - ab - ba + b^2 \overset{\text{Komm.}}{=} a^2 - 2ab + b^2$$

Verständnisfrage 3
Überprüfen Sie auf gleiche Weise die beiden übrigen binomischen Formeln.

Häufig verwendet man die Formeln zur Vereinfachung von Ausdrücken:

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

Man kann die binomischen Formeln auch dann gewinnbringend nutzen, wenn der b^2-Anteil nicht passt. Dazu addiert man zunächst das, was man bräuchte, um die Formel anwenden zu können und korrigiert durch Subtraktion so nach, dass schließlich kein Fehler gemacht wird. In der Mathematik nennt man dieses Vorgehen „eine geschickte Null addieren“, was ein sehr beliebter Trick in vielen unterschiedlichen Situationen ist:

$$x^2 + 8x + 15 = x^2 + 8x + \overbrace{(16-16)}^{=0} + 15 = (x^2 + 8x + 16) - 16 + 15 = (x+4)^2 - 1$$

Verständnisfrage 4
Nutzen Sie den gerade beschriebenen Trick und wenden Sie die zweite binomische Formel auf $x^2 - 6x + 4$ an. Tipp: Was müsste statt der 4 dort stehen, damit die Formel sofort angewendet werden könnte?

Sollten Sie über die Übungs- bzw. Hausaufgaben hinaus, die in dieser Veranstaltung angeboten werden, noch weiteren Bedarf an Aufgaben haben, so finden Sie zu allen Themen viele Übungen mit Lösungen im Internet. Geben Sie z. B. „binomische Formeln Aufgaben mit Lösungen“ in die Suchmaschine Ihrer Wahl ein.

1.2 Grundlagen der Mengenlehre und der Logik

Für unsere Betrachtungen genügt es, wenn wir eine **Menge** als eine Zusammenfassung von einzelnen unterscheidbaren Elementen ansehen. Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor im Jahre 1895 zurück. Er führt bei Spezialfällen zu Widersprüchen[1], allerdings sind diese für das Studium der Ingenieurwissenschaften nicht von Bedeutung. Daher soll uns die naive Beschreibung genügen.

Die Menge *Korb* enthalte einen Apfel, eine Birne und einen Chicorée:

Korb = {Apfel, Birne, Chicorée}

Korb ist also eine endliche Menge mit **Mächtigkeit** (Kardinalität) 3, da drei (unterschiedliche) Elemente enthalten sind, kurz: $card(\text{Korb}) = 3$ oder $|\text{Korb}| = 3$. Wir können also beispielsweise Apfel $\in$ Korb („Apfel" ist Element der Menge „Korb") oder Kartoffel $\notin$ Korb („Kartoffel" ist kein Element der Menge „Korb") schreiben. Wir einigen uns darauf, dass wir identische Elemente stets nur einmal nennen (also nicht $\{2,2,5,5,5,7\}$, sondern nur $\{2,5,7\}$). Falls eine Ordnung existiert, geben wir die Elemente auch möglichst aufsteigend sortiert an. Die **leere Menge** $\emptyset$ (oder { }) enthält keine Elemente und ist die einzige Menge mit Mächtigkeit 0.
Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, Mengen zu notieren: die aufzählende und die beschreibende Darstellung. In der **aufzählenden Darstellung** werden die Elemente alle hintereinander aufgeschrieben. Hierbei ist zu beachten, dass die Reihenfolge zwar an sich keine Rolle spielt, allerdings ist es üblich, eine eventuell existierende Ordnung zu nutzen (z. B. aufsteigend sortiert). Weiterhin sollten keine Elemente doppelt aufgezählt werden.

Beispiel:

$$\{3, -9, 3, 3, 1, 1\} = \{3, -9, 1\} = \{1, 3, -9\} = \{-9, 1, 3\}$$

Hier würde man die aufsteigend sortierte Darstellung (rechts) präferieren. ▲

Oft ist es nicht sinnvoll oder gar möglich, alle Elemente konkret aufzuschreiben (z. B. bei unendlichen Mengen), dann verwendet man die **beschreibende Darstellung**. In Bild 1.2 wird der Aufbau zusammengefasst.

$$\{\ \underbrace{x \in \mathbb{N}}_{\text{Was betrachte ich?}}\ |\ \underbrace{x \geq 3}_{\text{Welche Eigenschaften sollen erfüllt sein?}}\ \}$$

Bild 1.2 Aufbau einer Menge in beschreibender Darstellung

[1] Die moderne Mengenlehre ist im Gegensatz zur naiven Mengenlehre immun gegen solche Spezialfälle wie z. B. die Russelsche Antinomie („Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten").

Beispiel:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$$

Dies liest man wie folgt: „(Dies ist) die Menge aller x aus den natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $x \geq 3$“. Kurz gesagt besteht die Menge also einfach aus den natürlichen Zahlen, die größer oder gleich 3 sind (kurz $\mathbb{N}_{\geq 3}$). Statt des senkrechten Strichs verwenden manche auch einen Doppelpunkt, die Bedeutung bleibt aber identisch. ▲

Insbesondere in Lehrveranstaltungen ist es nicht unüblich, dass man durch eine „Pünktchenschreibweise“ von der beschreibenden zu einer symbolisch aufzählenden Schreibweise übergeht, um die Struktur verständlicher zu machen.

Beispiel:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$$ ▲

Die **Logik** (logos: das Wort) ist die seit der Antike bekannte Lehre vom richtigen Denken und Schlussfolgern. Zwischen der Mengenlehre und der Aussagenlogik besteht eine starke Verbindung, die wir uns nun bewusst machen wollen, da wir dadurch in die Lage versetzt werden, Probleme aus zwei Blickrichtungen zu sehen und lösen zu können. Eine **Aussage** ist für uns ein Satz bzw. Ausdruck, dem man einen Wahrheitswert (wahr oder falsch) zuordnen kann. Damit es sich um eine Aussage im Sinne der Logik handelt, ist es unerheblich, ob der Wahrheitswert tatsächlich bekannt ist oder nicht.

Beispiele:

- „Aliens essen gerne Katzen“ *kann* wahr bzw. falsch sein, also ist dies eine Aussage.
- „Auf dem Mond regnet es“ ist ebenfalls eine Aussage.
- „Herzlichen Glückwunsch!“ ist keine Aussage, da man keinen Wahrheitswert zuordnen kann (analog: „Bis bald!“ oder „Lauf weg!“).
- $2x^2 + 3y - z$ ist keine Aussage, sondern nur ein Term.
- $\pi \in \mathbb{N}$ und $x = 5$ sind Aussagen (erste falsch, zweite kontextabhängig). ▲

Verständnisfrage 5
An der Ampel schreit jemand „Grün!“. Ist dies eine Aussage?
Der Vater sagt „Räum dein Zimmer auf!“. Ist das eine Aussage?
„Dieser Satz ist falsch!“. Ist das eine Aussage?
Warum ist $x = 5$ eine Aussage, aber $x - 5$ nicht?

Im Alltag und in der Wissenschaft werden ständig Aussagen verbunden. Wir wollen uns die wichtigsten Verknüpfungen nun näher ansehen und zeigen gleichzeitig die Verbindungen zur Mengenlehre auf.

1.2.1 Logische Verknüpfungen und ihre mengentheoretischen Pendants

Konjunktion und Schnitt

Die Konjunktion ist die **Und-Verknüpfung** von zwei Aussagen: $A \wedge B$.
Sind A = „Ich schwimme gerne" und B = „Ich bin Student", so ergibt also

$A \wedge B$ = „Ich schwimme gerne *und* ich bin Student."

Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide Einzelaussagen wahr sind.

In der Mengenlehre wird die Und-Verknüpfung zum sogenannten **Schnitt**:

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

Lies: „M geschnitten N ist die Menge aller x mit der Eigenschaft, dass es Element von M und Element von N ist."
Mit Blick zur Aussagenlogik sind hier $x \in M$ und $x \in N$ die beiden Aussagen, die miteinander verknüpft werden. Das Ergebnis der Konjunktion ist dann die Aussage $x \in M \cap N$.
In unserem Alltagsbeispiel könnten wir also M als die Menge aller Personen festlegen, die gerne schwimmen, und N als die Menge aller Studierenden. Im Schnitt sind somit nur Studierende, die gerne schwimmen (also in M *und* N enthalten sind).

Ein **Venn-Diagramm** kann helfen, die Situation zu visualisieren. Ein Kreis steht hierbei jeweils für eine Menge. In Bild 1.3 wird die Schnittmenge hervorgehoben. Diese Diagramme sind besonders bei komplizierteren Verknüpfungen sehr praktisch.

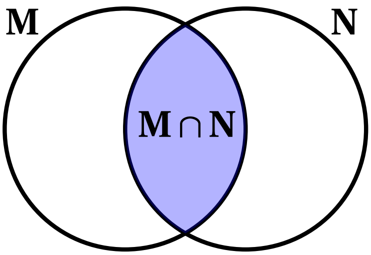


Bild 1.3 Venn-Diagramm zum Schnitt von zwei Mengen

Beispiel:
Sind $M = \{-5, 3, 7, 9\}$ und $N = \{-2, 0, 3, 9\}$, so ist $M \cap N = \{3, 9\}$. Der Schnitt enthält also genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind. Er kann natürlich auch leer oder von unendlicher Mächtigkeit sein. ▲

Verständnisfrage 6
Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Schnitt von zwei Mengen eine der beiden Mengen ist, also z. B. $M \cap N = N$. Skizzieren Sie auch ein passendes Venn-Diagramm zur Situation. Überlegen Sie sich zudem zwei Aussagen (möglichst Alltagsbeispiele), deren Konjunktion entsprechend eine der beiden Aussagen ergibt.

Disjunktion und Vereinigung

Die Disjunktion ist die **Oder-Verknüpfung** von zwei Aussagen: $A \vee B$.
In unserem Beispiel von oben ergibt sich somit

$A \vee B =$ „Ich schwimme gerne *oder* ich bin Student."

Die Disjunktion ist wahr, wenn mindestens eine Aussage wahr ist. Man verwechsle sie nicht mit einer Entweder-Oder-Aussage, die in der Alltagssprache nicht immer von einer Oder-Aussage klar unterschieden wird.

In der Mengenlehre ist das Pendant zur Disjunktion die sogenannte **Vereinigung**:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$

Lies: „M vereinigt mit N ist die Menge aller x mit der Eigenschaft, dass x ein Element von M oder ein Element von N ist."

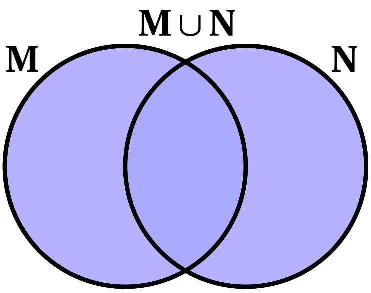


Bild 1.4 Venn-Diagramm zur Vereinigung von zwei Mengen

Beispiel:
Wie bereits erwähnt, zählen wir keine Elemente doppelt auf, daher ist:

$$\{-5, 3, 7, 9\} \cup \{-2, 0, 3, 9\} = \{-5, -2, 0, 3, 7, 9\}$$

Die Vereinigung von zwei Mengen enthält also sämtliche Elemente beider Mengen. ▲

Verständnisfrage 7
Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Vereinigung von zwei Mengen eine der beiden Mengen ist, also z. B. $M \cup N = M$. Skizzieren Sie auch ein passendes Venn-Diagramm zur Situation. Überlegen Sie sich zudem zwei Aussagen (möglichst Alltagsbeispiele), deren Disjunktion entsprechend eine der beiden Aussagen ergibt.

Negation, Komplement und Differenz

Die **Negation** überführt die Aussage ins Gegenteil: $\neg A$ (lies: „Non/nicht A").
Die Negation von $A =$„Ich schwimme gerne" ist $\neg A =$„Es gilt nicht, dass ich gerne schwimme" oder kurz „Ich schwimme nicht gerne".
Die negierte Aussage ist genau dann wahr, wenn die ursprüngliche Aussage falsch ist. Je

nach Kontext kann es einfacher sein, eine Aussage zu validieren oder die negierte Aussage zu widerlegen (später mehr dazu).

In der Sprache der Mengenlehre schreiben wir $\overline{M}$ (lies: „M quer“) für das **Komplement**. Damit ist alles außer M gemeint (bezüglich der Obermenge / dem Universum, aus der M stammt, vgl. Bild 1.5.).

$$\overline{M} = \{x \mid \neg(x \in M)\} = \{x \mid x \notin M\}$$

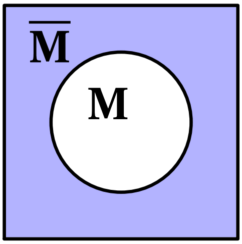


Bild 1.5 Venn-Diagramm zum Komplement einer Menge

Beispiel:
Um das Komplement einer Menge angeben zu können, muss man wissen, was ihre Obermenge ist. Mit Bezug auf unsere Obermenge Korb = {Apfel, Birne, Chicorée} wäre das Komplement der Menge {Apfel, Chicorée} die einelementige Menge {Birne}. ▲

Sehen wir $\{-5,3,7,9\}$ als einen Ausschnitt aus den ganzen Zahlen an, so wären alle ganzen Zahlen *außer* $\{-5,3,7,9\}$ ihr Komplement. Wir erkennen daran, dass es praktisch wäre, die **Differenz** von Mengen bilden zu können: $M \setminus N$ (lies: „M ohne N“), vgl. Bild 1.6.

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$$

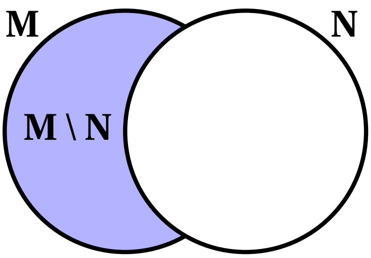


Bild 1.6 Venn-Diagramm zur Differenz von zwei Mengen

Beispiele:
$\{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,3,5\} = \{2,4\}$.
$\{3,4\} \setminus \{1,3,9\} = \{4\}$.
$\{3,4\} \setminus \{1,3,4,9\} = \emptyset$.
Und mit Bezug auf unser letztes Beispiel zum Komplement: $\overline{\{-5,3,7,9\}} = \mathbb{Z} \setminus \{-5,3,7,9\}$. ▲

Verständnisfrage 8
Wie kann man ein ausschließendes Oder (Entweder-Oder) mit den gegebenen Symbolen in Logikschreibweise und in Mengenschreibweise ausdrücken?
Wie kann man es als Venn-Diagramm an zwei Mengen visualisieren?

Quiz – Vorlesung 1
1. Womit lässt sich folgende Aussage darstellen? „Ich bin 20 Jahre alt, lebe in Deutschland und in meiner Band spiele ich Gitarre oder singe.“

- ☐ $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
- ☐ $(A \vee B) \wedge C \vee D$
- ☐ $A \wedge B \wedge (C \vee D)$
- ☐ $A \vee B \wedge C \wedge D$

2. Welche Menge ist identisch mit $((\{-2, 0, 4, 6\} \cap \mathbb{N}) \cup \{0, 0.5, 1\}) \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$?

- ☐ $\{1, 4, 6\}$
- ☐ $\{0, 1, 4, 6\}$
- ☐ $\{0.5, 4, 6\}$
- ☐ $\emptyset$

Vorlesung 2

Wiederholung
- Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$
- Rechengesetze, binomische Formeln
- Mengenlehre und Logik (Konjunktion, Disjunktion, Negation)

Implikation und Teilmenge

Im Alltag und in allen Wissenschaften werden ständig Aussagen aus anderen Aussagen gefolgert. Eine Implikation ist eine **Wenn-Dann-Aussage**: $A \Rightarrow B$ (lies: „Wenn A, dann B“). Die linke Seite (A) nennt man **Prämisse**, aus der die **Konklusion** (B) gefolgert wird.

Beispiele:
Die Implikation „Wenn mir kalt ist, dann ziehe ich einen Pulli an“ besteht aus den Einzelaussagen A = „Mir ist kalt“ und B = „Ich ziehe einen Pulli an“.

Auch die Aussage „Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar“ kann als Implikation formuliert werden: „Wenn eine Zahl gerade ist, so ist sie durch 2 teilbar.“ Diese Umformulierung ist sehr nützlich, wenn man die Aussage beweisen oder in komplexeren Zusammenhängen nutzen will. ▲

Das mengentheoretische Pendant zur Implikation ist die Teilmengenbeziehung. N ist **Teilmenge** einer Obermenge M, wenn alle Elemente aus N auch in M liegen und man schreibt $N \subseteq M$. Es liegt eine echte Teilmenge vor ($\subset$ oder $\subsetneq$), wenn die Gleichheit der Mengen ausgeschlossen wird. Oft wird kein besonderer Wert darauf gelegt, ob Gleichheit erlaubt ist oder nicht, dann schreibt man schlicht $N \subseteq M$. Statt von einer Teilmengenbeziehung, kann man auch von einer Inklusion sprechen. Eine Visualisierung findet sich in Bild 1.7.

Beispiel:

$$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$$ ▲

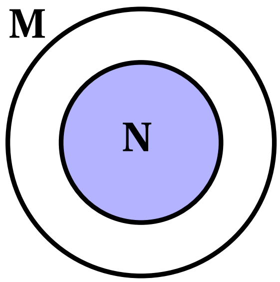


Bild 1.7 Venn-Diagramm zu Teilmengen ($N \subset M$)

Was hat nun die Implikation mit Teilmengen zu tun? Eine Implikation $A \Rightarrow B$ gilt genau dann, wenn für alle möglichen Objekte, die die Eigenschaft A erfüllen (also in der entsprechenden Menge, z. B. N, liegen), auch gilt, dass sie Eigenschaft B erfüllen (d. h. in der entsprechenden Menge, z. B. M, liegen).

Beispiel:
Die Implikation „Wenn ein Mensch Durst hat, dann will er etwas trinken", kann als Teilmengenbeziehung auch so geschrieben werden:

$$\{x \in \text{Menschen} \mid x \text{ hat Durst}\} \subseteq \{x \in \text{Menschen} \mid x \text{ will etwas trinken}\}$$

Hier wird deutlich, dass eine Implikation nicht ohne Weiteres in die andere Richtung gelesen werden darf. Wie u. a. von Studierendenpartys bekannt, trinkt nicht jeder Mensch zwingend nur aus Durst. ▲

Während man bei Mengen mit überschaubarer Mächtigkeit leicht mit bloßem Augen erkennen kann, ob es sich um Teilmengen handelt, sind insbesondere bei unendlich großen Mengen logische Schlüsse nötig. Hierbei nimmt man ein allgemeines Element aus der einen Menge und weist (ggf. durch mathematische Operationen und logische Argumente) nach, dass es in der vermeintlichen Obermenge liegt.

Verständnisfrage 9
Anschaulich ist klar: Wenn ich einer Menge angehöre (z. B. Menge der Deutschen), welche Teilmenge einer Menge ist (z. B. Europäer), welche wiederum einer Obermenge (z. B. aller Menschen) angehört, so gehöre ich auch der Obermenge an. Weisen die sogenannte Transitivität der Mengeninklusion nach:
Wenn $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$, so ist $A \subseteq C$.
Füllen Sie aus: Es sei $a \in A$. Da $A \subseteq B$ muss auch ___. Weil weiterhin ___ $\subseteq$ ___, folgt ___. Warum ist die Behauptung nun bewiesen?

Äquivalenz und Mengengleichheit

Eine **Äquivalenz** liegt vor, wenn Implikationen in beide Richtungen gleichzeitig gelten: $A \Leftrightarrow B$ (lies: „A genau dann, wenn B" bzw. „A dann und nur dann, wenn B").
$A \Leftrightarrow B$ ist somit gleichbedeutend mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Beispiele:
Äquivalenzen sind besonders mächtiges Wissen, denn sie erlauben es uns, sämtliche Erkenntnisse über die eine Seite auf die andere zu übertragen. Ein einfaches Beispiel hierfür sind Celsius und Fahrenheit: Die Flüssigkeit hat eine Temperatur von $x°C$, genau dann, wenn sie eine Temperatur von $(1.8x + 32)°F$ hat. Jegliches Wissen über Celsius lässt sich somit direkt auf Fahrenheit übertragen und umgekehrt.

Betrachten wir dagegen reine Implikationen, so sind diese zwar auch mitunter sehr nützlich, aber eben nicht so mächtig wie Äquivalenzen:
Wenn das Fassungsvermögen des Behälters ein Liter ist, dann passt ein Liter hinein ($A \Rightarrow B$, wahr). Umkehrung: Wenn ein Liter hinein passt, dann ist das Fassungsvermögen ein Liter – *Falsch!* Der Behälter könnte doch auch weit mehr als ein Liter Fassungsvermögen haben. Es liegt also keine Äquivalenz vor und unser Wissen bleibt zunächst darauf beschränkt, dass *ein* Liter hinein passt, aber wir wissen auf diesem Wege nicht, wie viele Liter genau.

Wir betrachten noch zwei klassische Mathematik-Beispiele:
$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ (Somit ist dies auch tatsächlich die einzige Lösung!)

Aus der Schule wissen wir, dass zwar $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$, aber, da auch $(-4)^2 = 16$ ist, gilt die Rückrichtung nicht. Wir erhalten erst unter Beachtung beider Lösungen eine Äquivalenz: $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$. ▲

Leider unterscheiden manche Menschen im Alltag oder auch in öffentlichen Debatten nicht immer sauber zwischen Implikationen und Äquivalenzen. Hierzu ein Alltagsbeispiel:
„Vor mündlichen Prüfungen schlafe ich immer schlecht."
„Dann ist es ja gut, dass du morgen eine schriftliche Klausur hast."
Achten Sie doch einmal darauf, ob Ihnen dergleichen in Gesprächen auffällt.

Verständnisfrage 10
Schreiben Sie den folgenden Text in Logikschreibweise:
„Wenn ich mich nicht beeile, dann verpasse ich den Bus und es regnet immer genau dann, wenn ich mich beeile."
Verwenden Sie bitte: A = „Ich beeile mich", B = „Ich verpasse den Bus" und C = „Es regnet".

Wie bereits gezeigt, ist eine Implikation gleichbedeutend mit dem Teilmengenbegriff. Da die Äquivalenz die gleichzeitige Implikation in beide Richtung ist, ist das mengentheoretische Pendant also die Gleichheit. Denn zwei Mengen können nur dann gegenseitig Teilmenge sein, wenn sie identisch sind (vgl. Bild 1.8).

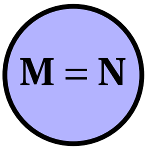


Bild 1.8 Venn-Diagramm zur Gleichheit zweiter Mengen

1.2.2 Definitionszeichen

Häufig werden in der Mathematik (und Mathematik-nahen Wissenschaften) neue Begriffe eingeführt. Um über ein Symbol eine **Definition** von einer Gleichheit abzugrenzen, wird das Gleichheitszeichen durch Doppelpunkte ergänzt. Während also $x = 5$ bedeutet, dass man z. B. durch eine Rechnung herausgefunden hat, dass das gesuchte x dem Wert 5 entspricht, würde beispielsweise $A := \{1,2,3\}$ meinen, dass man mit A im Folgenden die Menge $\{1,2,3\}$ meint.

Beispiel:
$A := \{1,2,3\}$, lies: „A ist definiert als die Menge (mit den Elementen) $1,2,3$." ▲

Häufig wird auf das Definitionszeichen verzichtet und lediglich das Gleichheitszeichen genutzt, wenn die Bedeutung leicht aus dem Kontext geschlossen werden kann. Im Folgenden verwenden wir das Definitionszeichen hauptsächlich dann, wenn wir besonders hervorheben wollen, dass an einer Stelle etwas explizit definiert wird.

Eine Definitionen ist per se weder wahr noch falsch, sondern nur eine Benennung. Sie kann (und sollte) jedoch mit Bezug zu einem gewissen Kontext sinnvoll und hilfreich sein.
Üblicherweise verlangt man bei der Entwicklung von mathematischen Objekten, dass sie **wohldefiniert** sind. Hiermit ist gemeint, dass die Definition eindeutig ist. So wäre beispielsweise durch „Eine Banane ist eine gelbe Frucht" die Banane nicht wohldefiniert, denn auch die Zitrone ist eine gelbe Frucht.